

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р. фіз.-мат. наук, Проф.

ORCID: 0000-0002-7164-807X

e-mail: prishlyak@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАНУРЕННЯ ПРОЄКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ У ТРИВИМІРНИЙ ПРОСТІР

Анотація. У статті досліджується занурення проєктивної площини у тривимірний евклідовий простір, що містить одну потрійну точку, а множина подвійних точок утворюється трьома петлями. Побудовано два трансверсальні занурення цього типу: класичне занурення, відоме як поверхня Боя, та його варіант – поверхня Гьолі. Кожна з трьох петель подвійних точок розташована у власному координатному куті, виходячи у додатному напрямку однієї з координатних осей і повертаючись з від'ємного напрямку іншої. У локальному околі цих петель поверхня Боя описується як об'єднання трубчастих околів петель і сполучних циліндрів. У випадку поверхні Гьолі відповідний локальний фрагмент додатково зазнає скручування вздовж однієї з петель. Побудова занурення ґрунтується на розбитті проєктивної площини на окремі частини та означенні відображення для кожної з них.

Ключові слова: занурення; вкладення; неорієнтований; стрічка Мебіуса; поверхня Боя; поверхня Гьолі; регулярна поверхня.

1. Вступ

Топологічні та геометричні властивості проєктивної площини, яка є неорієнтованою поверхнею роду 1, детально проаналізовано у роботі (Пришляк, 2024). Подальший розвиток цієї тематики представлено в (Пришляк, 2025), де побудовано два занурення пляшки Клейна – неорієнтованої поверхні роду 2 – у тривимірний евклідовий простір. У цих зануреннях відсутні потрійні точки, а множина подвійних точок утворює замкнену криву.

Історично питання можливості занурення проєктивної площини у тривимірний простір має глибоке коріння. Давид Гільберт поставив перед своїм учнем Вернером Боєм задачу довести неможливість такого занурення. Проте у 1901 році Вернер Бой побудував приклад занурення, образ якого нині відомий як *поверхня Боя* (*Boy surface*). Протягом десятиліть залишалося відкритим питання явної параметризації цього занурення, і лише в 1978 році Бернар Морен запропонував першу таку параметризацію. Пізніше альтернативний параметричний опис було отримано Робом Куснером та Робертом Браянтом.

Вагомий внесок у розуміння структури множини самоперетинів занурених поверхонь здійснив Томас Банчофф (1974), який довів, що для гладкого трансверсального занурення замкненої неорієнтованої поверхні число потрійних точок має ту саму парність, що й її ейлерова характеристика. Оскільки ейлерова характеристика проєктивної площини дорівнює 1, будь-яке трансверсальне її

занурення повинно містити принаймні одну потрійну точку. У випадку, коли така точка єдина, множина подвійних точок утворює три петлі, що сходяться в ній.

Подальші дослідження показали, що окрім класичного занурення Боя існує ще одне топологічно відмінне занурення проєктивної площини з однією потрійною точкою та трьома петлями подвійних точок. Це занурення, яке контрастує з поверхнею Боя за локальною будовою околу петель, отримало назву *поверхні Гьолі* (Göhl's surface).

Об'єктом дослідження в цій роботі є поверхні в тривимірному просторі, отримані зануренням проєктивної площини, зокрема, поверхні Боя і Гьолі.

Метою роботи є опис структури двох топологічно різних занурень проєктивної площини з однією потрійною точкою та трьома петлями точок подвійного самоперетину.

2. Трансверсальні занурення та вкладення поверхонь

Нагадаємо, що *вкладення поверхні* – це регулярна поверхня (занурення), яка не містить точок самоперетину. Дві вкладені поверхні перебувають у *загальному положенні* (або *перетинаються трансверсально*), якщо серед їхніх спільних точок немає таких, у яких дотичні площини до поверхонь збігаються; інакше кажучи, поверхні не мають точок дотику в місцях перетину.

Занурення є локальним вкладенням. Це означає, що область визначення відображення занурення може бути поділена на підмножини, на кожній з яких відображення є вкладенням. Занурення називається *трансверсальним*, якщо образи цих підмножин перетинаються трансверсально. Крім того, для відображень у загальному положенні прообраз кожної точки містить не більш ніж три точки.

Із трансверсальності перетину випливає, що *потрійні точки* є ізолюваними: для кожної такої точки існує окіл, який не містить інших потрійних точок. Водночас множина **подвійних точок** утворює об'єднання неперетинних кривих.

Приклад 1. *Дві різні координатні площини перетинаються трансверсально по координатній прямій. Якщо поверхня є об'єднанням трьох координатних площин, то вона має одну потрійну точку – початок координат.*

3. Поверхня Боя

Параметризації поверхні Боя. Наведемо декілька відомих параметризацій поверхні Боя. *Параметризація Апері* (Apery, 1987):

$$x(u, v) = \frac{\frac{2}{3}(\cos u \cos(2v) + \sqrt{2} \sin u \cos v) \cos u}{\sqrt{2} - \sin(2u) \sin(3v)},$$

$$y(u, v) = \frac{\frac{2}{3}(\cos u \sin(2v) - \sqrt{2} \sin u \sin v) \cos u}{\sqrt{2} - \sin(2u) \sin(3v)},$$

$$z(u, v) = \frac{\frac{2}{3} \cos^2 u}{\sqrt{2} - \sin(2u) \sin(3v)}.$$

Параметризація Браєнта–Куснера (Апері, 1987). Нехай комплексне число w задовольняє нерівність $|w| \leq 1$. Визначимо

$$g_1 = -\frac{3}{2} \Im \left(\frac{w(1-w^4)}{w^6 + \sqrt{5}w^3 - 1} \right), \quad g_2 = -\frac{3}{2} \Re \left(\frac{w(1-w^4)}{w^6 + \sqrt{5}w^3 - 1} \right),$$

$$g_3 = \Im \left(\frac{1+w^6}{w^6 + \sqrt{5}w^3 - 1} \right), \quad (x, y, z) = \frac{1}{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} (g_1, g_2, g_3).$$

Параметризація Морена–Апері (Апері 1987):

$$x(u, v) = \frac{\sqrt{2} \cos(2u) \cos^2 v + \cos u \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)},$$

$$y(u, v) = \frac{\sqrt{2} \sin(2u) \cos^2 v - \sin u \sin(2v)}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)},$$

$$z(u, v) = \frac{3 \cos^2 v}{2 - \sqrt{2} \sin(3u) \sin(2v)}.$$

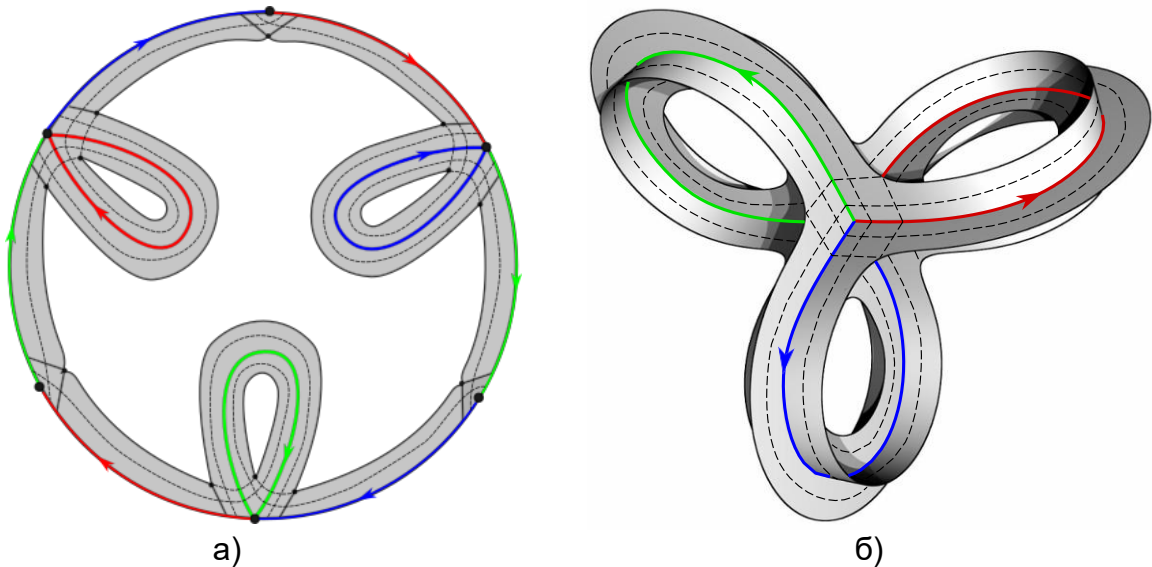


Рис 1. Окіл потрійної та подвійних точок на проєктивній площині та поверхні Боя

Побудова поверхні Боя. Для побудови занурення проєктивної площини на поверхню Боя будемо використовувати модель проєктивної площини у вигляді двовимірного диска зі склеєними протилежними точками межі (Пришляк, 2024, Означення 3).

Дамо конструктивний опис поверхні Боя. Спочатку задамо множину, що складається з потрійної точки та подвійних точок, а також побудуємо її окіл на поверхні Боя.

Потрійною точкою є початок координат. Подвійні точки утворюють три петлі, що лежать у координатних кутах та дотичні в потрійній точці до осей координат: червона лежить у куті $x \geq 0, y \leq 0, z = 0$, синя – у куті $y \geq 0, z \leq 0, x = 0$, зелена – у куті $z \geq 0, x \leq 0, y = 0$.

Червона петля (α) (в площині $z = 0$) складається з трьох частин:

- 1) відрізок $[0, 2] \times \{0\}$ (параметричне рівняння $x = t, y = 0, t \in [0, 2]$);
- 2) дуга кола радіуса 2 з центром у $(2, 2)$ (параметричне рівняння $x = 2 + 2 \cos t, y = -2 - 2 \sin t, t \in [-\pi/2, \pi]$);
- 3) відрізок $\{0\} \times [-2, 0]$ (параметричне рівняння $x = 0, y = t, t \in [-2, 0]$).

Аналогічно задаються синя (β) та зелена (γ) петлі. Рух за кожною з петель починається у додатному напрямку однієї з координатних осей, а закінчується у від'ємному напрямку іншої осі. У результаті ми отримаємо гладку регулярну криву з однією потрійною точкою перетину у початку координат.

Для побудови її околу у поверхні Боя розглянемо відрізок $\{0\} \times [-1, 1]$ та будемо його рухати в площині xy перпендикулярно до α і так, що центр відрізка лежить на петлі α . В результаті отримаємо в площині $x = 0$ множину, що є об'єднанням таких трьох частин:

- 1) квадрата $[0, 2] \times [-1, 1]$;
- 2) області $\{(x, y) : 1 \leq (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 9\} \setminus [0, 2] \times [-2, 0]$;
- 3) квадрата $[-1, 1] \times [-2, 0]$.

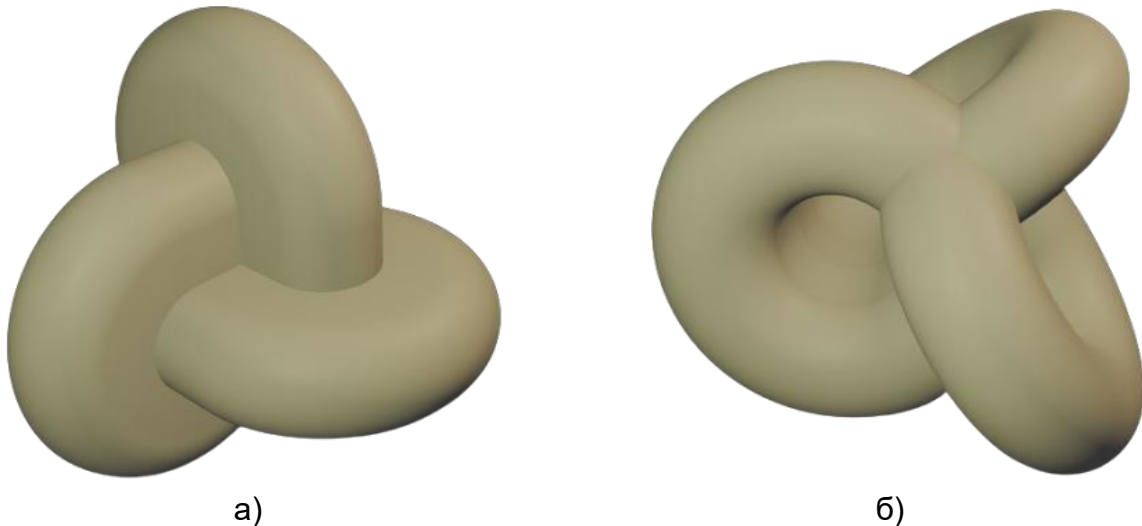


Рис. 2. Поверхня Боя: а) вигляд спереду, б) вигляд ззаду

Далі продовжимо рухати відрізок вздовж синьої петлі β перпендикулярно площині $x = 0$. У результаті отримаємо циліндр $[-1, 1] \times \beta$. Після цього продовжуємо рухати відрізок в площині $y = 0$ перпендикулярно γ , де отримаємо її плоский окіл. Після цього рухаємося по α перпендикулярно площині $z = 0$. Отримаємо циліндр $\alpha \times [-1, 1]$. Далі

отримаємо плоский окіл β , а потім циліндр над γ . Ми повернулися в початкове положення відрізка і побудова околу закінчилась (див. рис. 1 б)). Отже, побудований окіл складається з трьох плоских околів петель та трьох циліндрів.

Для побудови поверхні Боя до околу на рисунку 1 б) додамо плоскі області, що лежать всередині петель (заклеюємо петлі двовимірними дисками). Далі будемо рухати петлю α вздовж напрямку петлі γ . Так само γ за β і β за α . Якби ми зразу рухали відрізок $[-2, 2]$ за всіма петлями, то в результаті рухів петель одна по іншій нам залишилось додати лише частини торів. Кожну з поверхонь, отриманих рухом петлі за іншою петлею, будемо називати *рукавом*. Кожен рукав обмежує тривимірне тіло. Беремо їх об'єднання та поверхню, що є його межею (рис. 2).

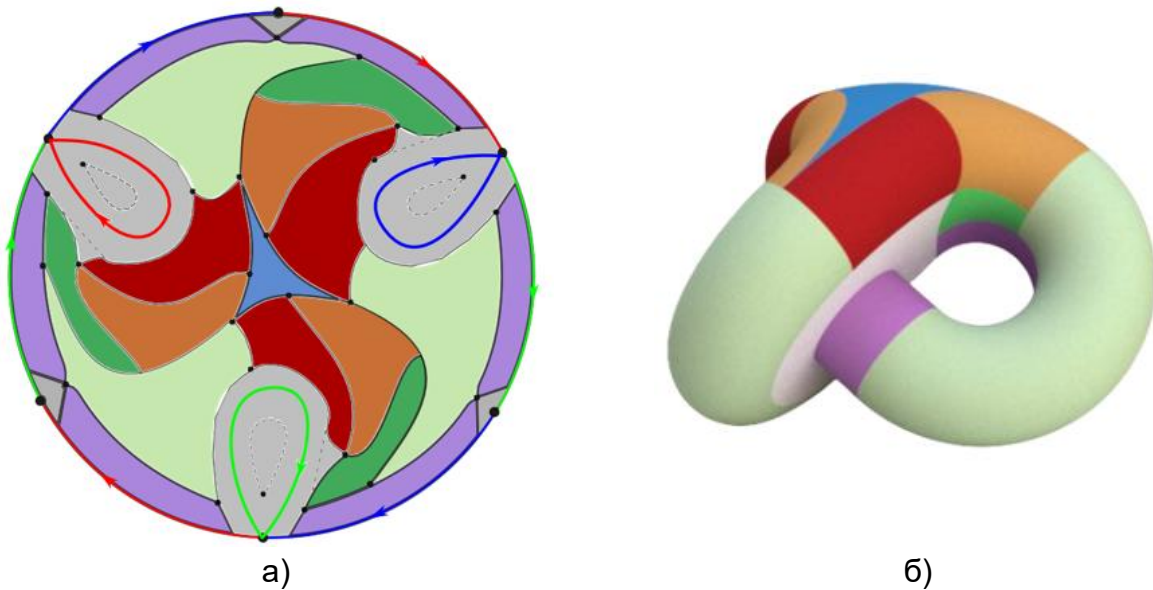


Рис. 3. Занурення проєктивної площини як поверхні Боя

Побудована поверхня, крім початку координат і трьох петель, буде мати ще інші нерегулярні точки – точки перетинів рукавів. Після згладжування поверхні в їх околі отримаємо регулярну поверхню Боя (рис. 3 б)). Таке згладжування та розбиття на частини були запропоновані у (Cheritat, 2014). Маємо по три області кожного кольору, крім синього криволінійного трикутника. Поверхня Боя має вісь, при обертанні навколо якої області одного кольору переходять одна в іншу, а синій криволінійний трикутник сам у себе. Сірі області – це плоскі околи петель, до яких додані невеличкі частинки. Фіолетові області – це частини циліндрів над петлями. Криволінійний синій трикутник може бути розглянутий як область на сфері, а решта областей одного кольору – це частини торів. Кожна з таких областей може бути задана параметричними рівняннями, схожими на ті, які описано у (Пришляк, 2025) з обмеженням області визначення на потрібну множину.

3. Поверхня Гьолі

Крім поверхні Боя було знайдено іншу поверхню, яка також є трансверсальним зануренням проєктивної площини у тривимірний простір з однією потрійною точкою і

яка негомеоморфна поверхні Боя. Також було показано, що, з точністю до гомеоморфізму, інших поверхонь, крім цих двох, не існує. Тому, якщо одна з поверхонь має назву Боя, то іншу назвали *поверхнею Гьолі*. На відміну від поверхні Боя, поверхня Гьолі не має осі, обертання навколо якої переводить її саму в себе, тому її не можна розбити на три однакові частини і поверхня Гьолі має складнішу структуру.

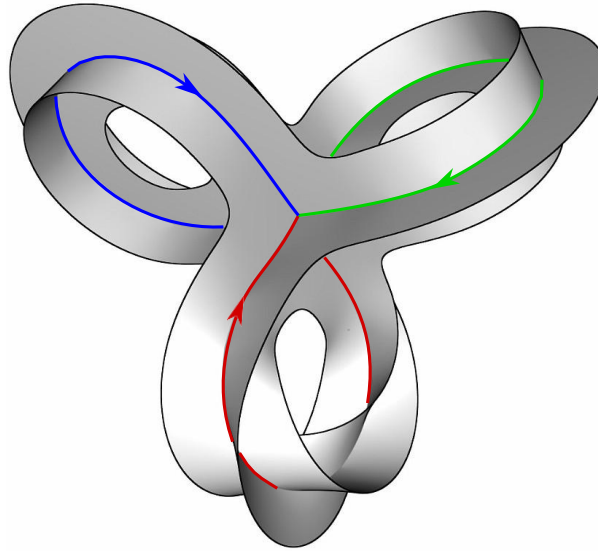


Рис. 4. Окіл потрійної та подвійних точок на поверхні Гьолі

Множина потрійної та подвійних точок, так само як для поверхні Боя, складається з початку координат та трьох петель. Окіл цієї множини отримуємо з відповідного околу для поверхні Боя (рис. 1 б)), перекручуючи окіл червоної петлі. Тобто, коли відрізок рухається по червоній петлі (тієї її частини, що є дугою кола), він у процесі руху ще робить оберт на 180° навколо неї. Рівняння цієї частини поверхні схоже до рівняння листа Мебіуса. Цей окіл зображено на рис. 4.

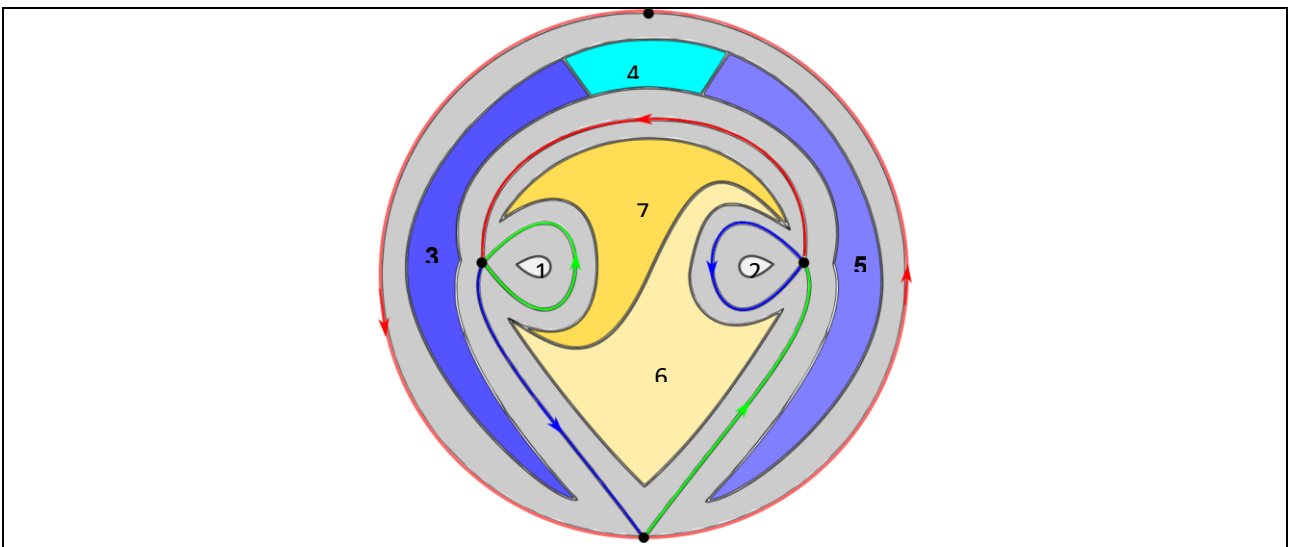


Рис. 5. Прообраз поверхні Гьолі на двовимірному диску

Для опису поверхні Гьолі та занурення проєктивної площини в неї розглянемо розбиття двовимірного диску, зображеного на рис. 5. Кожна з кривих одного кольору відображається на петлю такого самого кольору на поверхні Гьолі, а сіра область відображається в окіл на рис. 4.

Біла область з номером 1 лежить всередині зеленої петлі, а з номером 2 – всередині синьої петлі, за аналогією із поверхнею Боя.

Область 6 відображається в рукав, витягнутий від зеленої петлі вздовж синьої петлі, як на поверхні Боя. Для зручності, у цьому та інших рукавах під час витягування петля буде стискатися до менших розмірів (область 6 на рис. 6). Крім того, витягнемо рукави від зеленої петлі вздовж червоної петлі до її третини та від синьої петлі вздовж червоної петлі також до її третини з іншого боку. Цим рукавам відповідають області 5 та 3 відповідно. Утворені петлі та дугу напроти червоної петлі заклеюємо плівкою 4. Щоб краще собі зрозуміти це відображення, розіб'ємо область 4 на відрізки, один кінець яких лежить на верхній дузі, а інший – на нижній. Межа рукава 5 відповідає правому відрізку, а рукава 3 – лівому відрізку. На рис. 4 перша межа – це дуга, що з'єднує верхню та праву стрічки на початку червоної петлі. При русі відрізка від межі рукава 5 до 3, ця дуга на рис. 4 верхнім кінцем робить невеликий рух вліво до заднього кінця межі рукава 3, а правим кінцем проходить по дузі близько до потрібної точки і виходить як лівий кінець межі рукава 3. Таким чином, образ області 4 схожий на частину листа Мебіуса, де відрізок обертається при русі по колу.

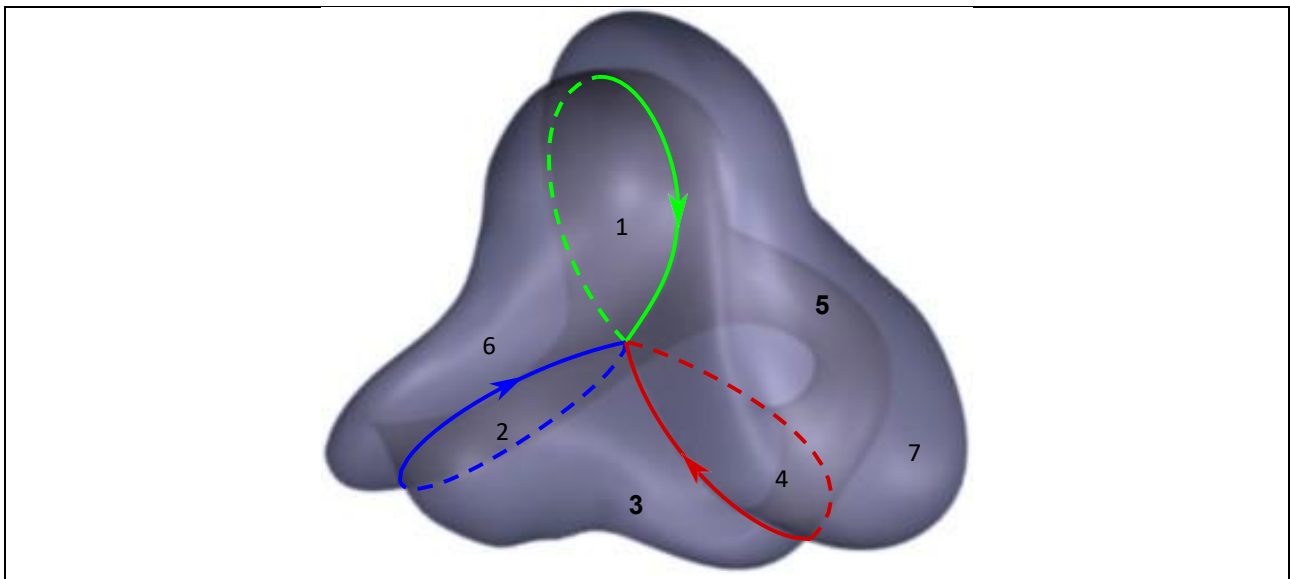


Рис. 6. Поверхня Гьолі

І врешті, зовнішню частину межі околу зеленої петлі і решту межі утвореної поверхні заклеюємо областю 7. Для цього спочатку розвернемо межу першого рукава назовні – будемо при витягуванні рукава точки, що знаходяться далі від початку координат витягувати дещо менше (чим далі від початку координат, тим менше). Виберемо сферу з початком координат, яка містить у собі всю зроблену конструкцію. Від незаклеєних точок межі проведемо відрізки вздовж радіусів до перетину зі сферою.

Отримаємо замкнену криву на сфері, що за *теоремою Жордана* розбиває сферу на дві області, виберемо одну з цих областей. Отже, область 7 відображається на об'єднання цих відрізків та області. Після згладжування кутів отримаємо регулярну поверхню.

У результаті отримуємо відображення областей двовимірного диска на поверхню Гьолі. Ці відображення можна зробити такими, щоб вони збігалися на спільних межах криволінійних багатокутників і, таким чином, разом будуть задавати відображення в поверхню Гьолі. Оскільки протилежні точки на межі мають однакові образи, то після склеювання цих точок отримаємо проєктивну площину та відображення занурення проєктивної площини.

Зауважимо, що, як і у випадку поверхні Боя, можна застосувати симетрію відносно площини, яка відображає синю петлю на зелену, а червону петлю саму в себе. Застосування симетрії відносно цієї площини до поверхонь Боя та Гьолі, приводить до нових поверхонь, які гомеоморфні початковим, але не можуть бути до них неперервно деформовані (в класі трансверсальних занурень).

4. Висновки

У роботі побудовано та проаналізовано два топологічно відмінні трансверсальні занурення проєктивної площини у тривимірний евклідовий простір, а також доведено регулярність відповідних відображень. Запропоновані конструкції мають важливі наслідки для топології неорієнтованих поверхонь: зокрема, вони дають змогу отримувати занурення поверхонь довільного роду шляхом виконання операції зв'язної суми.

Окрему цінність становить те, що описані занурення є наочними прикладами стратифікованих множин із однією потрійною точкою. Це відкриває можливість перенесення досліджень функцій та динамічних систем, визначених на таких поверхнях, на двовимірний диск за аналогією з результатами, наведеними в роботах (Prishlyak, Di Beo, 2022) та (Prishlyak, Loseva, 2022).

Джерела фінансування

Дослідження не отримало фінансової підтримки від державних, комерційних чи некомерційних організацій.

Список використаних джерел

- Apéry F. (1987). Models of the real projective plane. Springer Book Archive. URL: <https://www.doi.org/10.1007/978-3-322-89569-1>
- Banchoff T.F. (1974). Triple points and singularities of projections of smoothly immersed surfaces. Proceedings of AMS, 46(3): 407-413. URL: <https://www.doi.org/10.2307/2040066>
- Boy W. (1903). Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Math. Ann. 57(2):151–184, URL: <https://www.doi.org/10.1007/BF01444342>
- Chéritat A. (2014). A model of Boy's surface in Constructive Solid Geometry. URL: <https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/boy-surface/index.html>

- Goodman S. & Kossowski M. (2009). Immersions of the projective plane with one triplepoint. *Differential Geom. Appl.*, 27 (4): 527–542. URL: <https://www.doi.org/10.1016/j.difgeo.2009.01.011>
- Goodman S., Mellnik A. & Séquin C. H. (2013). Girl's surface. *Proceedings of Bridges: Math.*, 383–388. URL: <http://archive.bridgesmathart.org/2013/bridges2013-383.html>
- Petit J.P. & Souriau J. (1981). Une représentation analytique de la surface de Boy. URL: <http://www.jp-petit.org/science/mathsf/boy/f5101.htm>
- Prishlyak A. & Di Beo L. (2022). Flows with minimal number of singularities on the Boy's surface. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15 (1):32-49. URL: <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i1.2225>
- Prishlyak A. & Loseva M. (2022). Topological structure of optimal flows on the Girl's surface. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15(3-4): 184-202. URL: <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2338>
- Пришляк О. & Білун С. (2024). Геометрія та топологія проєктивної площини // *У світі математики*, випуск 1. С. 70-76.
URL: <https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/30/16>
- Пришляк О. (2025). Занурення пляшки Клейна у тривимірний простір. *У світі математики*, випуск 2. С. 153-161. URL: <https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/83/51>

References

- Apéry F. (1987). Models of the real projective plane. Springer Book Archive. URL: <https://www.doi.org/10.1007/978-3-322-89569-1>
- Banchoff T.F. (1974). Triple points and singularities of projections of smoothly immersed surfaces. *Proceedings of AMS*, 46(3): 407-413. URL: <https://www.doi.org/10.2307/2040066>
- Boy W. (1903). Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. *Math. Ann.* 57(2):151–184, URL: <https://www.doi.org/10.1007/BF01444342>
- Chéritat A. (2014). A model of Boy's surface in Constructive Solid Geometry. URL: <https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/boy-surface/index.html>
- Goodman S. & Kossowski M. (2009). Immersions of the projective plane with one triplepoint. *Differential Geom. Appl.*, 27 (4): 527–542. URL: <https://www.doi.org/10.1016/j.difgeo.2009.01.011>
- Goodman S., Mellnik A. & Séquin C. H. (2013). Girl's surface. *Proceedings of Bridges: Math.*, 383–388. URL: <http://archive.bridgesmathart.org/2013/bridges2013-383.html>
- Petit J.P. & Souriau J. (1981). Une représentation analytique de la surface de Boy. URL: <http://www.jp-petit.org/science/mathsf/boy/f5101.htm>
- Prishlyak A. & Di Beo L. (2022). Flows with minimal number of singularities on the Boy's surface. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15 (1):32-49. URL: <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i1.2225>
- Prishlyak A. & Loseva M. (2022). Topological structure of optimal flows on the Girl's surface. *Proceedings of the International Geometry Center*, 15 (3-4): 184-202. URL: <https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2338>
- Pryshlyak O. & Bilun S. (2024). Geometry and topology of the projective plane. // *U sviti matematyky*, випуск 1. pp. 70-76. URL: <https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/30/16> [in Ukrainian].
- Pryshlyak O. (2025). Immersion of a Klein bottle in three-dimensional space. // *U sviti matematyky*, випуск 2. pp. 153-161. URL: <https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/83/51> [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 20.11.2025

Прийнято до публікації: 19.06.2026

Опубліковано: 30.07.2026

Alexandr PRISHLYAK, D.Sc. (Phys&Math), Prof.

ORCID: 0000-0002-7164-807X

e-mail: prishlyak@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

IMMERSION OF THE PROJECTIVE PLANE IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Abstract. *This paper investigates an immersion of the projective plane into three-dimensional Euclidean space that contains a single triple point, while the set of double points consists of three loops. We construct two transversal immersions of this type: the classical Boy surface and its variant, the Hhle surface. Each of the three double-point loops is located in its own coordinate octant, emerging in the positive direction of one coordinate axis and returning from the negative direction of another. In a neighborhood of these loops, the Boy surface is described as the union of tubular neighborhoods of the loops together with connecting cylinders. In the Hhle surface, the corresponding local region additionally undergoes a twist along one of the loops. The construction of the immersion is based on decomposing the projective plane into several parts and defining appropriate mappings on each of them.*

Keywords: *immersion; embedding; non-orientable surface; Mbius strip; Boy surface; Gyli surface; regular surface.*

Received: 20.11.2025

Accepted for publication: 19.06.2026

Published: 30.07.2026