

Аліна КРУГЛЯК, Студентка

ORCID: 0009-0005-9502-5407

e-mail: krugluakalina@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИНАМІЧНОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ GEOGEBRA

Анотація. Статтю присвячено теоретичному обґрунтуванню та практичній реалізації методики моделювання векторів у тривимірному просторі засобами динамічного математичного середовища GeoGebra. У роботі проаналізовано інструментарій середовища в контексті оперування стереометричними об'єктами, а також досліджено ефективність поєднання алгебраїчного та графічного підходів до інтерпретації математичних даних. Реалізовано алгоритми побудови просторових векторів та виконання базових лінійних операцій: додавання, віднімання та множення вектора на число. Особливу увагу приділено верифікації результатів шляхом синхронізації аналітичних обчислень із їхньою візуалізацією в тривимірному просторі, що сприяє глибшому розумінню геометричної природи векторних операцій.

Практична значущість полягає у розробці інтерактивних моделей із використанням вбудованої мови сценаріїв (Scripting). Це дозволило автоматизувати обчислювальні процеси та створити адаптивний інтерфейс користувача для проведення експериментів із просторовими залежностями. Показано, що впровадження таких динамічних моделей в освітній процес інтенсифікує розвиток просторової уяви та підвищує рівень засвоєння тем стереометрії. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням функціональних можливостей створеної бібліотеки моделей та інтеграцією складніших алгоритмів автоматизації для розв'язування прикладних задач геометрії.

Ключові слова: вектори; тривимірний простір; операції з векторами; середовище GeoGebra.

1. Вступ

Сучасна парадигма математичної освіти в умовах цифровізації суспільства вимагає пошуку нових дидактичних підходів, що забезпечують перехід від репродуктивного засвоєння знань до формування глибинних когнітивних структур. Вивчення векторної алгебри у просторі є фундаментом для розвитку просторового мислення, що має критичне значення для підготовки фахівців науково-технічного профілю. Проте практика викладання засвідчує наявність суттєвого розриву між алгоритмічними навичками обчислень та усвідомленим розумінням геометричної суті векторних операцій. Традиційні статичні ілюстрації часто не дозволяють учням повноцінно опанувати динамічну природу векторних перетворень у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$, що зумовлює необхідність впровадження інтерактивних засобів візуалізації.

Складність опанування навчального матеріалу «Вектори у просторі» при вивченні теми «Координати і вектори» зумовлена високим рівнем абстракції об'єктів, які не

завжди мають прямі фізичні аналоги в емпіричному досвіді учня. Операції додавання, віднімання та скалярного чи векторного множення часто сприймаються як сукупність формальних арифметичних дій з координатами. Водночас фундаментальне розуміння теми базується на візуалізації геометричних інтерпретацій, таких як правила трикутника чи паралелепіпеда, проєкції векторів та зміна їхньої орієнтації.

У сучасних умовах цифровізації освіти та активного впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у навчальний процес зростає роль динамічних математичних середовищ як ефективних засобів візуалізації, дослідження та моделювання математичних об'єктів. Одним із найбільш поширених і доступних інструментів такого типу є програмне забезпечення GeoGebra, яке поєднує можливості геометрії, алгебри, аналізу та статистики в єдиному інтерактивному середовищі. Завдяки відкритості платформи та її орієнтації на освітні потреби GeoGebra широко використовується як у шкільній, так і у вищій математичній освіті.

Питання методики викладання векторної алгебри засобами ІКТ перебуває у центрі уваги багатьох дослідників. Зокрема, (Чубей, 2023) обґрунтовує ефективність використання GeoGebra для формування цілісного уявлення про вектор, наголошуючи на важливості візуалізації при роботі з координатами. Педагогічні аспекти інтеграції цього програмного забезпечення у загальний курс математики детально розкриті у роботі (Усата, 2019), де акцентується на подоланні труднощів при експонуванні просторових об'єктів. Своєю чергою, Н. Титаренко та Е. Муртазієв (Титаренко, Муртазієв, 2019) вказують на зростання навчальної мотивації та якості знань завдяки використанню динамічних моделей, що унаочнюють абстрактні властивості геометричних фігур. Узагальнення наявних наукових доробків підтверджує, що дидактичний потенціал середовища GeoGebra є вагомим чинником модернізації навчання стереометрії.

Об'єктом дослідження є процес вивчення та засвоєння учнями основних понять і операцій векторної алгебри у шкільному курсі геометрії з використанням динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra.

Мета дослідження – підвищити ефективність вивчення векторів у просторі шляхом інтеграції динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra в освітній процес.

Далі в роботі буде проаналізовано та систематизовано теоретичний матеріал з теми «Вектори у просторі»; розглянуто особливості застосування програмного забезпечення GeoGebra для візуалізації векторних операцій (додавання, віднімання, множення на число); розроблено методичні рекомендації щодо використання GeoGebra на уроках геометрії; експериментально перевірено ефективність запропонованих методик.

2. Функції GeoGebra для роботи з векторами

Особливе місце у курсах алгебри, геометрії та аналітичної геометрії посідає вивчення векторів та векторних операцій. Векторний апарат є фундаментальним інструментом для опису геометричних перетворень, розв'язування задач з планіметрії

та стереометрії, а також для подальшого опанування лінійної алгебри, фізики та інженерних дисциплін. Проте абстрактність векторних понять часто ускладнює їх сприйняття студентами та учнями, особливо на початкових етапах навчання. У цьому контексті використання динамічних середовищ, зокрема GeoGebra, дозволяє значно підвищити наочність і зрозумілість відповідного навчального матеріалу.

GeoGebra надає широкий набір функцій і команд для роботи з векторами, що охоплюють їх створення, задання координат, виконання основних векторних операцій (додавання, віднімання, множення на число), обчислення довжини, скалярного добутку, а також дослідження взаємного розміщення векторів. Інтерактивний характер середовища дозволяє в режимі реального часу спостерігати за зміною властивостей векторів при варіюванні вихідних параметрів, що сприяє формуванню глибшого розуміння математичних закономірностей.

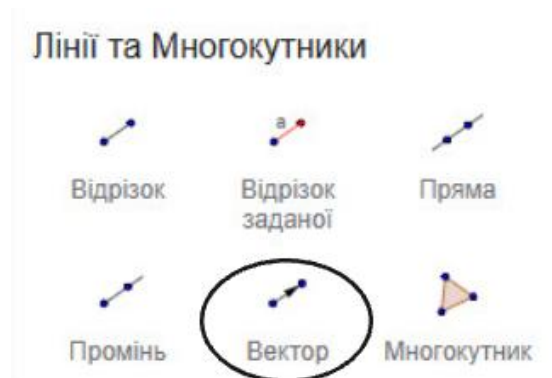


Рис. 1. Інструмент «Вектор» панелі «Лінії та Многокутники» середовища GeoGebra

У динамічному математичному середовищі GeoGebra робота з векторами реалізується за допомогою спеціалізованих інструментів та функцій, зосереджених, зокрема, у розділі «Лінії та Многокутники». У цьому розділі наявний інструмент «Вектор», який дозволяє будувати вектори як у двовимірному, так і в тривимірному просторі (рис. 1).

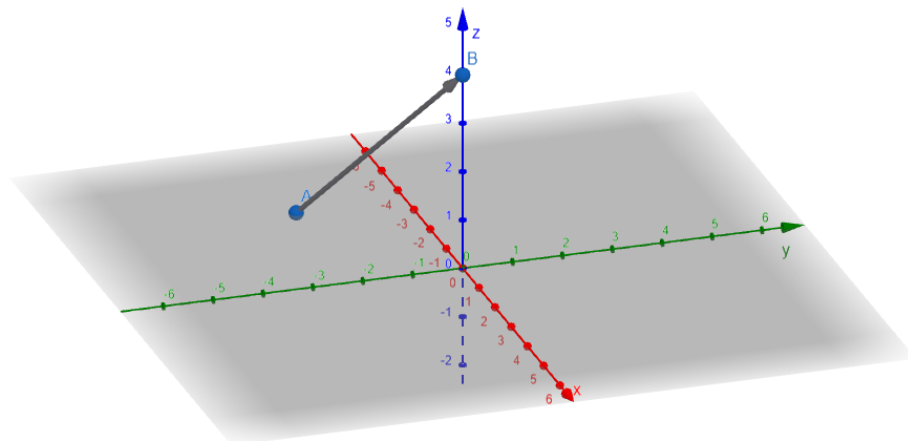


Рис. 2. Вектор $\overrightarrow{AB} = (3,55; 2,18; 4)$

За допомогою інструмента «Вектор» користувач може побудувати напрямлений відрізок, задавши його початкову та кінцеву точки. Наприклад, у тривимірному просторі можлива побудова вектора $\overrightarrow{AB} = (3,55; 2,18; 4)$, де точка A є початком вектора, а точка B – його кінцем. Така побудова наочно ілюструє геометричне означення вектора як напрямленого відрізка, що має довжину та напрям.

На рис. 2 проілюстровано розміщення вектора відносно координатних осей у тривимірному просторі, що дає змогу візуалізувати його координати, напрям та орієнтацію в просторі.

Окрім базових інструментів побудови, GeoGebra має *розширений інтерактивний інструментарій*, який реалізується за допомогою елементів керування. До них належать *інструмент «Кнопка»* (рис. 3 а)), який дозволяє запускати певні дії або сценарії та *поле введення* вкладки «Сценарії» (рис. 3 б)), де можна задавати алгоритми дій мовою скриптів GeoGebra.

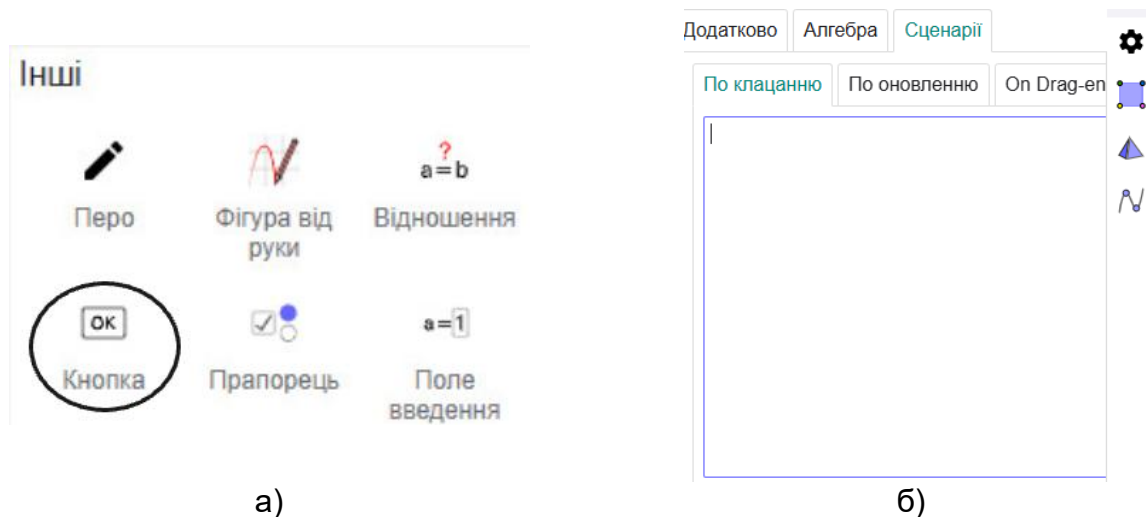


Рис. 3. Розширений інтерактивний інструментарій GeoGebra:
а) інструмент «Кнопка»; б) поле введення «Сценарії»

Завдяки використанню сценаріїв користувач отримує можливість автоматизувати операції з векторами, змінювати їх параметри в динамічному режимі, створювати навчальні моделі та демонстрації. Такий підхід значно розширює функціональні можливості середовища GeoGebra та сприяє формуванню дослідницьких навичок і глибшого розуміння векторних понять.

Для поглибленого аналізу методичних можливостей середовища GeoGebra варто виділити наступні ключові аспекти роботи з векторами.

Насамперед зазначимо, що GeoGebra реалізує принцип *подвійного представлення об'єктів*. Будь-який вектор, побудований у вікні «Полотно 3D», автоматично отримує своє алгебраїчне відображення у панелі об'єктів. Це дозволяє учням миттєво бачити зв'язок між геометричною конфігурацією вектора та його координатами x, y, z .

Програма підтримує виконання операцій над векторами безпосередньо через рядок вводу, що значно розширює стандартний інструментарій панелі малювання:

- *додавання та віднімання* – введення команди $u + v$ або $u - v$ створює результуючий вектор;
- *скалярний та векторний добутки* – використання символів множення або спеціальних команд (наприклад, $u * v$ для скалярного добутку та $\text{Cross}(u, v)$ – для векторного);
- *нормування* – знаходження довжини вектора за допомогою команди $\text{Length}(u)$.

Використання *повзунків (sliders)* дозволяє створювати моделі, де координати вектора є змінними величинами. Це дає змогу демонструвати поняття колінеарності або компланарності векторів у динаміці. Так при зміні значення коефіцієнта k у виразі $\bar{b} = k\bar{a}$ учень наочно спостерігає зміну довжини та напрямку вектора, зберігаючи його орієнтацію на прямій.

Інструментарій «GeoGebra-скрипт» відкриває шлях до створення самоперевірочних завдань. За допомогою сценаріїв можна:

- створювати кнопки для покрокової візуалізації розв'язання задачі;
- програмувати випадкову генерацію початкових координат векторів для індивідуалізації завдань;
- налаштовувати зворотний зв'язок: якщо учень ввів правильну відповідь, колір вектора або повідомлення на екрані змінюється.

3. Дослідження основних векторних операцій у середовищі GeoGebra

Розглянемо детально реалізацію базових операцій векторної алгебри – *додавання, віднімання та скалярного множення* у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ – за допомогою інструментарію GeoGebra. Власне проілюструємо як використання динамічних моделей дозволяє подолати розрив між абстрактним обчисленням координат та їхнім просторовим втіленням.

3.1. Адитивні операції: правила паралелограма та трикутника

Традиційні методи додавання векторів $a(x_1; y_1; z_1)$ та $b(x_2; y_2; z_2)$ у GeoGebra набувають інтерактивної форми. Програма автоматично обчислює результуючий вектор $c = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$, водночас візуалізуючи його як діагональ паралелограма або замикальну сторону трикутника.

Наявний арсенал інструментарію GeoGebra дозволяє динамічно працювати з векторами. Так при зміні положення кінцевої точки будь-якого вектора-доданка в режимі реального часу змінюється конфігурація всієї системи, що підтверджує інваріантність алгебраїчних законів відносно просторового розташування об'єктів.

Необхідно зазначити, що операція віднімання векторів: $a - b$ інтерпретується як додавання вектора a із протилежно спрямованим вектором $-b$, що наочно демонструє зміну орієнтації вектора в $\mathbb{R}^3$.

Приклад 1. Додати вектори $\overrightarrow{AB} = (3,55; 2,18; 4)$ і $\overrightarrow{CA} = (-3,55; -1,18; 0)$.

Скористаємось правилом трикутника. Тоді відкладемо послідовно вектори так, щоб початок вектора $\overrightarrow{AB}$ розміщували у кінці вектора $\overrightarrow{CA}$. Вектор, що з'єднає початок другого вектора (точку C) з кінцем першого вектора (точкою B), є сумою відповідних векторів. Тоді з'єднаємо точки C та B, отримаємо вектор $\overrightarrow{CB}$, який є сумою векторів $\overrightarrow{CA}$ та $\overrightarrow{AB}$ (рис. 4).

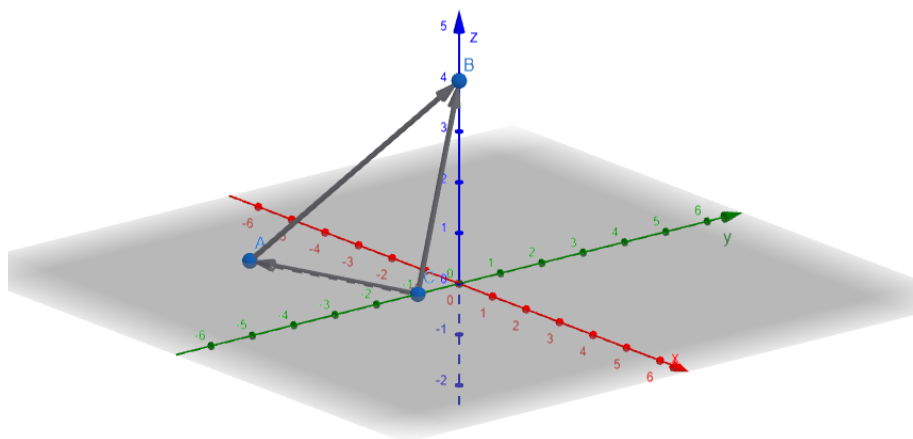
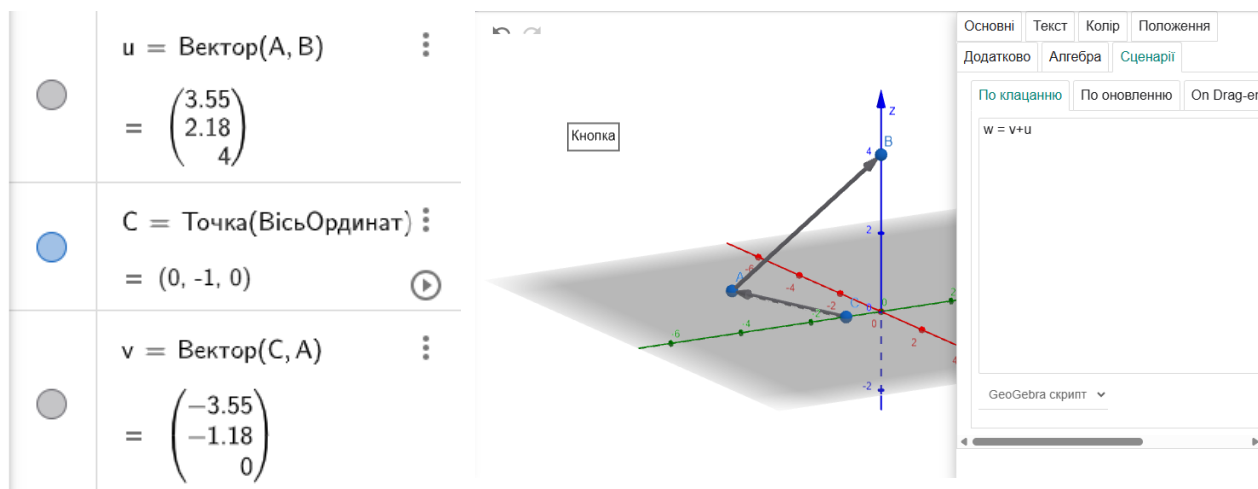


Рис. 4. Візуалізація побудови вектора $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

Вектор $\overrightarrow{CB}$ має координати $(0; 1; 4)$. Перевіримо, чи є координати вектора $\overrightarrow{CB}$ сумою координат векторів $\overrightarrow{CA}$ та $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (-3,55 + 3,55; -1,18 + 2,18; 0 + 4) = (0; 1; 4) = \overrightarrow{CB}.$$



а)

б)

Рис. 5. Розширений інтерактивний інструментарій GeoGebra:

а) визначення векторів u та v ; б) поле введення «Сценарії»

Є інший спосіб знаходження суми векторів, використовуючи інструмент «Кнопка». У такому разі насамперед варто перевизначити вектори. Нехай тоді вектор $\overrightarrow{AB} = u$, а вектор $\overrightarrow{CA} = v$ (рис. 5 а)). Скористаємось тепер інструментом «Кнопка» та полем для введення «Сценарії» – використання скрипту для додавання векторів $w = u + v$ (рис. 5 б)). Натиснувши «Кнопку» отримаємо результат додавання векторів $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ – вектор $w = (0; 1; 4)$. Повернувшись до заміни отримуємо:

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (-3,55 + 3,55; -1,18 + 2,18; 0 + 4) = (0; 1; 4) = w.$$

Отже $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} = (0; 1; 4)$.

3.2. Скалярне множення (гомотетія вектора)

Множення вектора на дійсне число k розглядається як зміна його модуля (довжини) та, за умови $k < 0$, напрямку.

Використання інструменту «Повзунок» (Slider) дозволяє плавно змінювати значення коефіцієнта k , спостерігаючи за ефектом колінеарності – вектор стискається, розтягується або дзеркально відображається відносно початку координат.

Це забезпечує розуміння вектора не лише як набору чисел, а як об'єкта, що має орієнтацію у просторі.

Приклад 2. Дано вектор $\overrightarrow{AB} = (-4,77; 2,53; 0)$. Побудувати вектор у 5 разів довший.

Покладемо $\overrightarrow{AB} = (-4,77; 2,53; 0) = u$ та за умовою $k = 5$. Скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для множення вектора на число: $m = k * u$.

Натиснувши «Кнопку» отримаємо результат множення:

$$k * u = k * (-4,77; 2,53; 0) \Rightarrow 5 * (-4,77; 2,53; 0) = (-23,85; 12,66; 0) = m.$$

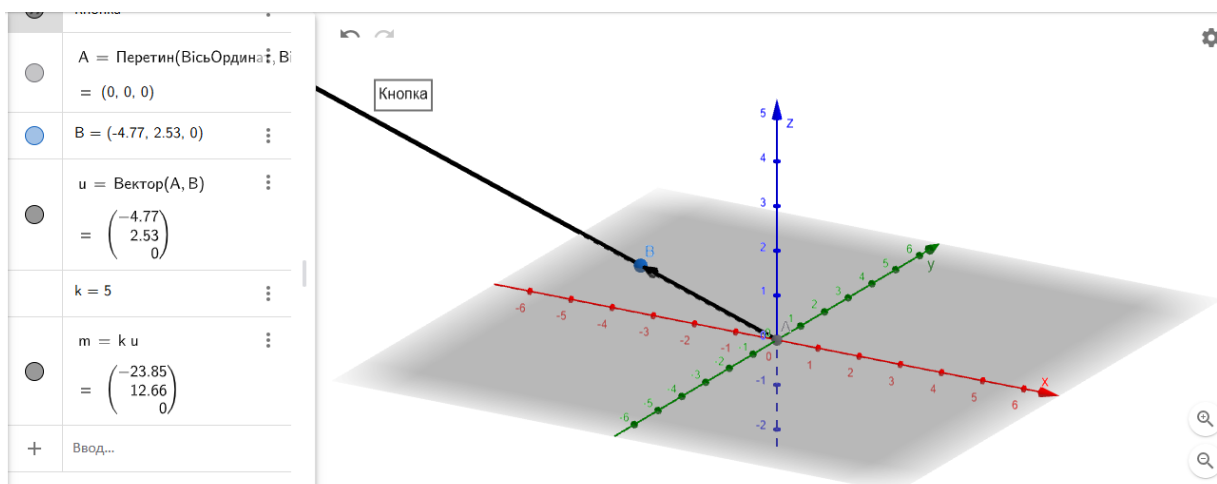


Рис. 6. Розширений інтерактивний інструментарій GeoGebra:
визначення та зображення вектора m

Отже, $k * \overrightarrow{AB} = (-23,85; 12,66; 0)$.

Важливим аспектом є паралельна робота двох панелей: «Об'єкти» (алгебраїчні координати) та «Полотно 3D» (геометрична модель). Будь-яка аналітична зміна в рядку вводу миттєво синхронізується з графічним вікном. Для оптимізації процесу та уникнення рутинної побудови застосовуються «Сценарії» (скрипти). Наприклад, створення інтерактивної кнопки для автоматичної побудови суми векторів дозволяє зосередити увагу на аналізі властивостей операції, а не на технічних деталях креслення.

Застосування такого підходу перетворює вивчення векторів на активний експериментальний процес. Користувач отримує можливість не просто розв'язувати задачі, а моделювати векторні поля та складні просторові структури, що є необхідною базою для вивчення аналітичної геометрії та теоретичної механіки у закладах вищої освіти.

4. Розв'язування задач за допомогою GeoGebra

Приклад 3. Дано куб $ABCDEFGH$ (рис. 7). Знайдіть суму векторів: $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF}$.

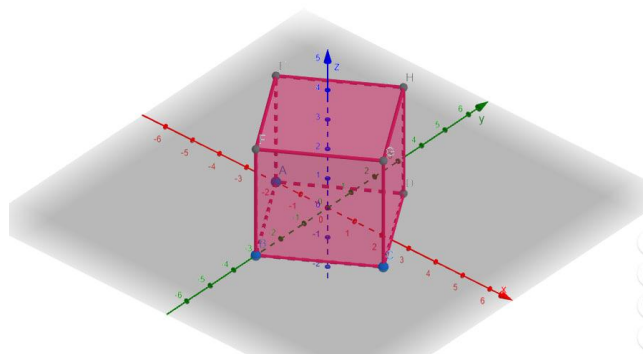


Рис. 7. Куб $ABCDEFGH$

Виділимо та перепозначимо вектори, які потрібно додати: $\overrightarrow{EH} = u$, $\overrightarrow{DF} = v$ (рис. 8).

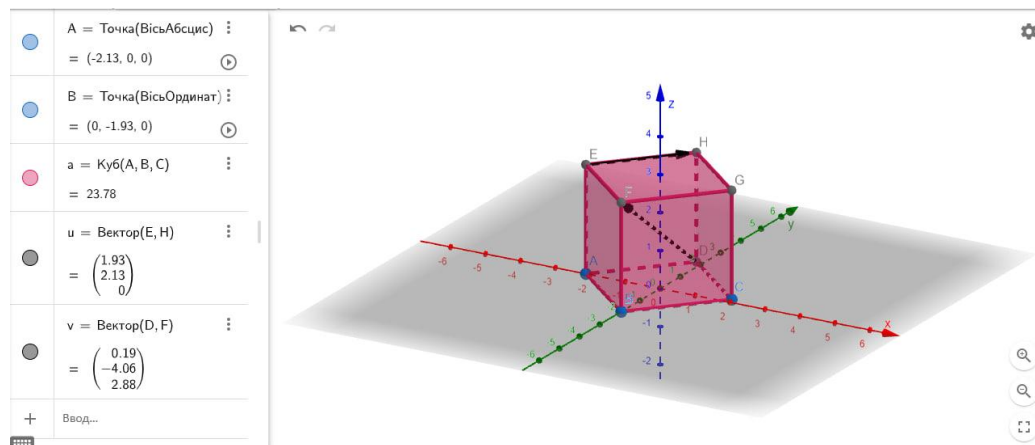


Рис. 8. Вектори $\overrightarrow{EH} = u$ та $\overrightarrow{DF} = v$

Скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для додавання векторів: $w = u + v$ (рис. 9).

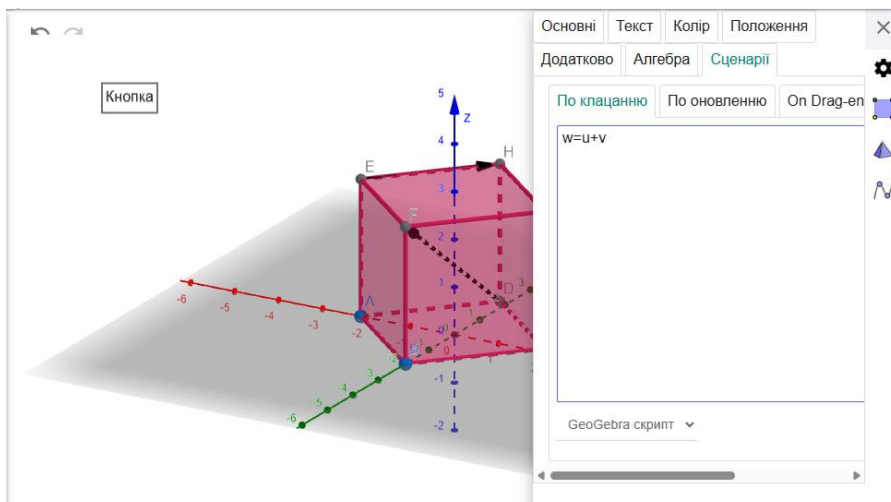


Рис. 9. Інструмент «Кнопка» та скрипт для додавання векторів: $w = u + v$

Натиснувши «Кнопку» отримаємо результат додавання векторів $w = u + v = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$ (рис. 10).

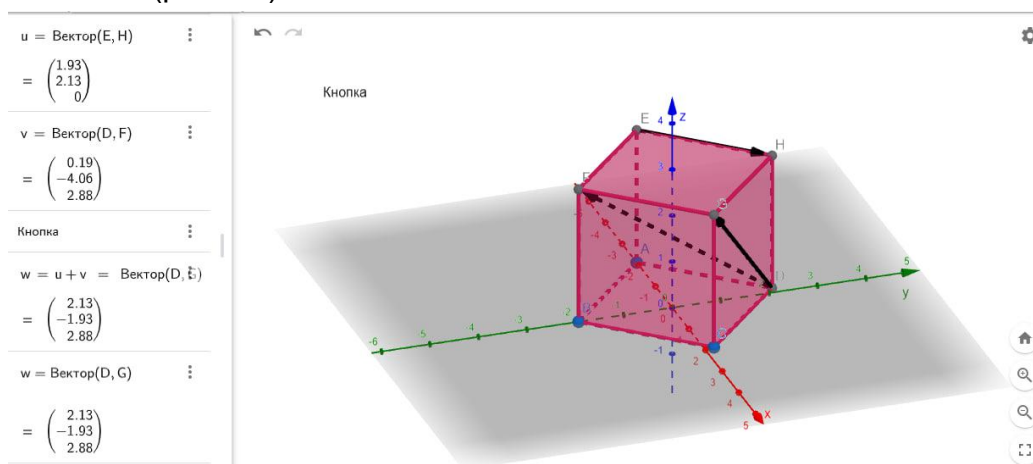


Рис. 10. Вектор $w = u + v$

Відтак $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$.

Приклад 4. Знайдіть координати образу точки $A(5; 0; -2)$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом гомотетії $k = 3/5$. (Мерзляк та ін., 2018).

Щоб знайти координати образу точки A , скористаємось властивістю гомотетії через векторне представлення. Оскільки центр гомотетії збігається з початком координат $B(0; 0; 0)$, радіус-вектор точки A має вигляд $\overrightarrow{BA} = (5; 0; -2)$. За означенням гомотетії образ точки A – точка A' , визначається вектором $\overrightarrow{BA'}$, що задовольняє умову:

$$\overrightarrow{BA'} = k \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Підставивши задане значення коефіцієнта $k = 3/5$, отримаємо:

$$\overrightarrow{BA'} = \frac{3}{5} \cdot (5; 0; -2) = \left(5 \cdot \frac{3}{5}; 0 \cdot \frac{3}{5}; -2 \cdot \frac{3}{5} \right) = (3; 0; -1,2).$$

Отже, координати образу точки A при даній гомотетії становлять $A'(3; 0; -1,2)$.

У середовищі GeoGebra для розв'язання даної задачі скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для множення вектора на число: $w = 0,6 * u$, де $u = \overrightarrow{BA} = (5; 0; -2)$. Натиснувши інструмент «Кнопка» отримаємо шуканий результат (рис. 11).

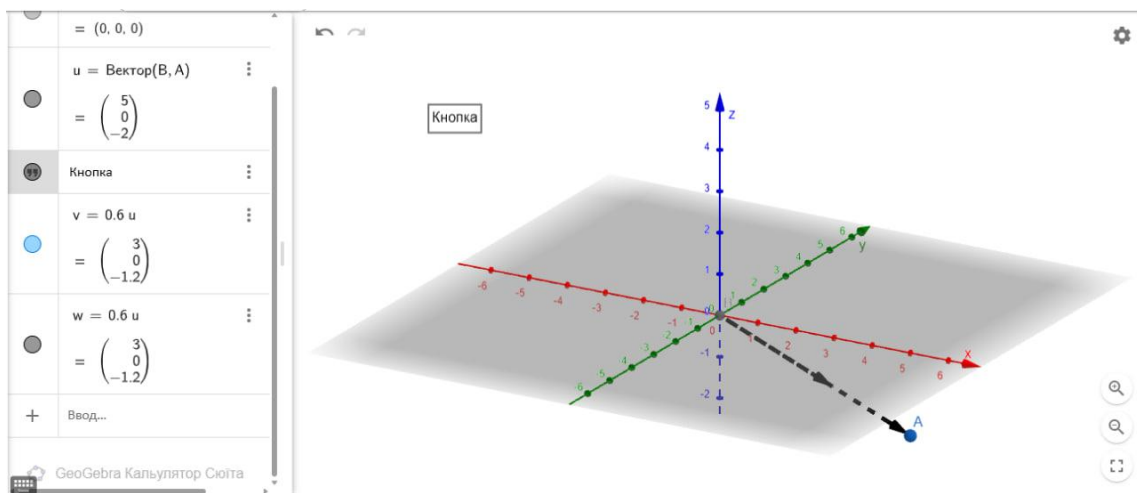


Рис. 11. Вектор $w = 0,6 * u = (3; 0; -1,2)$

Отже, координати образу точки A при даній гомотетії $A' = (3; 0; -1,2)$.

Для наочного підтвердження отриманого результату та розвитку просторової уяви в динамічному середовищі GeoGebra рекомендується виконати наступні кроки:

1. *побудова опорних точок* – створіть точку $B(0; 0; 0)$ як центр гомотетії та точку $A(5; 0; -2)$;
2. *векторне представлення* – використовуйте інструмент «Вектор», щоб зобразити $\overrightarrow{BA}$. Це дозволяє розглядати гомотетію як операцію скалярного множення вектора на число;
3. *параметризація* – створіть повзунок (Slider) для коефіцієнта k із діапазоном значень, що включає $3/5 = 0,6$, що дозволить спостерігати за «стисненням» або «розтягненням» вектора в реальному часі;
4. *інструмент «Гомотетія»* – застосуйте вбудовану функцію «Homothety» до точки A відносно точки B із коефіцієнтом k . Програма автоматично згенерує точку A' , координати якої на панелі об'єктів збігатимуться з розрахованими аналітично $(3; 0; -1,2)$.

Використання GeoGebra у цьому прикладі демонструє, як суто обчислювальна задача перетворюється на динамічне дослідження. Наочна візуалізація гомотетії як перетворення, що зберігає колінеарність точок B, A, A' та змінює лише метричні характеристики вектора, сприяє глибшому осмисленню концепції подібності у тривимірному просторі.

Приклад 5. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE}$ протилежні. (Мерзляк та ін., 2018).

Розглянемо перший вектор: $v_1 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. За правилом віднімання векторів $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Тоді: $v_1 = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$. За правилом додавання (правило трикутника): $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$. Отже, $v_1 = \overrightarrow{CD}$.

Розглянемо другий вектор: $v_2 = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE}$. Регрупуємо доданки для зручності таким способом: $v_2 = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}$. За правилом додавання $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE}$. Тоді $v_2 = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CE}$. Оскільки $-\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EC}$, маємо: $v_2 = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}$. За правилом додавання $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC}$. Отже, $v_2 = \overrightarrow{DC}$.

Ми отримали, що перший вектор дорівнює $\overrightarrow{CD}$, а другий – $\overrightarrow{DC}$.

Оскільки за означенням $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$, ці вектори мають однакові модулі та протилежні напрямки.

Твердження доведено: вектори є протилежними.

У середовищі GeoGebra подібні доведення можна перевірити динамічно. Побудова точок A, B, C, D, E у просторі дозволяє побачити, що результуючі вектори завжди будуть колінеарними та протилежно спрямованими незалежно від координат точок.

Це підтверджує взаємозв'язок між абстрактними алгебраїчними операціями та їхньою геометричною суттю.

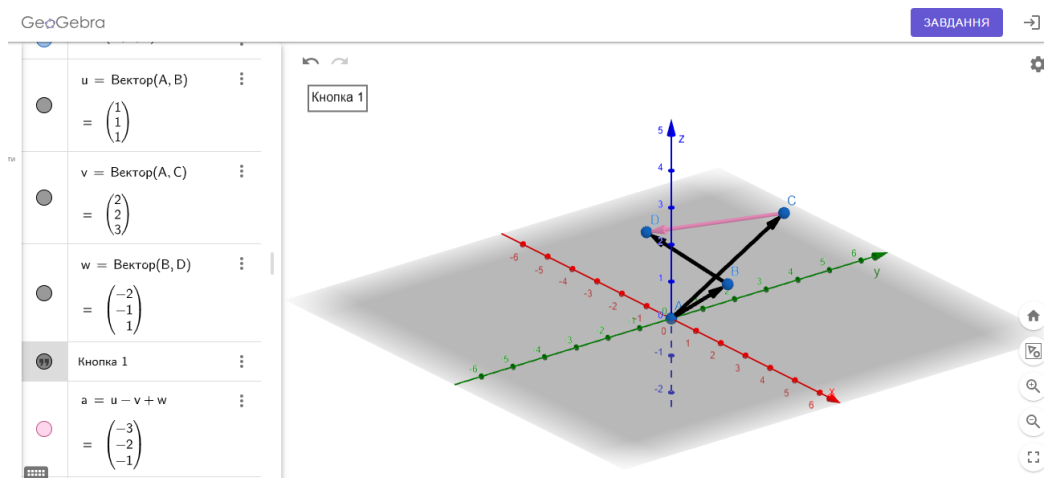


Рис. 12. Вектори $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = v$, $\overrightarrow{BD} = w$ та $\overrightarrow{CD}$

Спочатку побудуємо вектор $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Нехай $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = v$, $\overrightarrow{BD} = w$. Після чого скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для дій з векторами: $a = u - v + w$. Отримуємо $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 12).

Для побудови $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE}$ позначимо точку $E(-2; -3; 0)$. Нехай вектори $\overrightarrow{DA} = b$, $\overrightarrow{CE} = c$, $\overrightarrow{AE} = d$. Скориставшись інструментом «Кнопка» та скриптом для дій з векторами $q = b - c + d$, отримуємо: $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$ (рис. 13).

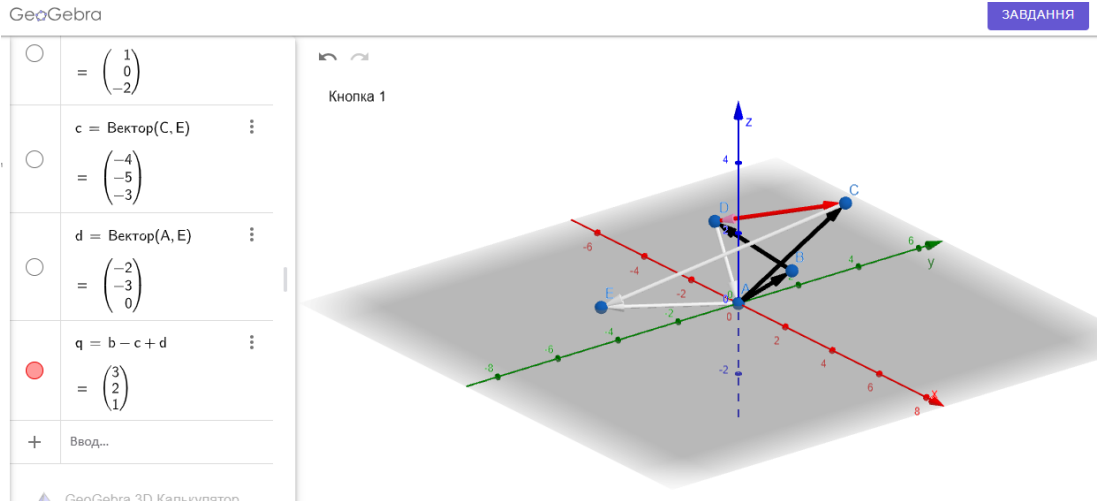


Рис. 13. Вектор $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$

Залишилось довести, що вектори $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{CD}$ – протилежні. За означенням протилежних векторів, сума протилежних векторів має дорівнювати нулю. Скориставшись інструментом «Кнопка» та скриптом для дій з векторами: $q + a = f$, отримуємо шуканий результат (рис. 14).

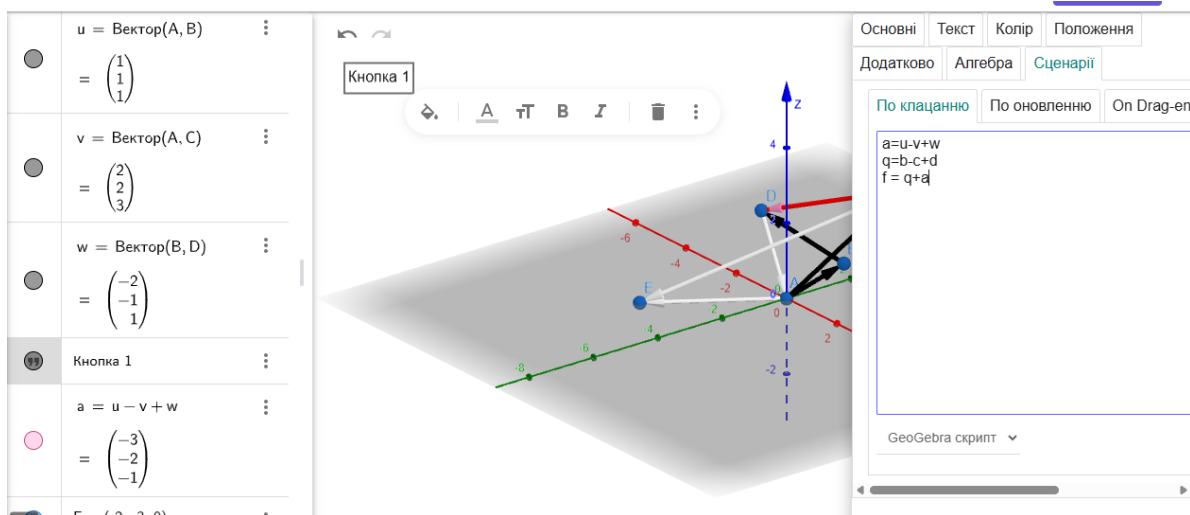


Рис. 14. Вектор $q + a = f$

Цей приклад у GeoGebra ілюструє практичне застосування алгебраїчних методів векторної геометрії та їхню візуальну верифікацію в динамічному середовищі. Власне ілюстрація підкреслює, що будь-яка аналітична операція (спрощення виразу) має прямий геометричний відповідник. Це сприяє розвитку просторової уяви, дозволяючи

«бачити» результат додавання ламаної векторів як єдиний вектор, що з'єднує початкову та кінцеву точки.

5. Методичні засади вивчення векторів у середовищі GeoGebra

Сучасна методика використання середовища GeoGebra у курсі стереометрії базується на концептуальному переході від репродуктивного відтворення алгебраїчних алгоритмів до активного візуально-інформаційного моделювання. Такий підхід дозволяє нівелювати одну з ключових проблем традиційної дидактики – формалізм у засвоєнні знань, коли учні оперують формулами без розуміння їхньої просторової природи. У межах чинної навчальної програми для 10-х класів інтеграція даного середовища є найбільш релевантною під час вивчення фундаментальних операцій над векторами та дослідження їхніх властивостей. Заміна статичних графічних конструкцій динамічними об'єктами, де варіація координат детермінує миттєву трансформацію моделі у просторі $\mathbb{R}^3$, забезпечує інтенсивний розвиток просторової уяви та підвищує рівень когнітивного засвоєння матеріалу.

Практична реалізація методики передбачає залучення спеціалізованих інструментів автоматизації, зокрема «Сценаріїв» (Scripts) та інтерактивних «Кнопок». Це дозволяє перетворити процес доведення теорем на інтерактивне дослідження, що передбачає певний рівень автоматизації при розв'язуванні задач.

Зокрема, при вивченні суми векторів за правилом трикутника програма не лише обчислює координати результату, а й візуалізує конкатенацію (поєднання) векторів у динаміці. Учні отримують можливість верифікації закономірностей коли самостійно модифікувати вхідні параметри, спостерігаючи за інваріантністю геометричних властивостей при будь-яких просторових трансформаціях. Система забезпечує чудовий зворотний зв'язок, оскільки в ній реалізовано автоматичну перевірку правильності отриманих результатів, що сприяє формуванню навичок самоконтролю.

Запропонована методика охоплює широкий клас геометричних завдань, а саме: лінійні комбінації векторів (додавання, віднімання, скалярне множення); стереометричне моделювання – робота з елементами просторових фігур (зокрема, вектори в кубі та інших багатогранниках); геометричні перетворення – використання векторного апарату для моделювання гомотетії та інших видів переносу, що дозволяє інтерпретувати вектор як оператор трансформації простору, а не лише як статичну впорядковану сукупність чисел.

Впровадження GeoGebra у навчальний процес оптимізує часові витрати на перевірку результатів та стимулює експериментальну діяльність учнів. Можливість варіювати комбінації векторів та спостерігати цілісну структуру просторових залежностей є критично важливим чинником у підготовці здобувачів освіти до опанування складних технічних та інженерних дисциплін.

6. Висновки

Проведене дослідження засвідчило, що динамічне математичне середовище GeoGebra є ефективним дидактичним інструментом для вивчення векторної алгебри у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$. Поєднання аналітичних обчислень із засобами графічного

моделювання забезпечує трансформацію абстрактних математичних понять у наочні образи, доступні для ґрунтовного когнітивного осмислення.

Використання візуалізації базових векторних операцій – додавання, віднімання та множення на скаляр – сприяє не лише перевірці правильності обчислень, а й усвідомленню геометричного змісту відповідних алгебраїчних перетворень. Динамічне відображення змін довжини, напряму та взаємного розташування векторів створює умови для розвитку просторового мислення та формування цілісного уявлення про метричні й топологічні властивості векторних об'єктів.

Інтерактивний потенціал GeoGebra, зокрема можливість застосування сценаріїв та елементів керування, дозволяє оптимізувати навчальний процес шляхом автоматизації рутинних обчислювальних дій. Це забезпечує перенесення акценту з механічного виконання операцій на аналітичне дослідження результатів, підвищує пізнавальну активність здобувачів освіти та інтелектуальну насиченість навчальної діяльності.

Практична значущість отриманих результатів полягає в можливості їх безпосереднього використання у професійній діяльності вчителів математики. Запропонований інструментарій і методичні підходи сприяють модернізації викладання стереометрії та підвищенню якості засвоєння складних теоретичних положень.

Список використаних джерел

Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2018). Геометрія: профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/1140-geometriya-10-klas-merzlyak-prof.html>

Титаренко, Н., & Муртазієв, Е. (2019). Застосування GeoGebra на уроках геометрії. Електронний науковий журнал «Освітологічний дискурс», (1-2), 116–126. <https://osvita.eeipsy.org/index.php/eeip/article/view/556/533>

Усата, О. Ю. (2019). Використання GeoGebra у вивченні математики [Матеріали конференції]. Державний університет «Житомирська політехніка». <https://conf.ztu.edu.ua/wp-content/uploads/2019/06/97-1.pdf>

Чубей, О. О. (2023). Вивчення теми «Вектори та їх координати» з допомогою інтерактивного середовища GeoGebra. В Збірник матеріалів науково-практичної конференції (с. 141–143). ІЦО НАПН України. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/735000/1/%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D1%96%D0%BB%D1%8C_2023.pdf#page=141

GeoGebra. (n.d.). *GeoGebra Classic*. <https://www.geogebra.org/calculator>

GeoGebra. (n.d.). *GeoGebra Scripts*. <https://www.geogebra.org/m/dq4449tr>

References

Chubei, O. O. (2023). Vyvchennia temy "Vektory ta yikh koordynaty" z dopomohoiu interaktyvnoho seredovyshcha GeoGebra [Studying the topic "Vectors and their coordinates" using the interactive environment GeoGebra]. In *Zbirnyk materialiv naukovo-praktychnoi konferentsii* (pp. 141–143). ITSO NAPN Ukrainy. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/735000/1/%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D1%96%D0%BB%D1%8C_2023.pdf#page=141 [in Ukrainian].

GeoGebra. (n.d.). *GeoGebra Classic*. <https://www.geogebra.org/calculator>

GeoGebra. (n.d.). *GeoGebra Scripts*. <https://www.geogebra.org/m/dq4449tr>

Merzlyak, A. H., Nomirovskyi, D. A., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2018). *Heometriia: profilnyi riven: pidruchnyk dlia 10 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Geometry: profile level: textbook for the 10th grade of general

secondary education institutions]. Himnaziia. <https://pidruchnyk.com.ua/1140-geometriya-10-klas-merzlyak-prof.html> [in Ukrainian].

Tytarenko, N., & Murtaziiev, E. (2019). Zastosuvannia GeoGebra na urokakh heometrii [Application of GeoGebra in geometry lessons]. *Osvitohichnyi Dyskurs* [Osvitological Discourse], (1-2), 116–126. <https://osvita.eeipsy.org/index.php/eeip/article/view/556/533> [in Ukrainian].

Usata, O. Yu. (2019). *Vykorystannia GeoGebra u vyvchenni matematyky* [Using GeoGebra in learning mathematics] [Conference presentation]. Zhytomyr Polytechnic State University. <https://conf.ztu.edu.ua/wp-content/uploads/2019/06/97-1.pdf> [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 28.12.2025

Прийнято до публікації: 19.06.2026

Опубліковано: 30.07.2026

Alina KRUHLIAK, Student

ORCID: 0009-0005-9502-5407

e-mail: krugluakalina@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

VECTORS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE USING THE DYNAMIC MATHEMATICS SOFTWARE GEOGEBRA

Abstract. *The article is devoted to the theoretical substantiation and practical implementation of a methodology for modeling vectors in three-dimensional space using the dynamic mathematics environment GeoGebra. The paper analyzes the toolset of the environment in the context of operating with stereometric objects and investigates the effectiveness of combining algebraic and graphical approaches to the interpretation of mathematical data. Algorithms for constructing spatial vectors and performing basic linear operations—addition, subtraction, and scalar multiplication – are implemented. Particular attention is paid to the verification of results through the synchronization of analytical computations with their visualization in three-dimensional space, which contributes to a deeper understanding of the geometric nature of vector operations.*

The practical significance of the study lies in the development of interactive models using the built-in scripting language. This approach enables the automation of computational processes and the creation of an adaptive user interface for conducting experiments with spatial relationships. It is demonstrated that the integration of such dynamic models into the educational process intensifies the development of spatial reasoning and increases the level of mastery of stereometry topics. Prospects for further research are associated with expanding the functional capabilities of the developed model library and integrating more advanced automation algorithms for solving applied problems in geometry.

Keywords: *vectors; three-dimensional space; vector operations; GeoGebra environment.*

Received: 28.12.2025

Accepted for publication: 19.06.2026

Published: 30.07.2026