

УДК 511.14

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.8>

Олександр КУРЧЕНКО, Д-р. фіз.-мат. наук, Доц.

ORCID ID: 0000-0002-0417-5970

e-mail: oleksandrkurchenko@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ольга СИНЯВСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.

ORCID ID: 0000-0002-2711-3940

e-mail: olga.synavaska@uzhnu.edu.ua

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород, Україна

ДО ЗОБРАЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ДЕСЯТКОВИМИ ДРОБАМИ

Анотація. *Перехід від звичайних дробів до десяткових є однією з важливих тем арифметики, що поєднує елементарну математику з деякими значними результатами із теорії чисел. У статті досліджено питання зображення раціональних чисел десятковими дробами. Доведено теорему про зображення раціональних чисел скінченними десятковими дробами та теорему про зображення раціональних чисел чисто періодичними десятковими дробами. Також розглянуто перетворення нескінченного періодичного десяткового дроби у звичайний дріб. Для аналізу довжини періоду десяткового дроби, що відповідає звичайному дроби, застосовано основні поняття теорії чисел, зокрема функцію Ейлера, порядок числа за модулем та теорему Ейлера. Наведено низку прикладів, які ілюструють застосування отриманих теоретичних результатів.*

Ключові слова: *раціональне число; дріб; десятковий дріб; періодичний дріб; прості числа; взаємно прості числа.*

1. Вступ

Проблема зображення раціональних чисел десятковими дробами є однією з фундаментальних у шкільному курсі математики й має важливе значення для формування числових уявлень та розвитку логічного мислення.

Вивчення десяткових дробів у закладах загальної середньої освіти України (5-6 класи) зазнало суттєвих змін із впровадженням концепції Нової української школи (НУШ). Основний акцент змістився із механічного виконання різних арифметичних операцій на розуміння суті процесів та застосуванні знань, навичок та вмінь при розв'язуванні задач дослідницького характеру (Істер, 2021).

Об'єктом дослідження є раціональні числа.

Метою дослідження є теоретичне обґрунтування властивостей десяткових дробів, що зображують раціональні числа, а також застосування деяких важливих понять з теорії чисел для дослідження періодичності та довжини періоду десяткових дробів.

Нехай додатне раціональне число задано у вигляді звичайного дроби $\frac{p}{q}$, де p, q – натуральні числа. Надалі будемо вважати, що цей дріб нескоротний, тобто натуральні числа p, q не мають спільних дільників, відмінних від одиниці. Такі числа називаються

взаємно простими (Безущак, Ганюшкін, 2003). Наприклад, 3 і 8 – взаємно прості числа, дріб $\frac{3}{8}$ нескоротний.

2. Зображення раціональних чисел скінченними десятковими дробами

Наступна теорема містить необхідні і достатні умови зображення нескоротного звичайного дробу у вигляді скінченного десятикового дробу.

Теорема 1. Нескоротний звичайний дріб $\frac{p}{q}$ ($p \cdot q \neq 0$) зображується у вигляді скінченного десятикового дробу тоді й тільки тоді, коли знаменник q є дільником деякого натурального степеня числа 10.

Доведення. Необхідність. Нехай нескоротний звичайний дріб $\frac{p}{q}$ зображується у вигляді скінченного десятикового дробу, тобто для деякого натурального числа n справджується рівність

$$\frac{p}{q} = a_0, a_1 \dots a_n, \quad (1)$$

де a_0 – натуральне число або нуль, $a_1, \dots, a_n$ – цифри десятикової системи числення, тобто цілі числа від нуля до дев'яти.

Помножимо праву і ліву частини рівності (1) на десять у степені n . Отримаємо рівність

$$\frac{p \cdot 10^n}{q} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n.$$

Права частина цієї рівності – ціле число. Отже, $\frac{p \cdot 10^n}{q}$ також ціле число. Оскільки числа p, q взаємно прості, то q є дільником числа 10^n .

Достатність. Нехай нескоротний звичайний дріб $\frac{p}{q}$ такий, що q є дільником числа 10^n для деякого натурального числа n . Покладемо $m = \frac{10^n}{q}$. Тоді

$$\frac{p}{q} = \frac{pm}{qm} = \frac{pm}{10^n}$$

є скінченим десятиковим дробом.

Теорему доведено. ■

Приклад 1. Розглянемо нескоротний правильний дріб $\frac{7}{25}$. Число 25 є дільником числа 100: $\frac{100}{25} = 4$. Маємо $\frac{7}{25} = \frac{7 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{28}{100} = 0,28$ – скінченний десятиковий дріб. До цього ж результату приводить ділення у стовпчик.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r|l}
 70 & 25 \\
 \hline
 50 & 0,28 \\
 \hline
 200 & \\
 \hline
 200 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}
 \end{array}$$

Нескінченні десяткові дробі з періодом дев'ять або нуль дорівнюють відповідним скінченним десятковим дробам. Наприклад, $3,13(9) = 3,14(0) = 3,14$. Тому надалі будемо розглядати нескінченні десяткові дробі без періоду дев'ять або нуль.

Теорема 2. Нехай $\frac{p}{q}$ – нескоротний звичайний дріб і при жодному натуральному числу n знаменник q не є дільником числа 10^n . Тоді дріб $\frac{p}{q}$ зображується нескінченним періодичним десятковим дробом.

Доведення. Нехай знаменник q звичайного дробу $\frac{p}{q}$ не є дільником числа 10^n для жодного натурального n . Виконаємо ділення $p:q$ у стовпчик.

Якщо процес ділення закінчиться на скінченному кроці, то дріб $\frac{p}{q}$ зобразиться скінченним десятковим дробом.

Внаслідок теореми 1 знаменник q буде дільником деякого натурального степеня числа 10, що суперечить умові теореми 2. Отже, процес ділення не закінчиться на скінченному кроці.

Доведемо, що нескінченний дріб, отриманий у результаті ділення $p:q$ буде періодичним. Дійсно, після того, як у частці з'явиться кома, на кожному кроці ділення будуть зноситися нулі. При цьому у процесі ділення нулі будуть приписуватися до остач від ділення на q , тобто до одного з чисел $1, 2, \dots, q-1$.

При повторенні остач процес ділення зациклиться, що приведе до нескінченного періодичного десяткового дробу.

Теорему доведено. ■

Наслідок 1. Кожне раціональне число зображується скінченним або нескінченним періодичним десятковим дробом.

Наведемо приклад зображення звичайного дробу у вигляді нескінченного періодичного дробу.

Приклад 2. Напишемо у вигляді десяткового дробу нескоротний звичайний дріб $\frac{12}{7}$. Зауважимо, що для довільного натурального числа n число 7 не є дільником числа $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Тому у результаті маємо отримати нескінченний періодичний дріб. Виконаємо ділення у стовпчик.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 12 \\
 - 7 \\
 \hline
 50 \\
 - 49 \\
 \hline
 10 \\
 - 7 \\
 \hline
 30 \\
 - 28 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 \dots
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 \hline
 1,7142857 \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

Отже, $\frac{12}{7} = 1, (714285)$ – чисто періодичний десятковий дріб.

3. Перетворення нескінченного періодичного дробу у звичайний

Нагадаємо формулу для суми членів геометричної прогресії із знаменником $q \in (-1; 1)$:

$$q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q}{1 - q}. \quad (2)$$

Нехай $a_0, a_1 \dots a_m(b_1 \dots b_n)$ – періодичний десятковий дріб. Покладемо

$$A = 10^{m-1}a_1 + 10^{m-2}a_2 + \dots + 10a_{m-1} + a_m,$$

$$B = 10^{n-1}b_1 + 10^{n-2}b_2 + \dots + 10b_{n-1} + b_n.$$

Маємо:

$$\begin{aligned}
 & a_0, a_1 \dots a_m(b_1 \dots b_n) = \\
 & = a_0 + 10^{-m}(A + B(10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \dots)) = \\
 & = 10^{-m} \left(A + B \cdot \frac{10^{-n}}{1 - 10^{-n}} \right).
 \end{aligned} \quad (3)$$

В останній рівності застосована формула (2) для $q = 10^{-n}$. Далі,

$$A + B \cdot \frac{10^{-n}}{1 - 10^{-n}} = A + \frac{B}{10^n - 1} = \frac{A \cdot \underbrace{9 \dots 9}_n + B}{\underbrace{9 \dots 9}_n}. \quad (4)$$

Із рівностей (3), (4) випливає, що

$$a_0, a_1 \dots a_m(b_1 \dots b_n) = a_0 + \frac{A \cdot \underbrace{9 \dots 9}_n + B}{\underbrace{9 \dots 9}_n \underbrace{0 \dots 0}_m}. \quad (5)$$

Приклад 3.

$$0,1(23) = \frac{99 + 23}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}.$$

Для чисто періодичного десяткового дробу формула (5) спроститься:

$$a_0, (b_1 \dots b_n) = a_0 + \frac{B}{\underbrace{9 \dots 9}_n}. \quad (6)$$

Приклад 4.

$$1, (714285) = 1 + \frac{714285}{999999} = 1 + \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}{3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = 1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}.$$

Наступні, важливі у теорії чисел, поняття будуть потрібні для дослідження довжини періоду десяткового дробу, що зображує звичайний дріб.

4. Функція Ейлера, порядок числа за модулем. Теорема Ейлера

Функція Ейлера $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ визначається наступним чином: для натурального числа m значення функції Ейлера $\varphi(m)$ дорівнює кількості всіх натуральних чисел, які взаємно прості з m і не перевищують m (Оглобіна, Сушко, Шрамко, 2015). Зрозуміло, що $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1$. Для $m \geq 2$: $\varphi(m) \leq m - 1$. Для простого числа p : $\varphi(p) = p - 1$.

Приклад 5. Знайдемо $\varphi(12)$. Серед чисел від 1 до 11 лише чотири числа, а саме: 1, 5, 7, 11 взаємно прості з числом 12. Тому $\varphi(12) = 4$.

У теорії чисел доводять такі властивості функції Ейлера (Raji, 2013):

1. Мультиплікативність. Для взаємно простих натуральних чисел m, n :

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

2. Для простого числа p і натурального числа k :

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

3. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n на прості множники. Тоді

$$\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1}). \quad (7)$$

Приклад 6. Розклад числа 12 на прості множники: $12 = 2^2 \cdot 3$. За формулою (7),

$$\varphi(12) = (2^2 - 2) \cdot (3 - 1) = 4.$$

Теорема Ейлера. Нехай натуральні числа a, m – взаємно прості. Тоді m є дільником числа $a^{\varphi(m)} - 1$.

Для взаємно простих натуральних чисел $a, m \geq 2$ твердження теореми означає, що число $a^{\varphi(m)}$ при діленні на m має остачу 1.

У теорії чисел це записують так (Raji, 2013):

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}. \quad (8)$$

Формула (8) читається так: a у степені $\varphi(m)$ дорівнює одиниці за модулем m .

Приклад 7. Нехай $a = 5, m = 12$. Ці числа взаємно прості, $\varphi(12) = 4$. Із теореми Ейлера слідує, що $5^4 - 1$ ділиться на 12 без остачі.

Нехай $m = p$ – просте число, a – натуральне число, взаємно просте з числом p . Тоді $\varphi(m) = \varphi(p) = p - 1$ і, внаслідок теореми Ейлера, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Це твердження називають *малою теоремою Ферма* (Raji, 2013).

Нехай a, m – взаємно прості натуральні числа. Порядком числа a за модулем m (відносно числа m) називається найменше натуральне число k таке, що $a^k - 1$ ділиться без остачі на число m . Позначення: $P_m(a), \text{ord}_m a$. Для $a, m \geq 2$ порядок $P_m(a)$ дорівнює найменшому натуральному числу k такому, що $a^k \equiv 1 \pmod{m}$ (Raji, 2013).

Внаслідок теореми Ейлера $P_m(a) \leq \varphi(m)$ для довільного натурального числа a , взаємно простого з натуральним числом m .

Приклад 8. Для $p = 37$ (просте число): $\varphi(37) = 37 - 1 = 36$; 10 і 37 – взаємно прості числа. Знайдемо $P_{37}(10)$. Маємо:

$$10^1 = 37 \cdot 0 + 10;$$

$$10^2 = 37 \cdot 2 + 26;$$

$$10^3 = 37 \cdot 27 + 1,$$

звідси слідує, що $P_{37}(10) = 3$.

Лема 1. Нехай a, m – взаємно прості натуральні числа, $a, m \geq 2$, n – натуральне число, $a^n \equiv 1 \pmod{m}$. Тоді число n ділиться на порядок $P_m(a)$ без остачі.

Доведення. Для скорочення запису $P_m(a)$ позначимо літерою $k = P_m(a)$. Для доведення твердження застосуємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що число n ділиться на порядок $P_m(a)$ з остачею, тобто

$$n = bk + r,$$

де b, r – натуральні числа, $1 \leq r \leq k - 1$. Тоді $a^n = a^{bk+r} = a^{bk} \cdot a^r$. Далі, $(a^{bk}) = (a^k)^b$. За означенням порядку $P_m(a)$, a^k при діленні на m має остачу 1, a^r має остачу, відмінну від 1. Далі, $(a^k)^b$ має остачу 1 від ділення на m . Тоді число $a^n = a^{bk} \cdot a^r$ має від ділення на m остачу, відмінну від 1. Отримали суперечність. Отже, n ділиться на порядок $P_m(a)$ без остачі.

Лему доведено. ■

Наслідок 2. Порядок $P_m(a)$ є дільником значення функції Ейлера $\varphi(m)$.

Доведення. За теоремою Ейлера $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, тобто число $a^{\varphi(m)}$ від ділення на m має остачу 1. Внаслідок леми 1 порядок $P_m(a)$ є дільником числа $\varphi(m)$.

Наслідок доведено. ■

5. Зображення чисто періодичним десятковим дробом

Теорема 3. Звичайний нескоротний правильний дріб $\frac{p}{q}$ зображується чисто періодичним десятковим дробом тоді і тільки тоді, коли числа 2 і 5 не є дільниками знаменника q .

Доведення. Необхідність. Нехай

$$\frac{p}{q} = 0, (b_1 \dots b_n).$$

За правилом перетворення десяткового дробу у звичайний,

$$0, (b_1 \dots b_n) = \frac{B}{\underbrace{9 \dots 9}_n},$$

де

$$B = 10^{n-1}b_1 + 10^{n-2}b_2 + \dots + 10b_{n-1} + b_n.$$

123

Приклад 10. Розглянемо дріб $\frac{1}{6}$. Жодний степінь числа 10 не є кратним числу 6 і тому $\frac{1}{6}$ зображується нескінченним десятковим дробом. Знаменник 6 має множник 2 і тому періодичний десятковий дріб буде змішаним періодичним. За допомогою ділення в стовпчик знаходимо цей змішаний періодичний дріб:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 10 \\ - 6 \\ \hline 40 \\ - 36 \\ \hline 40 \end{array} \quad \begin{array}{l} \overline{) 6} \\ 0,166 \end{array} \end{array}$$

звідки $\frac{1}{6} = 0,1(6)$.

6. Висновки

Дана стаття присвячена дослідженню зображення раціональних чисел десятковими дробами. У роботі розглянуто властивості скінченних і періодичних десяткових дробів, а також застосовано елементи теорії чисел для аналізу довжини періоду десяткового дробу. Актуальність дослідження полягає у поглибленні теоретичних уявлень про десяткові дробі, що зображують раціональні числа, і можливості використання отриманих результатів у навчальній та науковій діяльності.

Внесок авторів

Олександр Курченко – концептуалізація; методологія, написання; Ольга Синявська – аналіз джерел, підготовка огляду літератури, написання, перегляд і редагування.

Список використаних джерел

- Raji, W. (2013). *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Saylor Academy. <https://resources.saylor.org/wwwresources/archived/site/wp-content/uploads/2013/05/An-Introductory-in-Elementary-Number-Theory.pdf>
- Безущак, О.О. & Ганюшкін, О.Г. (2003). *Елементи теорії чисел*: Навчальний посібник. К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». 203 с.
- Істер, О.С. (2021). *Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи»* для закладів загальної середньої освіти. Міністерство освіти і науки України. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>
- Оглобіна, О.І., Сушко, Т.С., & Шрамко, Ю.В. (2015). *Елементи теорії чисел*: Навчальний посібник. Суми: Сумський державний університет. 186 с. <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/42788>

Raji, W. (2013). *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Saylor Academy. <https://resources.saylor.org/wwwresources/archived/site/wp-content/uploads/2013/05/An-Introductory-in-Elementary-Number-Theory.pdf>

Bezushchak, O. O. & Haniushkin, O. H. (2003). *Elements of number theory: A textbook*. Kyiv University Publishing and Printing Center. 203 p. [in Ukrainian].

Ister, O. S. (2021). *Model curriculum "Mathematics. Grades 5-6"* for institutions of general secondary education. Ministry of Education and Science of Ukraine. [in Ukrainian]. <https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/>

Ohlobina, O. I., Sushko, T. S., & Shramko, Y. V. (2015). *Elements of number theory: A textbook*. Sumy State University. <http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/42788> [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 20.11.2025

Прийнято до публікації: 19.06.2026

Опубліковано: 30.07.2026

Olexandr KURCHENKO, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0002-0417-5970

e-mail: oleksandrurchenko@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Olga SYNIAVSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.

ORCID ID: 0000-0002-2711-3940

e-mail: olga.syniavska@uzhnu.edu.ua

Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine

ON THE REPRESENTATION OF RATIONAL NUMBERS AS DECIMAL FRACTIONS

Abstract. *The transition from common fractions to decimal fractions is one of the essential topics in arithmetic, bridging elementary mathematics with significant results in number theory.*

This article explores the representation of rational numbers as decimal fractions. A theorem on the representation of rational numbers as finite decimal fractions and a theorem on the representation of rational numbers as purely periodic decimal fractions are proved. Furthermore, the conversion of infinite periodic decimal fractions into common fractions is examined. To analyze the period length of a decimal fraction corresponding to a common fraction, fundamental concepts of number theory are applied, specifically Euler's totient function, the order of a number modulo n , and Euler's theorem. A substantial number of examples illustrating the application of the obtained theoretical results are provided

Keywords: *rational number; fraction; decimal fraction; periodic fraction; prime numbers; coprime numbers.*

Received: 20.11.2025

Accepted for publication: 19.06.2026

Published: 30.07.2026