

УДК 517.911:531.262

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.1>

Віктор ГРИНЧЕНКО, Акад. НАН України, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,

ORCID: 0000-0003-3229-1810

e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,

ORCID: 0000-0002-0136-6659

e-mail: mnivtt@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ І ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ. ЯК ЦЕ РОЗУМІТИ

Анотація. У теорії рівнянь математичної фізики теореми існування та єдиності розв'язків граничних задач відіграють фундаментальну роль. Проте у практичних застосуваннях ці теореми часто інтерпретуються формально, без належного усвідомлення змісту поняття «єдиність розв'язку». Це породжує методологічні труднощі при побудові аналітичних та чисельних розв'язків задач теорії потенціалу та інших задач математичної фізики. Тому важливим є уточнення практичного змісту поняття єдиності розв'язку та аналіз можливих форм його представлення.

Метою роботи є поглиблення розуміння поняття єдиності розв'язку граничної задачі шляхом аналізу конкретного прикладу з теорії потенціалу. Основними завданнями є: побудова альтернативних аналітичних представлень розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа у прямокутній області; дослідження можливості отримання різних за формою аналітичних виразів, що описують один і той самий фізичний розв'язок; аналіз збіжності чисельних оцінок, отриманих на основі цих представлень.

У роботі використано аналітичні методи теорії рівнянь математичної фізики, зокрема метод розділення змінних, розкладання у ряди Фур'є та властивості повних систем функцій. Для аналізу збіжності різних представлень розв'язку застосовано чисельні обчислення і порівняння відносних похибок при використанні скінченних сум рядів.

Показано, що для простої граничної задачі теорії потенціалу можна отримати декілька різних аналітичних представлень розв'язку, зокрема у вигляді елементарної функції та у вигляді подвійного ряду. Продemonстровано, що введення довільної функції при продовженні граничних умов на нефізичну частину межі призводить до побудови нескінченної множини формально різних виразів для одного й того самого розв'язку. Чисельні експерименти підтверджують збіжність результатів, отриманих за різними формулами, при збільшенні кількості членів ряду.

Отримані результати показують, що єдиність розв'язку граничної задачі слід розуміти як єдиність функції у фізичній області, а не як єдиність її аналітичного представлення. Практична побудова розв'язку може приводити до різних за формою виразів, які при достатній точності обчислень дають тотожні значення шуканої функції. Такий підхід має важливе методологічне значення для інтерпретації теорем єдиності та для практики побудови аналітичних і чисельних розв'язків задач математичної фізики.

Ключові слова: гранична задача; рівняння Лапласа; задача Діріхле; єдиність розв'язку; теорія потенціалу; ряди Фур'є.

Будь-яка істота схильна сприймати середовище свого проживання як щось безумовне, що й не може бути іншим і тому не породжує жодних питань. Так відноситься і математик до своєї науки, – і тільки зрідка, коли видається привід поглянути на неї з боку, він раптом помічає, з яким дивним, по суті неправдоподібним явищем мав справу все життя.

І. Р. Шафаревич (Shafarevich, 1973)

1. Вступ

Кожен раз, коли ми звертаємося до фундаментальних *Принципів* Ньютона, згадується і його власна характеристика методики, котру він використовував при написанні книги: *«Я не вигадую жодних гіпотез»*. Судячи з усього, Ньютон вважав особливо важливим підкреслити це. *«Мені ще не вдалося з'ясувати причину цих властивостей гравітації з явищ, і я не висуваю гіпотез. Бо все, що не виводиться з явищ, слід називати гіпотезою; а гіпотези, метафізичні чи фізичні, чи засновані на окультних якостях, чи механічні, не мають місця в експериментальній філософії. У цій філософії окремі твердження виводяться з явищ, а потім узагальнюються за допомогою індукції»*.



Рис. 1. Графічне представлення основних складових наукового методу

Робота Ньютона була визначним внеском у процес формування першої наукової революції, що відбулася протягом 16–17 століть. У результаті осмислення наукових досягнень таких вчених, як Кеплер, Копернік, Галілей, Ньютон, Декарт, Гюйгенс, Лейбніц було сформовано науковий метод пізнання. Науковий метод – це емпіричний

метод отримання знань шляхом ретельного спостереження, суворого скептицизму, перевірки гіпотез та експериментальної перевірки. Однак і в наші дні основні етапи отримання нових знань (*спостереження – гіпотеза – експеримент*) залишаються незмінними. Послідовність етапів отримання нових знань у ході досліджень можна уявити у вигляді спіралі, яка складається з елементів, котрі повторюються (рис. 1).

Як бачимо, формулювання гіпотез та їх експериментальна перевірка стали невід'ємною частиною наукового методу. Декларація Ньютона просто виражала той факт, що він не мав ніяких ідей відносно природи гравітації. І ця проблема досі є актуальною. Навіть після формування загальної теорії відносності існують питання, для пояснення яких знадобилося використання таких невизначених феноменів, як темна матерія та темна енергія.

Приклад з теорією гравітації Ньютона стимулює інтерес до обговорення важливого питання в теорії пізнання – питання про співвідношення між знанням і розумінням. На цьому прикладі бачимо, що сформульований Ньютоном закон дає чітку відповідь на те, як взаємодіють дві маси, але не дає відповіді на питання – чому виникає гравітація. Теорія тяжіння Ньютона дає нам **знання законів**, але не **розуміння природи** сили тяжіння; вона пояснює *поведінку*, але не *походження*. Це надзвичайно цінний приклад для освіти, особливо математичної: студент може досконало володіти формулою – і водночас не розуміти, *що саме вона означає і де межі її сенсу*.

У даній статті обговорюємо одну з проблем у сфері математики, а саме: *розуміння поняття єдиності розв'язку граничної задачі*. Проведемо наше дослідження на основі аналізу розв'язку дуже простої конкретної задачі.

Будучи студентами, ми не раз зустрічалися з теоремою єдиності розв'язку граничної задачі. Відкриємо класичний підручник для студентів фізико-математичних та інженерних спеціальностей університету: М. О. Перестюк, В. В. Маринець «Теорія рівнянь математичної фізики» (Перестюк, Маринець, 2006). На сторінці 239 читаємо теорему 4.3 для граничної задачі рівняння Лапласа:

Теорема 4.3. *Якщо внутрішня або зовнішня задача Діріхле має розв'язок, то цей розв'язок єдиний.*

Подібні теореми формулюються і доводяться для граничних задач інших типів та інших граничних умов. Здається, все чітко і ясно в формулюванні і доведенні теореми. І все ж, коли ми починаємо практичну роботу побудови розв'язку конкретної задачі, відразу виникає питання: що значить – єдиний розв'язок – практично? Це питання стає особливо актуальним ще й тому, що в більшості випадків доведення теорем про єдиність розв'язку не є конструктивною процедурою. Ми підтверджуємо гіпотезу про єдиність розв'язку, не вказуючи алгоритму його побудови.

Щоб пояснити нашу думку зазначимо, що практична побудова розв'язку приводить до того, що самі конкретні розв'язки набувають певної форми, наприклад, нескінченних рядів. І виникає питання про те, чи існують декілька розв'язків різних по формі, які дають тотожні кількісні оцінки для шуканої функції в усіх точках області. Наш досвід дозволяє підняти і змістовно розглянути таке питання:

чи можна для граничних задач, де доведена теорема єдиності розв'язку, знайти нескінченно багато виразів для цього розв'язку?

Іншими словами: *єдиність розв'язку – це не єдиність форми розв'язку*.

Це важливо для розуміння сутності теореми єдиності з практичної точки зору нематематика. Для відповіді на поставлене питання розглянемо конкретну граничну задачу.

2. Проста задача теорії потенціалу

Отже, маємо досить просту задачу теорії потенціалу (Grinchenko, 1996), (Грінченко, 2008). Треба знайти значення гармонічної функції $\phi(x, y)$ у прямокутнику $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, показаному суцільними лініями на рис. 2.

Граничні значення шуканої функції задамо рівностями

$$\phi(\pm a, y) = 0, \quad \phi(x, \pm b) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right). \quad (1)$$

Очевидно, що шукана функція має вигляд

$$\phi(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi b}{2a}\right)}. \quad (2)$$

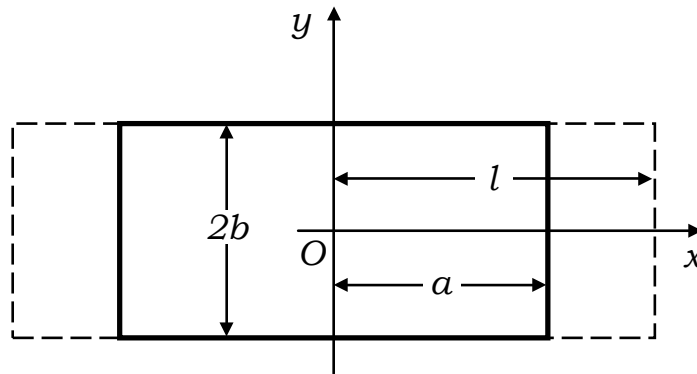


Рис. 2. Геометрія прямокутної області

Тепер розглянемо прямокутну область $-l \leq x \leq l$, $-b \leq y \leq b$, яка включає в себе заданий прямокутник. Для цієї нової області легко побудувати загальний розв'язок граничної задачі теорії потенціалу (Грінченко, 2008). Обмежуючись симетричним відносно обох осей випадком, такий розв'язок подамо у вигляді

$$\phi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(\gamma_m x) \frac{\cosh(\gamma_m y)}{\cosh(\gamma_m l)} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) \frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)}. \quad (3)$$

Тут прийняті такі позначення:

$$\gamma_m = \frac{(2m+1)\pi}{2b}, \quad \delta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}. \quad (4)$$

Наявність нескінченного набору функцій $\cos(\gamma_m y)$ і $\cos(\delta_k x)$, які володіють властивостями повноти і ортогональності на відповідних відрізках, дозволяє задовольнити будь-які граничні умови на сторонах прямокутника $-l \leq x \leq l$, $-b \leq y \leq b$. Виконання граничних умов на сторонах цього прямокутника зводиться, по суті, до знаходження коефіцієнтів Фур'є B_m і A_k .

Однак згадаємо, що початкову граничну задачу сформульовано для прямокутника, показаного суцільними лініями на рис. 2. Тому дещо модифікуємо вираз (3) і введемо в розгляд замість (3) такий вираз:

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(\gamma_m y) \frac{\cosh(\gamma_m x)}{\cosh(\gamma_m a)} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) \frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)}. \quad (5)$$

Ця функція, очевидно, задовольняє рівнянню Лапласа, але вираз (5) має сенс розглядати тільки в області $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, адже для $|x| > a$ перший ряд, без спеціального вибору коефіцієнтів B_m , буде розбіжний. Незважаючи на це, в фізично визначеній області $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ обидва ряди збіжні і вираз (5) можна трактувати як розв'язок задачі для прямокутника $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$. Основою для такого твердження є те, що вираз (5) має два ряди Фур'є і вибором значень коефіцієнтів B_m і A_k можна виконати довільні граничні умови на сторонах прямокутника $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$. І якщо це так, то ми одержимо ще один розв'язок даної граничної задачі, що суттєво відрізняється за формою від розв'язку (2).

Звісно, вираз (5), котрий дає розв'язок граничної задачі (1), виглядає суттєво складнішим її розв'язку у вигляді (2). Однак якісний аналіз цих виразів показує що між ними немає суттєвої різниці. Вираз (2) приваблює своєю простотою форми і часто трактується як точний розв'язок граничної задачі. Однак при першій же спробі одержати кількісні оцінки характеристик шуканого поля ми бачимо, що цей вираз містить набір трансцендентних чисел і функцій. Це просто значить, що кількісні оцінки поля можуть бути одержані лише з певною точністю, і в цьому сенсі між виразами (2) і (5) немає ніякої принципової різниці. Необхідність просумувати декілька членів ряду в сучасних умовах є просто тривіальним завданням.

На сторонах прямокутника $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ маємо повні системи тригонометричних функцій. Однак, система функцій $\cos(\delta_k x)$ не є ортогональною на відрізьку $-a \leq x \leq a$, на якому задано граничні умови. Та все ж, розглянемо можливість використання виразу (5) для виконання граничних умов (1). Розглянемо спочатку граничні умови на сторонах $y = \pm b$. При такому виборі значень параметрів γ_m і δ_k одержуємо функціональне рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) = \cos(\alpha_0, x), \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2a}, \quad -a \leq x \leq a. \quad (6)$$

Система тригонометричних функцій $\cos(\delta_k x)$ не є ортогональною на відрізьку $-a \leq x \leq a$, але напевно є повною. Можна вказати декілька способів зведення цього рівняння до алгебраїчного. Одним з них може бути, наприклад, мінімізація інтеграла на вказаному проміжку середньоквадратичного відхилення значення нескінченного ряду зліва від значення тригонометричної функції справа в рівнянні (6). Саме така процедура приводить до

визначення коефіцієнтів ряду Фур'є в класичному випадку, коли $\delta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2a}$. При цьому визначення невідомих коефіцієнтів приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Запропонуємо інший підхід до визначення невідомих у (6). Замінімо функціональне рівняння (6) таким:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) = \begin{cases} \cos(\alpha_0, x), & |x| \leq a, \\ \xi(x), & a < |x| \leq l. \end{cases} \quad (7)$$

Тут $\xi(x)$ – довільна інтегровна функція. Іншими словами, у виразі (7) ми продовжили граничні умови на нефізичні ділянки меж $a < |x| \leq l$ у вигляді довільної функції $\xi(x)$. Тепер, використовуючи властивості повноти і ортогональності системи функцій $\cos(\delta_k x)$ на відрізку $|x| \leq l$, коефіцієнти A_k знаходяться дуже просто:

$$A_k = \frac{2\alpha_0 \cos(\delta_k a)}{l(\alpha_0^2 - \delta_k^2)} + \xi_k, \quad (8)$$

де

$$\xi_k = \frac{2}{l} \int_a^l \xi(x) \cos(\delta_k x) dx. \quad (9)$$

Використовуючи представлення гіперболічних функцій рядами Фур'є

$$\frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)} \cos(\gamma_m y), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

знаходимо із граничних умов на сторонах $x = \pm a$ значення коефіцієнтів B_m у виразі (5):

$$B_m = - \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)} \cos(\delta_k a). \quad (11)$$

Таким чином, для сформульованої граничної задачі теорії потенціалу (1) одержано два розв'язки (2) і (5). Обидва вирази задовольняють рівняння Лапласа і граничні умови на сторонах прямокутника. Отже, згідно з властивістю єдиності розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа, ці два вирази (2) і (5) мають бути тотожно рівними для всіх точок всередині прямокутника $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.

Таке твердження виглядає дещо дивним, якщо врахувати, що вирази для коефіцієнтів рядів у (5) включають довільні величини ξ_k . Оскільки в одержаному виразі (8) ця величина є довільною, маємо зробити висновок, що такий аналіз конкретної задачі вказує на специфічний зміст поняття єдиності розв'язку розглянутої граничної задачі. Для даного випадку по суті можна побудувати нескінченну кількість конкретних виразів, які при обчисленнях будуть

приводити до тотожних значень потенціалу в кожній точці всередині прямокутника, задовольняючи при цьому задані граничні умови. Процедура одержання такого висновку дозволяє стверджувати, що така ситуація можлива для граничних задач різного виду, а не лише для рівняння Лапласа. Говорячи про єдиність розв'язку граничної задачі слід мати на увазі, що його практична побудова може приводити до виразів, що мають різні форми.

Звичайно, цікаво привести строге математичне доведення цього твердження. І в даному випадку можна навіть вказати шлях для одержання такого результату. Треба розкласти в подвійний ряд Фур'є обидва розв'язки і показати, що коефіцієнти двох рядів співпадають. Це виглядає привабливо, але не практично і вимагає досить складної аналітичної роботи.

Справа в тому, що при проведенні практичних обчислень ми обов'язково обмежуємося скінченними сумами і тому між конкретними числами для характеристик поля в різних точках фізичної області завжди буде певна скінченна різниця. Тому автори, які вже задекларували себе як нематематики (Грінченко, Маципура, 2025), пропонують інший підхід, що базується на використанні комп'ютера. Використання комп'ютера для доведення певних математичних тверджень вже має свою історію. Перш за все слід вказати на комп'ютерне доведення теореми про чотири кольори для географічних карт (McKenzie, 2001). Наскільки нам відомо, ця теорема дотепер не має класичного математичного доведення. Особливо ефективним використання комп'ютера може бути при доведенні несправедливості тверджень. Характерним прикладом цього може бути результат, що стосується проблем поділу множини цілих чисел на дві підмножини, в яких не існує піфагорових трійок. Результат, для одержання якого було проведено надзвичайно громіздкі обчислення, представлено в (Heule, Kullmann, Marek, 2016). Показано, що для множини до 7824 включно можливо декілька розв'язків. Для множини 7825 розв'язків не знайдено.

У випадку розглянутої вище задачі цікаво дослідити специфічну збіжність результатів при виборі довільних точок в області, а також з'ясувати вплив величини довільного параметра ξ_k на ефективність обчислювального процесу. Конкретні обчислення проведено для декількох наборів характерних параметрів. Основним показником близькості кількісних оцінок є величина модуля відносної похибки, вираженої у відсотках,

$$\Delta = \left| \frac{\phi(x, y) - \Phi(x, y)}{\max \phi} \right| \cdot 100\% \quad (12)$$

від кількості доданків N у скінченних сумах формули (5). Оцінки за формулою (2) вважаємо точними. Величина $\max \phi = \phi(0, b) = 1$ – максимальне значення шуканої функції на границі визначеної області.

Розрахунки поля проведені у чотирьох точках, котрі розміщені уздовж діагоналі прямокутника від точки перетину діагоналей $x = 0$, $y = 0$ до кутової точки з координатами $x = a$, $y = b$ (рис. 3). Координати точок, у яких проводилися розрахунки, вказані на рис. 3 а) – 3 г) зверху над графіками. Геометричні параметри прямокутника: $a = 1,7$, $b = 2,7$. Уздовж осі ординат використано логарифмічний масштаб. Графіки відповідають трьом варіантам задання функції $\xi(x)$, $a < |x| \leq l$, а саме:

- i. $\xi(x) = 1$ – червоні точки,
- ii. $\xi(x) = 0,5$ – сині точки,
- iii. $\xi(x) = 0$ – чорні точки.

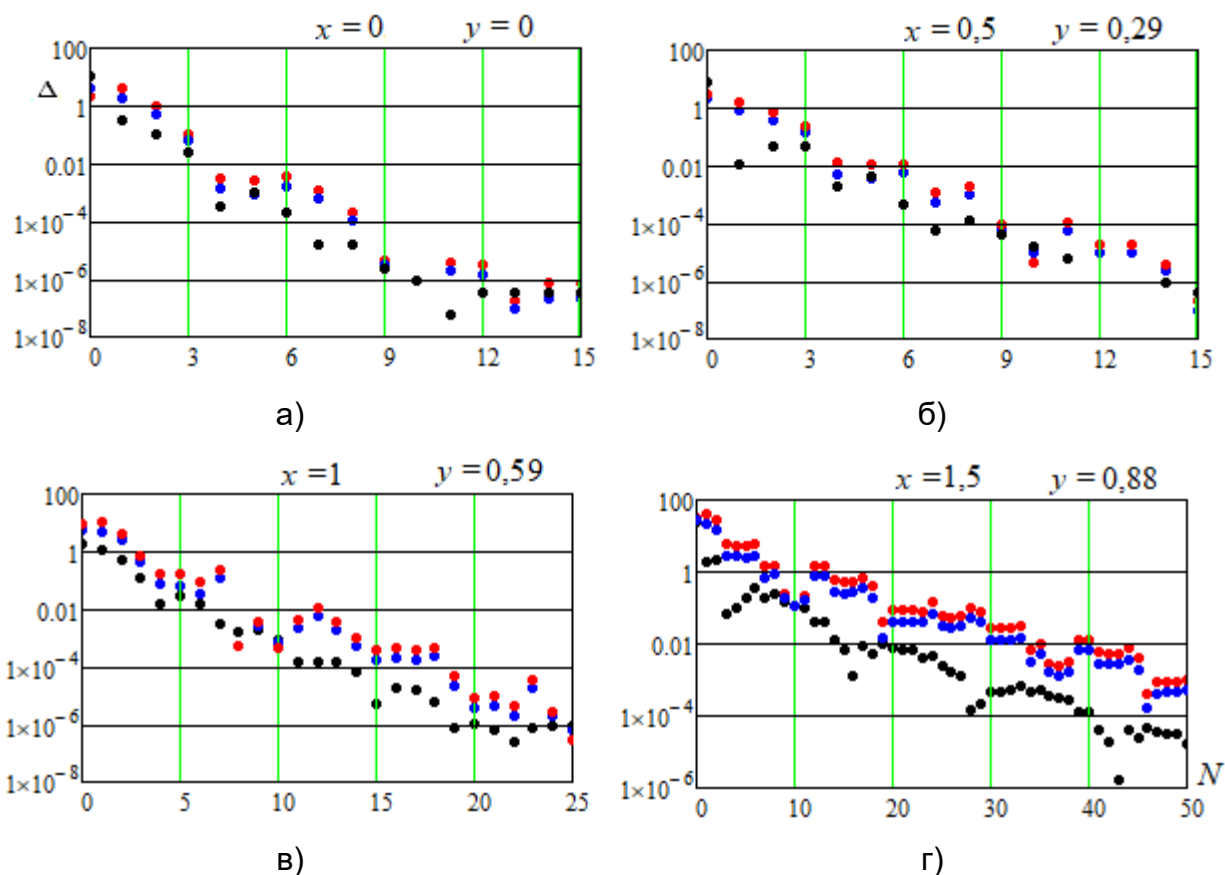


Рис. 3. Графіки залежності модуля відносної похибки, вираженої в процентах Δ %, від кількості доданків N у скінченних сумах формули (5).

Геометричні параметри прямокутника: $a = 1,7, b = 2,7$

Отже, як бачимо, всі три варіанти розрахунку впевнено демонструють наявність чітко вираженої тенденції до зближення значень шуканого розв'язку за формулами (2) і (5) при збільшенні кількості доданків N у скінченних сумах формули (5). При цьому практично точні значення знаходимо при відносно невеликих значеннях числа врахованих доданків N у скінченних рядах. Цікаво і практично важливо, що неперервне продовження граничних умов на нефізичну частину границі суттєво підвищує швидкість зближення оцінок за двома формулами при меншій кількості доданків N у скінченних сумах формули (5). Зауважимо, що для досягнення практичного збігу значень необхідно збільшувати кількість членів ряду.

3. Висновки

Метою роботи було бажання розглянути приклади, які дозволяють поглибити розуміння понять, що широко використовуються при формулюванні задач математичної фізики. Основна увага приділена поняттю єдиності розв'язку граничної задачі. При цьому мова йде не лише про загальні теоретичні міркування. Приведені результати вказують на практичну важливість врахування зміни форми розв'язку при

одержанні конкретних кількісних оцінок фізичних полів. Процедура побудови різних розв'язків граничної задачі шляхом продовження граничних умов на нефізичну частину поверхні може здатися надуманою і непотрібною в практиці аналізу фізичних полів різної природи. Однак практичні проблеми, що виникають при побудові аналітичних розв'язків у неканонічних областях, показують невідворотність використання такої процедури (Grinchenko, Vovk, Matsypura, 2018), (Грінченко, Маципура, 2025).

Внесок авторів

Віктор Грінченко – концептуалізація, методологія; Володимир Маципура – валідація даних, написання, перегляд і редагування.

Джерела фінансування

Ця робота не отримувала специфічного гранту від жодного фінансового агента у державному, комерційному чи неприбутковому секторах.

Список використаних джерел

Grinchenko, V. T. (1996). Development of the method for solving problems of sound radiation and scattering in non-canonical areas, *Hydromechanics*, 70, p. 27–40. [in Russian].

Грінченко В. Т. (2008). Задачі математичної фізики з неповністю визначеними граничними умовами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 51, № 2. С. 53–60.

Viktor T. Grinchenko, Igor V. Vovk & Vladimir T. Matsypura. (2018). *Acoustic wave problems*. New York : Begell House, Inc. 439 p. DOI: 10.1615/978-1-56700-459-5.0

Грінченко В. Т. & Маципура В. Т. (2025). Погляд нематематика на побудову загального розв'язку граничних задач в неканонічних областях // *У світі математики*. 2025, том 2, № 1 – С. 132–151. DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.11>

Перестюк М. О. & Маринець В. В. (2006). *Теорія рівнянь математичної фізики: Підручник*. К. : Либідь. 424 с. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/3695>

Shafarevich I. R. (1973). On some trends in the development of mathematics (Lecture on the occasion of the official awarding of the Heinemann Prize of the Göttingen Academy of Sciences) // *Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Getttingen, Getttingen*.

Heule M. J. H., Kullmann O. & Marek V. W. (2016). Solving and verifying the boolean pythagorean triples problem via cube-and-conquer, *International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing*, Springer, pp. 228–245. URL: arXiv:1605.00723v1 [cs.DM] 3 May 2016 https://doi.org/10.1007/978-3-319-40970-2_15

McKenzie D. (2001). *Mechanizing Proof. Computing, Risk, and Trust*, The MIT Press. 427 p. DOI: <https://doi.org/10.7551/mitpress/4529.001.0001>

References

Grinchenko, V. T. (1996). Development of the method for solving problems of sound radiation and scattering in non-canonical areas, *Hydromechanics*, 70, 27–40. [in Russian].

Grinchenko V. T. (2008). Problems of mathematical physics with incompletely defined boundary conditions // *Mat. Methods and Phys.-Mechan. Fields*. 51, No. 2. Pp. 53–60. [in Ukrainian].

Viktor T. Grinchenko, Igor V. Vovk & Vladimir T. Matsypura. (2018). *Acoustic wave problems*. New York : Begell House, Inc. 439 p. DOI: 10.1615/978-1-56700-459-5.0

Grinchenko V. T. & Matsypura V. T. (2025). A Non-Mathematician's View on the Construction of a General Solution to Boundary-Value Problems in Non-Canonical Domains // *In the World of Mathematics*. 2025, Volume 2, No. 1 – С. 132–151. DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.11> [in Ukrainian].

Perestyuk M. O. & Marynets V. V. (2006). Theory of Equations of Mathematical Physics: Textbook. Kyiv: Lybid. 424 c. URL: <https://dSPACE.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/3695> [in Ukrainian].

Shafarevich I. R. (1973). On some trends in the development of mathematics (Lecture on the occasion of the official awarding of the Heinemann Prize of the Göttingen Academy of Sciences) // Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Getttingen, Getttingen.

Heule M. J. H., Kullmann O. & Marek V. W. (2016). Solving and verifying the boolean pythagorean triples problem via cube-and-conquer, International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing, Springer, pp. 228–245. URL: arXiv:1605.00723v1 [cs.DM] 3 May 2016 https://doi.org/10.1007/978-3-319-40970-2_15

McKenzie D. (2001). Mechanizing Proof. Computing, Risk, and Trust, The MIT Press. 427 p. DOI: <https://doi.org/10.7551/mitpress/4529.001.0001>

Отримано редакцією журналу: 27.02.2026

Прийнято до публікації: 19.06.2026

Опубліковано: 30.07.2026

Victor GRINCHENKO, Active Member of the National Academy of Sciences of Ukraine,

Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.

ORCID: 0000-0003-3229-1810

e-mail: vgrinchenko@yahoo.com

Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

Volodymyr MATSYPURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.

ORCID: 0000-0002-0136-6659

e-mail: mnivtt@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON THE THEOREMS OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS. HOW TO UNDERSTAND IT

Abstract. *In the theory of equations of mathematical physics, the theorems on the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems play a fundamental role. However, in practical applications these theorems are often interpreted formally, without a proper understanding of the meaning of the concept of “uniqueness of a solution”. This leads to methodological difficulties in the construction of analytical and numerical solutions to problems of potential theory and other problems of mathematical physics. Therefore, it is important to clarify the practical meaning of the concept of uniqueness of a solution and to analyze possible forms of its representation.*

The aim of this study is to deepen the understanding of the concept of uniqueness of a solution to a boundary value problem by analyzing a specific example from potential theory. The main objectives are: to construct alternative analytical representations of the solution to the Dirichlet problem for the Laplace equation in a rectangular domain; to investigate the possibility of obtaining analytically different expressions that describe the same physical solution; and to analyze the convergence of numerical estimates obtained from these representations.

The study employs analytical methods of the theory of equations of mathematical physics, in particular the method of separation of variables, expansions into Fourier series, and the properties of complete systems of functions. To analyze the convergence of different representations of the solution, numerical computations and comparisons of relative errors using finite partial sums of the series are performed.

It is shown that for a simple boundary value problem in potential theory, several different analytical representations of the solution can be obtained, including a representation in terms of an elementary function and a representation in the form of a double series. It is demonstrated that introducing an arbitrary function when extending the boundary conditions to the nonphysical part of the boundary leads to the construction of an infinite set of formally different expressions for the same solution. Numerical

experiments confirm the convergence of the results obtained by different formulas as the number of terms in the series increases.

The obtained results show that the uniqueness of a solution to a boundary value problem should be understood as the uniqueness of the function in the physical domain rather than the uniqueness of its analytical representation. The practical construction of a solution may lead to expressions of different forms which, with sufficient computational accuracy, yield identical values of the desired function. This approach has important methodological significance for interpreting uniqueness theorems and for the practical construction of analytical and numerical solutions of problems in mathematical physics.

Keywords: *boundary value problem; Laplace equation; Dirichlet problem; uniqueness of solution; potential theory; Fourier series.*

Received: 27.02.2026

Accepted for publication: 19.06.2026

Published: 30.07.2026