

Математичні олімпіади

УДК 514.1:37.091.27

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.9>

Василь БАКАЙ, вчитель математики

ORCID ID: 0009-0001-4960-7490

e-mail: wassyl2001@knu.ua

Український фізико-математичний ліцей

Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Катерина ДАВИДОВА, вчитель математики вищої кат., вчитель-методист

ORCID ID: 0009-0008-3067-8695

e-mail: kotica70@gmail.com

Український фізико-математичний ліцей

Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Катерина ЛУКАШ, канд. фіз.-мат. наук, Заслужений вчитель України,

вчитель математики вищої кат., вчитель-методист

ORCID ID: 0009-0006-6110-4921

e-mail: lukash_k@ukr.net

Український фізико-математичний ліцей

Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олексій ПЕЧЕРИЦЯ, PhD у галузі «Мат. і стат.»,

вчитель математики вищої кат., вчитель-методист

ORCID ID: 0000-0001-7016-9854

e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua

Український фізико-математичний ліцей

Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

НАВКОЛО ТЕОРЕМИ КОСИНУСІВ

Анотація. У статті розглядається теорема косинусів та наслідки з неї – простий і водночас фундаментальний інструмент геометрії, який розширює можливості учнів у задачах на розв'язування трикутників. Особлива увага приділяється саме розв'язуванню задач поглибленого рівня та олімпіадних. Стаття присвячена Савченку Леоніду Мироновичу (24.07.1945 - 14.09.2021) – Вчителю, який понад 50 років свого життя присвятив Українському фізико-математичному ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, який умів показати красу математики та закохати у неї на все життя, автору підручника з геометрії для 8 - 9 класів з поглибленим вивченням математики та спецкурсу «Краса і творчість у математиці» для слухачів інституту вдосконалення вчителів імені Бориса Грінченка. Стаття адресована школярам, учителям закладів загальної середньої освіти та усім, хто любить математику.

Ключові слова: теорема косинусів; наслідки з теореми косинусів; задачі з геометрії поглибленого рівня; олімпіадні задачі з геометрії.

1. Вступ

До основних причин вивчення теореми косинусів можна віднести універсальність (адже теорема застосовна до довільного трикутника), зв'язок з іншими розділами

математики (зокрема з алгеброю і тригонометрією) та можливість використання у задачах поглибленого рівня та задачах математичних олімпіад, турнірів і конкурсів. До таких задач відносяться:

- доведення рівностей та нерівностей у трикутнику (наприклад, доведення нерівності між сторонами трикутника);
- обчислення відстаней у нестандартних геометричних конфігураціях;
- комбіновані задачі, у поєднанні з іншими теоремами (наприклад, теоремами синусів або Менелая);
- обчислення невідомих кутів у трикутнику, де звичайні тригонометричні методи є складними або незручними;
- аналіз геометричних місць точок, що задовольняють певні умови.

Класичну теорему косинусів та формулу для знаходження косинуса кута трикутника за трьома сторонами можна знайти в підручниках з геометрії для 9 класів з поглибленим вивченням математики (Мерзляк, Полонський, Якір, 2017), (Бурда, Савченко, 2004), (Апостолюва, 2006), (Нікулін, Кукуш, 1999), (Єршова та ін., 2014).

Нагадаємо також властивість діагоналей паралелограма та формулу медіани трикутника за його сторонами, які є відомими наслідками теореми косинусів.

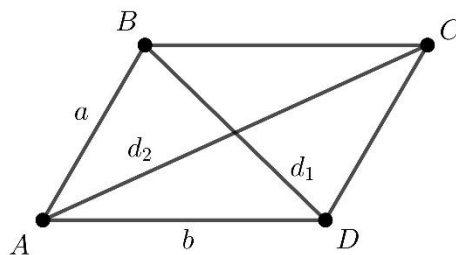


Рис. 1. Паралелограм $ABCD$ до теореми 1

Нехай a, b – сторони паралелограма $ABCD$, а d_1, d_2 – його діагоналі (рис 1).

Теорема 1. Для сторін та діагоналей паралелограма справджується рівність

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Доведення. На рис. 1 $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$. Нехай також $\angle A = \alpha$, тоді за властивістю кутів паралелограма $\angle B = 180^\circ - \alpha$, і за формулами зведення $\cos \angle B = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

За теоремою косинусів для трикутників ABD та ABC відповідно:

$$d_1^2 = BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle A = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$d_2^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha.$$

Додавши почленно праві та ліві частини останніх двох рівностей, одержимо твердження теореми. ■

Нехай у трикутнику ABC : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, а m_a – медіана, проведена до сторони a (рис. 2 а)).

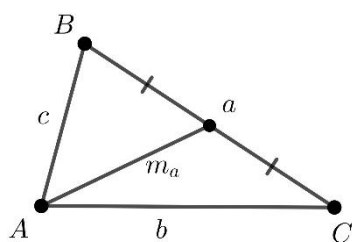


Рис. 2 а). Трикутник ABC до теореми 2

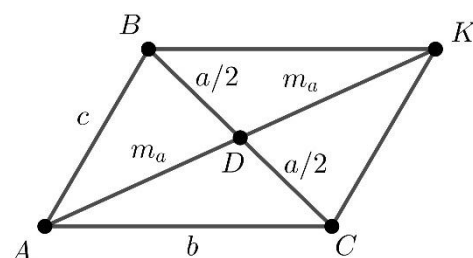


Рис. 2 б). Чотирикутник $ABKC$ після подвоєння медіани трикутника ABC до теореми 2

Теорема 2. Для медіани, проведеної до сторони a трикутника ABC , виконується рівність

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

Доведення. Подовжимо медіану m_a удвічі за точку D (основу медіани). Утвориться чотирикутник $ABKC$ (рис. 2 б)), у якому діагоналі BC та AK перетинаються в точці D та діляться цією точкою навпіл, оскільки $BD = DC$ за умовою, а $AD = DK$ за побудовою. За ознакою цей чотирикутник є паралелограмом.

Отже, за теоремою 1:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2),$$

тобто

$$AK^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2),$$

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2).$$

Звідси

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

що і треба було довести. ■

Зауваження. Аналогічні рівності справджуюся для двох інших медіан:

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}, \quad m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

Далі ми розглянемо застосування цих теорем, а також введемо низку менш відомих, але не менш корисних наслідків з них.

Наслідок 1. Якщо $c > b$, то $m_c < m_b$.

Доведення. Скористаємось аналітичним підходом із використанням властивостей числових нерівностей.

Оскільки $c > b$, причому величини b і c строго додатні, то $c^2 > b^2$. За допомогою еквівалентних перетворень отримаємо наступний ланцюжок нерівностей.

$$3c^2 > 3b^2;$$

$$2c^2 - b^2 > 2b^2 - c^2;$$

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 > 2a^2 + 2b^2 - c^2;$$

$$\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} > \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

З доведення теореми 2 випливає, що

$$m_b^2 > m_c^2.$$

Оскільки мова йде про довжини відрізків, то остання нерівність еквівалентна нерівності між довжинами медіан трикутника, яку потрібно було довести. ■

2. Застосування теореми косинусів та її наслідків до розв'язування олімпіадних задач

Розглянемо приклади задач олімпіадного і турнірного характеру (Рубльов та ін., 2018, 2019, 2020), ідеї розв'язань яких потребують застосування теореми косинусів або її наслідків.

Задача 1. (Київська міська олімпіада юних математиків, 9 клас, задача 5.1, 2017 рік). У трикутнику ABC проведено медіани BB_1 і CC_1 , що перетинаються в точці M . Довести, що в чотирикутник AC_1MB_1 можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $AB = AC$.

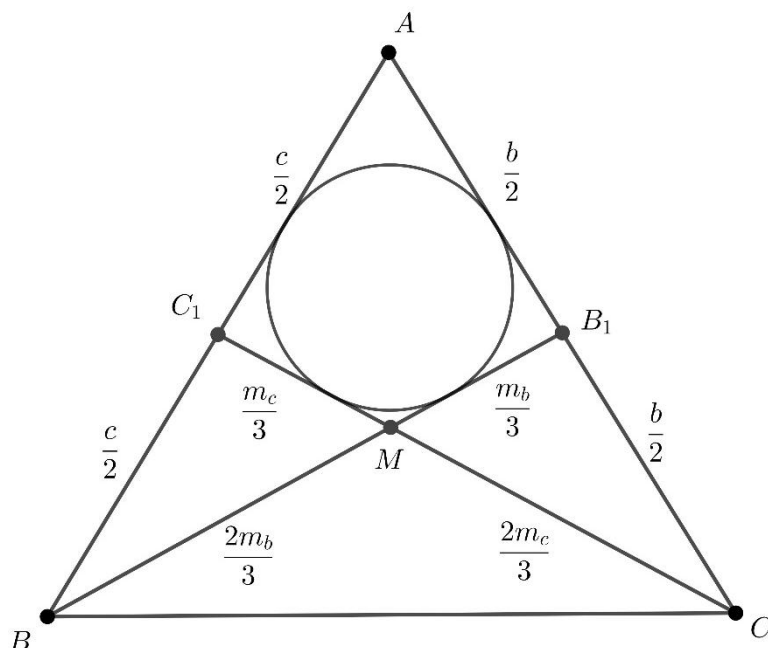


Рис. 3. Трикутник ABC до задачі 1

Доведення. Чотирикутник AC_1MB_1 (рис. 3) є описаним тоді і тільки тоді, коли

$$AC_1 + MB_1 = AB_1 + CM_1,$$

що в стандартних позначеннях виглядає так:

$$\frac{c}{2} + \frac{m_b}{3} = \frac{b}{2} + \frac{m_c}{3}.$$

Тобто

$$\frac{c - b}{2} = \frac{m_c - m_b}{3}.$$

Якщо $c > b$, то $m_c < m_b$, що безпосередньо впливає з наслідку 1. Але тоді ліва і права частини рівності відрізняються знаком. Аналогічно розглядається випадок $c < b$. Звідси $c = b$.

■

Задача 2. (II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 11 клас, Задача 1, 2016 рік). Дано квадрат $ABCD$ зі стороною 1. У зовнішній бік від квадрата побудовано рівносторонні трикутники ABM і BCN (рис. 4). Знайти довжину відрізка MN .

Розв'язання. Обчислимо величину $\angle MBN$.

$$\angle MBN = 360^\circ - \angle MBA - \angle ABC - \angle CBN = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 150^\circ.$$

$$MB = BN = AB = 1.$$

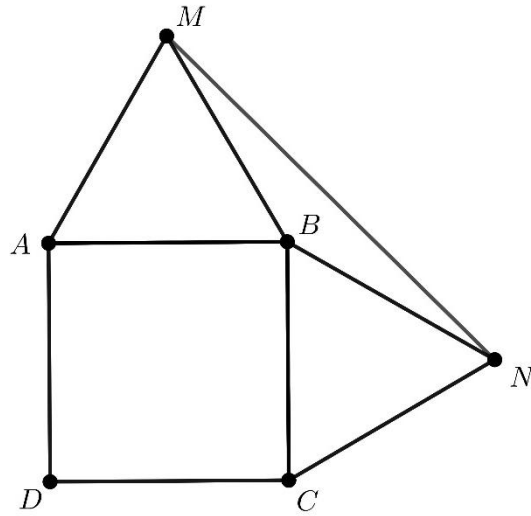


Рис. 4. Квадрат $ABCD$ до задачі 2

Тому з трикутника NBM за теоремою косинусів

$$\begin{aligned} MN^2 &= MB^2 + BN^2 - 2MB \cdot BN \cos \angle MBN = 2 + \sqrt{3} = \\ &= \frac{1}{2}(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1^2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$MN = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$.

Задача 3. (Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Математичний Занзібар, середня ліга, задача 8, 2016 рік). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомі довжини всіх сторін $AB = 24$, $BC = 20$, $CD = 15$, $AD = 7$ та однієї діагоналі $BD = 25$. Знайти довжину іншої діагоналі.

Розв'язання. За наслідком теореми косинусів з трикутника BCD (рис. 5) маємо, що

$$\cos \angle CBD = \frac{CB^2 + BD^2 - DC^2}{2BC \cdot BD} = \frac{400 + 625 - 225}{1000} = \frac{4}{5},$$

а за основною тригонометричною тотожністю

$$\sin \angle CBD = \frac{3}{5}.$$

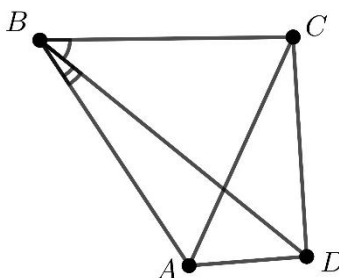


Рис. 5. Чотирикутник $ABCD$ до задачі 3

Аналогічно в трикутнику BAD маємо, що

$$\cos \angle ABD = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{576 + 625 - 49}{1200} = \frac{24}{25}$$

і тоді

$$\sin \angle ABD = \frac{7}{25}.$$

Тепер

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD,$$

отже,

$$\cos \angle ABC = \cos \angle ABD \cos \angle CBD - \sin \angle ABD \sin \angle CBD = \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} - \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{25} = \frac{3}{5}.$$

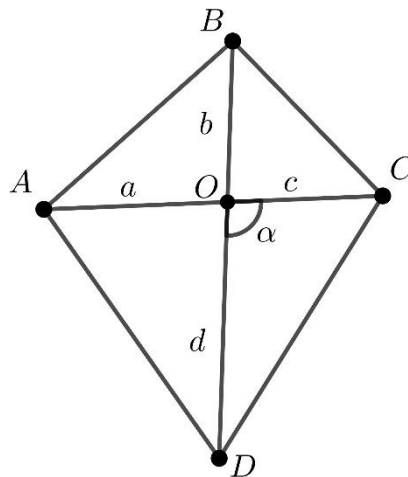
Тому за теоремою косинусів в трикутнику ABC маємо, що

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC = 576 + 400 - 576 = 400,$$

звідки $AC = 20$.

Відповідь: 20.

Задача 4. (Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Усна командна олімпіада, старша ліга, задача 4, 2025 рік). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомі довжини сторін $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$ та $AD = 5$. Які значення може набувати кут між діагоналями цього чотирикутника?

Рис. 6. Чотирикутник $ABCD$ до задачі 4

Розв'язання. Запишемо теорему косинусів для чотирьох трикутників: AOB , COB , COD та AOD , при цьому позначимо відрізки $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$ та $DO = d$, а кут $\angle COD = \alpha$ (рис. 6). Тоді

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha,$$

$$CD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha,$$

$$DA^2 = d^2 + a^2 + 2ad \cos \alpha.$$

Оскільки з умов задачі випливає, що

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2,$$

то

$$ab \cos \alpha + cd \cos \alpha = -bc \cos \alpha - ad \cos \alpha.$$

Припустимо, що $\cos \alpha \neq 0$, тоді

$$ab + cd + dc + ad = (a + c)(b + d) = 0.$$

Але це неможливо, оскільки кожен відрізок має додатну довжину, тобто має справджуватися умова $\cos \alpha = 0$, а тому й кут між діагоналями дорівнює 90° .

Відповідь: 90° .

Задача 5. (Київська міська олімпіада юних математиків, III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, I тур, 11 клас, задача 2, 2019 рік). У гострокутному трикутнику ABC , у якому $AB < AC$, точка M – середина сторони BC , а точка K – середина ламаної BAC . Довести, що $\sqrt{2}KM > AB$.

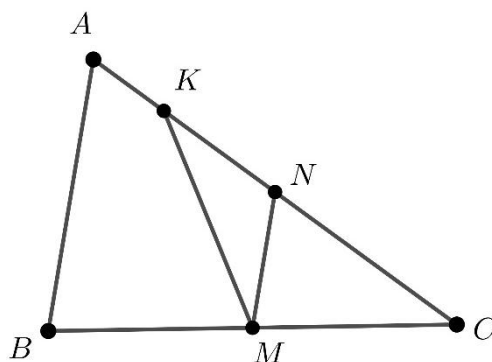


Рис. 7. Трикутник ABC до задачі 5

Доведення. Нехай N – середина сторони AC , тоді MN – середня лінія трикутника ABC (рис. 7) і тому

$$MN = \frac{1}{2}AB$$

і

$$\angle BAC = \angle MNC = \alpha < 90^\circ.$$

Далі

$$\frac{1}{2}(AB + AC) = KC = KN + NC = KN + \frac{1}{2}AC,$$

отже,

$$KN = \frac{1}{2}AB = MN.$$

Тепер за теоремою косинусів в трикутнику KMN маємо, що

$$\begin{aligned} KM^2 &= KN^2 + MN^2 - 2KN \cdot NM \cos \angle KNM = \\ &= 2KN^2 - 2KN^2 \cos(180^\circ - \alpha) = 2KN^2(1 + \cos \alpha) = \frac{1}{2}AB^2(1 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Оскільки $\alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha > 0$, тому

$$KM^2 > \frac{1}{2}AB^2,$$

звідки $\sqrt{2}KM > AB$, що і потрібно було довести. ■

Задача 6. (Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Усна особиста олімпіада, старша ліга, задача 2, 2017 рік). На стороні CD опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрано точку F таким чином, що $AC \cap BF = E$, $AB = FC$, $AE = 14$, $BE = 10\sqrt{2}$, $\angle BAC = \angle BFD$, $\angle BEA = 45^\circ$ (рис. 8). Знайти довжину відрізка EF .

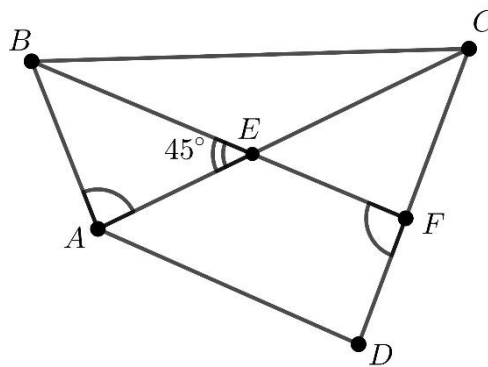


Рис. 8. Чотирикутник $ABCD$ до задачі 6

Розв'язання. Запишемо теорему синусів для трикутників ABC і FBC :

$$\frac{BA}{\sin \angle BCA} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \angle BAC)} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \angle BFD)} = \frac{BC}{\sin \angle BFD} = \frac{BC}{\sin \angle FBC} = \frac{CF}{\sin \angle FBC}.$$

Враховуючи рівність $AB = FC$ і те, що $\angle BCA < 45^\circ$ і $\angle FBC < 45^\circ$, матимемо, що

$$\angle BCA = \angle FBC,$$

звідки $BE = EC$.

За теоремою косинусів в трикутнику ABE :

$$AB^2 = BE^2 + EA^2 - 2BE \cdot EA \cos \angle BEA = 200 + 196 - 280 = 116.$$

Позначимо $EF = x$ і запишемо теорему косинусів у трикутнику EFC з урахуванням того, що $BE = EC = 10\sqrt{2}$ і $AB^2 = CF^2 = 116$:

$$CF^2 = CE^2 + EF^2 - 2CE \cdot EF \cos \angle CEF;$$

$$116 = 200 + x^2 - 20x;$$

$$x^2 - 20x + 84 = 0;$$

$$x = 6 \text{ або } x = 14.$$

У випадку $x = EF = 14$ матимемо $EF = FC = 14$, тобто трикутник $EF C$ прямокутний і рівнобедрений, але тоді $EC = EF\sqrt{2} = 14\sqrt{2} \neq 10\sqrt{2}$. Отже, $EF = x = 6$.

Відповідь: 6.

Задача 7. (Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової, Математичний бій №2, середня ліга, група А, задача 2, 2016 рік). Відомо, що a, b, c – сторони трикутника. Довести, що система рівнянь

$$\begin{cases} by + cz + at = 1, \\ bx + az + ct = 0, \\ cx + ay + bt = 0, \\ ax + cy + bz = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Доведення. Домножимо перше рівняння на c , а друге на a і віднімемо їх, маємо

$$\begin{cases} bcy + c^2z + act = c, \\ abx + a^2z + act = 0 \end{cases} \Rightarrow -abx + bcy + (c^2 - a^2)z = c.$$

Тепер перше рівняння помножимо на b , а третє на a і віднімемо їх

$$\begin{cases} b^2y + bcz + abt = b, \\ acx + a^2y + abt = 0 \end{cases} \Rightarrow -acx + (b^2 - a^2)y + bcz = b.$$

Отримуємо систему з вилученою змінною t

$$\begin{cases} -abx + bcy + (c^2 - a^2)z = c, \\ -acx + (b^2 - a^2)y + bcz = b, \\ ax + cy + bz = 0. \end{cases}$$

Позбудемось тепер аналогічним чином змінної z і отримаємо

$$\begin{cases} ca(c^2 - a^2 - b^2)x + (b^2c^2 - (c^2 - a^2)(b^2 - a^2))y = ba^2, \\ -2acx + (b^2 - a^2 - c^2)y = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(b^2 + c^2 - a^2)y - c(a^2 + b^2 - c^2)x = ab, \\ (c^2 + a^2 - b^2)y + 2acx = -b. \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння на $2abc$, а друге – на $2ac$, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}y - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}x = \frac{a}{2ac}, \\ \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}y + x = -\frac{b}{2ac}. \end{cases}$$

Але a, b, c – сторони деякого трикутника ABC , тому

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos \angle A, \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos \angle C, \quad \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \cos \angle B$$

за наслідком теореми косинусів.

Тоді отримуємо нову систему

$$\begin{cases} y \cos \angle A - x \cos \angle C = \frac{a}{2ac}, \\ y \cos \angle B + x = -\frac{b}{2ac}, \end{cases}$$

з якої вилучимо y і отримаємо

$$-(\cos \angle B \cos \angle C + \cos \angle A)x = \frac{a \cos \angle B + b \cos \angle A}{2ac}.$$

$a \cos \angle B + b \cos \angle A$ – це сума проєкцій сторін a і b на сторону c , тому

$$a \cos \angle B + b \cos \angle A = c.$$

Також

$$\cos A = \cos(180^\circ - (\angle B + \angle C)) = -\cos(\angle B + \angle C) = -\cos \angle B \cos \angle C + \sin \angle B \sin \angle C,$$

і зрозуміло, що $\sin \angle B \sin \angle C \neq 0$, звідки

$$\begin{aligned} -\sin \angle B \sin \angle C x &= \frac{1}{2a} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= -\frac{1}{2a \sin \angle B \sin \angle C} = -\frac{abc}{8 \left(\frac{1}{2}ac \sin \angle B\right) \left(\frac{1}{2}ab \sin \angle C\right)} = -\frac{abc}{8S^2}. \end{aligned}$$

Тепер по черзі знайдемо інші змінні аналогічним чином:

$$y = \frac{abc \cos \angle B}{8S^2}, \quad z = \frac{abc \cos \angle C}{8S^2}, \quad t = \frac{abc \cos \angle A}{8S^2},$$

що і потрібно було довести.

■

Задача 8. (Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Математичний бій №3, старша ліга, група А, задача 9, 2017 рік). Дано рівногранний тетраедр $SABC$, усі грані якого – рівні нерівносторонні трикутники, SO – висота тетраедра, H – ортоцентр грані ABC . Чи можуть довжини відрізків OH , AB , BC , CA бути різними натуральними числами?

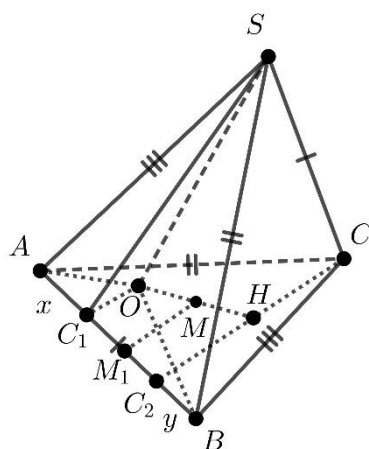


Рис. 9. Тетраедр $SABC$ до задачі 8

Розв'язання. Як відомо, всі грані рівногранного тетраедра є гострокутними трикутниками, а також мимобіжні ребра є попарно рівними: $AB = SC$, $BC = SA$, $AC = SB$. Позначимо C_1 , C_2 – проєкції точок O , H на сторону AB (рис. 9). Нехай M – середина відрізка OH і M_1 – проєкція цієї точки на сторону AB . Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SC_1 \perp AB$.

За теоремою Піфагора (Лебедева, Чубикіна, 2025) для трикутників ASC_1 і BSC_1 маємо

$$SC_1^2 = AS^2 - AC_1^2 = BS^2 - BC_1^2,$$

звідки

$$BC_1^2 - AC_1^2 = BS^2 - AS^2.$$

Але $BS = AC$, $AS = BC$, тому

$$BS^2 - AS^2 = AC^2 - BC^2.$$

Зрозуміло, що CC_2 – висота в трикутнику ABC . Тоді за теоремою Піфагора для трикутників ACC_2 і BCC_2 маємо

$$CC_2^2 = AC^2 - AC_2^2 = BC^2 - BC_2^2,$$

звідки

$$AC^2 - BC^2 = AC_2^2 - BC_2^2.$$

Отже, маємо ланцюг рівностей

$$BC_1^2 - AC_1^2 = BS^2 - AS^2 = AC^2 - BC^2 = AC_2^2 - BC_2^2.$$

Нехай $AB = c$, $AC_1 = x$, $BC_2 = y$, тоді остання рівність записується так:

$$(c - x)^2 - x^2 = (c - y)^2 - y^2,$$

звідки

$$-2cx = -2cy,$$

отже,

$$x = y = AC_1 = BC_2,$$

і тому M_1 – середина сторони AB . Тоді точка M проєктується на середину сторони AB .

Аналогічно отримуємо, що точка M проєктується і на середини сторін BC і AC . Отже, M ($OH = 2MH$) – центр описаного кола трикутника ABC . І задача зводиться до побудови гострокутного трикутника ABC , у якого MH , AC , AB і BC – натуральні числа.

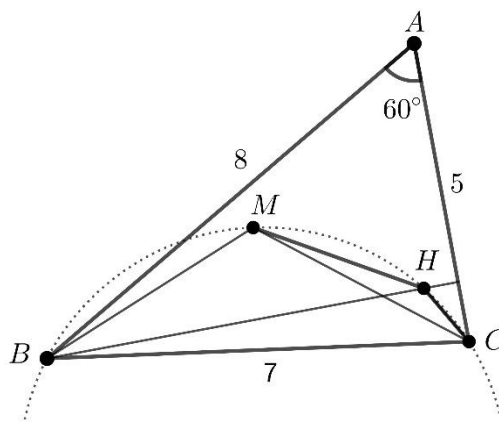


Рис. 10. Трикутник ABC до задачі 8

Розглянемо трикутник ABC , у якого $\angle A = 60^\circ$, $AB = 8$, $AC = 5$ (рис. 10). Тоді, за теоремою косинусів,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle A = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49,$$

отже, $BC = 7$. Крім того, за властивостями ортоцентра та центра описаного кола

$$\angle BMC = 2\angle A = 120^\circ,$$

$$\angle BHC = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

тому точки B, M, O і C лежать на одному колі, радіус якого за теоремою синусів для трикутника BMC дорівнює

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle BMC} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Позначимо $\angle ABC = \beta$ (цей кут менший за 60° , бо $AC < BC$). Тоді

$$\angle MBC = \frac{180^\circ - \angle BMC}{2} = 30^\circ,$$

$$\angle ABH = 90^\circ - \angle A = 30^\circ.$$

Звідси $\angle MAH = 60^\circ - \beta$. І тому, за лемою про довжину хорди

$$MH = 2R \sin(60^\circ - \beta) = \frac{14}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \beta - \frac{1}{2} \sin \beta \right) = 7 \cos \beta - \frac{7}{\sqrt{3}} \sin \beta.$$

З трикутника ABC за теоремою косинусів

$$\cos \beta = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{64 + 49 - 25}{112} = \frac{11}{14}.$$

Далі за основною тригонометричною тотожністю

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Тому

$$MH = 7 \cdot \frac{11}{14} - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = 3$$

і

$$OH = 2MH = 6.$$

Тепер $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 5$, $OH = 6$ виражені чотирма різними натуральними числами.

Відповідь: так, наприклад, $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 5$, $OH = 6$.

3. Інші наслідки теореми косинусів

Нижче виведемо ряд важливих тверджень для трикутників (зокрема декілька нерівностей для тригонометричних функцій кутів довільних трикутників), які також є наслідками теореми косинусів.

Нехай у трикутнику ABC : $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ (рис. 11).

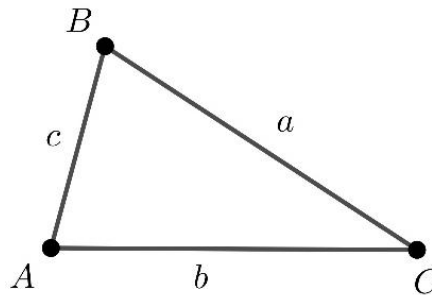


Рис. 11. Трикутник ABC до теореми 3

Теорема 3. Для довільного трикутника ABC справедливі рівності

$$a^2 = (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{A}{2}; \quad (1)$$

$$a^2 = (b - c)^2 + 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}; \quad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} A; \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}; \quad (4)$$

$$a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos^2 \frac{A}{2}; \quad (5)$$

$$a^2 = (b + c)^2 - 4S \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \quad (6)$$

та нерівності

$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}; \quad (7)$$

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}; \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \leq \frac{a^2}{4S}; \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \geq \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}. \quad (10)$$

Доведення. За теоремою косинусів

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2bc + 2bc = \\ &= b^2 - 2bc + c^2 + 2bc(1 - \cos A), \end{aligned}$$

звідки використавши формулу квадрата різниці і синуса половинного кута одержуємо (1).

Оцінимо (1). Оскільки повний квадрат – величина невід’ємна, то

$$a^2 \geq 4bc \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} \leq \frac{a^2}{4bc}.$$

Добувши корінь з обох частин останньої нерівності одержимо (7).

Запишемо нерівності аналогічні до (7) для інших кутів трикутника:

$$\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} &\leq \frac{b}{2\sqrt{ac}}; \\ \sin \frac{C}{2} &\leq \frac{c}{2\sqrt{ab}} \end{aligned}$$

та перемножимо їх. Тоді

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \cdot \frac{b}{2\sqrt{ac}} \cdot \frac{c}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{8}.$$

Отримали (8).

З формули площі трикутника

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

та формули синуса подвійного кута маємо, що

$$bc = \frac{S}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

Отримане підставимо в формулу (1):

$$a^2 = (b - c)^2 + 4 \frac{S}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \sin^2 \frac{A}{2}.$$

Після скорочення одержимо рівність (2). Аналогічні формули неважко отримати для сторін b та c .

Оцінимо (2). Оскільки повний квадрат – величина невід’ємна, то

$$a^2 \geq 4S \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Виражаючи тангенс з останньої нерівності одержуємо (9).

З формули площі трикутника

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

виражаємо bc та підставляємо в рівність з теореми косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2 \frac{2S}{\sin A} \cos A.$$

Таким чином отримано рівність (3).

Виражаємо з рівності (3) та її аналогів для інших кутів трикутника котангенси

$$\operatorname{ctg} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}, \quad \operatorname{ctg} C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4S}$$

та додаємо отримані рівності

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{4S}.$$

Після спрощення отримуємо рівність (4).

З останньої рівності та нерівності (9) і її аналогів для інших кутів трикутника одержуємо нерівність (10).

Далі – аналогічно до доведення формул (1) та (2).

За теоремою косинусів

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2bc + 2bc = \\ &= b^2 + 2bc + c^2 - 2bc(1 + \cos A), \end{aligned}$$

звідки використавши формулу квадрата суми і косинуса половинного кута одержуємо (5).

Підставивши у рівність (5) вираз

$$bc = \frac{S}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}},$$

одержуємо рівність (6). Аналогічні формули неважко отримати для сторін b та c .

Теорему доведено. ■

Ще одним важливим наслідком теореми косинусів є теорема Стюарта про формулу довжини чевіани трикутника.

Теорема 4. (Стюарта). *Для довільної точки D на стороні BC трикутника ABC виконується рівність:*

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC.$$

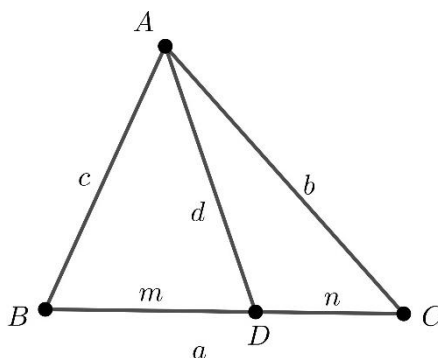


Рис. 12. Трикутник ABC до теореми 4

Зауваження. Якщо використати позначення $AD = d$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $BD = m$, $DC = n$, то теорема Стюарта матиме вигляд:

$$ad^2 = c^2n + b^2m - amn,$$

що можна переписати як

$$man + dad = bmb + cnc.$$

Тому для запам'ятовування цієї теореми можна скористатися мнемонічною фразою англійською мовою «**A man** and his **dad** put a **bomb** in the **sink**».

Доведення. Для доведення використаємо рис. 12 та позначення, введені в зауваженні до теореми.

Запишемо наслідок з теореми косинусів для трикутника ABC та кута B :

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

і той самий наслідок для цього ж кута B в трикутнику ABD :

$$\cos B = \frac{c^2 + m^2 - d^2}{2cm}.$$

Прирівнюємо результати в правих частинах

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{c^2 + m^2 - d^2}{2cm}$$

та множимо обидві частини рівності на вираз $2acm$

$$m(a^2 + c^2 - b^2) = a(c^2 + m^2 - d^2).$$

Після спрощень отримаємо рівність

$$a^2m + c^2m - b^2m = c^2a + m^2a - d^2a$$

або переставляючи доданки:

$$d^2a = c^2a + m^2a - a^2m - c^2m + b^2m.$$

Зауважимо, що $a = m + n$, тому справедливі рівності:

$$d^2a = c^2(m + n) + m^2a - a^2m - c^2m + b^2m,$$

$$d^2a = c^2m + c^2n + m^2a - a^2m - c^2m + b^2m,$$

$$d^2a = c^2n - am(a - m) + b^2m.$$

Оскільки $a - m = n$, то

$$d^2a = c^2n + b^2m - amn,$$

що і треба було довести. ■

Наслідками теореми Стюарта є формули довжини медіани (див. теорему 2) та довжини бісектриси довільного трикутника. Наведемо їх.

Наслідок 4.1. (Формула довжини медіани). *Для медіани, проведеної до сторони a трикутника ABC , виконується рівність*

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Доведення (другий спосіб). Якщо $AD = d = m_a$ – медіана (рис. 13), то

$$m = \frac{a}{2}, \quad n = \frac{a}{2}.$$

За теоремою Стюарта маємо, що $d^2 a = c^2 n + b^2 m - amn$.

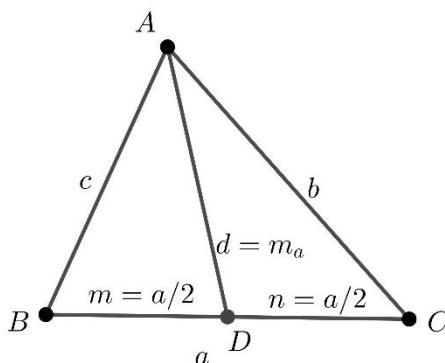


Рис. 13. Трикутник ABC до наслідку 4.1

Підставимо в цю рівність наші дані

$$m_a^2 a = \frac{ac^2}{2} + \frac{ab^2}{2} - \frac{a^3}{4}$$

та поділимо на a

$$m_a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

що і треба було довести. ■

Наслідок 4.2. (Формула довжини бісектриси). Для бісектриси l_a кута A трикутника ABC виконується рівність

$$l_a = \sqrt{bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right)}.$$

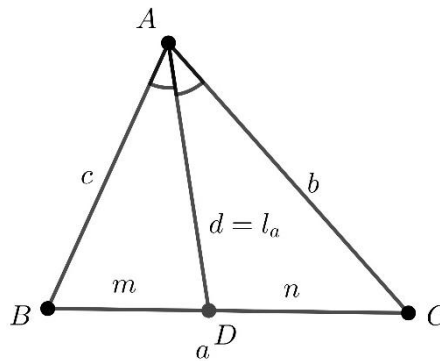


Рис. 14. Трикутник ABC до наслідку 4.2

Доведення. За властивістю бісектриси трикутника

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{cx}{bx}$$

і $BC = BD + DC$, тобто

$$a = bx + cx \Rightarrow x = \frac{a}{b+c}.$$

Тому маємо, що

$$m = cx = \frac{ac}{b+c}$$

і

$$n = bx = \frac{ab}{b+c}.$$

Крім того $d = l_a$ (рис. 14).

Тоді в рівності з теореми Стюарта $d^2a = c^2n + b^2m - atn$ підставимо отримані дані:

$$l_a^2 a = \frac{abc^2}{b+c} + \frac{ab^2c}{b+c} - \frac{a^3bc}{(b+c)^2},$$

поділимо на a та добудемо корінь з обох частин рівності:

$$l_a^2 = \frac{bc^2}{b+c} + \frac{b^2c}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc \left(\frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c} - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) = bc \left(\frac{b+c}{b+c} - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right),$$

$$l_a^2 = bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right) \Rightarrow l_a = \sqrt{bc \left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right)},$$

що і треба було довести. ■

Зауваження. Аналогічно для інших бісектрис:

$$l_b = \sqrt{ac \left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2} \right)};$$

$$l_c = \sqrt{ab \left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2} \right)}.$$

4. Застосування наслідків теореми косинусів до розв'язування задач поглибленого рівня.

Задача 9. ABC – правильний трикутник з стороною a . Точка D належить стороні AB . $DK \parallel BC$, $DL \parallel AC$, $KL = d$. Знайти площу трикутника DKL . При яких значеннях параметра d задача має розв'язок?

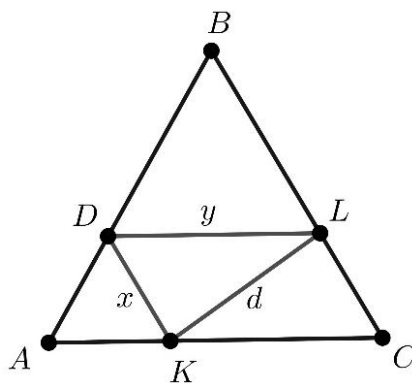


Рис. 15. Трикутник ABC до задачі 9

Розв'язання. Нехай $DK = x$, $DL = y$ (див. рис. 15). При будь-якому розташуванні точки D на відрізку AB виконується рівність

$$x + y = a,$$

оскільки $AD = KD$, $DL = LB$.

З формули (6) для трикутника DKL : $d^2 = (x + y)^2 - 4S \operatorname{ctg} 30^\circ$, тобто

$$d^2 = a^2 - 4S \operatorname{ctg} 30^\circ = a^2 - S\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{a^2 - d^2}{4\sqrt{3}}.$$

У трикутнику DKL за теоремою косинусів:

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy = x^2 + (a - x)^2 - x(a - x) = \\ &= 3x^2 - 3xa + a^2 = 3(x^2 - xa) + a^2 = 3\left(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}\right) - \frac{3a^2}{4} + a^2 = 3\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Отже,

$$d^2 \geq \frac{a^2}{4} \Rightarrow 0 < d \leq \frac{a}{2}.$$

Відповідь: $S_{DKL} = \frac{a^2 - d^2}{4\sqrt{3}}, 0 < d \leq \frac{a}{2}.$

Зацікавленому читачу пропонуємо розв'язати наступні задачі.

Доведіть, що у довільному трикутнику ABC справджуються рівності:

$$1) ab \cos C + ac \cos B + bc \cos A \geq \frac{1}{6} P^2,$$

де P – периметр трикутника.

$$2) \frac{a(a - b + c)}{b(b + c - a)} = \frac{1 - \cos A}{1 - \cos B},$$

$$3) \frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c} = \frac{r}{R},$$

де r та R – радіуси вписаного та описаного навколо трикутника ABC кіл відповідно.

5. Висновки

Дана стаття, адресована учасникам освітнього процесу та усім, хто любить математику, висвітлює ширші можливості застосування класичної теореми косинусів, ніж зазвичай це відображено у шкільній навчальній літературі. Зокрема, у ній показано користь від застосування теореми косинусів та наслідків з неї для розв'язування

завдань олімпіадного і турнірного характеру, виведено ряд важливих тверджень для трикутників, які допомагають у дослідженні геометричних об'єктів різної конструкції.

Авторський колектив щиро сподівається, що текст статті стане у пригоді читачам при розв'язуванні різноманітних геометричних задач або ж під час складання власних умов, які у майбутньому можна буде використати у навчальному або змагальному процесі.

Внесок авторів

Катерина Давидова – концептуалізація ідеї статті, написання початкового варіанта (чернетки) тексту. Катерина Лукаш – аналіз джерел, перегляд і редагування, внесення змін і доповнень до тексту статті. Василь Бакай – аналіз джерел, підбір текстів задач та підготовка їхніх розв'язувань. Олексій Печериця – концептуалізація ідеї статті, перегляд і редагування, внесення змін і доповнень до тексту статті.

Подяка

Стаття присвячена Савченку Леоніду Мироновичу (24.07.1945 – 14.09.2021) – Вчителю, який понад 50 років свого життя присвятив Українському фізико-математичному ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, який умів показати красу математики та закохати у неї на все життя, автору підручника з геометрії для 8 - 9 класів з поглибленим вивченням математики та спецкурсу «Краса і творчість у математиці» для слухачів інституту вдосконалення вчителів імені Бориса Грінченка.

Джерела фінансування

Це дослідження не отримало жодного гранту від фінансових установ у державному, комерційному чи некомерційному секторах.

Список використаних джерел

- Апостолова Г. В. (2006). Геометрія : підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза. 256 с.
- Бурда М. І., Савченко Л. М. (2004). Геометрія : навчальний посібник для 8–9 класів шкіл з поглибленим вивченням математики. Київ : Освіта, 238 с.
- Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. (2014). Геометрія. 9 клас : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. 5-те вид. Харків : Видавництво «Ранок». 256 с.
- Лебедева І.В., Чубикіна А.О., 25 способів підкорити теорему Піфагора: від класики до сучасності // *У світі математики* 2025, випуск 1. С. 54-77. DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5>
- Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. (2017). Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 304 с.
- Нікулін О. В., Кукуш О. Г. (1999). Геометрія. Поглиблений курс: 7–9 класи : навчальний посібник. Київ ; Ірпінь : ВТФ «Перун». 352 с.

Рубльов Б.В., та ін. (2018). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016/17 навчальний рік : навчально-методичний посібник / А. В. Анікушин, А. В. Лисакевич, В. Г. Лішунов та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія. 464 с.

Рубльов Б.В., та ін. (2019). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2017/18 навчальний рік : навчально-методичний посібник / А. В. Анікушин, І. В. Жук, А. В. Лисакевич та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія. 464 с.

Рубльов Б.В., та ін. (2020). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2018/19 навчальний рік : навчально-методичний посібник / А. В. Анікушин, І. Жук, О. Мекуш та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія. 464 с.

XVIII Всеукраїнський турнір математичних боїв. Розклад першого бою. Результати усної командної олімпіади. URL: <https://matholymp.com.ua/vseukrayinskii-cikl/xviii-vseukrayinskii-turnir-matematichnix-boyiv-rozklad-persogo-boyu-rezultati-usnoyi-commnadnoyi-olimpiadi-25k632> (дата звернення: 24.06.2026).

References

Apostolova G. V. (2006). Geometry: a textbook for the 9th grade of secondary schools. Kyiv: Geneza. 256 p. [in Ukrainian].

Burda M. I., Savchenko L. M. (2004). Geometry: a textbook for the 8th–9th grades of schools with in-depth study of mathematics. Kyiv: Osvita, 238 p. [in Ukrainian].

Yershova A. P., Holoborodko V. V., Kryzhanovsky O. F., Yershov S. V. (2014). Geometry. 9th grade: a textbook for secondary schools. 5th ed. Kharkiv: Publishing house "Ranok". 256 p. [in Ukrainian].

Lebedeva I.V., Chubykina A.O., 25 ways to conquer the Pythagorean theorem: from classics to modernity // In the world of mathematics 2025, issue 1. P. 54-77. DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5> [in Ukrainian].

Merzlyak A. G., Polonsky V. B., Yakir M. S. (2017). Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for the 9th grade of general educational institutions. Kharkiv: Gymnasium, 304 p. [in Ukrainian].

Nikulin O. V., Kukush O. G. (1999). Geometry. Advanced course: grades 7–9: a textbook. Kyiv; Irpin: VTF "Perun". 352 p. [in Ukrainian].

Rublev B.V., et al. (2018). Mathematical Olympiads of Schoolchildren of Ukraine: 2016/17 academic year: teaching and methodological manual / A. V. Anikushin, A. V. Lysakevych, V. G. Lishunov et al. ; ed. B. V. Rublev. Kharkiv: Gymnasium. 464 p. [in Ukrainian].

Rublev B.V., et al. (2019). Mathematical Olympiads of Schoolchildren of Ukraine: 2017/18 academic year: teaching and methodological manual / A. V. Anikushin, I. V. Zhuk, A. V. Lysakevych et al. ; ed. B. V. Rublev. Kharkiv: Gymnasium. 464 p. [in Ukrainian].

Rublev B.V., et al. (2020). Mathematical Olympiad Competitions of Schoolchildren of Ukraine: 2018/19 Academic Year: Educational and Methodological Guide / A. V. Anikushin, I. Zhuk, O. Mekush and others; ed. B. V. Rublyova. Kharkiv: Gymnasium. 464 p. [in Ukrainian].

XVIII All-Ukrainian Tournament of Mathematical Battles. Schedule of the First Battle. Results of the Oral Team Olympiad. URL: <https://matholymp.com.ua/vseukrayinskii-cikl/xviii-vseukrayinskii-turnir-matematichnix-boyiv-rozklad-persogo-boyu-rezultati-usnoyi-commnadnoyi-olimpiadi-25k632> (access date: 06/24/2026). [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 20.04.2026

Прийнято до публікації: 19.06.2026

Опубліковано: 30.07.2026

Vasyl BAKAI, Teacher of Mathematics

ORCID ID: 0009-0001-4960-7490

e-mail: wassyl2001@knu.ua

Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Kateryna DAVYDOVA, Teacher of Mathematics of Higher Category, Teacher-Methodist

ORCID ID: 0009-0008-3067-8695

e-mail: kotica70@gmail.com

Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Kateryna LUKASH, Ph.D (Phys&Math), Honored Teacher of Ukraine,

teacher of mathematics of higher category, teacher-methodist

ORCID ID: 0009-0006-6110-4921

e-mail: lukash_k@ukr.net

Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksii PECHERYTSIA, PhD in Mathematics and Statistics,

teacher of mathematics of higher category, teacher-methodist

ORCID ID: 0000-0001-7016-9854

e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua

Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

AROUND THE LAW OF COSINES

Abstract. *This article examines the law of cosines and its corollaries – a simple and fundamental tool of geometry that expands students' capabilities in solving triangle problems. Special attention is given to problem-solving, particularly advanced-level and mathematical olympiad problems. The article is dedicated to Leonid M. Savchenko (July 24, 1945 – September 14, 2021), a Teacher who devoted more than 50 years of his life to the Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum of Taras Shevchenko National University of Kyiv. He had a unique ability to reveal the beauty of mathematics and inspire a lifelong love for it. He was the author of a geometry textbook for grades 8-9 with advanced study of mathematics and of the special course "Beauty and Creativity in Mathematics" for participants of the Borys Grinchenko Institute for Teacher Professional Development. The article is intended for school students, teachers of general secondary education institutions, and everyone who loves mathematics.*

Keywords: *law of cosines; corollaries of the law of cosines; advanced geometry problems; mathematical olympiad geometry problems.*

Received: 20.04.2026

Accepted for publication: 19.06.2026

Published: 30.07.2026