ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 511.172 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.6**

Володимир ВИШЕНСЬКИЙ, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олексій ПЕЧЕРИЦЯ, вчитель математики вищої кат., учитель-методист
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЛАНЦЮГИ ДІЛЬНИКІВ: КОМБІНАТОРНИЙ АСПЕКТ

Анотація. *Стаття присвячена дільникам натуральних чисел і властивостям, пов'язаним із розкладом натурального числа на множники. Зокрема, у статті йдеться про канонічну форму запису розкладу числа на прості множники, її узагальнення у вигляді нескінченної мультиплікативної структури та про кількість дільників заданого числа. Крім того, розглянуто поняття ланцюгів дільників числа, факторів ланцюгів дільників, взаємну обумовленість ланцюга дільників і послідовності його факторів. Окремо досліджено так звані щільні ланцюги дільників заданого числа та те, як довжини таких ланцюгів пов'язані з його мультиплікативною структурою, наведено два способи підрахунку загальної кількості щільних ланцюгів дільників заданого числа. Стаття адресована для школярів, учителів закладів загальної середньої освіти та усім, хто любить математику.*

Ключові слова. *Подільність; розклад числа на множники; кількість дільників числа; основна теорема арифметики; ланцюг дільників; фактор ланцюга дільників; щільний ланцюг дільників.*

1. Вступ

Дана стаття написана простою мовою задля того, щоб її могли зрозуміти не лише студенти або студентки математичних спеціальностей закладів вищої освіти, але й учні та учениці закладів загальної середньої освіти. Її метою є ознайомити читачів із початковими поняттями про подільність та деякими властивостями, пов'язаними із дільниками чисел.

Тут ітиметься виключно про натуральні (цілі додатні) числа. Тому задля лаконічності ми майже завжди опускатимемо прикметник "натуральне" і казатимемо просто "число".

Завдання цієї статті полягають у ознайомленні із поняттями, пов'язаними із подільністю чисел, взаємозв'язками між дільниками одного й того самого числа, дослідженні розкладу числа на множники, зокрема – узагальненні цього поняття, введенні понять ланцюгів дільників та факторів, а також – описі їхніх властивостей.

2. Дільники

Число c називаємо дільником числа a, якщо для певного числа p (звичайно ж, натурального) справджується рівність

$$a = c \cdot p.$$

Приклади. 1) Число 7 – дільник числа 21, бо $21 = 7 \cdot 3$.

2) Число 1 – дільник будь-якого числа a, бо $a = 1 \cdot a$.

3) Будь-яке число a є дільником самого себе, бо $a = a \cdot 1$.

Якщо c – дільник числа a і

$$a = c \cdot p,$$

то p також є дільником числа a, адже

$$a = p \cdot c.$$

Відзначимо вже тепер ще одну властивість подільності, котра знадобиться нам дещо пізніше.

Якщо c – дільник числа a, а f – дільник числа c, то f є також дільником числа a.

Справді, якщо $a = cp$ і $c = fq$, то

$$a = f \cdot (qp),$$

а ця остання рівність і засвідчує (згідно з означенням), що f – дільник a.

Отже, будь-який дільник будь-якого дільника числа a сам є дільником цього числа.

Нашим першим комбінаторним завданням буде з'ясувати, від чого залежить, скільки дільників має те чи те число, і як полічити їх.

Число 1 має один дільник і цей дільник – 1. Решта чисел має більше дільників. Щонайменше їх два, адже дільниками кожного числа є 1 та саме це число. Числа, що мають рівно два дільники, називають простими. Найменше просте число – 2. Ось усі ті прості числа, які не перевищують 70:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67.$$

Ще математики стародавньої Греції довели, що простих чисел є безліч. Ці слова означають: скільки б простих чисел ми не назвали, знайдеться не назване просте число.

Усі числа, крім одиниці й простих чисел, мають щонайменше три дільники. Ось кілька прикладів.

1) Число 10 має чотири дільники: 1, 2, 5 і 10.

2) Число 24 має вісім дільників: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 і 24.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

3) Число 25 має три дільники: 1, 5 і 25.

У очі відразу впадає складна залежність кількості дільників числа від нього самого. Ця обставина стає ще рельєфнішою, коли навести приклади більшої кількості чисел, пов'язавши кожне з них з кількістю його дільників. Найкраще подати такі спостереження дворядковою таблицею. У її першому рядку названо числа, а в другому – кількості їхніх дільників.

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Кількість дільників	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4	4	5	2	6	2	6	4	4	2	8	3

Послідовність чисел другого рядка здається геть безсистемною. Єдине, що стосовно неї можна сказати одразу з цілковитою певністю, – це не дуже глибоке твердження про те, що кількість дільників числа мало залежить від його величини. Наприклад, числа 23, 24 і 25 дуже близькі за величиною, проте кількості їхніх дільників – 2, 8 і 3 – суттєво різні.

Наше найближче завдання – з'ясувати, від чого залежить кількість дільників числа і за яким правилом (за якою формулою) цю кількість можна обчислювати (Perestyuk, Vyshenskyi, 2022). Проте ми не впораємося з цим завданням, не пригадавши ще кількох арифметичних фактів.

3. Розклад числа на множники

Якщо

$$a = bc,$$

до того ж кожне з чисел b і c менше, ніж a, то кажуть, що a розкладено на множники b і c. Те саме (тобто однакове за змістом) означення можна висловити дещо по-іншому. Кажуть, що a розкладено на множники b і c, якщо $a = bc$ і жодне з чисел b і c не є одиницею. Рівнозначність цих двох означень не викликає сумніву, адже якщо жодне з чисел b і c не є одиницею, то також жодне з них не дорівнює a, і навпаки.

Приклад. Число 30 можна розкласти на два множники кількома способами: $2 \cdot 15$, або $3 \cdot 10$, або $5 \cdot 6$.

Число можливо розкласти на множники тільки в тому разі, коли воно має *власні* дільники. Так називають ті дільники числа, котрі менші від нього, але більші від 1. Число 1 і всі прості числа не мають власних дільників, а тому їх неможливо розкласти на множники. Решта чисел мають власні дільники, а тому їх можна подати добутком двох менших чисел, тобто розкласти на два множники.

Хай число a розкладено на два множники:

$$a = bc.$$

Може статися, що один з них (чи й обидва), наприклад b, також розкладається на множники: $b = u \cdot v$. Підставивши це значення b у формулу для a, отримаємо зображення числа a добутком трьох множників, кожний з яких є власним дільником числа a:

$$a = u \cdot v \cdot c.$$

В разі, коли серед чисел u, v і c є не прості, ми зможемо й далі продовжити це мультиплікативне (від слова *multiplizieren* – множити) подрібнення числа a. Щоразу кількість множників збільшуватиметься. Це триватиме доти, доки всі вони не стануть простими числами. Без кінця, до речі, процес тривати не може, бо при кожному мультиплікативному роздвоєнні числа обидва множники стають меншими від нього, а чисел, менших від a, є всього $a - 1$.

Наші міркування доводять, що кожне число, крім числа 1 і простих чисел, можна подати добутком простих чисел або, як ще кажуть, розкласти на прості множники. Можна довести також (ми не будемо тут цього робити), що для кожного числа існує тільки один такий розклад. Останнє твердження слід розуміти так. Якщо ви розклали якесь число n на прості множники і виявили, що цей розклад п'ять разів містить число 13, то такий самий результат отримає кожний, хто розкладе число n на прості множники. Звичайно ж, сказане стосується також будь-якого іншого простого множника. Якщо, наприклад, у вашому розкладі числа n на прості множники число 7 відсутнє, то хай хто розкладатиме число n на прості множники, число 7 з'явитися там не може.

Одним словом, кожне число розкладається на прості множники єдиним, тільки йому притаманним, чином. Розклад на прості множники є немов би мультиплікативним паспортом числа. Кожне число має свій, не подібний до інших паспорт, і кожний паспорт (добуток простих чисел) належить одному числу.

Не буде зайвим відзначити, що розклад числа на прості множники все-таки не цілком однозначний, адже співмножники можна розташовувати в добуткові у різному порядку. Наприклад, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, але також $24 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ і т.п. Проте ці відмінності не суттєві. Суттєвим є те, що за будь-якого запису розклад числа 24 на прості множники містить одну трійку і три двійки, і більше множників у ньому немає.

Якщо розклад на прості множники числа a містить

k_1 *простих множників* p_1,

k_2 *простих множників* p_2,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

k_3 *простих множників* p_3,

і так далі, нарешті,

k_s *простих множників* p_s,

і цим асортимент простих множників вичерпується, то цілком доречно обрати таку форму презентації розкладу:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k^3} \dots p_s^{k_s}.$$

Її називають *стандартною* або ж *канонічною формою*.

Ось приклади канонічних зображень розкладів на прості множники кількох чисел:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$1024 = 2^{10},$$

$$242 = 2 \cdot 11^2,$$

$$216 = 2^3 \cdot 3^3.$$

Математика не любить винятків. Ми винятки поки що маємо. Не всі числа можна розкласти на прості множники. Винятковим є число 1 та прості числа. Домовившись про певне розширення змісту поняття розкладу на прості множники, ми усунемо ці винятки, уможлививши чітке й стисле звучання підсумкової теореми. Вважаємо, що кожне просте число розкладається на прості множники і цей розклад містить всього один множник — саме це число. Що ж до числа 1, то його розклад на прості множники вважаємо порожнім, тобто таким, що не містить жодного простого множника. За цих домовленостей отримуємо таку теорему про розклад чисел на прості множники.

Теорема 1. *Кожне число можна розкласти на прості множники, до того ж тільки одним способом*.

Цю теорему, зважаючи на її виняткове значення для арифметики, а отже, й усієї математики загалом, називають *основною теоремою арифметики*.

3.1 Про те саме дещо по-іншому

Ми усвідомлюємо, що таке добуток трьох, сорока семи і навіть мільйона якихось чисел. Ми розуміємо, що кожний такий добуток є певним числом, знаємо, як його, принаймні теоретично, отримати. Так само ми усвідомлюємо, що навіть теоретично неможливо перемножити безліч співмножників. Проте бувають випадки, коли добуткові безлічі співмножників цілком доречно присвоїти певне числове значення. Нас цікавитиме зараз один з цих випадків. Хай маємо нескінченну послідовність чисел

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots\ ,\ c_n,\ c_{n+1},\ \dots$$

тобто нескінченну череду чисел, виписаних одне за одним за якимось правилом. Не забороняється, щоб поміж чисел були однакові. Серед таких послідовностей виокремимо ті, у яких після певної кількості довільних початкових чисел усі решта – одиниці. Хай, наприклад,

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = 1.$$

Утворимо формальний (без претензій на зміст) нескінченний добуток

$$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \dots \cdot c_n \cdot c_{n+1} \cdot c_{n+2} \cdot \dots .$$

Виконуючи послідовно множення

$$c_1 \cdot c_2, \qquad (c_1 \cdot c_2) \cdot c_3, \qquad (c_1 \cdot c_2 \cdot c_3) \cdot c_4, \qquad \dots \qquad (c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{n-1}) \cdot c_n, \qquad \dots$$

на $(n-1)$-му кроці отримаємо число

$$u = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n,$$

котре більше не змінюватиметься, коли утворюватимемо наступні добутки, адже далі щоразу множитимемо на 1. Тому число u доречно назвати значенням нескінченного добутку

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \dots .$$

Візьмімо тепер послідовність усіх простих чисел, розміщених за зростанням (кожне наступне число більше від попереднього). Ось початок цієї послідовності:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Утворимо тепер такий нескінченний добуток цілих невід'ємних степенів цих чисел, в якому тільки скінченна кількість показників додатні, а решта – нулі. У такому добуткові кілька (скінченна кількість) співмножників будуть натуральними степенями простих чисел,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

а решта – одиницями. Отже, наш добуток зображатиме певне натуральне число, подаючи його розкладеним на прості множники.

Приклади. 1) Нескінченний добуток

$$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot \dots ,$$

у якому всі прості числа, більші від 11, стоять у нульовому степені, зображає число $3^2 \cdot 7 \cdot 11$, тобто 693.

2) Нескінченний добуток

$$2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^1 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot \dots ,$$

у якому одиницями є всі множники, що стоять після 13^1, зображає число $2^4 \cdot 3 \cdot 13$, тобто 624.

3) Якщо в добуткові всі прості числа стоять у нульовому степені, то добуток зображає число 1.

4) Якщо в нескінченному добуткові, утвореному степенями простих чисел, один показник степеня є одиницею, а всі решта дорівнюють нулеві, то добуток зображає відповідне просте число.

Трактуючи такого типу нескінченні добутки, як узагальнені розклади чисел на прості множники, урівноправлюємо з погляду розкладу всі числа включно з одиницею і простими числами. Число 1 і прості числа не потребують тепер жодних спеціальних домовленостей чи застережень. Наступна теорема – точний відповідник основної теореми арифметики – не має жодних винятків. Усі числа цілком рівноправні щодо неї.

Теорема 2. *Кожне число можливо, до того ж тільки одним способом, зобразити нескінченним добутком невід'ємних цілих степенів усіх простих чисел, впорядкованих за зростанням*.

4. Кількість дільників числа.

Нехай

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$$

– канонічний розклад числа a на прості множники. Сказане означає, що:

1) $p_1, p_2, \dots , p_s$ – різні прості числа;

2) $k_1, k_2, \dots , k_s$ – натуральні числа.

Якщо b – дільник числа a, то:

1) b не може ділитися на жодне просте число, крім $p_1, p_2, \dots , p_s$;

2) b не може ділитися на $p_1^{l_1}$, якщо $l_1 > k_1$;

3) сказане у попередньому пункті з належною заміною чисел l_1 і k_1 стосується також простих чисел $p_2,\ p_3,\ \dots\ ,\ p_s$.

Інакше кажучи, якщо число b розкласти на прості множники, то матимемо таке його зображення:

$$b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}.$$

При цьому для показників степенів чисел $p_1,\ p_2,\ \dots\ ,\ p_s$ справджуватимуться нерівності

$$0 \le m_1 \le k_1,\quad 0 \le m_2 \le k_2,\quad \dots,\quad 0 \le m_s \le k_s.$$

Важливо підкреслити, що для тих чи інших дільників b числа a окремі (або навіть усі) показники $m_i\ (i = 1,2,\dots,s)$ можуть бути нулями, адже не всі дільники числа a зобов'язані ділитися на всі числа $p_i\ (i = 1,2,\dots,s)$. Наведене зображення дільника b однозначне. Опустивши в ньому множники з нульовими показниками m_i, отримаємо канонічний розклад числа b на прості множники.

Отже, поза межами чисел

$$b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$$

за наведених вище умов для показників $m_i\ (i = 1,2,\dots,s)$ немає дільників числа a. З іншого боку, всі числа b вказаного типу є дільниками a, бо

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} = \left(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}\right) \cdot \left(p_1^{k_1 - m_1} p_2^{k_2 - m_2} \dots p_s^{k_s - m_s}\right),$$

тобто

$$a = bc$$

і

$$c = p_1^{k_1 - m_1} p_2^{k_2 - m_2} \dots p_s^{k_s - m_s}$$

– натуральне число, адже

$$k_1 - m_1 \ge 0,\quad k_2 - m_2 \ge 0,\quad \dots\ ,\quad k_s - m_s \ge 0.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Виходить, що число a має стільки дільників, скільки є наборів невід'ємних цілих чисел

$$(m_1, m_2, \dots, m_s),$$

у яких

$$0 \le m_1 \le k_1, \;\; 0 \le m_2 \le k_2, \;\; \dots, \;\; 0 \le m_s \le k_s.$$

Першу компоненту такого набору можемо обрати $(k_1 + 1)$ способами, другу – $(k_2 + 1)$ способами і т.д., нарешті, останню – $(k_s + 1)$ способами. При цьому значення кожної з s компонент можемо обирати незалежно від вибору інших. За цих умов можемо утворити всього

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$$

зазначених наборів. Тому число a має саме стільки різних дільників.

Приклади. 1) Число

$$a = 2^7 \cdot 11 \cdot 17^2 \cdot 41$$

Має

$$(7 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 96$$

різних дільників. Серед них непарних дільників є

$$(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 12.$$

2) Які числа мають непарну кількість дільників?

Нехай

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s},$$

де $p_1, p_2, \dots, p_s$ – різні прості числа.

Число a має

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$$

дільників. Цей добуток є непарним числом лише в тому разі, коли непарними числами є всі його співмножники, а це буде тоді, коли всі числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ парні. Нехай

$$k_1 = 2t_1, \;\; k_2 = 2t_2, \;\; \ldots, \;\; k_s = 2t_s.$$

Маємо:

$$a = p_1^{2t_1} \cdot p_2^{2t_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{2t_s} = \left(p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{t_s}\right)^2.$$

Висновок. *Непарну кількість дільників мають ті й тільки ті числа, котрі є квадратами натуральних чисел, як-от* $1, 4. 9, 16, 25$ *тощо*.

5. Ланцюги дільників числа.

Ланцюгом дільників числа a $(a \neq 1)$ називаємо скінченну послідовність чисел, яка починається числом a, закінчується числом 1, до того ж кожне наступне її число є дільником попереднього і всі ці числа різні.

Одразу проілюструємо це означення прикладом. Наведемо усі можливі ланцюги дільників числа 30:

$30, 15, 5, 1;$

$30, 15, 3, 1;$

$30, 10, 5, 1;$

$30, 10, 2, 1;$

$30, 6, 3, 1;$

$30, 6, 2, 1;$

$30, 15, 1;$

$30, 10, 1;$

$30, 6, 1;$

$30, 5, 1;$

$30, 3, 1;$

$30, 2, 1;$

$30, 1.$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, маємо шість ланцюгів завдовжки чотири елементи, стільки ж завдовжки три та один ланцюг завдовжки два – загалом тринадцять різних ланцюгів.

Неважко помітити, що всі члени ланцюгів є дільниками початкового числа. Ця обставина є наслідком так званої транзитивності відношення подільності: якщо l ділиться на m, а m ділиться на n, то l також ділиться на n.

Цей факт є нескладним наслідком означення подільності. Згідно з ним "a ділиться на b" означає, що

$$a = bc,$$

причому число c ціле. Отож "l ділиться на m", а "m ділиться на n" означає, що

$$l = mk \; i \; m = ns,$$

де числа k і s цілі. Підставивши у першу рівність значення числа m з другої рівності, отримуємо:

$$l = n \cdot sk.$$

Оскільки число sk ціле, то остання рівність засвідчує, що l ділиться на n (n є дільником l). Оскільки в ланцюгу дільників кожне наступне число є, згідно з означенням, дільником попереднього, то всі числа ланцюга є дільниками початкового числа.

Від чого залежить, скільки ланцюгів дільників можна побудувати для числа a? На перший погляд, кількість ланцюгів залежить від кількості дільників числа. Така залежність, безсумнівно, існує. Наприклад, усі прості числа мають два дільники, котрі складають один ланцюг. Проте залежність ця не проста. Точніше, кількість ланцюгів числа залежить не тільки від кількості його дільників, а й від характеру розкладу числа на прості множники.

Наприклад, як було з'ясовано вище, число 30, що має вісім дільників, має тринадцять ланцюгів дільників. Число 24 також має вісім дільників (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24), проте ланцюгів дільників у нього двадцять. Ось ці ланцюги:

$$24,\ 12,\ 6,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 6,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 6,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 4,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 4,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 6,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 6,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 1;$$

$$24,\ 6,\ 1;$$

$$24,\ 4,\ 1;$$

$$24,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 1.$$

6. Фактори ланцюгів дільників.

Нехай

$$a = a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_n = 1$$

ланцюг дільників числа a (котре в цьому контексті нам зручно буде позначати також a_0).

Відношення

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

називатимемо *факторами ланцюга дільників*, а послідовність цих відношень у зазначеному порядку – *послідовністю факторів*.

Приклади. 1) Факторами ланцюга

$$30,\ 10,\ 2,\ 1$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

є числа

$$3,\ 5,\ 2.$$

2) Послідовність

$$2,\ 3,\ 5$$

є послідовність факторів ланцюга дільників

$$30,\ 15,\ 5,\ 1.$$

Теорема 3. *Добуток усіх факторів будь-якого ланцюга дільників числа* a *дорівнює* a.

Доведення. цієї теореми нескладне. Хай

$$a = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_{n-1},\ a_n = 1$$

ланцюг дільників, а

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots\ ,\ t_{n-1}$$

– послідовність його факторів. За означенням

$$t_0 = \frac{a_0}{a_1},\ t_1 = \frac{a_1}{a_2},\ \dots\ ,\ t_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

а тому

$$t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{n-1} = \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = a_0 = a.$$

■

Наступна теорема виявляє взаємну обумовленість ланцюга дільників та послідовності його факторів.

Теорема 4. *За послідовністю факторів можливо відновити ланцюг дільників. Іншими словами: знайти ланцюг дільників все одно, що знайти послідовність його факторів.*

Доведення. Ми вже знаємо (згідно з означенням), що ланцюг дільників однозначно визначає послідовність своїх факторів.

Хай тепер дано послідовність факторів

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots\ ,\ t_{n-1}$$

певного ланцюга дільників. Чи можливо відновити сам ланцюг? Так, і саме ця відповідь є змістом теореми. Ось як це можна зробити.

Згідно з попередньою теоремою, перше число ланцюга є добутком усіх факторів, тобто

$$a_0 = t_0 t_1 t_2 \dots\ t_{n-1}.$$

Оскільки $t_0 = \frac{a_0}{a_1}$, то

$$a_1 = \frac{a_0}{t_0} = t_1 t_2 \dots\ t_{n-1}.$$

Далі маємо, що $t_1 = \frac{a_1}{a_2}$, а тому

$$a_2 = \frac{a_1}{t_1} = t_2 t_3 \dots\ t_{n-1}.$$

Так, крок за кроком, отримуємо:

$$a_3 = t_3 \dots\ t_{n-1},\ a_4 = t_4 \dots\ t_{n-1},\ \dots\ ,\ a_{n-1} = t_{n-1},$$

нарешті, $a_n = \frac{a_{n-1}}{t_{n-1}} = 1$.

Із цієї теореми випливає, що між ланцюгами дільників числа a та послідовностями їхніх факторів існує бієкція. За ланцюгом однозначно відновлюється послідовність факторів і навпаки.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Будь-яка скінченна послідовність натуральних чисел, що не містить числа 1, є послідовністю факторів певного ланцюга дільників одного з натуральних чисел.

Приклади. 1) Послідовність

$$2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 5$$

є послідовністю факторів ланцюга дільників

$$360,\ 180,\ 90,\ 30,\ 15,\ 5,\ 1$$

числа 360.

2) Числа

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2$$

є послідовними факторами ланцюга дільників

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$$

числа 128.

3) Послідовності, складеній з одного фактора

$$12$$

відповідає двочленний ланцюг дільників

$$12,\ 1$$

числа 12.

7. Щільні ланцюги дільників.

Якщо з будь-якого ланцюга дільників числа a видалити яке завгодно внутрішнє (не перше й не останнє) число, то послідовність чисел, що лишаться, складе інший ланцюг дільників того самого числа. Це випливає з транзитивної властивості подільності чисел. А чи можливо вставити в ланцюг дільників ще одне число так, щоб нова послідовність також була ланцюгом дільників того самого, що й раніше, числа? Іноді можливо, а іноді ні. Наприклад, видовжити на одну ланку ланцюг

$$30,\ 5,\ 1$$

можливо двома способами: між числами 30 і 5 вставити 15 або 10. Отримаємо ланцюги

$$30,\ 15,\ 5,\ 1 \textit{ або } 30,\ 10,\ 5,\ 1.$$

Що ж до обох цих ланцюгів, то ні один, ні другий жодним чином видовжити не можна.

Означення. *Ланцюг дільників, який неможливо видовжити, називатимемо щільним*.

Теорема 5. *Ланцюг дільників числа* a

$$a = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_{n-1},\ a_n = 1$$

щільний у тому й тільки тому разі, коли всі його фактори

$$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_2}{a_3},\ \dots\ ,\ \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}},\ \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

є простими числами.

Доведення. Якщо $a_k = a_{k+1} \cdot p$, де p – просте число, то між числами a_k і a_{k+1} не можна вставити ще одне число. Справді, припустімо, що є таке число d, яке ділиться на a_{k+1}, а саме є дільником a_k:

$$a_k = dm \textit{ і } d = a_{k+1}n,$$

до того ж $m > 1$ *і* $n > 1$ (числа a_k, d і a_{k+1} різні). За цих умов справджується рівність

$$a_k = a_{k+1} \cdot mn.$$

Разом з рівністю

$$a_k = a_{k+1} \cdot p$$

вона засвідчує, що

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$p = mn,$$

а це неможливо, бо p – просте число. Тож наше припущення про те, що між a_k і a_{k+1} можна вставити такий дільник числа a_k, котрий ділиться на a_{k+1}, хибне.

Хай тепер

$$a_k = a_{k+1} \cdot l$$

і число l не просте. Тоді

$$l = u \cdot v,$$

до того ж $u > 1$, $v > 1$. Візьмемо число

$$c = v \cdot a_{k+1}.$$

Маємо:

$$a_k = u \cdot c,\ c = v \cdot a_{k+1}.$$

Ці дві рівності свідчать , що трійка чисел

$$a_k,\ c,\ a_{k+1}$$

складає правильний відтинок ланцюга дільників. Тож початковий ланцюг можливо видовжити, вставивши число c між числами a_k і a_{k+1}.

■

Приклади. 1) Ланцюг дільників

$$144,\ 72,\ 36,\ 12,\ 6,\ 2,\ 1$$

щільний, бо всі його фактори

$$2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2$$

прості числа.

2) Ланцюг дільників

$$1800,\ 360,\ 180,\ 30,\ 15,\ 3,\ 1$$

не щільний, бо серед членів послідовності його факторів

$$5,\ 2,\ 6,\ 2,\ 5,\ 3$$

є не просте число. Якщо у послідовності факторів число 6 замінити двома числами: 2 і 3 або 3 і 2, – то новим послідовностям відповідатимуть два різні щільні ланцюги

$$1800,\ 360,\ 180,\ 90,\ 30,\ 15,\ 3,\ 1$$

або

$$1800,\ 360,\ 180,\ 60,\ 30,\ 15,\ 3,\ 1.$$

Кожний із них є ущільненням початкового ланцюга.

3) Число 1 не має (згідно з означенням) жодного ланцюга дільників. Будь-яке інше число a має ланцюг дільників

$$a,\ 1$$

завдовжки 2. Це – найкоротший ланцюг. Для простих чисел a він щільний. Жодних інших ланцюгів дільників прості числа не мають. Якщо ж число a не просте, то цей ланцюг не єдиний, і будь-який інший ланцюг є його ущільненням.

Із означення факторів ланцюга дільників випливає, що довжина ланцюга на 1 перевищує довжину послідовності факторів.

Тепер саме час відповісти на запитання: як довжини щільних ланцюгів дільників даного числа a пов'язані з його мультиплікативною структурою? Відповідь дає така

Теорема 6. *Якщо*

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots\ p_s^{k_s}$$

($p_1, p_2, \dots, p_s$ *різні прості числа*), *то кожний щільний ланцюг числа* a *має довжину*

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s + 1.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Доведення. Як нам уже відомо, послідовність факторів щільного ланцюга дільників числа a складається з простих чисел, добуток яких дорівнює a. Тому поміж факторів є

$$k_1 \textit{ простих чисел } p_1$$
$$k_2 \textit{ простих чисел } p_2$$
$$\vdots$$
$$k_s \textit{ простих чисел } p_s.$$

Адже саме добуток усіх цих чисел складає число a. З цього висновуємо, що послідовність факторів містить

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s$$

чисел. Ланцюг дільників містить на одне число більше.

■

Приклад. Число 100 розкладається на прості множники так:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Тому всі щільні ланцюги його дільників мають довжину $2 + 2 + 1 = 5$. Кожному такому ланцюгу відповідає послідовність факторів, складена з двох чисел 2 і двох чисел 5. Ось повний перелік усіх щільних ланцюгів та їхніх факторів.

Фактори	Ланцюги дільників
$2\ 2\ 5\ 5$	$100\ 50\ 25\ 5\ 1$
$2\ 5\ 2\ 5$	$100\ 50\ 10\ 5\ 1$
$2\ 5\ 5\ 2$	$100\ 50\ 10\ 2\ 1$
$5\ 2\ 2\ 5$	$100\ 20\ 10\ 5\ 1$
$5\ 2\ 5\ 2$	$100\ 20\ 10\ 2\ 1$
$5\ 5\ 2\ 2$	$100\ 20\ 4\ 2\ 1$

8. Про кількість ланцюгів.

Спочатку з'ясуємо, скільки щільних ланцюгів дільників має число a залежно від того, як воно розкладається на прості множники. Що ми вже знаємо про щільні ланцюги? Усі

вони мають однакову довжину, а всі їхні фактори – прості числа. Будь-який не щільний ланцюг коротший від щільного, а поміж його факторів є хоча б одне не просте число.

Найпростішим видається випадок, коли

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n,$$

де всі прості множники p_i різні. У цьому випадку послідовність факторів будь-якого щільного ланцюга дільників складатимуть n різних простих чисел p_1, p_2, ... , p_n, розташованих у певному порядку. Змінюючи порядок, утворюватимемо нові послідовності, котрим відповідатимуть нові щільні ланцюги дільників, адже між тими й тими об'єктами маємо бієкцію. Замість полічити ланцюги дільників можна полічити послідовності факторів. Різні числа p_1, p_2, ... , p_n можна вишикувати в ряд $n!$ способами. Отже, в нашому випадку можемо утворити

$$n!$$

різних послідовностей факторів, котрим відповідатимуть $n!$ різних щільних ланцюгів дільників.

Висновок. *Якщо* $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, *де* p_1, p_2, ... , p_n *різні прості числа, то число* a *має* $n!$ *різних щільних ланцюгів дільників.*

Приклад. Оскільки $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то для числа 210 є всього $4!$, тобто 24 різні щільні ланцюги дільників кожний завдовжки 5. Ось кілька з них разом з відповідними послідовностями факторів.

Фактори				Ланцюги дільників				
2	3	5	7	210	105	35	7	1
2	7	5	3	210	105	15	3	1
7	5	3	2	210	30	6	2	1
5	2	7	3	210	42	21	3	1
3	2	7	5	210	70	35	5	1

Розглянемо тепер довільний випадок, тобто вважатимемо, що дане число a розкладається на прості множники, серед яких можуть бути однакові. Отже, нехай

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s},$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

де p_1, p_2, ... , p_s різні прості числа. Цього разу щільний ланцюг дільників числа a визначає послідовність завдовжки $k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ факторів p_1, p_2, ... , p_s, які повторюються відповідно k_1, k_2, ... , k_s разів. Кількість різних таких послідовностей дорівнює кількості всіляких щільних ланцюгів дільників, адже між тими й тими об'єктами маємо бієкцію. Полічити всі послідовності факторів щойно вказаного типу (k_1 чисел p_1, k_2 чисел p_2 і т.д., нарешті k_s чисел p_s) можна по-різному. Вкажемо на деякі способи.

Перший спосіб. Можемо вважати, що p_1, p_2, ... , p_s просто літери, написані на окремих картонних картках на зразок розрізної абетки. Повний комплект цих карток складено з k_1 карток, на яких зображено літеру p_1, k_2 карток p_2 і т.д., нарешті k_s карток із зображеними на них літерами p_s. Всі літери p_1 на всіх k_1 картках віддруковано однаковим шрифтом, а тому картки з цією літерою не відрізняються одна від одної. Це саме стосується усіх решти літер p_i ($i = 2, 3, \ldots, s$). Нас цікавить, скількома способами всі $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ карток можна викласти в ряд одну за одною. Якби поміж карток не було однакових, то ми відразу відповіли б на це запитання. Різних варіантів було б $(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!$ Ми в змозі зробити наші картки різними, долучивши до кожної з k_1 наявних літер p_1 додаткові різні між собою тимчасові позначки і вчинивши так само з рештою літер p_2, ... , p_s. Картки з цими додатковими позначками можемо вишикувати в ряд $(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!$ способами. Уявімо собі, що ми крок за кроком фізично утворили всі ці перестановки, послідовно сфотографувавши їх і розмістивши, наприклад у колонку.

Будь-які дві такі перестановки хоча б в одній позиції (насправді принаймні в двох) відрізняються одна від одної або літерами p_i, або ж додатковими мітками біля однакових літер. Візьмімо яку-небудь одну з перестановок і розглянемо всі ті перестановки, котрі в кожній позиції мають однакові з нею літери p_i, а тому відрізняються від неї тільки додатковими мітками в окремих (можливо, й в усіх) позиціях. Скільки всього є таких перестановок включно з початковою перестановкою φ? Міняючи в перестановці φ місцями всіляким чином мітки біля букв p_1, отримаємо $k_1!$ таких перестановок. Міняючи в кожній з них всіляким чином місцями мітки біля літер p_2, отримаємо разом $k_1! \cdot k_2!$ таких перестановок. Вчинивши у кожній з них те саме з мітками біля літер p_3, отримаємо вже $k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!$ тих перестановок, в яких усі літери p_3 стоять на однакових місцях. Ці міркування без жодних змін можна продовжити далі аж доки не дійдемо до останньої літери p_s. Водночас отримаємо відповідь на наше запитання: всього є $k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!$ перестановок, у яких літери p_1, p_2, ... , p_s стоять на тих самих місцях, що й у перестановці φ.

Через те, що в попередніх міркуваннях перестановка φ довільна, то це означає, що всі $(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!$ перестановок літер p_i з мітками розподіляються на

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

груп по $k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!$ перестановок у кожній з них. У всіх перестановок однієї групи всі літери p_i стоять на однакових місцях. У перестановок з різних груп хоча б у одній позиції стоять різні літери p_i.

Зі сказаного висновуємо, що якщо в усіх перестановках усунемо мітки, то всі перестановки однієї групи перетворяться на однакові послідовності літер p_i, а перестановки різних груп – у різні послідовності. Тому різних послідовностей літер p_1, p_2, ... , p_s, в яких літера p_i повторюється k_i рази ($i = 1, 2, \ldots, s$) є

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!}.$$

Другий спосіб. Отже, є k_1 примірників літери p_1, k_2 примірників літери p_2 і т.д., нарешті k_s примірників літери p_s. Усі ці літери шикуємо в ряд завдовжки $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ і запитуємо, скількома способами це можна зробити. Формування ряду можна здійснити так. Є $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ місць – від першого до останнього, – на які маємо розставити наші літери p_i. Спочатку обираємо ті k_1 місць, на які ставимо літери p_1. Вибір можна зробити

$$C^{k_1}_{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_s}$$

способами. Який би варіант ми не обрали, для розміщення на наступному кроці літер p_2 матимемо $k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ місць. Обрати з них k_2 місць для розміщення літер p_2 можемо

$$C^{k_2}_{k_2+k_3+\ldots+k_s}$$

способами. Після цього обираємо з $k_3 + k_4 + \ldots + k_s$ ще вільних місць ті k_3 місць, на які поставимо літери p_3. Ці k_3 місць можемо обрати

$$C^{k_3}_{k_3+k_4+\ldots+k_s}$$

способами. Чинимо так і далі доти, доки не розставимо всі літери. На передостанньому кроці місця для літер p_{s-1} зможемо обирати

$$C^{k_{s-1}}_{k_{s-1}+k_s}$$

способами, а на останньому кроці місця для літер p_s –

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$C_{k_s}^{k_s}$$

способами. Оскільки число варіантів розміщення кожної наступної групи однакових літер не залежить від того, як було розміщено попередні літери, то згідно з комбінаторним правилом множення, вишикувати в ряд усі $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ літер зможемо

$$C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2} \cdot C_{n_3}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C_{n_{s-1}}^{k_{s-1}} \cdot C_{n_s}^{k_s}$$

способами. Для скорочення через n_i позначаємо суму $k_i + k_{i+1} + \ldots + k_s$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ s)$.

Позначивши цей добуток через M і взявши до уваги той факт, що $n_i - k_i = n_{i+1}$, якщо $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ s-1$, і $n_s - k_s = 0$, отримуємо:

$$M = \frac{n_1!}{k_1!\,(n_1 - k_1)!} \cdot \frac{n_2!}{k_2!\,(n_2 - k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_s!}{k_s!\,(n_s - k_s)!} =$$

$$= \frac{n_1!}{k_1!\,n_2!} \cdot \frac{n_2!}{k_2!\,n_3!} \cdot \frac{n_3!}{k_3!\,n_4!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_{s-1}!}{k_{s-1}!\,n_s!} \cdot \frac{n_s!}{k_s!\,0!} =$$

$$= \frac{n_1!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!} = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!}.$$

Приклади. 1) Оскільки $100 = 2^2 \cdot 5^2$, то це число має

$$\frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} = 6$$

щільних ланцюгів дільників. Ось вони:

$$100,\ 20,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$100,\ 20,\ 10,\ 2,\ 1;$$

$$100,\ 50,\ 10,\ 2,\ 1;$$

$$100,\ 50,\ 25,\ 5,\ 1;$$

$$100,\ 50,\ 10,\ 5,\ 1;$$

$$100,\ 20,\ 10,\ 5,\ 1.$$

2) Будь-який степінь простого числа має одним-один щільний ланцюг дільників. Наприклад, для числа 2^5 це буде ланцюг

$$32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1.$$

Перелічити всі, а не тільки щільні ланцюги довільного числа a складно, і ми тут не будемо обговорювати в загальному вигляді цю проблему. Натомість розглянемо кілька часткових задач, котрі її стосуються.

Нескладно помітити, скільки всього ланцюгів дільників має степінь простого числа, тобто число p^k, де p – просте число. Оскільки число p^k має лише один щільний ланцюг дільників

$$p^k,\ p^{k-1},\ p^{k-2},\ \dots\ ,\ p^2,\ p,\ 1,$$

то будь-який його ланцюг отримаємо, викресливши в щільному ланцюзі кілька проміжних (не крайніх) дільників p^i ($i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ k-1$) або ж залишивши все так, як є. В останньому випадку матимемо той-таки щільний ланцюг. Із $k-1$ наявних чисел викреслити кілька (або жодного, або одне, або два і т.д. аж до їх усіх) можемо 2^{k-1} способами (кожне число або викреслене, або ні – два варіанти). Тому число p^k (p – просте) має 2^{k-1} ланцюгів дільників.

Приклад. Ось усі ланцюги дільників числа 2^3:

$$8,\ 4,\ 2,\ 1;\ \ 8,\ 4,\ 1;\ \ 8,\ 2,\ 1;\ \ 8,\ 1.$$

Достоту так само можна полічити всі ті ланцюги дільників довільного числа a, котрі є похідними одного щільного ланцюга дільників цього числа (ланцюг L називаємо похідним ланцюга A, якщо L можна отримати, видаливши з A кілька (зокрема й 0) проміжних чисел). Якщо щільні ланцюги числа a мають довжину n, то кожний з них має 2^{n-1} похідних ланцюгів.

Оскільки не щільні ланцюги можуть бути похідними кількох щільних, то з останнього результату не можна просто виснувати в загальному випадку, скільки всього ланцюгів має число.

Висновки

Дана стаття є спробою популяризувати строгі концепції основ теорії чисел. ЇЇ текст дозволяє читачам ознайомитись із основними поняттями теорії подільності та деякими методами їхнього дослідження. Користуючись матеріалами статті, учні та учениці профільних математичних класів закладів загальної середньої освіти мають змогу розпочати власні дослідження у царині алгебри та теорії чисел, а студенти початкових

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

курсів закладів вищої освіти – краще осягнути необхідний для вивчення матеріал відповідних базових математичних курсів.

Внесок авторів. Володимир Вишенський – оригінальний текст статті, методика та концептуалізація. Олексій Печериця – аналіз джерел, перевірка, адаптація та коректура остаточного тексту статті.

Подяка. Олексій Печериця дякує редакційній колегії журналу «У світі математики» за можливість публікації цього тексту, а Віктору Володимировичу та Інні Яківні Вишенським – за надання рукопису цієї статті, яка є останньою неопублікованою за життя працею Володимира Андрійовича Вишенського.

Список використаних джерел

Perestyuk Mykola, Vyshenskyi Volodymyr. (2022). *Combinatorics : first steps.* New York : Nova Science Publishers, Inc., Series: Computational mathematics and analysis | Includes bibliographical references and index. ISBN 9781685072971 LC ebook record available at https://lccn.loc.gov/2021050253.

Отримано редакцією журналу: 01.03.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Volodymyr VYSHENSKY, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksii PECHERYTSIA, teacher of mathematics of higher category, teacher-methodist
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

CHAINS OF DIVISORS: THE COMBINATORY ASPECT

Abstract. *The article is devoted to the divisors of natural numbers and properties related to the factorization of a natural number. In particular, the article deals with the canonical form of writing the decomposition of a number into prime factors, its generalization in the form of an infinite multiplicative structure, and the number of divisors of a given number. In addition, the concepts of chains of divisors of a number, factors of chains of divisors, mutual conditioning of a chain of divisors and sequences of its factors are considered. The so-called dense chains of divisors of a given number are separately investigated and how the lengths of such chains are related to its multiplicative structure, two methods of counting the total number of dense chains of divisors of a given number are given. The article is addressed to schoolchildren, teachers of general secondary education institutions and everyone who loves mathematics.*

Keywords: *Divisibility; factoring a number; number of divisors of the number; the basic theorem of arithmetic; chain of divisors; chain factor of divisors; a dense chain of divisors.*