

ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ВІЗУАЛІЗАЦІЯ

Анотація. У статті досліджено математичну модель двовимірних хвильових процесів. Розглянуто основні властивості хвильових функцій як функцій багатьох змінних, здійснено аналіз їх диференціальних характеристик, зокрема частинних похідних та оператора Лапласа. Показано, що задані гармонічні хвильові функції є частковими розв'язками рівняння Гельмгольца, а також продемонстровано можливість подання двовимірної хвилі у вигляді суперпозиції одновимірних гармонічних складових. Особливу увагу приділено комп'ютерній візуалізації хвильових процесів у середовищі GeoGebra, що дозволяє наочно інтерпретувати аналітичні результати та сприяє формуванню інтуїтивного розуміння просторової структури хвильових полів. Отримані результати мають навчально-методичне значення та можуть бути використані у шкільних і університетських курсах математики та математичної фізики.

Ключові слова: хвильові процеси; гармонічна хвиля; оператор Лапласа; хвильова функція; суперпозиція хвилі; комп'ютерна візуалізація; GeoGebra.

1. Вступ

Щодня ми маємо справу з процесами, що повторюються: дзенькіт будильника, коливання струни гітари, світло від лампи чи сигнал мобільного телефона. Усі ці явища, на перший погляд різні, об'єднує спільна ідея – коливання, а отже, й хвилі.

Якщо коливання – це зміна стану в одному місці, то хвиля – це поширення цієї зміни в просторі з плином часу. Саме завдяки хвилям ми чуємо звук, бачимо світло, передаємо інформацію та навіть досліджуємо будову Всесвіту. Не дивно, що хвильові процеси займають центральне місце як у фізиці, так і в математиці (Віктор, 2022).

Ще зі школи ми знаємо, що синус і косинус добре описують періодичні процеси. Але що станеться, якщо «розтягнути» ці функції в просторі? Як виглядатиме хвиля не на прямій, а на площині? І як перевірити, що отримана формула справді описує хвильовий процес?

Математика дозволяє описати хвилі за допомогою функцій, які залежать одразу від кількох змінних: просторових координат x, y, z та часу t . Рівняння на зразок рівняння Гельмгольца, яке описує стаціонарні хвильові поля, виникають як наслідок загального хвильового рівняння та відіграють важливу роль в акустиці, оптиці, електродинаміці й квантовій механіці.

Мета цієї статті – показати, як проста гармонічна хвиля приводить до рівняння Гельмгольца, а також продемонструвати хвильові процеси наочно за допомогою комп'ютерної візуалізації в середовищі GeoGebra. Такий підхід дозволяє не лише

виконати аналітичні обчислення, а й побачити хвилю, її структуру та поведінку при зміні параметрів.

Матеріал статті побудовано так, щоб бути зрозумілим та корисним математикам-початківцям і зручним для використання під час вивчення хвильових процесів.

2. Основні поняття хвильової теорії

Повсякденний досвід людини нерозривно пов'язаний із циклічними процесами: від механічних коливань струни до поширення електромагнітних сигналів мобільного зв'язку. Попри різну фізичну природу, ці явища підпорядковуються єдиній концепції – *теорії коливань* та *хвиль*. Якщо коливання визначаються як часова зміна стану системи в локалізованій точці, то хвиля є процесом трансляції цього збурення в просторі з плином часу (Зражевський, Зражевська, 2023). Саме хвильова природа фундаментальних взаємодій дозволяє нам сприймати світло, звук, досліджувати космологічну структуру Всесвіту тощо.

Математичний опис хвиль базується на функціях декількох змінних, де стан системи u залежить від просторових координат $r = (x, y, z)$ та часового параметра t . Традиційний шкільний курс знайомить нас із гармонічними функціями $\sin x$ та $\cos x$ як базовим інструментом опису періодичності. Однак перехід від одновимірних коливань до багатовимірного простору потребує залучення апарату диференціальних рівнянь у частинних похідних.

2.1. Що таке хвиля?

У класичній фізиці та математичному аналізі *хвиля* визначається як процес поширення часових змін певного стану (збурення) у просторі. Ключовою ознакою хвильового процесу є трансляція енергії та імпульсу без супутнього макроскопічного перенесення речовини.

Для глибшого розуміння розглянемо цей феномен через призму низки аспектів. Насамперед важливо розрізняти рух самого середовища та рух хвилі. Кожна точка простору, через яку проходить хвиля, здійснює локальні коливання навколо положення рівноваги.

Наприклад, коли ми бачимо хвилю на поверхні озера, нам здається, що маса води рухається вперед. Проте поплавки на воді демонструє зворотне: він здійснює рух по замкненій траєкторії (еліптичній або вертикальній), повертаючись у вихідну точку. Хвиля – це лише «форма», що переміщується середовищем, переносячи кінетичну енергію від однієї молекули води до іншої.

Фізична величина, що зазнає змін, визначає тип хвилі. Математично нам байдуже, що саме змінюється, але для моделювання це принципово:

- *Механічні хвилі (звук, сейсмічні коливання)*. Об'єктом коливань є пружне середовище. У звуковій хвилі відбувається циклічна зміна густини та тиску повітря.

- *Електромагнітні хвилі (світло, радіосигнали)*. На відміну від звуку, вони не потребують матеріального середовища і можуть поширюватися у вакуумі. Тут коливаються вектори напруженості електричного (E) та індукції магнітного (B) полів.
- *Квантові хвилі*. У квантовій механіці хвильова функція Ψ описує амплітуду ймовірності знаходження частинки в певній точці простору.

З точки зору математики, хвиля – це не об'єкт, а динамічний стан поля. Якщо позначити стан системи через функцію u , то у найпростішому одновимірному випадку поширення збурення зі швидкістю v описується функцією (розв'язок д'Аламбера):

$$u(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Цей вираз показує, що профіль хвилі f , який був у точці $x = 0$ у момент часу $t = 0$, через час t просто «переміститься» у точку vt , зберігаючи свою форму (у середовищі без дисперсії).

Відтак, хвиля є фундаментальною формою існування матерії, що характеризується динамічною зміною параметрів поля. Вона дозволяє передавати інформацію на величезні відстані (від радіосигналів до світла далеких галактик), залишаючись при цьому нематеріальним процесом, що зв'язує окремі точки простору в єдину динамічну систему.

2.2. Гармонічна хвиля і її параметри

Фундаментальною моделлю в теорії хвильових процесів є *гармонічна хвиля*. Її особлива роль зумовлена тим, що згідно з принципом Фур'є будь-яке складне хвильове збурення можна представити як суперпозицію (суму) простих гармонічних складників (Томусяк, Трохименко, 1999).

Математично одновимірна гармонічна хвиля описується функцією:

$$u(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \phi_0),$$

де кожен параметр має чітке фізико-математичне значення. Зокрема, *амплітуда* A визначає максимальне відхилення системи від стану рівноваги (квадрат амплітуди пропорційний енергії, яку несе хвиля); *циклічна частота* ω – швидкість зміни фази у часі ($\omega = 2\pi f$); *хвильове число* k – просторовий аналог частоти ($k = 2\pi/\lambda$), що визначає щільність хвильових фронтів на одиницю довжини; *фаза* ($\Phi = kx - \omega t + \phi_0$) – аргумент функції, що визначає стан хвилі в даній точці простору в конкретний момент часу; ϕ_0 – *початковий зсув (початкова фаза)*.

Для систематизації складних процесів, що виникають у природі та техніці, хвилі класифікують за декількома фундаментальними ознаками:

- *за кінематикою поширення;*
- *за топологією хвильового фронту (геометрична форма);*
- *за вектором збурення (поляризація);*

- за лінійністю середовища;
- за періодичністю.

За кінематикою поширення розрізняють *біжучі* та *стоячі хвилі*. Біжучі хвилі характеризуються безперервним перенесенням енергії в напрямку поширення фази. Тоді як стоячі хвилі виникають як результат інтерференції двох біжучих хвиль з однаковими амплітудами, що рухаються назустріч одна одній. У таких хвилях існують стаціонарні точки – вузли (де амплітуда нульова) та опуклості (де амплітуда максимальна). Це явище є базовим для акустики музичних інструментів та лазерних резонаторів.

Геометрія хвилі визначається формою поверхні постійної фази. Розрізняють *плоскі хвилі*, фронтом поширення яких є площина – це ідеалізована модель для хвиль на великій відстані від джерела. Тоді як *сферичні та циліндричні хвилі* виникають від точкових або лінійних джерел. Їхня амплітуда зазвичай згасає з відстанню через закон збереження енергії (розподіл енергії на більшу площу).

За вектором збурення існують *поперечні* та *поздовжні* хвилі. Поперечні хвилі – вектор коливань перпендикулярний до вектора поширення (наприклад, світло або коливання струни). Поздовжні хвилі – коливання відбуваються вздовж напрямку поширення (звук у газах та рідинах).

Лінійні хвилі підпорядковуються принципу суперпозиції – хвилі проходять одна крізь одну, не змінюючи своїх характеристик. Математично описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Нелінійні хвилі виникають у середовищах, властивості яких змінюються під дією самої хвилі. Прикладом є *солітони* – структурно стійкі поодинокі хвилі, що зберігають свою форму при поширенні та навіть при зіткненні з іншими солітонами.

Врешті хвилі поділяють на періодичні та неперіодичні.

Періодична хвиля – це хвильовий процес, при якому збурення середовища (механічні коливання) або електромагнітного поля повторюються через однакові проміжки часу (T) та на однаковій відстані (λ). Такі хвилі переносять енергію без переносу речовини, характеризуються постійною амплітудою, частотою та довжиною, найчастіше описуючись синусоїдальним законом.

Неперіодична хвиля – це хвильовий процес, профіль або інтенсивність якого змінюються з часом і не повторюються через рівні проміжки часу. Прикладом є так звані хвильові пакети – локалізовані у часі та просторі збурення, що мають важливе значення для передачі дискретних інформаційних сигналів.

2.3. Математичний формалізм: від хвильового рівняння до оператора Гельмгольца

Для системного опису хвильових процесів у математичній фізиці застосовують апарат функцій багатьох змінних, які прийнято називати *хвильовими функціями*. Вони відображають залежність стану системи від просторових координат $r = (x, y, z)$ та часового параметра t .

Для запису основних законів через функції багатьох змінних використовується поняття частинної похідної: *частинною похідною функції $u(x, y, z, t)$ за змінною t називається похідна цієї функції за змінною t за умови, що інші змінні виступають як числа/сталі. Запис: $\frac{\partial u}{\partial t}$. Аналогічно визначаються частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ та $\frac{\partial u}{\partial z}$.*

Оскільки похідна виражає швидкість зростання функції, то частинна похідна за певною змінною визначає вклад даної змінної в це зростання.

Другою частинною похідною $u(x, y, z, t)$ за змінною t називається частинна похідна від частинної похідної за t від даної функції. Запис: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. СENS аналогічний до прискорення.

Хвильове рівняння є математичною моделлю, виведеною на основі фундаментальних фізичних закономірностей шляхом введення ряду припущень. Даний підхід дозволяє ігнорувати другорядні чинники, зосереджуючись на домінуючих механізмах процесу в заданих умовах.

З математичного погляду рівняння встановлює пряму пропорційну залежність між другою похідною стану хвилі за часом (часовим прискоренням) та оператором Лапласа від її амплітуди (просторовою кривизною). У загальному вигляді для тривимірного простору це описується формулою:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u,$$

де $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (оператор Лапласа, *лапласіан*), v – швидкість поширення.

Яскравим прикладом такого рівняння є *рівняння Гельмгольца* – одне з найважливіших рівнянь математичної фізики, яке має вигляд:

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

де:

u (або ψ) – *амплітудна хвильова функція*, що описує просторову конфігурацію поля;

Δ (*оператор Лапласа*) – диференціальний оператор, який характеризує швидкість зміни градієнта функції. В декартових координатах він виражається як сума других частинних похідних:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (1)$$

k – *хвильове число*, яке визначає просторову періодичність хвилі. Воно безпосередньо пов'язане з частотою ω та швидкістю поширення v співвідношенням $k = \omega/v$.

Рівняння Гельмгольца описує просторову конфігурацію хвильового поля. Воно є наріжним каменем в акустиці, теоретичній оптиці, класичній електродинаміці та виступає аналогом стаціонарного рівняння Шредингера у квантовій механіці.

З геометричної точки зору, рівняння Гельмгольца стверджує, що просторова кривизна хвильового поля в кожній точці пропорційна значенню самого поля в цій точці, але з протилежним знаком. Це означає, що форма хвилі в просторі є самовідтворюваною та стабільною.

Якщо ж хвиля є суперпозицією скінченної або зліченної кількості хвиль з різними частотами, то рівняння Гельмгольца вже не може описати процес.

Дане рівняння дозволяє аналізувати складні явища без необхідності відстежувати кожну мить часу. Воно описує резонансні стани у замкнених об'ємах, дифракцію та розсіювання хвиль на перешкодах, власні моди коливань у фізичних системах складної геометрії. Саме це рівняння стане основою для наших подальших комп'ютерних експериментів у GeoGebra, де ми зможемо побачити, як зміна хвильового числа k трансформує складну геометрію хвильових фронтів (Пришляк, 2004).

2.4. Дидактична цінність та прикладне значення: чому це важливо для сучасної освіти?

Вивчення хвильових процесів у межах поглибленого курсу математики або фізики може розглядатися як стратегічний етап у формуванні наукового світогляду, який дозволяє учням та викладачам вийти за межі абстрактних формул і перейти до глибокого розуміння реальних фізичних явищ через їхню візуалізацію.

Насамперед, хвильові процеси стають природним «містком» між елементарною тригонометрією та математичною фізикою. Шкільна програма традиційно розглядає функції $\sin x$ та $\cos x$ як статичні графіки або найпростіші гармонічні коливання. Вивчення хвильових процесів демонструє «наступний рівень» цих ідей: знайомі періодичні функції перетворюються на фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь, що описують реальний світ – від звукових хвиль у концертному залі до електромагнітних хвиль в оптоволокну. Завдяки візуалізації учні наочно бачать, як абстрактні синусоїди «оживають» у формі хвильових фронтів, інтерференційних картин чи стоячих хвиль, усвідомлюючи тяглість математичної освіти – від малювання графіків у зошиті до моделювання складних фізичних полів.

Крім того, візуалізація хвильових процесів перетворює математичний апарат на «працюючий» інструмент розуміння природи та збагачує шкільний матеріал при вивченні фізики. Учні можуть також спостерігати, як оператор Лапласа «вимірює» кривизну хвильового фронту, а похідні за часом і простором пояснюють поширення, відбиття чи дифракцію. Це формує інтуїтивне розуміння, що значно ефективніше, ніж чисто аналітичні розрахунки.

Зрештою, вивчення хвильових процесів є ідеальною базою для міждисциплінарних проєктів і комп'ютерного моделювання в епоху STEM-освіти. Сучасні інструменти (GeoGebra, Python з бібліотеками Matplotlib чи навіть прості симулятори в PhET)

дозволяють перетворити теоретичні рівняння на інтерактивні візуалізації. Учні можуть у реальному часі змінювати частоту, амплітуду, довжину хвилі чи параметри середовища і миттєво бачити, як змінюється вся хвильова картина. Такий підхід відкриває широкі можливості для дослідницької діяльності:

- експериментування з параметрами хвиль і негайне спостереження за наслідками (інтерференція, дифракція, резонанс, стоячі хвилі);
- розвиток критичного мислення через порівняння «теорія vs візуалізація»;
- формування навичок, необхідних для сучасних інженерних, фізичних та ІТ-спеціальностей.

Таким чином, візуалізація хвильових процесів не лише значно підвищує мотивацію та якість засвоєння матеріалу, але й готує учнів до університетських стандартів, розвиваючи в них уміння працювати з динамічними моделями реального світу.

3. Математичне моделювання двовимірних хвиль та їх візуалізація

Для переходу від загальних фізичних принципів до комп'ютерного моделювання необхідно визначити аналітичний вигляд хвильової функції. У загальному випадку, для опису хвильових процесів у математиці застосовують функції декількох змінних, параметрами яких є координати простору та час. Такі залежності отримали назву *хвильових функцій*.

3.1. Аналітичне представлення двовимірної монохроматичної хвилі

Розглянемо випадок двовимірного простору $X, Y \subset \mathbb{R}$. Нехай задано набір дійсних параметрів $A, a, b, \varphi, \omega \in \mathbb{R}$. Тоді хвильова функція $f(x, y, t)$ набуває наступного вигляду:

$$f(x, y, t) = A \cos(ax + by + \omega t + \varphi).$$

У даній моделі кожен параметр відіграє критичну роль у формуванні структури хвилі: A – амплітуда, що визначає максимальне відхилення збурення від нульового рівня; x, y – просторові координати, що задають положення точки на площині, t – часова координата, яка дозволяє спостерігати динаміку процесу; ω – кутова частота, що регулює швидкість коливань у часі; φ – фаза, яка визначає початковий стан зсуву хвилі; параметри a та b – хвильові коефіцієнти, що відповідають за просторову орієнтацію та частоту гребенів хвилі вздовж відповідних осей координат.

Функцію такої структури називають *двовимірною монохроматичною хвилею*. Подібні математичні моделі мають фундаментальне значення у сучасній науці та високих технологіях – від квантової теорії струн та оптики до архітектури нейронних мереж. Ба більше, вони є базовими для опису квантових станів частинок, що критично важливо для розвитку галузі квантових обчислень.

Якщо відповідним чином вибрати систему координат, то можна обійтися однією просторовою координатою, що значно спростить записи, але задля наглядного представлення, без втрати важливих компонентів, розглядаємо її як двовимірну.

3.2. Практична реалізація в середовищі GeoGebra

Для наочного представлення отриманої формули скористаємося інструментами динамічної математики (Чемерис, Прус, Фонарюк, 2024).

Приклад 1. Розглянемо візуалізацію хвильової функції за одиничних значень параметрів у статичний момент часу $t = 0$. У середовищі GeoGebra графічна інтерпретація функції $f(x, y, t) = \cos(x + y + 1)$ дозволяє побачити складну рельєфну структуру хвильового фронту (див. рис. 1).

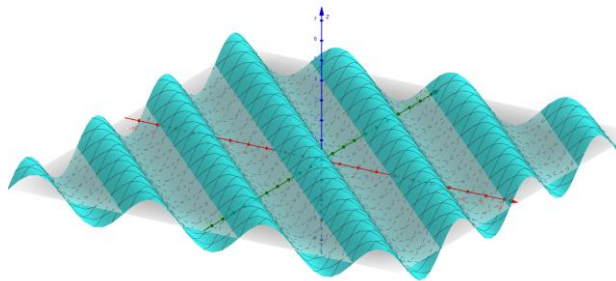


Рис.1. Хвильова функція $f(x, y, t) = \cos(x + y + 1)$

Використання подібних моделей дає змогу досліднику не лише проводити теоретичні розрахунки, а й інтерактивно змінювати параметри a, b або ω , миттєво спостерігаючи за трансформацією хвильового поля.

Приклад 2. (Зміна інтенсивності та фазовий зсув). Розглянемо випадок, коли параметри функції задано наступним чином: $A = 2$, $a = -1$, $b = -1$, $\omega = 2$, $\varphi = 1$. Станом на момент часу $t = 0,5$ хвильова функція набуває вигляду

$$f(x, y, t) = 2 \cos(-x - y + 2).$$

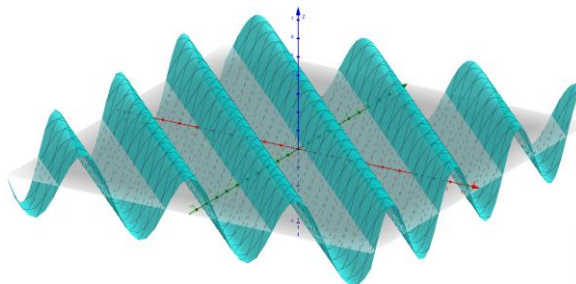


Рис. 2. Хвильова функція $f(x, y, t) = 2 \cos(-x - y + 2)$

Збільшення коефіцієнта A до 2 приводить до зростання «висоти» гребенів та «глибини» западин хвилі (рис. 2). У фізичному сенсі це означає збільшення енергії

хвильового процесу. Від'ємні значення параметрів a та b змінюють напрямок поширення хвильового фронту на площині. Значення аргументу $+2$ є результатом накладання початкової фази та часового зсуву ($\omega \cdot t = 2 \cdot 0,5 = 1$; загальний зсув $\phi + \omega t = 1 + 1 = 2$). Це демонструє положення хвилі в просторі в конкретний момент часу $t = 0,5$.

Приклад 3. (Високочастотні коливання та складна інтерференція). Нехай параметри задано так: $A = -2$, $a = -2$, $b = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = 1$ при $t = 2$.

Робоча формула:

$$f(x, y, t) = -2 \cos(-2x + 2y + 3).$$

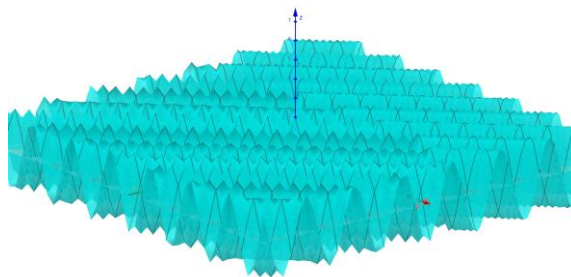


Рис. 3. Хвильова функція $f(x, y, t) = -2 \cos(-2x + 2y + 3)$

Збільшення модулів просторових коефіцієнтів a та b (до $|2|$) приводить до «стиснення» хвилі (рис. 3). Хвильове число k зростає, що візуально відображається як збільшення кількості гребенів на одиницю площі. Це пряма ілюстрація того, як рівняння Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ реагує на зростання параметра k .

Комбінація різних знаків при x та y ($-2x + 2y$) розгортає хвильові фронти під кутом 45° відносно осей координат. Це демонструє, як за допомогою простих коефіцієнтів можна моделювати напрямок руху енергії.

Від'ємна амплітуда $A = -2$ спричиняє дзеркальне відображення хвилі (гребені стають западинами), що критично важливо при вивченні явищ інтерференції та гасіння хвиль.

Ці приклади демонструють, що двовимірний монохроматичний хвиля є гнучким інструментом моделювання. Зміна лише кількох чисел дозволяє описувати як низькочастотні коливання океану, так і високочастотні електромагнітні поля або квантові стани частинок у сучасних обчислювальних системах.

3.3. Декомпозиція двовимірних хвиль та аналіз суперпозиції компонент

Для глибшого розуміння структури двовимірної монохроматичної хвилі доцільно розглянути її не як цілісний об'єкт, а як композицію простіших одновимірних коливань. Такий підхід базується на застосуванні тригонометричних тотожностей, що дозволяє розкласти складне просторове збурення на мультиплікативні компоненти.

$$f(x, y, t) = A \cos(ax + by + \omega t + \phi).$$

Для спрощення аналізу введемо допоміжні функції, що описують стан хвилі вздовж просторових осей: $u(x, t) = ax + \omega t$ – лінійна комбінація координати x та часу; $q(y) = by + \phi$ – просторова фаза вздовж осі y .

Тоді вихідна функція набуває вигляду $f(x, y, t) = \cos(u + q)$. Використовуючи фундаментальну формулу косинуса суми, ми отримуємо аналітичний розклад:

$$f(x, y, t) = \cos u \cos q - \sin u \sin q. \quad (2)$$

Цей результат демонструє, що двовимірна хвиля може бути представлена як *різниця мультиплікацій одновимірних хвиль*. Хоча вибір функцій u та q не є строго детермінованим, саме така інтерпретація є найбільш наочною для візуального моделювання.

Приклад 4. (Візуалізація компонент інтерференції). Розглянемо випадок статичного поля ($t = 0$) при одиничних коефіцієнтах $a = b = 1$ та нульовій фазі. Тоді $u(x, t) = x$ та $q(y) = y$, що приводить до рівняння:

$$f(x, y, t) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

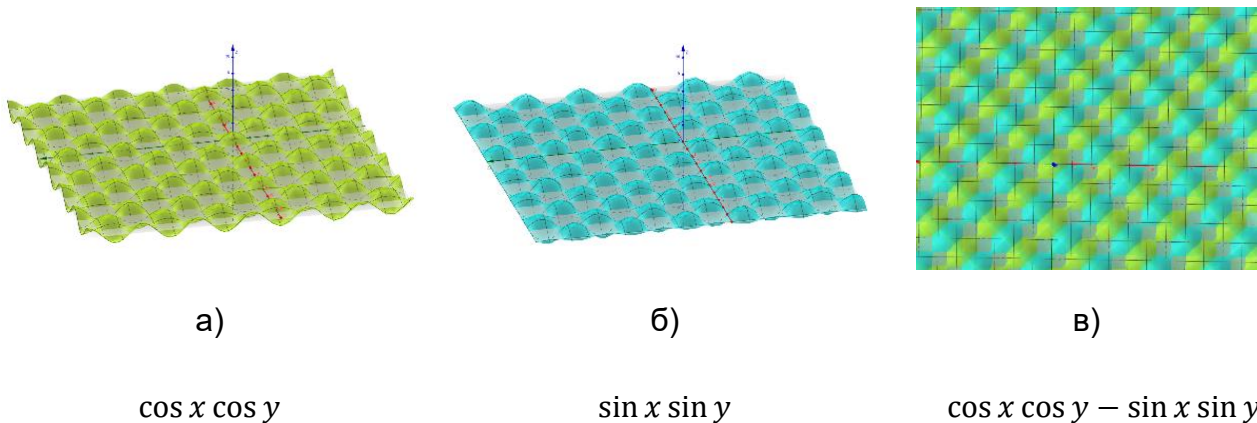


Рис. 4. Візуалізація компонент функції $f(x, y, t) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

За допомогою GeoGebra можемо візуалізувати кожен доданок окремо, щоб побачити їхній внесок у фінальну хвильову картину (рис. 4 а) – 4 в)).

Аналітичний розклад двовимірної хвилі на окремі гармонічні складники є не лише математичною маніпуляцією – він відображає фундаментальний *принцип суперпозиції*. Згідно з цим принципом, у лінійних середовищах хвилі поширюються незалежно одна від одної, а результуюче збурення в будь-якій точці простору є простою алгебраїчною сумою амплітуд усіх наявних хвиль.

Це відкриває шлях до вивчення складніших явищ, таких як *інтерференція* та *дифракція*, де декілька хвиль накладаються одна на одну, створюючи унікальні

енергетичні візерунки. Інтерференція виникає при накладанні двох або більше когерентних хвиль, що приводить до перерозподілу енергії в просторі.

Розуміння того, що складне поле складається з базових гармонік, дозволяє математично описати дифракцію – огинання хвилями перешкод. Рівняння Гельмгольца дозволяє розрахувати, як змінюється структура «базових гармонік» при зустрічі з апертурою або екраном. При цьому кожна точка хвильового фронту стає джерелом вторинних гармонік. Суперпозиція цих вторинних хвиль формує унікальні дифракційні картини, які можна бачити у вигляді складних геометричних структур (кілець, смуг або складних фрактальних візерунків).

Таким чином, перехід від простої формули $A \cos(ax + by + \omega t + \phi)$ до аналізу її складників дозволяє досліднику «розчленувати» складну фізичну реальність на елементарні структури. Візуалізація цього процесу в GeoGebra перетворює суху теорію на живий інструмент пізнання, роблячи невидимі енергетичні візерунки Всесвіту доступними для вивчення та розуміння.

3.4. Диференціальний аналіз хвильового поля: градієнт та лапласіан

Для повноцінного математичного опису хвилі недостатньо знати лише її амплітуду в конкретній точці. Необхідно розуміти динаміку її зміни у просторі та часі. Це досягається шляхом обчислення *частинних похідних* та застосування диференціальних операторів вищого порядку.

Математично *градієнт функції* ∇f визначається як вектор, компонентами якого є частинні похідні за просторовими координатами, тобто $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$. Він вказує напрямок найшвидшого зростання значення хвильової функції в конкретній точці простору. У контексті хвилі градієнт дозволяє визначити крутизну хвильового фронту та напрямок поширення збурення.

Ключовим інструментом у рівнянні Гельмгольца є *оператор Лапласа* Δ . Він визначається як сума других частинних похідних функції за просторовими змінними (1).

Для нашої базової монохроматичної хвилі $f = A \cos \theta$, де $\theta = ax + by + \omega t + \phi$, лапласіан набуває вигляду:

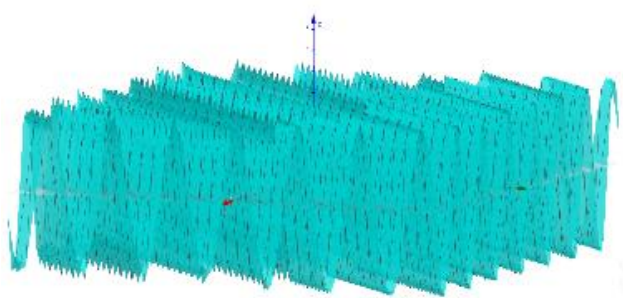
$$\Delta f = -Aa^2 \cos \theta - Ab^2 \cos \theta = -A(a^2 + b^2) \cos \theta.$$

Це перетворення демонструє фундаментальну властивість гармонічних хвиль: *друга похідна функції пропорційна самій функції з від'ємним коефіцієнтом*. Саме ця властивість дозволяє хвилі зберігати свою форму при поширенні, що інтуїтивно й описує рівняння Гельмгольца.

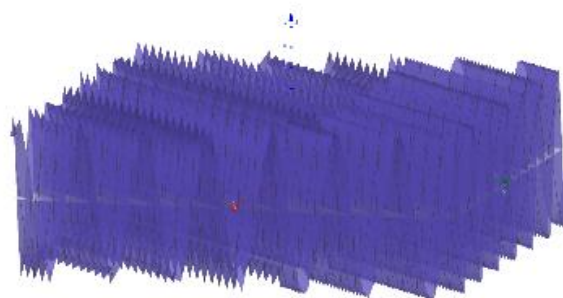
Приклад 5. Розглянемо хвилю $f(x, y, t) = 2 \cos(-x - y + 2t)$ у момент часу $t = 0$. Розрахунок її компонент дає наступні результати:

- частинні похідні: $\frac{\partial f}{\partial x} = -4 \sin \theta$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4 \sin \theta$, $\frac{\partial f}{\partial t} = 6 \sin \theta$;

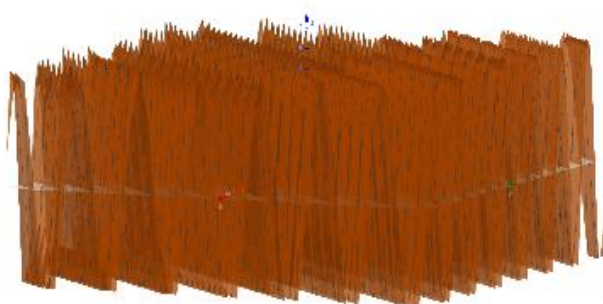
- диференціал: $df = -4 \sin \theta dx + 4 \sin \theta dy + 6 \sin \theta dt$;
- градієнт: $\nabla f = 2 \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- лапласіан: $\Delta f = 16 \cos \theta$.



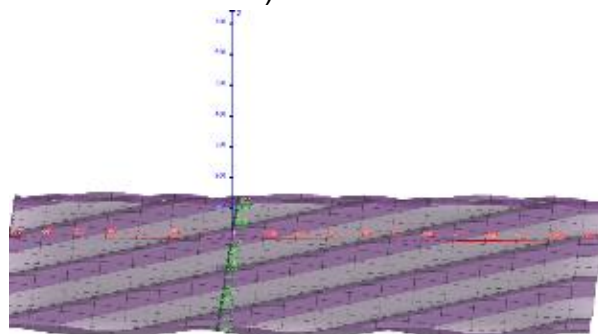
а) $-4 \sin \theta$



б) $4 \sin \theta$



в) $6 \sin \theta$



г) $16 \cos \theta$

Рис. 5. Візуалізація частинних похідних та лапласіана хвильової функції $f(x, y, t) = 2 \cos(-x - y + 2t)$

Візуалізація лапласіана в GeoGebra (рис. 5 г)) наочно показує, що оператор Лапласа фактично «підсилює» рельєф хвилі, зберігаючи її періодичну структуру. Це дозволяє учням зрозуміти, чому складні диференціальні рівняння є природною мовою для опису гармонії навколишнього світу.

Приклад 6. Розглянемо хвилю $f(x, y, t) = -2 \cos(-x - y + 2t)$ в момент часу $t = 1$. Розрахунок її компонент дає наступні результати:

- частинні похідні: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2 \sin \theta$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2 \sin \theta$;
- диференціал: $df = -2 \sin \theta dx + 2 \sin \theta dy + 4 \sin \theta dt$;
- градієнт: $\nabla f = \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- лапласіан: $\Delta f = -2\sqrt{2} \cos \theta$.

Візуалізація компонент в GeoGebra – див. рис. 6.

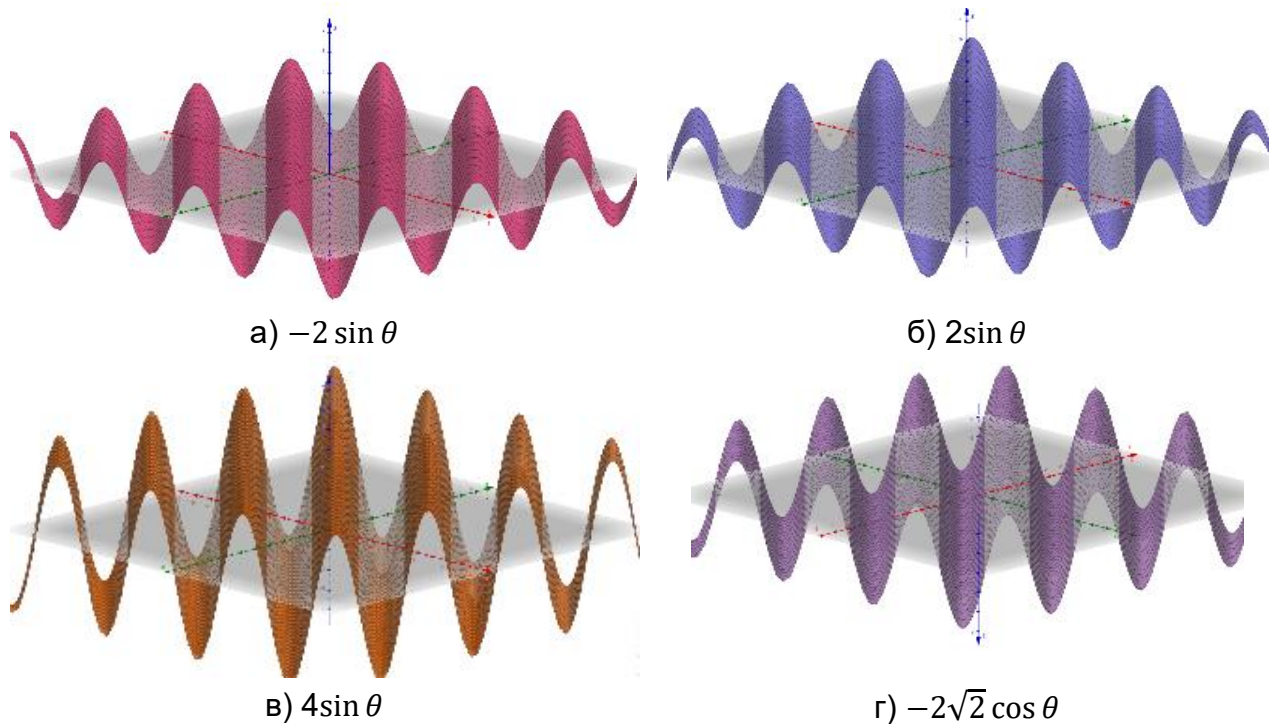


Рис. 6. Візуалізація компонент в GeoGebra

Як можна побачити в даному випадку, хвиля дійсно одновимірною, і без другої просторової координати можна обійтися. Загалом при моделюванні це може бути неочевидно, що свідчить про важливість застосування інструментарію візуалізації.

4. Висновки

У роботі наведено аналіз математичного опису хвильових процесів на основі двовимірної монохроматичної хвилі та рівняння Гельмгольца, що дозволяє сформулювати низку узагальнень, що мають як теоретичне, так і навчально-методичне значення.

По-перше, показано, що рівняння Гельмгольца є універсальним математичним інструментом для опису стаціонарних хвильових полів. Воно встановлює чіткий зв'язок між просторовою структурою хвилі та її параметрами, зокрема хвильовим числом і оператором Лапласа, що забезпечує узгоджений опис хвильових явищ у різних розділах фізики – акустиці, оптиці та квантовій механіці.

По-друге, розгляд двовимірної монохроматичної хвилі як композиції або різниці добутків одновимірних гармонічних функцій продемонстрував ефективність методу декомпозиції. Такий підхід дозволяє звести аналіз складних просторових хвильових структур до дослідження простіших тригонометричних складових, що є корисним для вивчення явищ суперпозиції та інтерференції хвиль.

По-третє, обчислення частинних похідних і застосування оператора Лапласа виявили фундаментальну диференціальну природу хвильових процесів. Встановлено, що друга похідна гармонічної хвильової функції є пропорційною самій функції, що

математично пояснює здатність хвиль зберігати форму під час поширення та задовольняти рівняння Гельмгольца.

Окрему увагу приділено ролі комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення хвильових явищ. Використання середовища GeoGebra дозволило подати абстрактні аналітичні результати у вигляді наочних графічних образів, що значно полегшує інтерпретацію математичних моделей і сприяє глибшому розумінню зв'язку між формулами та геометричною структурою хвильових полів. Також візуалізація дозволяє виявити важливі моменти спрощення моделі, тоді як аналітично це може бути неочевидно (зменшення розмірності з другої до першої, як у прикладі).

Отже, поєднання аналітичних методів математичного аналізу з комп'ютерним моделюванням є ефективним підходом до дослідження хвильових процесів. Запропонований у роботі матеріал може бути використаний як навчально-методична основа для поглибленого вивчення теми хвиль у шкільному та університетському курсах математики і математичної фізики, а також як вступ до подальших досліджень складніших хвильових моделей.

Список використаних джерел

- Віктор П. (2025). *Фізика. Коливання і Хвилі*. Харків: Вид-во Букшеф, 416 с. <https://bookchef.ua/fizyka-kolyvannia-i-khvyli>
- Зражевський Г. М. & Зражевська В. Ф. (2023). *Прикладний векторний аналіз*. Навчальний посібник, КНУ імені Тараса Шевченка, 140 с. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/applied_vector_analysis.pdf
- Пришляк О. (2004). *Диференціальна геометрія*: Курс лекцій., Київ: Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 66 с. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~prish/stud/Prish-DG.pdf>
- Томусяк А. А. & Трохименко В. С. (1999). *Математичний аналіз*. Вінниця, 1999. 488 с. <https://library.vspu.edu.ua/repozitarij/repozit/texti/navchalni/Matanaliz.pdf>
- Чемерис О., Прус. А. & Фонарюк О. (2024). *Майстерня GeoGebra: підхід до візуалізації математики*. Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2024. 47 с. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/41691/1/1.pdf>

References

- Chemerys O., Prus. A. & Fonaryuk O. (2024). *GeoGebra Workshop: An Approach to Visualizing Mathematics*. Zhytomyr: Ivan Franko ZhDU Publishing House, 2024. 47 p. URL: <https://eprints.zu.edu.ua/41691/1/1.pdf> [in Ukrainian].
- Pryshlyak O. (2004). *Differential geometry*: Course of lectures., Kyiv: Publishing and printing center Kyiv University, 66 p. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~prish/stud/Prish-DG.pdf> [in Ukrainian].
- Tomusyak A. A. & Trokhymenko V. S. (1999). *Mathematical analysis*. Vinnytsia, 1999. 488 p. <https://library.vspu.edu.ua/repozitarij/repozit/texti/navchalni/Matanaliz.pdf> [in Ukrainian].
- Victor P. (2025) *Physics. Oscillations and Waves.*, Kharkiv: Bukshef Publishing House, 416 p. <https://bookchef.ua/fizyka-kolyvannia-i-khvyli> [in Ukrainian].
- Zrazhevsky G.M. & Zrazhevsky V.F. (2023). *Applied vector analysis*. Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2023, 140 p. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/applied_vector_analysis.pdf [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 05.01.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Yevhenii TUDOVSHI, Student

ORCID ID: 0000-0002-1234-5678

e-mail: tudovshi.yevhenii@chnu.edu.ua

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

WAVE PROCESSES AND THEIR VISUALIZATION

Abstract. *The article investigates a mathematical model of two-dimensional wave processes based. The main properties of wave functions as functions of several variables are considered, and their differential characteristics, including partial derivatives and the Laplace operator, are analyzed. It is shown that the given harmonic wave functions are particular solutions of the Helmholtz equation, and the possibility of representing a two-dimensional wave as a superposition of one-dimensional harmonic components is demonstrated. Special attention is paid to the computer visualization of wave processes using the GeoGebra environment, which provides a clear interpretation of analytical results and contributes to the development of an intuitive understanding of the spatial structure of wave fields. The obtained results have educational and methodological value and can be used in secondary school and university courses in mathematics and mathematical physics.*

Keywords: *wave processes; harmonic wave; Laplace operator; wave function; wave superposition; computer visualization; GeoGebra.*

Received: 05.01.2026

Accepted for publication: 19.06.2026

Published: 30.07.2026