КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

У СВІТІ МАТЕМАТИКИ

№2, 2025

У світі математики, випуск №2, 2025

Журнал «У світі математики» – єдине українське науково-популярне видання з математики, яке містить науково-популярні, наукові та методичні математичні статті. Покликаний відкривати математичні здібності, усебічно розвивати особистість читача, задовольняти спрагу до математичних знань, привертати увагу до математики як професії.

У журналі містяться результати нових досліджень у різних галузях математики та методики навчання математики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, студентів. Адресований насамперед школярам, водночас буде цікавим студентам, учителям, методистам, викладачам, аспірантам і всім, хто не байдужий до математики.

Друкується за рекомендацією вченої ради механіко-математичного факультету.

Редакційна колегія:

головний редактор:

Валентин Собчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

заступники головного редактора:

Юлія Мішура

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Вадим Радченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

члени редакційної колегії:

Orest Artemovych

Cracow University of Technology, Poland;

Sergey Dashkovskiy

University of Würzburg, Germany;

Nataliia Gorban,

Bauhaus University Weimar, Germany;

Ivane Kiguradze,

Tbilisi Mathematical Institute, Georgia;

Konrad Kulakovsky,

AGH University of Krakow, Poland;

Oleksandr Misiats,

Virginia Commonwealth University, USA;

Dariusz Sala

AGH University of Krakow, Poland;

Petro Feketa

Victoria University of Wellington, New Zealand;

Efim Zelmanov,

University of California, San Diego, USA;

Оксана Безущак

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Олена Бахчеджиоглу

Креативна Міжнародна Дитяча Школа, Україна

Інна Вишенська

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна;

Ярослав Винишин
Київський природничо-науковий ліцей № 145, Україна;
Яніна Гончаренко
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Михайло Городній
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ярослав Жук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Казмерчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Король
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна;
Олександр Курченко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Світлана Кушніренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Лавренюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Оксана Литвин
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна;
Тетяна Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Україна;
Ольга Мартинюк
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
Олексій Нестеренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Дмитро Номіровський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Андрій Олійник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Михайло Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Парасюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олег Перегуда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Петравчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Працьовитий
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Богдан Рубльов
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Станжицький
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Катерина Терлецька
Національний центр "Мала академія наук України", Україна;
Григорій Торбін
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Андрій Чайковський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ольга Чашечникова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна;
Михайло Чемерис
Науковий ліцей №208 Дніпровського району м. Києва, Україна;
Ольга Швай
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна;
Ігор Шевчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Школьний
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Ростислав Ямненко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна.

Редакційний відділ:
Світлана Бабич

Відповідальний секретар:
Євгенія Кочубінська

Адреса редакційної колегії:
Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
проспект академіка Глушкова, 4-е, 03127, Україна
тел.: +38 (044) 259-01-35
e-mail: usm@knu.ua
сайт: https://usm.knu.ua
ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Засновник:
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію
KV No 22695-12595ПР від 24.03.2017

Ідентифікатор медіа / Номер ліцензії
R30-04577 від 25.04.2024
DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2

Безкоштовно

Зміст

Про математику та математиків

Безущак О.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Собчук В.В., Сукретна А.В. *Про диференціальні рівняння з імпульсним збуренням. До 80-річчя від дня народження академіка Миколи Перестюка (1946 – 2024) ……...* 6

Іванова Н.М. *Формування уявлень про авторство в математиці ……* 19

Математичні олімпіади

Городній М.Ф. *Про деякі методи розв'язування нестандартних рівнянь і нерівностей ……...* 33

Борисейко О.В., Перегуда О.В. *Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики 2026. Заочний тур ……..* 41

Волошина Т.В. *Математичні олімпіади для молодших школярів ……..* 48

Задачі та гіпотези, рішення

Завдання дистанційного туру олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 2026 ……... 58

Математичний гурток

Юсипів Т.В., Зеленська І.М. *Парадокси та нескінченність у математиці: між суперечністю й новими моделями реальності ……..* 60

Кіндратів Х.А. *Нестандартні методи доведення нерівностей у математичній освіті ……....* 77

Грінечко О.В. *Про взаємно прості числа у задачах на переливання рідин*……..... 92

Обрії математики

Собчук В.В., Лебедєва І.В., Кекало К.О. *Анатомія рекомендаційних систем* ……. 103

УДК 517.9-051 Перестюк М. О. **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.1**

Оксана БЕЗУЩАК, Д-р. фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0003-3654-6753
e-mail: bezushchak@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олександр СТАНЖИЦЬКИЙ, Д-р. фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-1456-729X
e-mail: stanzhytskyi@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олексій КАПУСТЯН, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID iD: 0000-0002-9373-6812
email: kapustyan@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Валентин СОБЧУК, Д-р. техн. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-4002-8206
e-mail: sobchuk@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Анна СУКРЕТНА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-2985-1250
e-mail: sukretna.a.v@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ. ДО 80-РІЧЧЯ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ АКАДЕМІКА МИКОЛИ ПЕРЕСТЮКА (1946 – 2024)

Анотація. *Статтю присвячено життєвому та науковому шляху відомого українського математика М.О. Перестюка. На доступних для сприйняття широким загалом читачів прикладах проілюстровано проблематику теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією, що була одним з провідних напрямків дослідження М.О. Перестюка.*

Ключові слова: *Перестюк Микола Олексійович; диференціальні рівняння з імпульсним збуренням; биття розв'язків.*

Класифікація відповідно до AMS 2020: 34-00 34-03 34A37

1. Вступ

1 січня 2026 року виповнюється 80 років від дня народження відомого математика, академіка НАН України, лауреата Державної премії України в галузі науки і техніки, Державної премії України в галузі освіти та багатьох інших почесних нагород,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Заслуженого професора Київського національного університету імені Тараса Шевченка Миколи Олексійовича Перестюка (рис. 1).



Рис. 1. Перестюк М.О. (01.01.1946 – 25.01.2024)

Микола Перестюк народився 1 січня 1946 року в багатодітній селянській родині на Хмельниччині (с. Плоска Славутського району). Після закінчення школи із золотою медаллю він вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка, який успішно закінчив у 1968 році (Перестюк, 2024). Далі була аспірантура та початок активної наукової діяльності.



Рис. 2. Академіки НАН України Самойленко А.М. та Перестюк М.О.

З 1969 року життя Миколи Олексійовича стало нерозривно пов'язаним із Київським університетом. Він пройшов шлях від асистента до професора, очолював кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь, а у 1987–2003 роках був деканом механіко-математичного факультету.

Як учений Микола Олексійович Перестюк формувався і зростав у всесвітньо відомій київській науковій школі з нелінійної механіки Крилова-Боголюбова-Митропольського. Його наставником був видатний математик сучасності академік НАН України А.М. Самойленко (02.01.1938 – 04.12.2020), (рис. 2). Під його науковим керівництвом Микола Олексійович у січні 1972 року захистив кандидатську дисертацію «Деякі питання дослідження нелінійних систем диференціальних рівнянь з миттєвими змінами».

2. Внесок М.О. Перестюка в освіту школярів і студентської молоді

Наукові інтереси М.О. Перестюка охоплюють широке коло складних та актуальних задач теорії диференціальних рівнянь та нелінійної механіки, пов'язаних із розвитком нового напрямку – теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією, їх застосування до дослідження коливних процесів, які зазнають імпульсних збурень. Активна наукова діяльність Миколи Олексійовича втілилась у цілу низку результатів світового рівня.

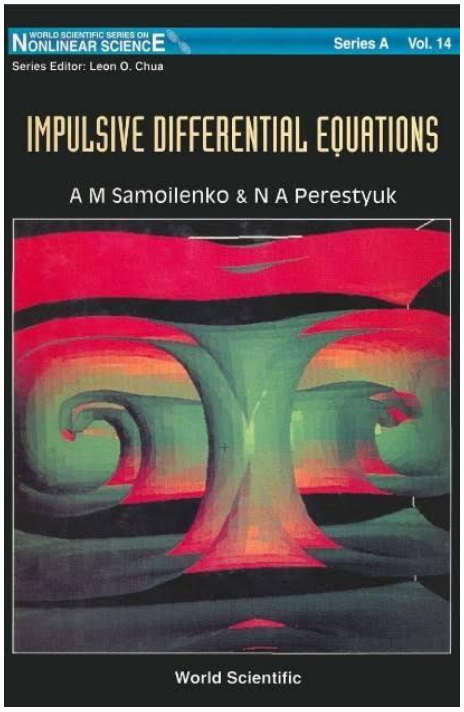


Рис. 3. Книга «Impulsive Differential Equations»

Центральне місце у дослідженнях ученого посідали питання теорії імпульсних систем та теорії інваріантних множин диференціальних і різницевих рівнянь. У 1986 році він захистив докторську дисертацію на тему «Коливні розв'язки диференціальних

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

рівнянь з імпульсною дією та їх стійкість». Через рік у 1987 році побачила світ монографія «Диференціальні рівняння з імпульсною дією», написана у співавторстві з А.М. Самойленком. Це була перша у світі монографія, присвячена систематизованому викладу теорії імпульсних систем. У 1995 р. вийшов друком розширений англомовний варіант цієї книги під назвою «Impulsive Differential Equations» (Samoilenko & Perestyuk 1995) (рис. 3), на який згодом з'явилася величезна кількість посилань.

Микола Олексійович є співавтором цілої низки підручників та навчальних посібників як для закладів вищої освіти (рис. 4), так і для школярів (рис. 5). Зокрема, він разом з А.М. Самойленком та І.О. Парасюком є співавтором україномовного підручника з диференціальних рівнянь. Книга побачила світ у 1994 році та увібрала досвід, набутий авторами за час викладання курсу «Диференціальні рівняння» для студентів механіко-математичного факультету впродовж 70 – 90-х років XX століття. У 2003 році вийшло друге, доповнене видання підручника, а у 2010 – третє видання (Самойленко, Перестюк & Парасюк, 2010). У 2005 році підручник «Диференціальні рівняння» відзначено Премією імені Тараса Шевченка Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а його третє, доповнене видання (2010 р.) перекладено англійською мовою.



Рис. 4. Навчальні посібники кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь

На велику повагу заслуговує діяльність М.О. Перестюка з популяризації математики серед шкільної молоді. Протягом багатьох років він очолював журі заключного етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики.

Особливу увагу М.О. Перестюк завжди приділяв підвищенню загального рівня математичної освіти в середній школі, підготовці здібних і талановитих юних математиків. Разом із колегами він є автором численних навчальних посібників і збірників задач з елементарної математики (рис. 5). Ці книги для тисяч школярів стали висококваліфікованими помічниками – своєрідними заочними репетиторами – для

якісної підготовки до вступу і подальшого успішного навчання у найкращих вищих навчальних закладах країни. А для багатьох учнів українських шкіл (зокрема, для учасників різного рівня математичних олімпіад) ці видання стали стимулом і дороговказом у виборі майбутньої професії, пов'язаної з абстрактною або прикладною математикою.



Рис. 5. Посібники та збірники задач з математики для школярів.

3. Що ж таке диференціальні рівняння з імпульсним збуренням?

Звичайні диференціальні рівняння описують процеси, що змінюються плавно (безперервно) у часі. Однак у реальному світі багато процесів зазнають різких, миттєвих змін – імпульсів. Імпульсні системи використовуються для моделювання специфічних ефектів у різних областях природознавства, зокрема у:

- *біології та медицині* – моделювання введення ліків (ін'єкцій), що відбувається миттєво і різко змінює концентрацію речовини в організмі;
- *фізиці та техніці* – керування орбітою супутника за допомогою коротких імпульсів тяги; робота електронних схем із перемикачами тощо;
- *економіці* – раптові економічні шоки чи фінансові інтервенції.

На практиці при математичному описі еволюції реальних процесів, що зазнають короткочасних зовнішніх впливів, часто зручно знехтувати тривалістю дії цих впливів та вважати, що ці збурення носять миттєвий характер. Така ідеалізація приводить до необхідності досліджувати динамічні системи з розривними траєкторіями або диференціальні рівняння з імпульсною дією.

Покажемо, як можна змоделювати такий процес на прикладі задачі про прийом ліків.

Припустимо, що деяка речовина розпадається в організмі людини зі швидкістю, що пропорційна масі речовини. Тоді динаміка зміни маси цієї речовини описується звичайним диференціальним рівнянням

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$m' = -km, \tag{1}$$

де $m = m(t)$ – невідома функція, що визначає масу речовини в організмі у момент часу t, а $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності. До рівняння (1) потрібно додати початкову умову

$$m(t_0) = m_0, \tag{2}$$

яка задає початкову масу речовини.

Розв'язком задачі (1), (2) (яку в теорії диференціальних рівнянь називають *початковою задачею* або *задачею Коші*) є *експоненціальна функція*

$$m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Коефіцієнт k визначають емпірично. Скажімо, якщо додатково відомо, що період напіврозпаду речовини в організмі людини становить 2 години, то маємо, що в момент часу $t_0 + 2$ початкова маса речовини m_0 знизилась вдвічі, тобто

$$m_0 e^{-k(t_0+2-t_0)} = \frac{m_0}{2},$$

звідси маємо $e^{-2k} = \frac{1}{2}$ або $k = \frac{1}{2}\ln 2$. Отже, закон зміни маси речовини можна переписати у вигляді

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{1}{2}(t-t_0)\ln 2} = m_0 \cdot 2^{-\frac{1}{2}(t-t_0)}. \tag{3}$$

Припустимо тепер, що про *діючу речовину деякого лікарського засобу* відомо, що у кількості, яка перевищує a грамів, вона є небезпечною, а при кількості, меншій за $\frac{a}{4}$, лікарський засіб перестає бути ефективним. Постає питання: яким має бути графік прийому та дозування, якщо ми прагнемо приймати ліки якомога рідше?

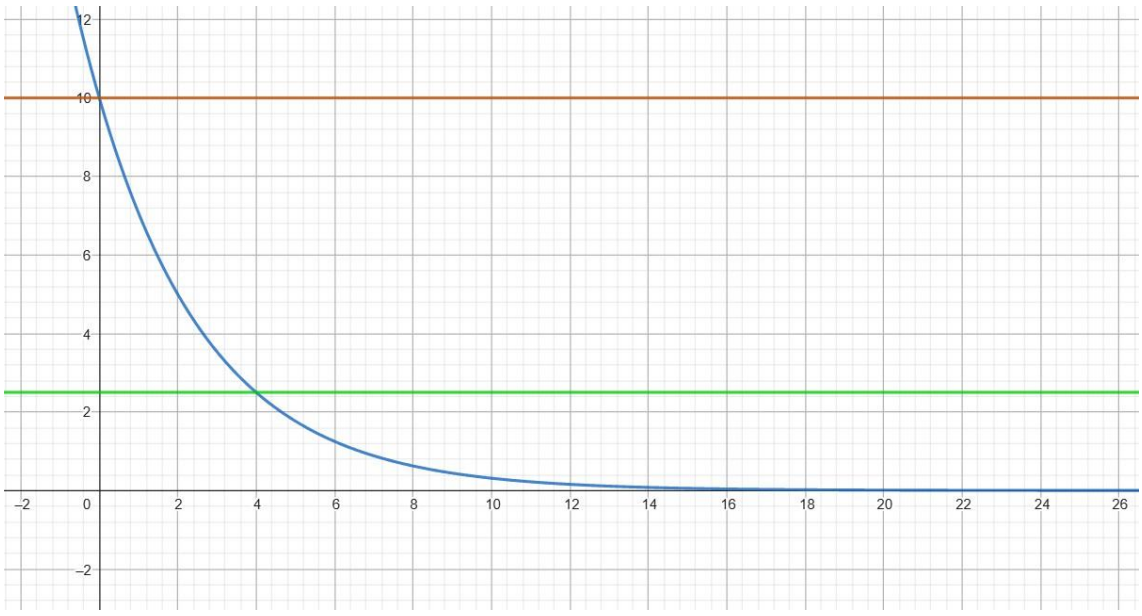


Рис. 6. Графік зміни кількості речовини при $a = 10$

Цілком очевидно, що перший прийом у умовний нульовий момент часу $t_0 = 0$ має становити максимально допустиму кількість a. Далі, відповідно до формули (3) при $t_0 = 0$ та $m_0 = a$ отримуємо закон зміни концентрації речовини

$$m(t) = a \cdot 2^{-\frac{1}{2}t}.$$

У певний момент часу t_1 рівень $m(t)$ досягне значення $\frac{a}{4}$:

$$a \cdot 2^{-\frac{1}{2}t_1} = \frac{a}{4} \quad \Rightarrow \quad t_1 = 4.$$

Отже, після моменту часу $t_1 = 4$ кількість діючої речовини стане неефективною і потребуватиме корекції. На рис. 6 зображено графік зміни кількості речовини у випадку $a = 10$ (графік отримано за допомогою кросплатформного динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra (GeoGebra Team, 2024)).

Якщо в момент часу $t_1 = 4$ ми поставимо нову початкову задачу з початковим значенням $m_1 = m(t_1) = a,$ то зможемо підтримувати ефективну кількість ліків до моменту часу $t_2 = 8$:

$$m(t) = a \cdot 2^{-\frac{1}{2}(t-t_1)} = a \cdot 2^{-\frac{1}{2}(t-4)}, \qquad t \in [4, 8).$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо кусково-неперервну функцію

$$m(t) = a \cdot 2^{-\frac{1}{2}(t-t_i)} = a \cdot 2^{-\frac{1}{2}(t-4i)}, \qquad t \in \big[4i, 4(i+1)\big), \qquad i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{4}$$

графік якої подано на рис. 7.

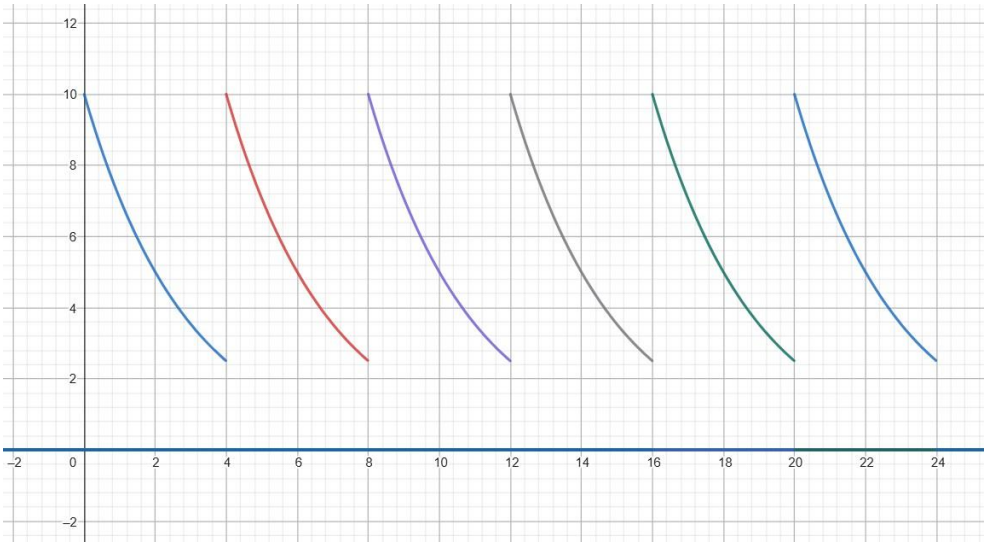


Рис. 7. Графік кусково-неперервної функції, заданої формулою (4)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

З математичної точки зору диференціальне рівняння (1) у моменти часу $t_i = 4i$, $i = 1, 2, \ldots$ піддається імпульсному впливу. Для запису цього впливу використовують функцію

$$\Delta m(t) = m(t+0) - m(t-0),$$

яка визначає величину стрибка. У нашому випадку

$$\Delta m(t_i) = m(t_i+0) - m(t_i-0) = a - \frac{a}{4} = \frac{3}{4}a, \qquad i = 1,2, \ldots . \tag{5}$$

Таким чином, кусково-неперервна функція (4) є розв'язком задачі з імпульсним збуренням (1), (2), (5) (за умови, що $k = \frac{1}{2}\ln 2$).

Задача з *імпульсним збуренням* (1), (2), (4) є однією з найпростіших, оскільки як моменти імпульсного впливу, так і величини стрибків у ній є сталими.

У загальному випадку, для опису системи з імпульсним збуренням нам потрібно задати систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x \in M \subseteq \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

деяку множину $\mathfrak{I}_t \subset \mathbb{R} \times M$ та *оператор стрибка* A_t, який відображає множину $\mathfrak{I}_t$ у деяку множину $A_t\mathfrak{I}_t \subset \mathbb{R} \times M$ (Samoilenko & Perestyuk 1995).

Процес відбувається таним чином: ми виходимо з початкового значення (t_0, x_0) і рухаємося вздовж траєкторії $(t, x(t))$, що визначається розв'язком системи (6) доти, доки в деякий момент часу t_1 точка не зустрінеться з множиною $\mathfrak{I}_t$. На множині $\mathfrak{I}_t$ діє оператор A_t, який миттєво переносить точку $P_{t_1}\big(t_1, x(t_1)\big)$ у точку $P_{t_1}^{+}\big(t_1, x^{+}(t_1)\big) = A_t P_t$ і далі ми продовжуємо рух уздовж розв'язку диференціального рівняння (6) з новою початковою умовою $\big(t_1, x^{+}(t_1)\big)$ до наступної зустрічі з множиною $\mathfrak{I}_t$.

У компактному вигляді система диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням задається рівностями

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad (t,x) \notin \mathfrak{I}_t; \\ &\Delta x|_{\,(t,x)\in\mathfrak{I}_t} = A_t x - x. \end{aligned} \tag{7}$$

У розглянутому прикладі множина $\mathfrak{I}_t$ складалася з горизонтальної прямої $m = \frac{a}{4}$, а результатом дії оператора A_t є стале значення a для довільного m: $A_t m = a$.

У загальному випадку розв'язки системи з імпульсним впливом (7) можуть:

- не піддаватися імпульсному впливу, якщо відповідна інтегральна крива рівняння (6) не перетинає множину $\mathfrak{I}_t$ або перетинає її у нерухомих точках оператора A_t;

- піддаватися імпульсному впливу скінченну кількість разів;
- піддаватися імпульсному впливу зліченну кількість разів.

Серед розв'язків, інтегральні криві яких з множиною $\Im_t$ мають зліченну кількість спільних точок, окремо слід виділити розв'язки, які поглинаються множиною $\Im_t$ (тобто залишаються в $\Im_t$, починаючи з деякого моменту часу) або мають точку згущення, тобто при наближенні до певного моменту часу $t_1 > t_0$ зліченну кількість разів входять у множину $\Im_t$ та виходять із неї і, таким чином, не можуть бути продовжені до моменту $t = t_1$.

Проілюструємо зазначені випадки на прикладі такої системи з імпульсним збуренням.

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \big(t, x(t)\big) \notin \Im_t = \{(t,x) \in \mathbb{R}:\ x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)\}, \tag{8}$$

$$\Delta x|_{(t,x)\in\Im_t} = x^2 \operatorname{sign} x - x. \tag{9}$$

Для початку дослідимо множину $\Im_t = \{(t,x) \in \mathbb{R}:\ x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)\}$. Оскільки функція $\operatorname{tg} t$ невизначена в точках $t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, то рівність $x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)$ коректно визначена для $t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$. На кожному з цих інтервалів, використовуючи формули зведення, маємо $x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t) = t - \pi n$, для $t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$. Отже, множина $\Im_t$ складається з відрізків прямих $x = t - \pi n$, визначених на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ і всі ці прямі лежать у горизонтальній смузі $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ (див. рис. 8).

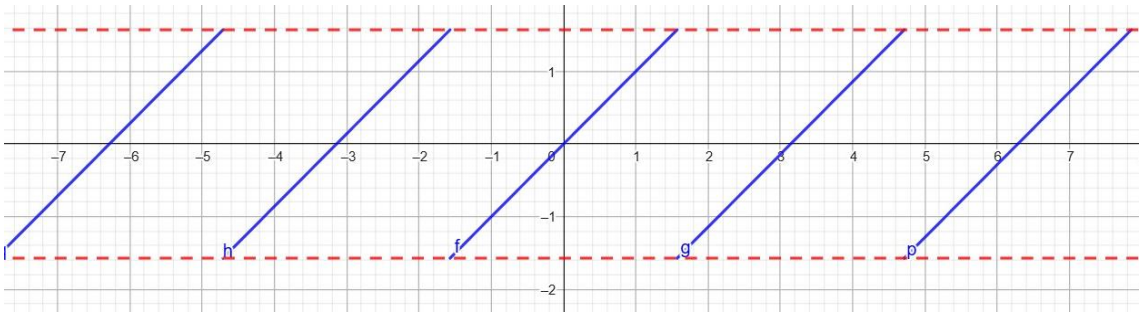


Рис. 8. Множина $\Im_t$

Траєкторією рівняння (8) без імпульсного збурення, що починається у точці $(0, x_0)$, буде горизонтальна пряма $x = x_0$.

Цілком очевидно, що якщо $|x_0| \geq \frac{\pi}{2}$, то така траєкторія не матиме спільних точок із множиною $\Im_t$ при всіх $t \geq 0$, а отже, такі траєкторії імпульсних збурень не зазнаватимуть (салатова траєкторія на рис. 9).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

У випадку $1 < |x_0| < \frac{\pi}{2}$ траєкторія піддається імпульсному впливу скінченну кількість разів. Наприклад, траєкторія, що починається в точці $x_0^b = \sqrt{2}$, при значенні часового параметра $t_1^b = \sqrt{2}$ потрапляє у множину $\Im_t$, де зазнає імпульсного впливу та миттєво змінює значення з $\sqrt{2}$ на $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, після чого більше імпульсних збурень не зазнаватиме (блакитна траєкторія на рис. 9). Інша траєкторія, що починається в точці $x_0^o = \sqrt[8]{2}$, при значенні часового параметра $t_1^o = \sqrt[8]{2}$ потрапляє у множину $\Im_t$, де під дією імпульсу миттєво переходить із значення $\sqrt[8]{2}$ у $\left(\sqrt[8]{2}\right)^2 = \sqrt[4]{2}$. Далі, при значенні часового параметра $t_2^o = \sqrt[4]{2}$ знову потрапляє у множину $\Im_t$, де зазнає імпульсного впливу та миттєво переходить із $\sqrt[4]{2}$ у $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2 = \sqrt{2}$. Нарешті при $t_3^o = \sqrt{2}$ траєкторія втретє потрапляє у множину $\Im_t$, де зазнає імпульсного впливу та миттєво змінює значення з $\sqrt{2}$ на $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$, після цього більше імпульсних збурень не зазнаватиме (помаранчева траєкторія на рис. 9). Зауважимо, що обидві траєкторії співпадають при $t \geq \sqrt{2}$.

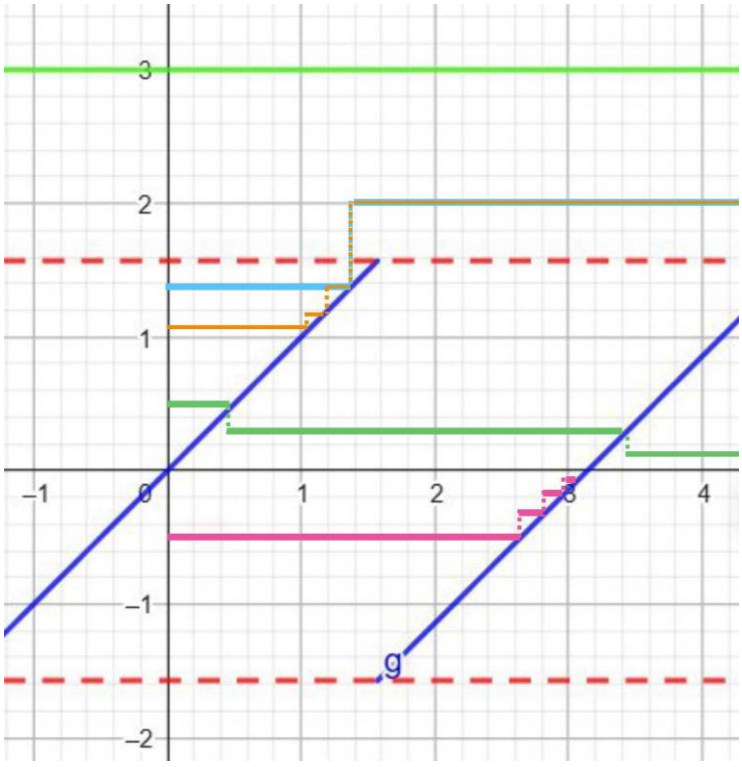


Рис. 9. Траєкторії системи (8), (9)

На траєкторію розв'язку $x^g(t)$, що починається при $t = 0$ з точки $x_0 \in (0,1)$, імпульсний вплив діє зліченну кількість разів. Так, наприклад, траєкторія, що починається в точці $x_0^g = \frac{1}{2}$, при $t_1^g = \frac{1}{2}$ потрапляє у множину $\Im_t$, зазнає імпульсного впливу та миттєво змінює значення з $\frac{1}{2}$ на $\frac{1}{4}$. Наступне потрапляння у множину $\Im_t$ відбувається при $t = t_2^g = \pi + \frac{1}{4}$, і значення змінюється з з $\frac{1}{4}$ на $\frac{1}{16}$, і так далі. Загалом траєкторія зазнаватиме імпульсного впливу на зліченній множині моментів часу

$\left\{t_2^g = \pi n + \frac{1}{2^{2^n}},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}$, і буде кусково-сталою функцією зі значеннями $x = x_i^g = \frac{1}{2^{2^n}}$:

$$x^g(t) = \frac{1}{2}, \qquad t \in [0,1);$$

$$x^g(t) = \frac{1}{2^{2^{n+1}}}, \qquad t \in \left[\pi n + \frac{1}{2^{2^n}},\ \pi(n+1) + \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Ця траєкторія зображена зеленим кольором на рис. 9.

Інтегральні криві, що починаються з точок $x_0 = 0$ або $x_0 = \pm 1$, також зліченну кількість разів потраплятимуть у множину $\mathfrak{I}_t$, однак імпульсному впливу вони не піддаватимуться, оскільки значення 0 та ± 1 є нерухомими точками оператора стрибка у (9).

Траєкторії, що починаються при $t = 0$ з точок інтервалу $(-1, 0)$, на часовому проміжку $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ піддаються імпульсному впливу зліченну кількість разів, але, на відміну від уже розглянутих випадків, це відбувається протягом скінченного проміжку часу – таке явище називають *биття розв'язку*. Крім того, послідовність моментів імпульсного впливу має граничну точку $t = \pi$, а тому відповідний розв'язок імпульсної системи (8), (9) не можна продовжити за цю точку.

Як приклад розглянемо розв'язок, що починається в точці $x_0^p = -\frac{1}{2}$. У момент часу $t_1^p = \pi - \frac{1}{2}$ траєкторія розв'язку $x^p(t) = -\frac{1}{2},\ t \in \left[0; \pi - \frac{1}{2}\right)$, потрапляє у множину $\mathfrak{I}_t$ і зазнає імпульсної дії: відбудеться стрибок у точку $-\frac{1}{4}$. Подальша траєкторія $x^p(t) = -\frac{1}{4},\ t \in \left[\pi - \frac{1}{2}, \pi - \frac{1}{4}\right)$, у момент часу $t_2^p = \pi - \frac{1}{4}$ знову потрапляє в множину $\mathfrak{I}_t$, і знову відбувається стрибок – цього разу з точки $-\frac{1}{4}$ у точку $-\frac{1}{16}$. Аналогічні імпульсні впливи відбуваються надалі. У результаті отримуємо імпульсний розв'язок

$$x^p(t) = -\frac{1}{2},\ \ t \in \left[0, \pi - \frac{1}{2}\right);$$

$$x^p(t) = -\frac{1}{2^{2^{n+1}}}, \qquad t \in \left[\pi - \frac{1}{2^{2^n}},\ \pi - \frac{1}{2^{2^{n+1}}}\right), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Розв'язок подано на рис. 9 рожевим кольором. Для цієї траєкторії послідовність моментів імпульсного впливу $\left\{\pi - \frac{1}{2^{2^n}}\right\}_{n \geq 0}$ очевидно є збіжною: $\pi - \frac{1}{2^{2^n}} \to \pi,\ n \to \infty$.

Попри видиму простоту прикладу (8), (9) він виразно демонструє, як імпульсні збурення вплиають на розв'язки динамічної системи. Зокрема, ми побачили, що наявність імпульсних збурень може впливати на єдиність розв'язку (розв'язки з різними початковими даними з певного моменту часу зливаються в один) та на його продовжуваність (розв'язок багаторазово потрапляє у множину імпульсних збурень – «б'ється» об множину $\mathfrak{I}_t$, – що унеможливлює його подальше продовження).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

4. Висновки

Теорія імпульсних систем, розвинена Миколою Олексійовичем Перестюком та його учнями, є мовою для опису та проєктування складних високотехнологічних систем. Вона знайшла застосування у створенні точніших та ефективніших медичних протоколів, у розробленні надійних систем автоматичного керування (робототехніки), оптимізації фінансових та логістичних процесів тощо.

Академік Перестюк заснував потужну наукову школу в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. Його праці стали класичними підручниками й основними джерелами знань для студентів і дослідників. Він є автором і співавтором фундаментальних монографій, перекладених англійською мовою, які й досі вважаються еталонними у світі. Саме це забезпечило міжнародне визнання української математичної школи в галузі диференціальних рівнянь. Багато його учнів та послідовників сьогодні успішно працюють у провідних наукових центрах по всьому світу.

Внесок М.О. Перестюка – це приклад того, як фундаментальна наука, що на перший погляд здається абстрактною, може мати глибокий і довготривалий вплив на інженерію та технології, створюючи інструменти для моделювання й керування складними процесами.

Шанування Світлої Пам'яті

Колектив механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка та кафедра інтегральних та диференціальних рівнянь з глибоким сумом і невимовною повагою вшановують світлу пам’ять академіка НАН України, доктора фізико-математичних наук, професора Миколи Олексійовича Перестюка з нагоди 80-річчя від дня його народження.

Ми складаємо шану **Видатній Людині** та **Вченому**, чия титанічна праця назавжди закарбувалася в історію світової математики, зокрема як одного із засновників теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Микола Олексійович назавжди залишиться в пам’яті поколінь як багаторічний і незмінний декан факультету, який віддав своє життя становленню та розвитку alma mater; незмінний завідувач кафедри, що виховав плеяду талановитих математиків; як Мудрий Наставник і Педагог, чиї принциповість, вимогливість та водночас батьківська доброта слугували орієнтиром для студентів, аспірантів та колег.

Ваше життя стало взірцем беззаперечної відданості науці та університетській справі. Ми глибоко вдячні за кожен урок, за підтримку та за ту потужну наукову школу, яку Ви нам залишили.

Ваш внесок – це безцінна спадщина. Ми гідно несемо і нестимемо через роки світлу пам’ять про Вас, продовжуючи Вашу справу на науковій та освітній ниві.

Список використаних джерел

Samoilenko, A.M., Perestyuk, N. A. (1995). *Impulsive Differential Equations*. World Scientific. 560 p.

Безущак, О., Городній, М., Жук, Я., Капустян, О., Лимарченко, О., Ловейкін, А., Мішура, Ю., Моклячук, М., Парасюк, І., Петравчук, А., Станжицький, О., Сукретна, А., Харитонов, О., Чайковський, А., Шевчук, І., Ямненко, Р. (2024) Академік М.О. Перестюк (01.01.1946 – 25.01.2024) – видатний вчений і педагог. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*. Том 78 №1. С. 5 – 16.

Перестюк Г.О. (2024). Великі вчені теж були дітьми. *У світі математики.* 2024. Вип. 1. С. 6 – 9.

Самойленко, А.М., Перестюк, М.О., Парасюк, І.О. (2010) *Диференціальні рівняння: підручник* (3-тє вид., перероб. і допов.). К.: ВПЦ "Київський університет". 600 с.

GeoGebra Team. (2024). GeoGebra Classic (Version 6.0) [Computer software]. International GeoGebra Institute. https://www.geogebra.org.

Отримано редакцією журналу: 18.11.2025
Прорецензовано: 28.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Oksana BEZUSHCHAK, Dr.Sc. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0003-3654-6753
e-mail: bezushchak@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksandr STANZHYTSKYI, Dr.Sc. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-1456-729X
e-mail: stanzhytskyi@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksiy KAPUSTYAN, Dr.Sc. (Phys&Math), Prof.
ORCID iD: 0000-0002-9373-6812
email: kapustyan@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Valentyn SOBCHUK, Dr.Sc.Tech., Prof.
ORCID ID: 0000-0002-4002-8206
e-mail: sobchuk@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Anna SUKRETNA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-2985-1250
e-mail: sukretna.a.v@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSIVE PERTURBATIONS. TO THE 80TH ANNIVERSARY OF ACADEMICIAN MYKOLA PERESTYUK (1946 – 2024)

Abstract. *This article is dedication to the life and scientific path of the famous Ukrainian mathematician M.O. Perestyuk. The problems of the differential equations with impulse action theory, which was one of the leading M.O. Perestyuk's research directions, are illustrated by examples accessible to a wide audience.*

Keywords: *Mykola O. Perestyuk; differential equations with impulsive perturbations; beating of solution.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Про математику і математиків

УДК 51-7:347.77](091) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.2**

Наталія ІВАНОВА, Канд. фіз.-мат. наук, Асоц. дослідниця
e-mail: ivanova@imath.kiev.ua
ORCID: 0009-0002-9896-5152
Інститут математики НАН України, Київ, Україна

ФОРМУВАННЯ УЯВЛЕНЬ ПРО АВТОРСТВО В МАТЕМАТИЦІ

Анотація. *У статті розглядається історія формування уявлень про авторство в математиці – від анонімності давніх цивілізацій до сучасних наукових практик. Аналізуються ключові етапи розвитку: колективна традиція стародавньої Греції, індивідуалізація у Відродженні, суперечки про авторство в епоху Ренесансу та XVII століття, поява наукових журналів і сучасні виклики XX–XXI століть. Показано, як змінювалися уявлення про знання, відповідальність і визнання у науковому світі. Обговорюються основні конфлікти та етичні питання, що супроводжували процеси формалізації авторства, а також роль сучасних механізмів підтримки чесності та прозорості в публікаціях. Стаття має на меті донести читачам важливість наукової етики та особистої відповідальності у створенні й поширенні знань.*

Ключові слова: *історія математики; авторське право; академічна доброчесність.*

1. Вступ

Сьогодні в науці ім’я дослідника має неабияке значення. Авторство – це і визнання, і відповідальність, і частина професійної етики. Але так було не завжди. Хоча математика виникла ще за кілька тисяч років до нашої ери, ми не знаємо жодного імені її творців у давніх цивілізаціях – у шумерів, вавилонян, єгиптян, майя. Вони залишили нам таблиці множення, тригонометричні таблиці, методи обчислення площ і навіть зачатки алгебри – але не залишили жодного підпису.

Як і коли з’явилося саме уявлення про особисте авторство математичних ідей? Як змінювалося ставлення до нього в різні епохи – від давньогрецьких шкіл до суперечок Ньютона і Лейбніца, від анонімних переписувачів до сучасних академічних стандартів? Ця історія – не менш цікава, ніж самі математичні відкриття. І вона допомагає побачити математику не лише як набір формул, а як живу частину людської культури.

У цій статті ми пройдемо шлях від колективної анонімності стародавнього світу до персоніфікованої науки наших днів, простежимо, як змінювалась ідея авторства, і дізнаємося, чому сьогодні так важливо згадувати, хто саме був першим.

2. Анонімні генії стародавнього світу

Математика виникла не в підручниках, а в потребах щоденного життя: потрібно було рахувати запаси зерна, обчислювати податки, ділити поля, будувати храми. Саме тому одними з перших математиків — хоч ми й не знаємо їхніх імен — були писці. Вони

працювали у палацах, храмах, при армії, і мали володіти не лише письмом, а й умінням рахувати, вимірювати та розв'язувати задачі.

Найдавніші математичні тексти, які дійшли до нас, — це вавилонські глиняні таблички, єгипетські папіруси, майянські написи. Вони містять приклади обчислень, задач, таблиць множення, дробів, навіть квадратних рівнянь. Але всі ці тексти анонімні: ми не знаємо, хто склав задачу чи винайшов формулу, бо авторство просто не фіксувалося. Це була справа не особиста, а службова: писець виконував роботу — і все.



а) б)

Рис. 1. Математичні манускрипти Давнього Єгипту

Із цього правила є лише кілька винятків. Найвідоміший із них – Папірус Ахмеса (рис. 1, а)), або папірус Райнда – найбільший збережений математичний манускрипт Давнього Єгипту, завдовжки близько 5,5 м і завширшки близько 30 см. Він містить 84 задачі на арифметику, геометрію, пропорції та розрахунки об'ємів. Створений приблизно у 1650 р. до н. е., він є копією ще давнішого зразка часів Середнього царства. Його автор – писар Ахмес, який зазначив у вступі, що переписав текст зі стародавнього оригіналу. Саме тому Ахмеса часто називають першим відомим на ім'я «автором» у історії математики, хоча радше йдеться про уважного редактора й передавача знань. Папірус придбав у 1858 році на ринку Луксора шотландський юрист Александер Генрі Райнд; від 1864 року він зберігається у Британському музеї.

Ще одне часткове виключення – єгипетський писар Хорі, відомий із сатиричного папірусу Анастасі I (бл. XIII ст. до н. е.) (рис. 1, б)). У ньому Хорі кепкує з колеги-писця Аменемопа: мовляв, той називає себе писцем, а сам не може розрахувати, скільки потрібно цегли для земляної платформи. Сам Хорі постає не як творець нових методів, а як наставник – той, хто добре знає потрібні розрахунки, але не стверджує, що сам їх вигадав. Ось одна з його «викривальних» задач: «Довжина насипу – 730 ліктів, ширина – 55 ліктів… висота з одного боку – 60 ліктів, з іншого – 30. Уклон – по 15 ліктів з кожного боку, настил – 5 ліктів. Скільки потрібно цегли? – питають воєначальники. – Усі надіються на тебе, мовляв: «Ти ж наш майстер, друже, порахуй це!»».

Це один із найдавніших прикладів того, як математична компетентність могла стати приводом для особистої похвали. Але навіть тут ідеться не про відкриття формул, а про вміння застосовувати вже відомі правила.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Таким чином, у давніх цивілізаціях ми бачимо математиків без імен. Їхні знання були важливими, але їхня особистість – ні. Ідея, що відкриття належить конкретній людині, просто ще не виникла.

3. Коли ідеї отримали імена: Давня Греція

Усе змінилося в Давній Греції. Саме тут, приблизно у VI столітті до нашої ери, ми вперше бачимо, як математичне знання починає асоціюватися з конкретними людьми. Вперше ідеї стають не просто корисними – вони стають предметом гордості, інтелектуальним досягненням, що варте того, щоб пам'ятати, хто саме його зробив.

Одними з перших згаданих імен у цьому новому стилі мислення були Талос із Криту, математикиня Полігноті і, звісно, Фалес із Мілета[1] – засновник Іонійської школи (див. рис. 2 а)). Хоча про Талоса й Полігноті розповідають більше легенди, ніж точні факти, сам факт того, що їх запам'ятали як авторів чогось нового, уже був кроком до персонального авторства.



а)



б)

Рис. 2. Давньогрецькі мататематики на марках

Найбільш авторитетною постаттю того часу став Фалес. Йому приписують перші математичні доведення, наприклад, теорему про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника. Важливо, що саме ім'я Фалеса в джерелах збереглося як джерело ідеї – і це вже не анонімна задача писця, а результат особистого розумування.

Це підкреслює відома легенда: коли учень запропонував Фалесу гроші в подяку за навчання, той відповів: «Я не беру плати за навчання. Досить того, що, передаючи знання далі, ти назвеш ім'я свого вчителя.»

Звісно, давньогрецькі автори, зокрема Платон і Аристотель, писали про Фалеса вже через багато поколінь після його життя. Але головне – що сама традиція вшанування імен вкорінилася. У грецькій культурі знання – це не лише результат практики, а й ознака мудрості, філософії, духовного пошуку. А такий пошук завжди має автора.

[1] На рис. 2 а) поштова марка Греції 2017 року, присвячена Фалесу Мілетському, відомому давньогрецькому філософу, математику та астроному.

Серед перших великих імен у грецькій математиці особливе місце займає Піфагор Самоський[2] (див. рис. 2 б)). Його ім'я відоме кожному школяру, а теорема, названа на його честь, – один із символів шкільної математики. Але коли ми заглиблюємося в історію, з'ясовується парадокс: ми майже нічого не знаємо про самого Піфагора як математика. Немає жодного твору, який би належав йому особисто. Усе, що пов'язане з «піфагорійською математикою», – це колективна спадщина його школи.

Піфагор заснував своєрідну філософсько-релігійну громаду, де математика була не просто інструментом вимірювання чи обчислення, а шляхом до гармонії Всесвіту. У цій школі нові знання не вважались особистим досягненням: навпаки, будь-яке відкриття належало всій спільноті. Згідно з піфагорійською традицією, відкриття робилися «не кимось», а «піфагорійцями» – або просто приписувалися самому Піфагору, незалежно від того, хто їх насправді зробив.

Для піфагорійців важливішим за славу було вшанування вчителя та збереження ідей у межах школи. Ім'я стало важливим – але не як знак особистого авторства, а як вияв вдячності та спадковості знання.



Рис. 3. Фрагмент папірусу «Начал» Евкліда, датований близько 75–125 рр. н. е.

Цей підхід, схожий на сучасне «колективне авторство» або навіть на анонімну наукову традицію минулого, згодом змінився. Поступово в грецькій культурі авторство стало персоналізованим і ми починаємо бачити довгу низку імен: Гіппократ Хіоський, Евдокс, Архімед, Евклід, Аполлоній, Гіпатія...

У елліністичну добу – після завоювань Александра Македонського – наука вийшла за межі філософських шкіл і перетворилася на професійну справу. Александрія, з її славнозвісною бібліотекою і Мусеоном, стала осередком інтелектуального життя античного світу. Саме тут розквітла індивідуальна наукова творчість і кожен вагомий результат мав свого автора, ім'я якого зберіглося донині.

Евклід, автор монументального підручника «Начала» (рис. 3), не лише зібрав знання попередників, а й вибудував математичну теорію як систему з аксіом, означень і доведень і саме його ім'я стало синонімом строгості в математиці. Хоча ми майже

[2] На рис. 2 б) поштова марка Сан-Марино, присвячена давньогрецькому філософу та математику Піфагору.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

нічого не знаємо про його особистість, його твір має чітке авторство – і саме це дозволило йому пережити століття.

Архімед із Сіракуз ішов ще далі – у своїх листах до царя чи до друзів він не лише викладав свої результати, а й часом пишався хитрощами, за допомогою яких доводив ті чи інші теореми. Він навіть подавав задачі у вигляді головоломок, запрошуючи інших знайти розв'язання. Це вже не просто знання, а змагальне, особисте авторство, де честь відкриття – справа амбіцій і престижу.

Інші імена – Аполлоній із Перги, Гіпарх, Герон Александрійський, Папп з Александрії – також збереглися завдяки підписаним трактатам або згадкам у творах пізніших авторів. У Римській добі, коли сама Римська імперія не надто заохочувала абстрактну науку, математика жила в еллініcтичних осередках, і саме передання імен і авторитетів стало способом збереження наукової традиції.

Водночас, важливо зазначити: навіть у цю добу повага до традиції залишалася сильною. Давньогрецький науковець охоче згадував своїх попередників, цитував їх, будував свої міркування як продовження вже існуючих. Проте, на відміну від анонімної мудрості писців чи колективної школи Піфагора, ми вже бачимо: відкриття і твори прив'язуються до імені конкретної людини – і ця тенденція залишиться з нами надовго.

4. Анонімна мудрість і авторитети: ставлення до авторства в Середньовіччі

Із занепадом античної науки і падінням Західної Римської імперії інтелектуальне життя Європи на кілька століть сповільнюється. У Середньовіччі знання існує передусім як наука про минуле – як збереження й коментування того, що вже було відкрито, переважно в античності. Наука не твориться наново, вона відтворюється, передається, іноді – перекладається і пояснюється.



Рис. 4. Адам Різе на марці Deutsche Bundespost

У європейських монастирях, де зберігалися й переписувалися античні тексти, авторство рідко сприймалося як щось важливе. Багато творів, що дійшли до нас із того часу, не мають підпису, або підпис приписано відомому античному імені – часто помилково, аби надати текстові авторитету. Така практика не вважалася обманом: за середньовічним уявленням, істинним джерелом знання була традиція, а не окрема людина. Тому, приписуючи нову працю Піфагору, Евкліду чи Боетію, автор не

намагався присвоїти чуже ім'я, а радше вказував на належність до певної лінії вчення, до «школи мудрості».

З цієї причини середньовічні збірки задач часто видавали за твори античних авторів, хоча створені вони були значно пізніше. І навіть у більш пізні часи, вже наприкінці Середньовіччя, ця традиція не зникла. Так, один із найвідоміших німецьких «коссистів» – Адам Різе[3] (1492–1559) (рис. 4), автор підручника Coss (1524), – стверджував, що його книга ґрунтується на давній рукописній праці, нібито перекладеній з арабської на грецьку Архімедом, потім на латину Апулеєм, а згодом на німецьку магістром Андреасом Александером. Ідея про те, що Архімед міг перекладати тексти з арабської, є очевидним анахронізмом: він жив у III ст. до н. е., задовго до появи арабської наукової традиції. Але сама легенда показує, наскільки глибоко вкоріненою була потреба пов'язати будь-який новий текст із авторитетами минулого. У ті часи було звичним приписувати свої праці великим ученим – це додавало ваги, викликало довіру й символічно включало автора у спадкоємність античної науки.

У той же час, у мусульманському світі, який успадкував і переклав грецьку науку, авторство шанувалося більше. Праці математиків, таких як аль-Хорезмі, аль-Караджі, Омар Хайям, зберігали імена авторів і навіть згадки про їхніх учителів. Це була інша культурна модель, у якій індивідуальний внесок оцінювався і записувався – хоча й тут автор мав виявляти скромність і шанобливість до традиції. До Європи математичне знання повертається через переклади з арабської на латину – у XII–XIII століттях. З'являються перші автори, які знову починають підписувати власні праці – Фібоначчі (Леонардо з Пізи), наприклад. Але загалом до кінця Середньовіччя особисте авторство не відіграє провідної ролі. Головним залишається авторитет минулого – «як сказано у Евкліда», «як вчив Аристотель» – і лише Ренесанс почне це змінювати.

5. Від майстерень до суперечок: епоха Відродження і Нового часу

Епоха Відродження принесла із собою нове бачення особистості. Мислитель і дослідник перестає бути лише зберігачем мудрості минулого – він стає творцем нового знання, а отже, заслуговує на визнання. В цей час ми бачимо не просто згадки про імена – ми бачимо персональні біографії, портрети, авторські передмови, навіть літературну саморефлексію вчених.

Проте разом із цим з'являються і перші конфлікти навколо авторства. Одним із найбільш відомих прикладів стала суперечка між Джироламо Кардано[4] (рис. 5 б)) та Нікколо Тарталья (рис. 5 а)) щодо методу розв'язання кубічного рівняння. Тарталья відкрив метод, але поділився ним із Кардано за умовою не публікувати. Кардано ж

[3] На рис. 4 німецька поштова марка номіналом 10 пфенігів, із зображенням математика Адама Різе, випущена Deutsche Bundespost. Зображено портрет Адама Різе та символ, що ілюструє його внесок у арифметику.

[4] На рис 5 б) німецька поштова марка із зображенням італійського математика епохи Відродження Джироламо Кардано (Gerolamo Cardano). На марці також є рівняння $x(10-x)=40$ та його розв'язок $x=5\pm\sqrt{-15}$, що ілюструє використання уявних чисел та посилання на його відому книгу «Ars Magna» (Велике мистецтво).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

опублікував метод у своєму «Великому мистецтві» (1545) – і викликав гнів опонента. Сьогодні ми б назвали це порушенням наукової етики, а тоді подібні речі ще лише починали обговорюватися.



а)



б)

Рис. 5. Нікколо Тарталья і Джироламо Кардано

Розв'язок кубічного рівняння був з одного боку надзвичайно важливим етапом у розвитку математики, бо це стало першим великим відкриттям у Європі після багатьох століть стагнації. З іншого боку – скандал, який його супроводжував, негативно вплинув на готовність математиків знайомити суспільство з деталями своєї роботи. Вчені дедалі частіше побоювалися, що їхні ідеї можуть бути вкрадені й привласнені шахраями від науки. У такому середовищі довіра ставала дефіцитом, а обмін знанням – ризикованим кроком.

Саме тому особливо важливою фігурою на зламі XVI–XVII століть стає Марен Мерсен – французький монах, математик і вчений-кореспондент. Він не зробив гучних відкриттів, але зіграв роль наукового посередника, підтримуючи листування з десятками дослідників з різних країн. Його гурток та активна переписка перетворилися на довірчу мережу обміну знанням, у якій репутація Мерсена слугувала гарантією авторського права: те, що було вперше викладено в листі до нього, вважалося пріоритетом.

Це була своєрідна передісторія наукових журналів. Вже наприкінці XVII століття почали з'являтися перші періодичні видання, як-от Philosophical Transactions (Лондон, 1665) та Journal des sçavans (Париж, того ж року), які зафіксували новий механізм фіксації знання: з іменем автора, датою подання, коментарями редактора. Публікація в журналі означала визнаний пріоритет. Це не просто змінило формат науки, а й створило інституцію авторства – тепер ідеї були публічними, але водночас захищеними.

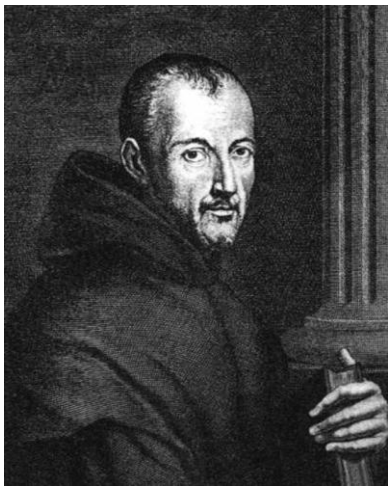
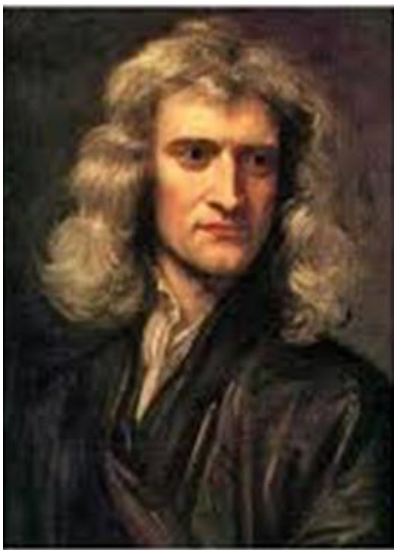


Рис. 6. Марен Мерсен, портрет роботи Філіпа де Шампаня

Втім, це не зупинило суперечок. Наприкінці XVII століття спалахнув конфлікт між Ісааком Ньютоном (рис 7 а)) та Ґотфрідом Лейбніцем (рис 7 б)). Обидва, незалежно один від одного, відкрили основи математичного аналізу. Лейбніц опублікував свої результати першим (1684–1686), а Ньютон, хоч і дійшов висновків раніше, довго тримав їх у секреті. У результаті – довготривала й публічна полеміка, яка поділила європейське наукове середовище на два табори. Це стало яскравою ілюстрацією того, як питання пріоритету ставали дедалі гострішими, і вже не могли вирішуватися кулуарно.



а)



б)

Рис. 7. Ісаак Ньютон та Готфрід Лейбніц

Інший приклад – Гійом де Лопіталь (рис 8 а)) та Йоганн Бернуллі (рис 8 б)). Французький аристократ Лопіталь вивчав у Бернуллі математичний аналіз і публікував його результати у підручнику (1696) під власним ім'ям. Хоча між ними була угода, Бернуллі згодом зажадав публічного визнання свого авторства. Це засвідчило нову норму: *відкриття більше не вважаються колективним надбанням, а стають інтелектуальною власністю*, за яку треба боротися.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

У XVIII столітті система наукової комунікації стає все більш формалізованою. У провідних європейських країнах зростає роль академій наук – таких як Паризька академія наук, Лондонське Королівське товариство, Прусська академія тощо. Саме ці інституції тепер визначають «канонічні» шляхи публікації та оцінки відкриттів. Публікація у виданнях академій або представлення результатів на їх засіданнях поступово витісняє особисту переписку та приватні трактати.




а) б)

Рис. 8. Гійом де Лопіталь та Йоганн Бернуллі

Зростає значення рецензування: праці починають оцінюватися перед публікацією не лише за змістом, а й за новизною, точністю, стилем подачі. Це ще не той *peer review*, який ми знаємо сьогодні, але це вже перший крок до професійної експертизи знання. У такій системі зникає потреба в репутаційних посередниках – роль арбітра переходить до інституційної експертизи.





а) б) в)

Рис. 9. Леонард Ейлер, Жозеф-Луї Лагранж та П'єр-Симон Лаплас

У той же час, усе чіткіше окреслюється і роль автора як професійного науковця. Відомі математики XVIII століття – Леонард Ейлер (рис 9 а)), Жозеф-Луї Лагранж (рис 9 б)), П'єр-Симон Лаплас (рис 9 в)) – не лише відкривають нові розділи науки, а й активно працюють у структурах академій, публікують монографії, взаємодіють через офіційні канали. У їхній творчості авторство вже не потребує захисту – воно *інституційно гарантоване*.

Проте питання пріоритету все ще залишалося болючим. Класичним прикладом стала суперечка між Карлом Фрідріхом Гауссом (рис. 10) і Яном Снядецьким щодо відкриття методу найменших квадратів. Або – між Гауссом, Бесселем та Лежандром щодо нормального розподілу. Усі ці історії вкотре доводять, що конфлікти авторства – не прикра випадковість, а системна частина наукової практики, яка щоразу вирішується по-різному, залежно від культурних норм і академічної політики часу.

У XIX столітті ситуація ще більше ускладнюється. Наука стає масовою професією. В університетах з'являються спеціалізовані кафедри, формується термін «дисципліна», запускаються нові журнали, що охоплюють окремі галузі: алгебру, механіку, геометрію, статистику. Одночасно виникає потреба в обліку публікацій, а також визнанні співавторства, адже дедалі більше досліджень виконуються в межах колективів.



Рис. 10. Карл Фрідріх Гаусс на марці Deutsche Bundespost (1955 р.)

Проблема плагіату стає предметом публічних обговорень: з одного боку, цитування стає нормою, з іншого – ще не існує чітких стандартів, і звинувачення в запозиченні час від часу спалахують навіть серед найвідоміших імен. Виникає дилема авторства: чи вважати науковим злодійством використання чиїхось ідей без прямого копіювання тексту? Як ставитися до випадкового дублювання результатів у різних частинах світу?

У цей період остаточно кристалізується поняття наукового авторства як права на інтелектуальну власність, яке не обов'язково збігається з публікацією, але може бути задокументоване, зафіксоване й визнане академічною спільнотою. Водночас це і період, коли впливовість автора починає обраховуватись: не тільки визнанням, а й кількістю праць, їх цитуванням, інституційними позиціями. Виникає перша ієрархія наукової репутації.

6. XX століття: інституціалізація наукового авторства

На початку XX століття наука остаточно стає справою професіоналів. Університети, академії, науково-дослідні інститути утворюють цілу *інфраструктуру знання*, в якій авторство вже не є лише репутаційною практикою – воно перетворюється на механізм кар'єри. Саме в цей період вводиться система

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

рецензування (*peer review*) як обов'язковий етап перед публікацією в більшості журналів; починають діяти професійні асоціації, які встановлюють етичні кодекси для авторів; з'являються цитатні індекси, які дають змогу відстежувати вплив наукових публікацій і формують ієрархію «визнаних» авторів.

Особливого значення набуває питання співавторства. У фізиці, хімії, біології кількість авторів однієї статті може сягати десятків і навіть сотень. Це породжує нову етичну проблему: хто насправді є автором? Хто – просто керівник проєкту чи адміністратор лабораторії? Відповіді формулюються по-різному у кожній дисципліні, але загальне правило таке: авторство має відповідати особистому внескові.

Одночасно з цим, у XX столітті починає зростати роль фінансування в науці. А це означає, що інституції, що надають гранти, також хочуть бачити результати дослідження. Звітність, облік публікацій, пріоритет відкриття стають бюрократизованими.

Усе це сприяє появі культового і водночас трагікомічного гасла *Publish or Perish* («Публікуйся або помри»), що віддзеркалює тиск академічної продуктивності. Уперше ця фраза з'явилася в листі Маршалла Маклюена до Езри Паунда у 1959 році:

«The beaneries are on their knees to these gents (foundation administrators)... They will do 'research on anything' that Santa approves... 'Publish or perish' is the beanery motto».

«Бінері» – зневажлива назва для університетів – начебто стали залежними від благодійних фондів, а науковці – від їхньої прихильності. Дослідники змушені перетворювати себе на «авторів за контрактом», які продукують тексти не стільки заради істини, скільки для оцінки, звітності, видимості. Авторство тут – уже не знак інтелектуального акту, а маркер виживання в системі академічної конкуренції.

На цьому тлі набирають обертів і негативні явища: гостьове авторство (вказування «важливих» імен без реального внеску), виключення реальних учасників із списків авторів, надмірне дроблення результатів для збільшення кількості публікацій («salami slicing»), конвеєрні журнали і навіть хижацькі видавництва, що публікують усе без належної рецензії за оплату.

Таким чином, авторство стало водночас валютою, зброєю та об'єктом спекуляції, а не лише засобом фіксації внеску в науку.

7. Авторство у XX–XXI століттях: зміна цінностей

У другій половині XX століття роль наукових публікацій у кар'єрі дослідника зросла настільки, що вони стали ключовим показником успіху та запорукою фінансування. Разом із цим з'явилися і темні сторони системи: зловживання, сумнівні практики та гучні скандали.

На початку 2000-х світ сколихнула історія Яна Хендріка Шена з Bell Labs. Його статті з надзвичайно гучними «революційними» результатами одна за одною з'являлися у найпрестижніших журналах – Science і Nature. Здавалося, що він щотижня відкриває нову епоху в фізиці твердого тіла. Та згодом з'ясувалося, що більшість даних були сфальсифіковані. Скандал змусив наукову спільноту

замислитися над тим, як перевіряються результати та яку відповідальність несуть співавтори, чиї прізвища стоять поруч у публікації.

Ще один приклад – історія відкриття структури ДНК. У підручниках вона часто подається як тріумф Джеймса Вотсона і Френсіса Кріка, однак дедалі частіше згадують і про Розалінд Франклін. Саме її рентгенівські знімки стали ключем до розгадки подвійної спіралі, але її ім'я не з'явилося серед авторів статті в Nature, а після смерті вона вже не могла отримати Нобелівську премію.

Скандали з авторством іноді виходять за межі академічних стін. У 2011 році міністр оборони Німеччини Карл-Теодор цу Ґуттенберґ змушений був піти у відставку після того, як виявилося, що значні частини його докторської дисертації були запозичені з чужих наукових робіт без належного посилання.

А іноді проблема полягає не у відсутності імен, а в їхній кількості. У 2015 році стаття, підготовлена спільно колабораціями ATLAS і CMS у CERN, мала понад п'ять тисяч авторів. Такий масштаб змусив науковців дискутувати: чи має сенс настільки довгий список? Як визначити реальний внесок кожного вченого?

Усе це поступово змінило саме значення авторства у науці. Воно перестало бути лише знаком поваги до тих, хто створив знання, і стало інструментом кар'єрного зростання, механізмом розподілу репутаційного капіталу та критерієм, за яким оцінюють не лише окремих науковців, а й цілі університети та лабораторії.

Відтак змінилася і мотивація дослідників. Якщо у XVII столітті Мерсен листувався з ученими, просто ділячись новими ідеями, то сучасний науковець планує публікацію як стратегічний проєкт: підбирає ключові слова, формулює заголовок так, щоб привернути увагу редакторів, обирає журнал з високим «*імпакт-фактором*», зважає на графік грантів чи атестацій, а список авторів узгоджує з урахуванням ієрархії та політичних нюансів.

8. XXI століття: виклики цифрової доби

На початку третього тисячоліття наукове авторство переживає, мабуть, найбільшу трансформацію з часів появи друкованих журналів. У центрі цих змін – цифрові технології, що радикально змінюють темп, формат і навіть саме розуміння публікації.

Одним із найпомітніших явищ стали платформи препринтів – arXiv, bioRxiv, medRxiv та десятки інших, які дозволяють викласти результати дослідження у відкритий доступ ще до офіційної публікації в журналі. Це нагадує епоху XVII століття, коли вчені, як Мерсен, обмінювалися ідеями у листах, але тепер це відбувається у глобальному масштабі й майже миттєво. Утім, є й зворотний бік: якщо стаття з'являється до проходження рецензування (peer review), пріоритет відкриття стає хитким. Препринт можна вважати заявкою на авторство, але це авторство «умовне», поки його не підтвердить наукова спільнота.

Інший виклик – зміна масштабу наукової співпраці. Сучасна наука дедалі частіше працює на перетині дисциплін і в рамках величезних міжнародних команд. У фізиці високих енергій чи біомедичних дослідженнях публікації з тисячами авторів вже не дивують. Дослідження CERN чи глобальні генетичні проєкти нерідко підписуються від

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

імені всієї колаборації, а не окремих дослідників. З одного боку, це відображає колективну природу сучасної науки; з іншого – розмиває індивідуальний внесок і ускладнює традиційне розуміння авторства як особистого визнання.

До цього додається ще одна нова реальність – штучний інтелект. Із 2020-х років дедалі частіше виникає питання: що робити, якщо частину дослідження – аналіз даних, генерацію тексту чи навіть математичне доведення – виконала не людина, а алгоритм? Чи можна вважати це авторською роботою, якщо машинний інструмент діяв за вказівками дослідника? Провідні наукові журнали вже визначилися: штучний інтелект не може бути автором, але його використання слід обов'язково декларувати. І все ж дискусія триває, нагадуючи колишні суперечки про співавторство, плагіат чи коректне цитування.

Таким чином, цифрова доба не лише відкрила нові можливості для поширення знань, але й створила нові зони напруги: від тимчасового й колективного авторства до етичних питань, пов'язаних з алгоритмами. Те, що ще недавно здавалося периферійними нюансами наукової роботи, тепер стає центральними викликами, які визначатимуть вигляд науки у XXI столітті.

Подяка, джерела фінансування

Це дослідження не отримало жодного гранту від фінансових установ в державному, комерційному чи некомерційному секторах.

Список використаних джерел

Agin D. (2007), Junk Science: *An Overdue Indictment of Government, Industry, and Faith Groups That Twist Science for Their Own Gain,* Macmillan.

Bertoloni Meli D. (1993), *Equivalence and Priority: Newton versus Leibniz: Including Leibniz's Unpublished Manuscript on the Principia*, Oxford University Press.

Brockliss L. (1996), *A History of the University in Europe. Vol. 2, Universities in early modern Europe (1500-1800)*, Cambridge.

Katz V. (1998), *A History of Mathematics: An Introduction*, Addison-Wesley; Subsequent edition.

Lindberg D. (2008), *The Beginnings of Western Science. The European Scientific Tradition in Philosophical, Religious, and Institutional Context, Prehistory to A.D. 1450*, Chicago University Press.

Neugebauer O. (1969), *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover Publication.

Sayre A (1987) [1975], *Rosalind Franklin and DNA* (Reissued ed.), W.W. Norton and Company.

Shank M.H. (2000), *The Scientific Enterprise in Antiquity and the Middle Ages*, Chicago University Press.

van der Waerden H. (1974), Science Awakening, Springer.

Іванова Н. (2025), *Історія Математики в Культурній Спадщині Європи. Том І: Давній Світ, Математика Корінних Народів Америки*, готується до друку, попередня версія доступна за посиланням https://imath.kiev.ua/~ivanova/History/HistoryOfMath_ukr_vol1.pdf

Іванова Н. (2025), *Історія Математики в Культурній Спадщині Європи. Том ІІ: Східна Традиція*, готується до друку, попередня версія доступна за посиланням https://imath.kiev.ua/~ivanova/History/HistoryOfMath_ukr_vol2.pdf

Іванова Н. (2025), *Історія Математики в Культурній Спадщині Європи. Том ІІІ: Математика Європи від Середньовіччя до XVII Століття*, готується до друку, попередня версія доступна за посиланням https://imath.kiev.ua/~ivanova/History/HistoryOfMath_ukr_vol3.pdf

Отримано редакцією журналу: 04.11.2025
Прорецензовано: 27.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Nataliya IVANOVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. researcher
e-mail: ivanova@imath.kiev.ua
ORCID: 0009-0002-9896-5152
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

THE FORMATION OF CONCEPTIONS OF AUTHORSHIP IN MATHEMATICS

Abstract. *This article explores the history of the concept of authorship in mathematics – from the anonymity of ancient civilizations to modern scientific practices. Key stages of development are analyzed: the collective tradition of ancient Greece, individualization during the Renaissance, authorship disputes in the Renaissance and 17th century, the emergence of scientific journals, and contemporary challenges of the 20th and 21st centuries. The article shows how notions of knowledge, responsibility, and recognition have evolved in the scientific community. Major conflicts and ethical issues surrounding the formalization of authorship are discussed, as well as the role of modern mechanisms supporting integrity and transparency in publications. The article aims to convey to readers the importance of scientific ethics and personal responsibility in the creation and dissemination of knowledge.*

Keywords: *history of mathematics; copyright; academic integrity.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

УДК 378.016:[517.9+512.64+519.6] **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.3**

Михайло ГОРОДНІЙ, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-9991-910X
e-mail: horodnii@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Анотація. *У даній статті висвітлено кілька класичних методів розв'язання більш складних, ніж зазвичай розглядаються на шкільних уроках з математики, задач – логарифмування, використання монотонності спеціально підібраної функції, метод максимуму-мінімуму. Також значну увагу приділено повноті та логіці розв'язків, оскільки тестові завдання з математики перевіряють в основному стандартні технічні математичні навички, а цього недостатньо для успішного навчання в закладах вищої освіти, особливо на математичних (зокрема, IT), інженерних, природничих та економічних спеціальностях.*

Ключові слова: *рівняння; нерівність; розв'язок; логарифмування; монотонність функції; метод максимуму-мінімуму.*

1. Вступ

Математика в сучасному світі є основним апаратом не тільки фізики і техніки, але й сфери IT, біології, економіки, хімії, соціології та інших наук. Також саме математика виховує самостійність і логічність мислення, а без цих якостей важко досягти успіху в будь-якій області професійної діяльності. Тому математику включають до обов'язкових предметів національного мультимедійного тесту. На жаль, її обов'язковість призводить до того, що перевіряються в основному тільки технічні навички, а не вміння обґрунтовувати правильність тих чи інших технічних перетворень або логічних висновків. У результаті знання і навички багатьох випускників з шкільного курсу математики недостатні для успішного навчання в закладах вищої освіти.

Щоб мотивувати школярів до поглибленого вивчення математики, вітчизняні університети проводять свої олімпіади з математики. На цих олімпіадах перевіряється не тільки вміння випускника школи запам'ятати формулювання і використати деякі стандартні рецепти, але й володіння логікою математичних міркувань, вміння застосовувати теоретичні знання для розв'язування нестандартних задач.

Мета цієї статті – познайомити школярів з деякими методами розв'язування нетривіальних рівнянь, нерівностей і систем. Більшість задач, що розглядаються в статті, у різні роки пропонувалися на олімпіаді з математики для абітурієнтів Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

2. Приклади розв'язування задач

Задача 1. *Розв'язати нерівність*

$$2024^{2025(x+1-\sqrt{x+13})} > 2025^{2024(x+1-\sqrt{x+13})}.$$

Розв'язання: На ОДЗ наша нерівність рівносильна нерівності

$$a^{x+1-\sqrt{x+13}} > 1, \tag{1}$$

де $a = \frac{2024^{2025}}{2025^{2024}}$. Оскільки показникова функція $y = a^x$ монотонно зростає при $a > 1$ і монотонно спадає при $0 < a < 1$, то потрібно порівняти числа a і 1.

Перевіримо, чи правильна нерівність $a > 1$. Скориставшись тим, що функція $y = \ln x$ монотонно зростає на $(0, +\infty)$, матимемо

$$\begin{gathered} a > 1 \iff 2025\ln 2024 - 2024\ln 2025 > 0 \iff \frac{\ln 2024}{2024} > \frac{\ln 2025}{2025} \iff \\ \iff f(2024) > f(2025), \end{gathered} \tag{2}$$

де $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Оскільки $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ при $x > e$, то функція $f(x)$ монотонно спадає на $(e, +\infty)$ і тому нерівність (2), а отже, і нерівність $a > 1$ правильні.

Тепер, скориставшись тим, що функція $y = a^x$ монотонно зростає і рівністю $a^0 = 1$, робимо висновок, що нерівність (1) рівносильна нерівності

$$x + 1 > \sqrt{x + 13}. \tag{3}$$

Нерівність (3) розв'яжемо піднесенням до квадрату. Отримаємо:

$$\begin{gathered} x + 1 > \sqrt{x + 13} \iff \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x + 13 \geq 0, \\ (x+1)^2 > x + 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + x - 12 > 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x < -4 \text{ або } x > 3 \end{cases} \iff x > 3. \end{gathered}$$

Відповідь: $x > 3$.

Зауваження 1. Корисно запам'ятати, що:

а) логарифмування, а також використання монотонності функції – класичні прийоми, що використовуються для порівняння чисел;

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

б) нерівність $f(x) > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \big(f(x)\big)^2 > g(x). \end{cases}$

Задача 2. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0, & (5) \\ x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0. & (6) \end{cases}$$

Розв'язання: *1 спосіб*. Підставивши числа $1,\ -1,\ 3,\ -3$ в рівняння (5), робимо висновок, що (5), а отже, і наша система не мають цілих розв'язків.

Спробуємо отримати більш просте рівняння, серед розв'язків якого є всі розв'язки вихідної системи. Виразивши x^4 із (5) і підставивши в (6), отримаємо

$$-x^2 + 4x + 3 = 2x^3 - 2x^2 + x + 2,$$

тобто

$$2x^3 = x^2 + 3x + 1. \quad (7)$$

Тепер зауважимо, що $x = 0$ – не розв'язок системи. Тому всі розв'язки вихідної системи є розв'язками як рівняння (7), так і отриманого множенням (7) на x рівняння

$$2x^4 = x^3 + 3x^2 + x,$$

або, з урахуванням (7), рівняння

$$2x^4 = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 1) + 3x^2 + x. \quad (8)$$

На кінець, підставивши вираз для x^4 із (5) в (8), матимемо

$$2(-x^2 + 4x + 3) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Таким чином, ми встановили, що розв'язками системи можуть бути тільки корені квадратного рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, тобто числа $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Слід звернути особливу увагу на те, що ми отримали рівняння $x^2 - x - 1 = 0$ як наслідок вихідної системи, а отже, наразі можемо тільки стверджувати, що якщо система має розв'язки, то їх не більше двох і кожен з них співпадає з одним з чисел $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Отже, для закінчення розв'язання потрібно перевірити, чи є ці числа коренями вихідної системи.

Звичайно, можна безпосередньо підставити $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в кожне з рівнянь системи і переконатися, що вони справді є розв'язками. Оскільки цей підхід призводить до громіздких обчислень, наведемо інший метод цієї перевірки.

Якщо $x = x_0$ – розв'язок рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, то

$$x_0{}^2 = x_0 + 1, \qquad x_0{}^3 = x_0{}^2 + x_0, \qquad x_0{}^4 = x_0{}^3 + x_0{}^2,$$

і тому

$$x_0{}^4 + x_0{}^2 - 4x_0 - 3 = x_0{}^3 + 2x_0{}^2 - 4x_0 - 3 = 3x_0{}^2 - 3x_0 - 3 = 3(x_0{}^2 - x_0 - 1) = 0,$$

$$x_0{}^4 - 2x_0{}^3 + 2x_0{}^2 - x_0 - 2 = -x_0{}^3 + 3x_0{}^2 - x_0 - 2 = 2x_0{}^2 - 2x_0 - 2 = 2(x_0{}^2 - x_0 - 1) = 0,$$

тобто $x = x_0$ є розв'язком вихідної системи.

Отже, система має два розв'язки $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

З наведених вище міркувань випливає, що ліві частини рівнянь системи діляться на $x^2 - x - 1$. Тому розв'язування можна записати більш коротко, а саме, наприклад, таким чином.

2 спосіб. Оскільки

$$\begin{array}{l} x^4 + 0\cdot x^3 + x^2 - 4x - 3 \;\big|\; x^2 - x - 1 \\ \underline{x^4 - x^3 - x^2} \qquad\qquad\quad \big|\; x^2 + x + 3 \\ \quad x^3 + 2x^2 - 4x \\ \quad \underline{x^3 - x^2 - x} \\ \quad 3x^2 - 3x - 3 \\ \quad \underline{3x^2 - 3x - 3} \\ \qquad\qquad 0 \end{array},$$

$$\begin{array}{l} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 \;\big|\; x^2 - x - 1 \\ \underline{x^4 - x^3 - x^2} \qquad\qquad\quad \big|\; x^2 - x + 2 \\ \quad -x^3 + 3x^2 - x \\ \quad \underline{x^3 - x^2 - x} \\ \quad 2x^2 - 2x - 2 \\ \quad \underline{2x^2 - 2x - 2} \\ \qquad\qquad 0 \end{array},$$

то вихідна система рівносильна системі

$$\begin{cases} (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 3) = 0, & (9) \\ (x^2 - x - 1)(x^2 - x + 2) = 0. & (10) \end{cases}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Також рівняння $x^2+x+3=0$ не має розв'язків, а отже, розв'язками (9) є тільки корені рівняння $x^2-x-1=0$, які також є розв'язками рівняння (10). Таким чином, система має два розв'язки $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 3. *Довести, що при всіх x,y виконується нерівність*

$$\frac{x^2}{3}-x+\frac{5}{6}-\frac{6^y}{36^{y+1}+1}\geq 0.$$

Визначити, при яких x,y досягається рівність.

Розв'язання: Покладемо

$$f(x)=\frac{x^2}{3}-x+\frac{5}{6}\,,\qquad g(y)=\frac{6^y}{36^{y+1}+1}.$$

Нам досить довести, що

$$\min_{x\in R} f(x)=\max_{y\in R} g(y), \tag{11}$$

а також визначити, при яких x,y в (11) отримаємо рівність.

Оскільки

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\,,$$

то

$$\min_{x\in R} f(x)=\frac{1}{12}$$

і цей мінімум досягається тільки в точці $x=\frac{3}{2}$.

Для знаходження максимуму функції $g(y)$ скористаємось нерівністю Коші для двох доданків, яка стверджує, що

$$a^2+b^2\geq 2ab, \tag{12}$$

для всіх дійсних a,b, причому рівність в (12) матимемо лише при $a=b$. Поклавши $a=6^{y+1},\ b=1$, отримаємо $36^{y+1}+1\geq 2\cdot 6^{y+1}$, і тому

$$g(y)\leq\frac{6^y}{2\cdot 6^{y+1}}=\frac{1}{12}$$

для всіх $y \in R$, причому $g(y) = \frac{1}{12}$ тільки при $6^{y+1} = 1$, тобто $y = -1$. Отже, $\max\limits_{y \in R} g(y) = \frac{1}{12}$ і цей максимум досягається в єдиній точці $y = -1$.

Таким чином, нерівність (11), а отже, і вихідну нерівність доведено для всіх x, y. Рівність досягається тільки при $x = \frac{3}{2}$, $y = -1$.

Зауваження 2. Звичайно, $\min\limits_{x \in R} f(x)$ та $\max\limits_{y \in R} g(y)$ можна знайти за допомогою похідної.

Зауваження 3. *Нерівність Коші* часто використовується при розв'язуванні задач зі шкільної математики. Тому її корисно запам'ятати. Зазначимо, що вона рівносильна тривіальній нерівності $(a-b)^2 \geq 0$.

Метод розв'язання задачі 3, який будемо називати ***методом максимуму-мінімуму***, дозволяє розв'язати багато нестандартних математичних задач. Наведемо ще один приклад його застосування.

Задача 4. *Розв'язати рівняння*

$$4\sin^2(x^4 - 1) = 4x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

Розв'язання: Зауважимо, що $4\sin^2(x^4 - 1) \leq 4$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, а також за нерівністю Коші

$$4x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2 \cdot 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 4, \tag{13}$$

причому рівність в (13) виконується лише тоді, коли $2x^2 = \frac{1}{x^2}$. Отже, скориставшись методом максимуму-мінімуму, робимо висновок, що вихідне рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin^2(x^4 - 1) = 1, \\ 2x^2 = \frac{1}{x^2}. \end{cases} \tag{14}$$

Друге рівняння цієї системи має розв'язки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Оскільки

$$\sin^2(x_1^4 - 1) = \sin^2(x_2^4 - 1) = \sin^2\frac{1}{2} < 1,$$

то система (14), а отже, і вихідне рівняння не мають розв'язків.

Відповідь: рівняння не має розв'язків.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 5. *Визначити, скільки раціональних коренів має рівняння*

$$5^x \cdot 2^{\frac{6x}{x+2}} = 20.$$

Розв'язання. Зауважимо, що $x_1 = 1$ є коренем рівняння (цей корінь неважко вгадати, оскільки 5 і 2 є дільниками числа 20). Також, прологарифмувавши це рівняння за основою 5, отримаємо рівносильне йому рівняння

$$x + \frac{6x}{x+2}\log_5 2 = \log_5 20,$$

тобто, при $x \neq 2$,

$$x^2 + x(2 + 6\log_5 2 - \log_5 20) - 2\log_5 20 = 0. \qquad (15)$$

Звідси, скориставшись тим, що $x_1 = 1$ є коренем квадратного рівняння (15) і теоремою Вієта, робимо висновок, що його другий корінь $x_2 = -2\log_5 20$.

Якщо, від супротивного, $x_2 \in \mathbb{Q}$, то $-\frac{1}{2}x_2 = \log_5 20 \in \mathbb{Q}$, а отже, існує такий нескоротний дріб $\frac{p}{q} > 1$, що $\log_5 20 = \frac{p}{q}$. Але тоді $5^p = 20^q$ і ми отримали суперечність, оскільки остання рівність містить зліва непарне число, а справа – парне.

Відповідь: рівняння має один раціональний корінь.

Зауваження 4. Вгадавши корінь $x_1 = 1$ початкового рівняння, який також є коренем рівняння (15), нам вдалося зразу записати корінь x_2 у вигляді, зручному для подальшого дослідження. Інакше ми були б змушені використати формулу для обчислення коренів квадратного рівняння і отримали б досить громіздкі вирази для коренів x_1 та x_2.

3. Висновки

У даній статті наведено приклади застосування класичних методів – логарифмування, використання монотонності спеціально підібраної функції, методу максимуму-мінімуму – для розв'язування нестандартних рівнянь і нерівностей. Також значна увага приділена повноті і логіці розв'язань, оскільки виконання тестового завдання з математики і повне, логічно правильне розв'язання математичної задачі є суттєво різними поняттями.

Мабуть, єдиний спосіб навчитися правильно розв'язувати задачі – це самостійне розв'язування великої кількості різноманітних задач. Наразі існує багато збірників задач, які можна використовувати. Деякі з них вказані в списку використаних джерел. Звичайно, також корисно мати поряд досвідченого, кваліфікованого вчителя, який зможе відповісти саме на ваші запитання.

Список використаних джерел

Сканаві М. І. (1994) *Збірник задач з математики для вступників до втузів*. Київ: Вища школа. 445 с.

Горделадзе Ш. Т., Кухарчук М. М. & Яремчук Ф. П. (1973) *Збірник конкурсних задач з математики: Посібник для вступників до вузів*. Київ: Вища школа. 324 с.

Вишенський В. А., Перестюк М. О. & Самойленко А. М. (2001) *Конкурсні задачі з математики*. Київ: Вища школа. 432 с.

Вишенський В. А., Нагорний В. Н., Перестюк М. О. & Плахотник В. В. (2005) *Десять математичних олімпіад; КНУ ім. Т. Шевченка*. Кам'янець-Подільський : Аксіома, 208 с.

Отримано редакцією журналу: 06.11.2025
Прорецензовано: 21.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Mykhailo HORODNII, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-9991-910X
e-mail: horodnii@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON SOME METHODS OF SOLVING NON-STANDARD EQUATIONS AND INEQUALITIES

Abstract. *This article elucidates several classical methods for solving problems that are more complex than those usually considered in school mathematics lessons - logarithms, using the monotonicity of a specially selected function, and the maximum-minimum method. Also, significant attention is paid to the completeness and logic of solutions, because mathematics test tasks mainly test standard technical mathematical skills, which is not enough for successful study in higher education institutions, especially in mathematical (including IT), engineering, natural science and economic specialties.*

Keywords: *equation; inequality; solution; logarithm; monotonicity of a function; maximum-minimum method.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні олімпіади

УДК 519.6:37.091.27-057.875]:378.4(477.411)КНУ DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.4

Олександр БОРИСЕЙКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: РІЗНОМАНІТТЯ ТИПІВ І ШЛЯХІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Анотація. *У статті здійснено методичний аналіз та представлено алгоритми розв'язання нестандартних математичних задач, що пропонувалися в межах заочних етапів Всеукраїнської олімпіади Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Досліджено різноманіття типів завдань, зокрема: симетричні системи рівнянь вищих степенів, задачі на цілочисельні послідовності, нерівності з параметрами, а також складні випадки планіметрії та стереометрії. Матеріали роботи адресовано для старшокласників, учителів математики та методистів, які забезпечують підготовку учнів до інтелектуальних змагань та вступу до закладів вищої освіти математичного профілю.*

Ключові слова: *математична олімпіада; рівняння; система рівнянь; нерівність; трикутник; чотирикутник.*

1. Вступ

Математичні олімпіади – це не лише змагання за призові місця, а передусім унікальний простір для інтелектуального зростання. На відміну від типових шкільних вправ, де алгоритм розв'язання часто є очевидним, олімпіадні задачі вимагають від учня здатності до синтезу знань, виходу за межі стандартних схем та творчого пошуку ідеї.

Особливе місце в системі інтелектуальних випробувань посідає Олімпіада механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Заочний тур цієї олімпіади є стратегічно важливим етапом. Він дає абітурієнту можливість у спокійній атмосфері заглибитися у складну проблему, опрацювати додаткову літературу та випробувати свої сили перед очними етапами.

Завдання, що пропонуються на олімпіадах Київського національного університету імені Тараса Шевченка, традиційно відзначаються високим рівнем математичної естетики. Вони охоплюють фундаментальні розділи: від витончених алгебраїчних перетворень та теорії чисел до складних геометричних конфігурацій.

Мета цієї роботи – не просто продемонструвати правильні відповіді, а розкрити логіку пошуку розв'язання. Ми проаналізуємо типи задач, які найчастіше зустрічалися в заочних турах минулих років з відповідними розв'язаннями або вказівками.

Запропонований матеріал стане надійним путівником для старшокласників, які прагнуть якісної підготовки та успішного старту у своїй математичній кар'єрі.

2. Приклади завдань заочних турів олімпіади

Задача 1. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^5 + y^5 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання: Система є симетричною відносно двох невідомих, тому можемо виразити усі елементи заданої системи через симетричні многочлени від двох невідомих $(x + y)$ та xy. Тоді друге рівняння системи набуде вигляду

$$(x + y)(x^4 - yx^3 + y^2x^2 - y^3x + y^4) = 6.$$

З урахуванням, що $x + y = 2$, отримаємо рівняння

$$x^4 - yx^3 + y^2x^2 - y^3x + y^4 = 3.$$

Згрупуємо доданки і утворимо множники, що виражаються безпосередньо через $(x + y)$ та xy:

$$(x^2 + y^2)^2 - y^2x^2 - yx(x^2 + y^2) = 3;$$

$$((x + y)^2 - 2xy)^2 - (xy)^2 - yx((x + y)^2 - 2xy) = 3;$$

$$(x + y)^4 - 5(x + y)^2xy + 5(xy)^2 = 3.$$

Врахувавши, що $x + y = 2$, отимуємо рівняння

$$2^4 - 5 \cdot 4xy + 5(xy)^2 = 3.$$

Отримали квадратне рівняння відносно добутку xy. Розв'язавши отримане рівняння, і враховуючи перше рівняння початкової системи, отримуємо сукупність двох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = \dfrac{10 - \sqrt{35}}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = \dfrac{10 + \sqrt{35}}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язуючи відповідні системи рівнянь, отримаємо, що друге рівняння дійсних розв'язків не має, а з першого рівняння маємо

$$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, \quad y_1 = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}\ ;$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, \quad y_2 = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}.$$

Відповідь: $\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, 1-\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}\right), \left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, 1+\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}\ \right).$

Задача 2. *Знайти чотири цілих числа, що утворюють арифметичну прогресію, якщо найбільше з них дорівнює сумі квадратів трьох інших.*

Розв'язання: Позначимо шукані члени арифметичної прогресії як a, b, c, f і різницю прогресії через d.

Розглянемо випадок зростаючої прогресії. Тоді $f = a^2 + b^2 + c^2$ і $d = b - a$.

Застосовуючи стандартне представлення членів арифметичної прогресії, отримуємо:

$$a + 3d = a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2.$$

Звідси отримаємо квадратне рівняння відносно змінної a:

$$3a^2 + a(6d-1) + 5d^2 - 3d = 0.$$

Записавши дискримінант квадратного рівняння, отримаємо умову на різницю прогресії d:

$$D = (6d-1)^2 - 12(5d^2 - 3d) = -24d^2 + 24d + 1 \geq 0, \qquad d \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язком отриманої нерівності буде відрізок

$$d \in \left[\frac{6-\sqrt{42}}{12}, \qquad \frac{6+\sqrt{42}}{12}\right], \qquad d \in \mathbb{Z}.$$

Отже, отримаємо два цілих значення $d_1 = 0,\ d_2 = 1$.

Якщо $d = 0$, то $a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ f = 0$, враховуючи цілочисельність членів арифметичної прогресії.

Якщо $d = 1$, то утвориться послідовність $b-1,\ b,\ b+1,\ b+2$. Тоді маємо, що $b+2 = (b-1)^2 + b^2 + (b+1)^2$. Розв'язавши рівняння, отримаємо $b = 0,\ a = -1,\ c = 1,\ f = 2$.

Для випадку спадної прогресії очевидно розв'язок не існує (перевірити самостійно).

Відповідь: $d = 0,\ a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ f = 0;$
$d = 1, \quad a = -1, \quad b = 0, \quad c = 1, \quad f = 2.$

Задача 3. *Знайти всі дійсні значення параметра a, для яких нерівність*

$$ax^2 - x + 1 - a < 0$$

має своїм наслідком нерівність $0 \le x \le 1$.

Розв'язання: Розглянемо можливі випадки відносно параметра a.

Якщо $a = 0$, то $-x + 1 < 0$ і $x > 1$. Умова не виконується.

Якщо $a > 0$, то розглянемо можливі варіанти.

Нехай $D \le 0$, то нерівність $ax^2 - x + 1 - a < 0$ не має розв'язків.

Якщо $D > 0$, то нерівність $ax^2 - x + 1 - a < 0$ має своїм розв'язком інтервал $x \in (x_1, x_2)$. Вона матиме своїм наслідком нерівність $0 \le x \le 1$, якщо виконані умови

$$\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \le 1. \end{cases}$$

Тому розглянемо можливі випадки при умовах

$$\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \le 1, \\ D > 0. \end{cases}$$

Розглянемо $D = 1 - 4a(1-a) = (2a-1)^2 \ge 0$, тоді

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm |2a-1|}{2a}.$$

Якщо $0 < a < \frac{1}{2}$, то

$$x_1 = \frac{1 - 1 + 2a}{2a} = 1, \quad \text{а} \quad x_2 = \frac{1 + 1 - 2a}{2a} = \frac{1-a}{a}.$$

При заданому $0 < a < \frac{1}{2}$ розв'язки нерівності не утворюють проміжок $[0,1]$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Якщо $a > \frac{1}{2}$, то $x_1 = \frac{1-a}{a}$, $x_2 = 1$. Отримані розв'язки нерівності утворюють проміжок $[0,1]$ при $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Для випадку $a < 0$ умова наслідку не виконується, оскільки для жодного значення параметра a не покривається проміжок для $x \in [0,1]$ ($x = 0$ не є розв'язком заданої нерівності).

Відповідь: $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Задача 4. *Чи обов'язково будуть рівними два трикутники, якщо висоти одного із них дорівнюють висотам іншого?*

Розв'язання: Нехай S, a, b, c – площа і сторони першого трикутника, S_1, a_1, b_1, c_1 – відповідно, другого. З умови маємо:

$$\frac{2S}{a} = h_a = h_{a_1} = \frac{2S_1}{a_1}.$$

Звідки $\frac{a_1}{a} = \frac{S_1}{S}$. Аналогічно $\frac{b_1}{b} = \frac{S_1}{S}$ та $\frac{c_1}{c} = \frac{S_1}{S}$. Тому $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$, отримуємо, що трикутники подібні, а отже, їх площі відносяться, як $\frac{S_1}{S} = k^2$.

Далі маємо $k^2 = k$, тобто $k = 1$. Отже, трикутники рівні.

Відповідь: Так, такі трикутники рівні.

Задача 5. *П'ять ребер трикутної піраміди однакові і дорівнюють* 2 *см. Якого найбільшого значення може набувати об'єм такої піраміди?*

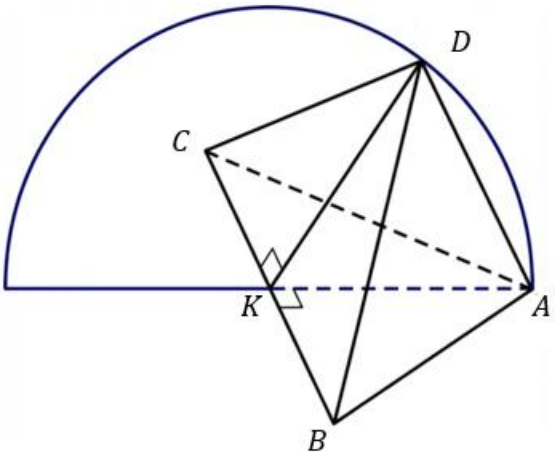


Рис. 1. Рисунок до задачі 5

Розв'язання: Нехай всі ребра, крім AD, мають фіксовану величину 2 см, точка K – середина ребра BC, $DK \perp BC$ і $AK \perp BC$, як висоти, медіани та бісектриси рівних

рівносторонніх ΔABC та ΔDBC, відповідно $DK = AK = \sqrt{3}$ см. Отже, якщо провести через точку K площину α, перпендикулярну до ребра BC, і побудувати в ній коло з центром у точці K, яке проходить через точки A та D (рис. 1), то найвіддаленіше положення точки D від діаметра кола і, разом з тим, від D до площини ΔABC. І відстань від точки D до площини ΔABC у цьому випадку дорівнює радіусу кола, тобто $\sqrt{3}$. При цьому $DK \perp AK$.

Тоді

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} = 1 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: 1 (см^3).

Задача 6. *Площа чотирикутника дорівнює* 1 *м*^{2}*, а периметр –* 4 *м. Довести, що чотирикутник обов'язково є квадратом.*

Розв'язання: Нехай $ABCD$ – заданий чотирикутник, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. З нерівності $(x - y)^2 \geq 0$ отримаємо $x^2 + y^2 \geq 2xy$, а отже,

$$xy \leq \frac{1}{4}(x + y)^2.$$

Далі

$$1 = S = \frac{1}{2}ab \sin \angle B + \frac{1}{2}cd \sin \angle D \leq \frac{ab + cd}{2}.$$

Аналогічним чином отримаємо подібну нерівність

$$1 \leq \frac{bc + ad}{2}.$$

Додавши дві останні нерівності, отримаємо:

$$2 \leq \frac{(a + c)(b + d)}{2} \leq \frac{1}{8}\big((a + c) + (b + d)\big)^2 = \frac{16}{8} = 2.$$

Рівність можлива, по-перше, коли всі кути прямі, а також за умови, що

$$a + c = b + d,$$

отже, маємо прямокутник, у який можна вписати коло, тобто, квадрат.

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

3. Анонс

Київський національний університет імені Тараса Шевченка щорічно проводить Всеукраїнську олімпіаду з математики. В олімпіаді можуть брати участь особи, які є учнями випускних класів закладів загальної середньої освіти або мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету. Традиційно олімпіада проходить у два тури: перший – дистанційний (відбірковий) взимку, та другий – очний (фінальний) навесні. Детальну інформацію читачі можуть знайти на офіційному сайті Київського національного університету імені Тараса Шевченка https://knu.ua.

Із завданнями дистанційного (відбіркового) туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка читачі можуть також ознайомитися в цьому номері журналу у рубриці «Задачі та гіпотези, рішення».

Список використаних джерел

Федак І. В. (2004). *Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для загальноосвітніх навчальних закладів.* – Чернівці. – 360 с.

Сарана О.А. (2011). *Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник*. Друге видання, доповнене. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан. – 400 с.

Отримано редакцією журналу: 01.12.2025
Прорецензовано: 10.12.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Oleksandr BORYSEIKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

OLYMPIAD PROBLEMS: A VARIETY OF TYPES AND SOLUTIONS

Abstract. *This article provides a methodological analysis and presents solution algorithms for non-standard mathematical problems proposed during the distance (correspondence) rounds of the All-Ukrainian Olympiad at Taras Shevchenko National University of Kyiv. The study explores a diverse range of problem types, including symmetric systems of higher-degree equations, problems involving integer sequences, parametric inequalities, and complex cases in planimetry and solid geometry. The materials are intended for high school students, mathematics educators, and methodologists involved in preparing students for intellectual competitions and admission to higher education institutions with a mathematical profile.*

Keywords: *mathematical Olympiad; equations; systems of equations; inequalities; triangles; quadrilaterals.*

Математичні олімпіади

УДК 51:37.091.27-057.874-056.45]:001.91 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.5**

Тетяна ВОЛОШИНА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0002-2931-8018
e-mail: tetianavoloshyna@gmail.com
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ ДЛЯ МОЛОДШИХ ШКОЛЯРІВ

Анотація. *У статті висвітлено досвід організації та проведення математичних олімпіад для учнів 4–6 класів на базі Волинського національного університету імені Лесі Українки. Обґрунтовано актуальність залучення молодших школярів до олімпіадного руху як ефективного засобу раннього виявлення математично обдарованих дітей, формування стійкої мотивації до вивчення математики та підготовки до подальших інтелектуальних змагань. Представлено добірку олімпіадних задач різних типів (логічних, комбінаторних, задач на рух, подільність, інваріанти), орієнтованих на вікові особливості учнів 4–6 класів, із докладними розв'язаннями та методичними коментарями. Показано, що запропоновані задачі допускають кілька підходів до розв'язання та сприяють розвитку математичного мислення, кмітливості й творчості школярів. Підкреслено роль математичних олімпіад у популяризації математики, формуванні позитивного ставлення до неї та створенні підґрунтя для подальших навчальних і змагальних успіхів учнів.*

Ключові слова: *математичні олімпіади; молодші школярі; олімпіадні задачі; математична обдарованість; мотивація до навчання; популяризація математики.*

1. Вступ

Щорічно восени в місті Луцьку з ініціативи колективу факультету інформаційних технологій і математики Волинського національного університету імені Лесі Українки проводиться міська олімпіада з математики для учнів 4–6 класів. У змаганні на добровільних засадах беруть участь у середньому 90–95 школярів із закладів загальної середньої освіти міста Луцька та Луцької міської територіальної громади. Основною метою олімпіади є виявлення серед молодших школярів найбільш підготовлених, здібних і вмотивованих до вивчення математики учнів, а також створення умов для їх подальшої участі в математичних змаганнях різного рівня.

В університеті у встановленому порядку розроблено та затверджено «Положення про Луцьку міську олімпіаду з математики для учнів 4–6 класів», яке регламентує організаційні засади проведення заходу. До складу журі олімпіади входять викладачі Волинського національного університету імені Лесі Українки, які мають значний досвід роботи у журі фінальних етапів Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики, а також кращі студенти факультету, що здобувають професійні компетентності вчителя за освітніми програмами спеціальностей Е7 Математика та А4.04 Середня освіта (Математика).

Залучення учнів до математичних олімпіад з раннього віку сприяє своєчасному виявленню та підтримці математично обдарованих дітей, а також забезпечує

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

можливість цілеспрямованої підготовки до майбутніх інтелектуальних змагань. Важливим складником олімпіадного руху є також комунікація членів журі з учителями та батьками учасників, що дозволяє узгоджувати підходи до розвитку математичних здібностей школярів. Показовою є тенденція зростання участі в організації та супроводі олімпіади випускників факультету попередніх років. Доброзичлива, водночас вимоглива атмосфера змагання сприяє розкриттю творчого потенціалу учнів і формуванню спільноти однолітків, об'єднаних інтересом до математики.

В останні роки олімпіада для учнів 4–6 класів проводиться синхронно зі столичною математичною олімпіадою «Математична вишиванка», що відбувається під егідою Київського національного університету імені Тараса Шевченка та має тривалу історію й усталені традиції. Частина завдань, запропонованих учасникам, є спільною і розроблена київським авторським колективом із значним досвідом олімпіадної діяльності (Анікушин та ін., 2024), (Анікушин та ін., 2025), водночас журі пропонує і власні авторські задачі для учнів Волинського регіону. У статті подано добірку таких завдань із розв'язаннями. Зазначимо, що більшість із них допускає кілька способів розв'язання, зокрема із застосуванням методів теорії чисел, комбінаторики та інших сучасних розділів математики.

2. Задачі олімпіади

Задача 1. (Задача про листоношу). *Із пунктів A та B назустріч один одному одночасно вийшли листоноша та пішохід. Як тільки вони зустрілися, листоноша передав листа пішоходу, вони розвернулися й з тими самими швидкостями пішли у зворотному напрямку до пунктів A та B відповідно. При цьому, коли одному з них залишилося пройти $\frac{4}{15}$ відстані між A і B, другому залишилося пройти $\frac{1}{3}$ від уже пройденого ним шляху. Знайдіть відношення швидкостей пішохода та листоноші*.

Розв'язання. Позначимо через S відстань між пунктами A і B, а через C – точку зустрічі листоноші та пішохода. У той момент, коли одному з учасників залишилося пройти $\frac{4}{15}$ відстані між A і B, а другому залишилося пройти $\frac{1}{3}$ від уже пройденого ним шляху, кожен із них пройшов рівно половину відстані від точки зустрічі C до початкового пункту, у який він повертається (до A чи до B відповідно). Тоді перший учасник пройшов до точки зустрічі C відстань

$$2 \cdot \frac{4}{15} S = \frac{8}{15} S,$$

а другий – відстань

$$S - \frac{8}{15} S = \frac{7}{15} S.$$

Оскільки вони це зробили за один і той же проміжок часу, їх швидкості відносяться як відстані від пунктів A і B до точки зустрічі C, а саме як 8 до 7. Хто йшов швидше, пішохід чи листоноша, з умови задачі не видно.

Відповідь: 7 до 8 або 8 до 7.

Задача 2. (Задача про намисто). *Намисто складається з* 91 *намистини жовтого кольору. Є фарби синього та жовтого кольору. За один крок можна обрати будь-які* 3 *намистини, що розташовані підряд, і перефарбувати їх, змінивши колір кожної. Чи можна за декілька кроків отримати повністю синє намисто? Яким чином слід виконувати фарбування?*

Розв'язання. Занумеруємо послідовно намистини числами $1, 2, 3, \dots, 91$. На першому кроці перефарбуємо у синій колір намистини з номерами $1, 2, 3$. На другому – перефарбуємо намистини з номерами $2, 3, 4$. На третьому кроці – з номерами $3, 4, 5$. І так далі. На дев'яностому кроці перефарбовуємо намистини з номерами $90, 91, 1$. Після цього на останньому (91-ому) кроці перефарбовуємо намистини з номерами $91, 1, 2$. Кожна з намистин при цьому буде тричі змінювати колір, а тому в результаті стане синьою.

Відповідь. Так, можна.

Задача 3. (Задача про шоколадку). *У Петрика є шоколадка, що складається з прямокутних частинок, і має розмір* 6×7*. Зустрічаючи друга, Петрик відламує для нього шматочок шоколадки по горизонталі або по вертикалі. Яку найбільшу кількість друзів він зможе пригостити, якщо останній шматочок залишить собі?*

Розв'язання. Якщо плитка має розмір $m \times n$, то на цьому кроці Петрик може відламати або прямокутник $m \times 1$ з m частинок, або прямокутник $1 \times n$ з n частинок. Розмір плитки після такого кроку стане або $(m-1) \times n$, або $m \times (n-1)$. Кожен крок зменшує суму вимірів (півпериметр) прямокутної плитки $m + n$ на 1. Початковий розмір плитки шоколаду 6×7, сума вимірів (півпериметр) для нього дорівнює $6 + 7 = 13$. Найменший розмір останнього неподільного шматочка, який залишається Петрику, це, очевидно, 1×1. Для нього сума вимірів дорівнює 2. Тому кількість кроків $13 - 2 = 11$ – найбільша з можливих. Саме таку максимальну кількість друзів (11 друзів) зможе пригостити Петрик. Наведемо одну з можливих схем послідовного відламування:

$$6 \times 7 \ \to \ 6 \times 6 \ \to \ 6 \times 5 \ \to 5 \times 5 \ \to 5 \times 4 \ \to 4 \times 4 \ \to 3 \times 4 \ \to$$

$$\to 3 \times 3 \ \to \ 2 \times 3 \ \to \ 2 \times 2 \ \to 1 \times 2 \ \to 1 \times 1.$$

Відповідь. 11 друзів.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 4. (Задача про горщик меду). *Вінні-Пух та П'ятачок під час сніданку почали одночасно їсти мед з одного горщика. Якби Вінні-Пух їв мед зі швидкістю П'ятачка, то цей спільний сніданок тривав би на* 4 *хвилини довше. Якби П'ятачок їв мед зі швидкістю Вінні-Пуха, то цей сніданок скоротився б на* 1 *хвилину. Скільки хвилин потрібно друзям, щоб разом з'їсти весь мед із горщика?*

Розв'язання. Позначимо через 1 кількість меду в горщику; через x – швидкість поїдання меду Вінні-Пухом (виражену у горщиках за хвилину); через y – швидкість поїдання меду П'ятачком, виражену у тих же одиницях. Тоді маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{x+y} + 4, \\ \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{x+y} - 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що число $t = \frac{1}{x+y}$ і є шуканим часом, витраченим друзями на ласування медом за сніданком. Перемножимо рівняння системи:

$$\frac{1}{4xy} = (t+4)(t-1). \tag{1}$$

Додамо рівняння системи:

$$\frac{1}{2y} + \frac{1}{2x} = 2t + 3.$$

Перетворимо останнє рівняння:

$$\frac{x+y}{2xy} = 2t + 3;$$

$$\frac{1}{2xy} = t \cdot (2t+3). \tag{2}$$

Тепер із (1) та (2) випливає, що

$$2 \cdot (t+4)(t-1) = t \cdot (2t+3).$$

Якщо розкрити у ньому дужки

$$2t^2 + 6t - 8 = 2t^2 + 3t;$$

і звести подібні доданки, то отримаємо лінійне рівняння:

$$3t = 8.$$

Отже, шуканий час спільного медового сніданку становить $t = \frac{1}{x+y} = \frac{8}{3}$ хвилини або ж, що те саме, 2 хвилини 40 секунд.

Можна із початкової системи також знайти швидкості x та y. Вінні-Пух з'їдає меду, що складає $\frac{3}{10}$ вмісту горщика, за хвилину; а П'ятачок – $\frac{3}{40}$ вмісту горщика за хвилину.

Відповідь. $\frac{8}{3}$ хвилини (або 2 хвилини 40 секунд).

Задача 5. (Задача про турнір). *На турнірі з математики кожен хлопчик-учасник потоваришував із шістьма дівчатками, а кожна дівчинка-учасниця потоваришувала з сімома хлопчиками. Скільки школярів взяли участь у турнірі, якщо відомо, що загальна кількість учасників не перевищувала 60 осіб, а дівчаток серед них було не менше 20? Відповідь обґрунтуйте.*

Розв'язання. Підрахуємо *кількість дружб*, що утворилися на турнірі, таких, у яких дівчинка товаришує з хлопчиком. Зробимо це двома способами. З одного боку, кількість таких дружб у 7 разів більша за кількість дівчаток, а тому ділиться на 7 без остачі. З іншого боку, ця кількість дружб у 6 разів більша за кількість хлопчиків, а тому ділиться на 6 без остачі. Тому кількість дівчаток ділиться на 6, а кількість хлопчиків ділиться на 7. Якщо дівчаток було $6 \cdot t$, то кількість дружб дорівнює $7 \cdot (6 \cdot t) = 42 \cdot t$. Тоді хлопчиків на турнірі було $7 \cdot t$. Всього учасників турніру було $6 \cdot t + 7 \cdot t = 13 \cdot t$. У цих міркуваннях t позначає деяке натуральне число (поки що невідоме). Як бачимо, загальна кількість учасників турніру ділиться націло на 13.

Зауважимо також, що хлопчиків на турнірі було більше, ніж дівчаток. Тому загальна кількість учасників більша, ніж $20 + 20 = 40$.

Усі натуральні числа, що не перевищують 60 і діляться без остачі на 13, записано нижче:

$$13, \quad 26, \quad 39, \quad 52.$$

Лише останнє число 52 більше за 40. Тому загальна кількість учасників турніру – 52 особи. При цьому $t = 52 : 13 = 4$. Тоді дівчаток на турнірі було $6 \cdot t = 6 \cdot 4 = 24$, а хлопчиків було $7 \cdot t = 7 \cdot 4 = 28$.

Наведемо ще один варіант розв'язання. Нехай x – кількість дівчаток на турнірі, а y – кількість хлопчиків на турнірі.

Підрахуємо кількість дружб, що утворилися на турнірі, таких, у яких дівчинка товаришує з хлопчиком. Зробимо це двома способами. Отримаємо $6y = 7x$. Отже, співвідношення кількості дівчаток до кількості хлопчиків складає 6 до 7. Тому кількість

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

дівчаток становить $\frac{6}{6+7}=\frac{6}{13}$ від загальної кількості учасників, а кількість хлопчиків відповідно $\frac{7}{13}$ від загальної кількості учасників, і ця загальна кількість учасників ділиться націло на 13. Усі натуральні числа, що не перевищують 60 і діляться без остачі на 13, записано нижче:

$$13, \quad 26, \quad 39, \quad 52.$$

Враховуючи, що дівчаток не менше 20, загальна кількість учасників не менше, ніж $20\cdot\frac{13}{6}=\frac{130}{3}=43\frac{1}{3}$. Тому загалом було 52 учасника, з них дівчаток $\frac{6}{13}\cdot 52=24$, а хлопчиків $\frac{7}{13}\cdot 52=28$.

Відповідь. У турнірі змагалися 52 учасники, серед них 24 дівчинки та 28 хлопчиків.

Задача 6. (Задача про кільцеву дорогу). *Із населеного пункту A, розташованого на кільцевій дорозі, одночасно в одному напрямку вийшов пішохід та виїхав велосипедист. Швидкість велосипедиста у 5 разів більша за швидкість пішохода; рухаються вони зі сталими швидкостями. Пішохід пройшов повне коло по кільцевій дорозі до пункту A і зупинився. Одночасно з ним зупинився і велосипедист. Скільки разів під час подорожі пішохода обігнав велосипедист? Одночасний старт та одночасний фініш пішохода та велосипедиста обгоном не вважаються. Відповідь обґрунтуйте.*

Розв'язання. З'ясуємо, яку частину кільцевої дороги подолає пішохід *до першого* обгону велосипедистом. Нехай S позначає довжину кільцевої дороги, а S_1 – довжину шляху, який пройде пішохід до першого обгону велосипедистом. Тоді велосипедист до першого обгону проїде одне повне коло і частину другого, тобто шлях довжиною $S+S_1$. Оскільки швидкість велосипедиста у 5 разів більша за швидкість пішохода, отримуємо рівність:

$$5S_1=S+S_1.$$

Звідси

$$S_1=\frac{S}{4}.$$

Розглянемо 4 точки на кільцевій дорозі, які розділяють її на 4 ділянки однакової довжини, причому одну із точок виберемо – це буде пункт A. Позначимо ці точки A, B, C та D в порядку слідування мандрівників. Зрозуміло, що на подолання ділянок AB, BC, CD та DA пішохід витрачає одну і ту саму кількість часу. Позначимо її t.

Оскільки швидкість велосипедиста в 5 разів більша за швидкість пішохода, за час t він подолає в 5 разів більший шлях, ніж пішохід. Пішохід пройде за перший відтинок

часу t ділянку AB, що складає $\frac{1}{4}$ довжини кільцевої дороги, а велосипедист за цей же час проїде $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ довжини кільцевої дороги, тобто одне повне коло і ще його чверть. Отже, за перший відтинок часу t пішохід та велосипедист одночасно дістануться пункту B. Саме у ньому буде перший обгін пішохода велосипедистом. Міркуючи аналогічно, другий та третій обгін відбудуться в пунктах C та D відповідно. Насамкінець виїхавши одночасно з D за час t пішохід дійде до фінішу в пункті A і замкне свій шлях. Велосипедист за цей же час t накрутить $\frac{5}{4}$ довжини кільцевої дороги і також опиниться в пункті A. Цей одночасний фініш в пункті A обгоном за умовою задачі не вважається. Тому обгонів буде 3.

Зауважимо, що поки пішохід пройде одне коло, велосипедист проїде 5 кіл. Тому всього за подорож буде 5 моментів часу, коли пішохід та велосипедист знаходяться в одному пункті (зрівнюються, перебувають поруч) на кільцевій дорозі. Проте перший та п'ятий момент часу відповідають їх одночасному старту з пункту A та одночасному фінішу в цьому ж пункті A.

Відповідь. Велосипедист тричі обігнав пішохода у трьох точках кільцевої дороги, які разом із пунктом A розділяють дорогу на 4 рівні за довжиною частини.

Задача 7. (Задача про числа на дошці). *На дошці записані числа* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. *За один крок можна витерти будь-які три числа, що записані на дошці у цей момент, і замість вибраних трьох чисел написати на дошці одне число – їх суму. Чи може трапитися, що після кількох таких кроків усі числа на дошці будуть рівними між собою? За яку найменшу кількість кроків можна отримати рівні числа на дошці?*

Розв'язання. Зауважимо, що сума чисел, записаних на дошці, не змінюється, оскільки ми на кожному кроці замість трьох вибраних (і витертих) доданків записуємо їх суму. Сума чисел, записаних на дошці, спочатку дорівнює

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66.$$

Крім того, кількість чисел, записаних на дошці, зменшується після кожного кроку на 2. Спочатку було записано 11 чисел. Тому після першого кроку їх стане 9, після другого кроку – 7, після третього кроку – 5, після четвертого кроку – 3 числа, а після п'ятого кроку залишиться лише одне число, а саме 66.

Далі можна міркувати різними способами.

1 спосіб міркування. *Я*кщо кроків менше, ніж 4, то ми не можемо витерти більше, ніж $9 = 3 \cdot 3$ з 11 початкових чисел (щонайбільше буде 3 кроки, на кожному витремо по 3 початкові числа). Отже, після довільних трьох кроків залишиться принаймні два ($2 = 11 - 9$) початкових числа, а серед початкових чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ рівних немає (вони попарно різні). Тому кроків повинно бути хоча б 4. Доведемо, що

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

за 4 кроки можна отримати 3 рівні числа на дошці. Можна здійснити, наприклад, такі кроки:

1 крок: витираємо числа 11, 5 та 6; замість них записуємо їх суму 22.

Отримуємо дев'ять чисел на дошці: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 22.

2 крок: витираємо числа 10, 4 та 8; замість них записуємо їх суму 22.

Отримуємо сім чисел на дошці: 1, 2, 3, 7, 9, 22, 22.

3 крок: витираємо числа 1, 3 та 7; записуємо їх суму 11.

Отримуємо п'ять чисел на дошці: 2, 9, 22, 22, 11.

4 крок: витираємо числа 11, 9 та 2 і записуємо їх суму 22.

Отримуємо три рівні числа на дошці: 22, 22, 22.

Зауважимо, що можна було б здійснити інші чотири кроки, щоб після них отримати на дошці три числа 22.

2 спосіб міркування. Сума записаних чисел 66 не ділиться націло ні на 9, ні на 7, ні на 5. Тому досягнути мети за один, два та три кроки неможливо. З іншого боку, сума 66 ділиться націло на 3. Спробуємо довести, що після 4 кроків можна отримати на дошці три числа: 22, 22 та 22. Можна здійснити, наприклад, такі кроки:

1 крок: витираємо числа 11, 4 та 7; замість них записуємо їх суму 22.

Отримуємо дев'ять чисел на дошці: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 22.

2 крок: витираємо числа 10, 3 та 9; замість них записуємо їх суму 22.

Отримуємо сім чисел на дошці: 1, 2, 5, 6, 8, 22, 22.

3 крок: витираємо числа 1, 2 та 8; записуємо їх суму 11.

Отримуємо п'ять чисел на дошці: 5, 6, 11, 22, 22.

4 крок: витираємо числа 11, 5 та 6 і записуємо їх суму 22.

Отримуємо три рівні числа на дошці: 22, 22, 22.

Зауважимо, що можна було б здійснити інші чотири кроки, щоб після них отримати на дошці три числа 22.

Відповідь. Можна отримати на дошці всі рівні числа. 4 – найменша кількість кроків для досягнення такої мети.

Задача 8. (Задача про горіхи). *Спочатку Оленка розкладала горіхи у купки по* 4*, при цьому у неї лишилося* 3 *горіхи. Потім вона розкладала їх у купки по* 5*, і в неї лишилося* 4 *горіхи. За третім разом Оленка розкладала горіхи у купки по* 6 *штук, і в неї лишилося* 5 *горіхів. Насамкінець Оленці вдалося розкласти усі ці горіхи на купки по* 7*. Скільки було горіхів у Оленки, якщо відомо, що ця кількість не перевищує* 200 *штук? Відповідь обґрунтуйте.*

Розв'язання. Якби до тих горіхів, які були у Оленки, докласти ще 1 горіх, то ця нова кількість ділилась би без остачі на 4, на 5 та на 6. Отже, це число ділилося б націло на НСК $(4, 5, 6) = 60$. Натуральних чисел, які діляться на 60 і не перевищують 200 всього три: 60, 120 та 180.

Віднімемо від чисел 60, 120 та 180 по одиниці, щоб отримати кількість без доданого горіха. Дістанемо числа 59, 119 та 179. З них лише одне ділиться на 7 без остачі, а саме число 119.

Відповідь. У Оленки було 119 горіхів.

Задача 9. (Задача про підготовку до олімпіади). *Миколка, готуючись до олімпіади з математики, за перший тиждень розв'язав половину задач зі збірника і ще одну задачу з цієї ж книжки. За другий тиждень він розв'язав третину задач зі збірника і ще одну задачу з цієї книжки. За третій тиждень хлопчик розв'язав одну дванадцяту частину задач і ще одну задачу зі збірника. Скільки задач було у збірнику, якщо Миколка за три тижні розв'язав усі задачі? Відповідь обґрунтуйте.*

Розв'язання. Додамо дроби

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{6+4+1}{12}=\frac{11}{12}.$$

Отже, три додаткові задачі, які по одній в тиждень розв'язував Миколка, складають решту, а саме $1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$ частину задач збірника. Якщо 3 задачі складають $\frac{1}{12}$ загальної кількості задач, то всього у збірнику було $3\cdot 12=36$ задач.

Відповідь. У збірнику було 36 задач.

3. Висновки

Математичні олімпіади для учнів 4–6 класів є важливим інструментом популяризації математичних знань та ефективним засобом підвищення пізнавального інтересу й навчальної мотивації молодших школярів. Їх проведення створює сприятливі умови для раннього виявлення математично обдарованих дітей, підтримки їх інтелектуального розвитку та формування стійкого інтересу до подальшого поглибленого вивчення математики.

Участь у математичних олімпіадах сприяє формуванню в учнів цілісного уявлення про математику як про науку, що поєднує практичну значущість із внутрішньою логікою, строгістю та естетичною довершеністю математичних ідей. Розв'язування нестандартних задач розвиває вміння логічно мислити, аналізувати умови, знаходити різні підходи до розв'язання проблем і аргументовано обґрунтовувати отримані результати, що є важливими складниками математичної культури школярів.

Крім того, олімпіадна діяльність формує в учнів такі особистісні якості, як наполегливість, цілеспрямованість, відповідальність за власний результат та готовність до інтелектуальних викликів. Доброзичлива, водночас вимоглива атмосфера змагань сприяє позитивному емоційному сприйняттю навчальної діяльності та створює підґрунтя для подальших успіхів учнів у математичних конкурсах

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

і олімпіадах наступних рівнів. Таким чином, математичні олімпіади для молодших школярів відіграють важливу роль у формуванні інтелектуального потенціалу учнів і забезпечують безперервність та наступність олімпіадного руху в системі математичної освіти.

Список використаних джерел

Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2022 / 23 навчальний рік: навч.-метод. посіб. / А. Анікушин, І. Жук, О. Клурман та ін. ; за ред. Б.В. Рубльова. Харків: Гімназія, 2024. 368 с.

Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2023 / 24 навчальний рік: навч.-метод. посіб. / А. Анікушин, І. Жук, З. Кодирова та ін. ; за ред. Б.В. Рубльова. Харків: Гімназія, 2025. 448 с.

Отримано редакцією журналу: 01.11.2025
Прорецензовано: 25.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Tetiana VOLOSHYNA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0002-2931-8018
e-mail: tetianavoloshyna@gmail.com
Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine

MATHEMATICAL OLYMPIADS FOR YOUNGER SCHOOLCHILDREN

Abstract. *The article presents the experience of organizing and conducting mathematical olympiads for students in grades 4–6 at Lesya Ukrainka Volyn National University. The relevance of engaging younger schoolchildren in the olympiad movement is substantiated as an effective means of early identification of mathematically gifted children, fostering sustained motivation to study mathematics, and preparing students for further intellectual competitions. A collection of olympiad problems of various types (logical, combinatorial, motion problems, divisibility, and invariants) is presented, tailored to the age characteristics of students in grades 4–6, accompanied by detailed solutions and methodological comments. It is shown that the proposed problems admit multiple solution approaches and contribute to the development of mathematical thinking, ingenuity, and creativity among schoolchildren. The role of mathematical olympiads in popularizing mathematics, shaping a positive attitude toward the subject, and creating a foundation for students' further educational and competitive achievements is emphasized*

Keywords: *mathematical olympiads; younger schoolchildren; olympiad problems; mathematical giftedness; learning motivation; popularization of mathematics.*

УДК 378.4.091.27(477.411)КНУ:51]:004 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.6**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАВДАННЯ ДИСТАНЦІЙНОГО ТУРУ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Анотація. *Завдання дистанційного туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка для випускників закладів загальної середньої освіти та осіб, що мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету у 2026 році.*

Ключові слова: *математична олімпіада; задачі; абітурієнт 2026.*

1. Вступ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка щорічно проводить Всеукраїнську олімпіаду з математики. В олімпіаді можуть брати участь особи, які є учнями випускних класів закладів загальної середньої освіти або мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету.

Традиційно олімпіада проходить у два тури: перший – дистанційний, який проходитиме з 15 січня 2026 року по 15 лютого 2026 року, та другий – очний (фінальний), який планується провести на початку квітня 2026 року. Детальну інформацію читачі можуть знайти на офіційному сайті Київського національного університету імені Тараса Шевченка https://knu.ua.

Завдання насамперед адресовано учням випускних класів закладів загальної середньої освіти та особам, які мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту у 2025-2026 навчальному році, що бажають вступити до Київського національного університету імені Тараса Шевченка та усім, хто цікавиться математикою.

2. Завдання дистанційного туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (для вступників 2026 року)

1. Довести, що сума дробів $\frac{a-b}{1+ab}$, $\frac{b-c}{1+bc}$, $\frac{c-a}{1+ac}$ дорівнює їх добутку.
2. Нехай n – дійсне ціле число. Довести, що $\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}$ є також цілим числом.
3. Визначити кількість додатних цілих значень x, що належать області визначення функції

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$y = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}} - \arccos\frac{x-1}{7}.$$

4. Розв'язати рівняння

$$\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

5. Знайти усі розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-8)^2} = 5, \\ 2xy - 3y = 24. \end{cases}$$

6. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо друге число збільшити на 8, то отримаємо арифметичну прогресію. Але, якщо після цього збільшити останнє число на 64, то прогресія знову стане геометричною. Визначити ці числа.
7. Знайти множину значень функції

$$y(x) = \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 - 4x + 1}.$$

8. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола поділяє висоту, проведену до основи, у відношенні $17:15$. Основа трикутника дорівнює 60 см. Знайти радіус вписаного кола в заданий трикутник.
9. Основи трапеції мають довжини 3 см і 15 см. Чи може радіус кола, що вписане в трапецію, мати довжину 4 см? Відповідь обґрунтувати.

3. Застереження

Для участі в дистанційному турі необхідно:

1) зареєструвати через сайт Київського національного університету імені Тараса Шевченка за посиланням https://vstup.knu.ua/ особистий кабінет (при вдалій реєстрації на пошту учасника олімпіади прийде лист-підтвердження);

2) завантажити в особистий кабінет не пізніше 15 лютого 2026 року розв'язання задач дистанційного туру (роботи потрібно оформити відповідно до вимог, розміщених в особистому кабінеті).

Отримано редакцією журналу: 25.12.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

TASK OF THE DISTANCE TOUR OF THE MATHEMATICS OLYMPIAD OF THE TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

Abstract. *Tasks of the remote round of the All-Ukrainian Mathematics Olympiad of Taras Shevchenko National University of Kyiv for graduates of secondary education institutions and persons who have the right to receive a document of complete secondary education and wish to enter university in 2026.*

Keywords: *Mathematical Olympiad; problems; entrant 2026.*

Обрії математики

УДК 510.3:517.5:512 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.7**

Тарас ЮСИПІВ, Д-р філос. (мат.)
ORCID ID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЗЕЛЕНСЬКА, Д-р філос. (мат.)
ORCID ID: 0000-0002-7784-1030
e-mail: kopchuk@gmail.com
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

ПАРАДОКСИ ТА НЕСКІНЧЕННІСТЬ У МАТЕМАТИЦІ: МІЖ СУПЕРЕЧНІСТЮ Й НОВИМИ МОДЕЛЯМИ РЕАЛЬНОСТІ

Анотація. *Стаття присвячена аналізу некласичних та парадоксальних аспектів сучасної математики, що виникають у ситуаціях, де звичні логічні та арифметичні принципи перестають бути застосовними. Розглянуто низку концептуальних проблем, пов'язаних із невизначеними формами, нескінченними степеневими структурами та порівняннями виразів зі степенями, а також феноменологію нескінченних множин на прикладі парадоксу Гільберта про «нескінченний готель». Особливу увагу приділено методам роботи з розбіжними рядами. У роботі розкриваються принципові відмінності між скінченними й нескінченними операціями: при переході до нескінченності інтуїтивні правила елементарної арифметики втрачають чинність, формуючи «точки розриву», у яких виникають нові математичні структури. На основі історичних прикладів – від Ейлера й Рімана до Рамануджана та Гільберта – показано, що поява таких суперечностей не руйнує математичну систему, а навпаки, стимулює формування нових методів, концепцій і моделей реальності. Стаття демонструє, що саме конфронтація з «неможливим» становить один із ключових механізмів розвитку математичної думки.*

Ключові слова: *математичні парадокси; дзета-функція Рімана; аналітичне продовження; нескінченні операції; нескінченні суми; нескінченний готель Гільберта.*

1. Вступ

Математика, як і будь-яка інша аксіоматична теорія, функціонує лише за умови внутрішньої узгодженості її вихідних положень. Якщо з двох аксіом (базових припущень) можна логічно вивести несумісні твердження, то виникає суперечність, що свідчить про необхідність перегляду або уточнення відповідної аксіоматичної системи (Юсипів, 2024). З іншого боку, застосування операцій, для яких у межах традиційного формалізму неможливо встановити однозначний результат, породжує невизначеність і також ставить під сумнів дієвість базових правил.

Таким чином, математична теорія не допускає ні суперечностей, ні невизначеностей у фундаментальних операціях. Найпростіший і найвідоміший приклад – неможливість ділення на нуль, про що навчають ще в молодшій школі.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розглянемо це детальніше. Нехай потрібно визначити значення виразу $a \div 0$ для деякого дійсного числа a. Оскільки дію ділення можна перевірити за допомогою множення, маємо:

- $6 \div 2 = 3$, оскільки $6 = 2 \times 3$;
- $6 \div 3 = 2$, бо $6 = 3 \times 2$.

Аналогічно, твердження $a \div 0 = b$ еквівалентне рівності $a = 0 \times b$. Якщо $a \neq 0$, виникає очевидна суперечність, оскільки добуток $0 \times b$ завжди дорівнює нулю. Якщо ж $a = 0$, рівняння $0 = 0 \times b$ істинне для будь-якого значення b, що означає *невизначеність*: результат операції неможливо встановити однозначно.

Виникає питання: що відбувається у ще складніших ситуаціях, наприклад при спробі обчислити 0^0, підносити число до самого себе нескінченну кількість разів, чи здійснювати операції з нескінченними сумами? Ці, на перший погляд елементарні, запитання відкривають доступ до цілого спектра математичних феноменів і парадоксів, що будуть розглянуті нижче.

2. Від 0^0 до нескінченних степеневих веж

Серед функцій, що виглядають цілком «невинними», однією з найпарадоксальніших є $\boldsymbol{x^x}$.

У ній поєднано одразу кілька класичних прикладів невизначеності.

Як відомо, $a^0 = 1$ для всіх $a > 0$. З іншого боку, $0^b = 0$ для будь-якого $b > 0$. Постає запитання: яке значення можна було б вважати «природним» для виразу 0^0?

Для відповіді на це запитання розглянемо функцію

$$f(x) = x^x, \qquad x > 0.$$

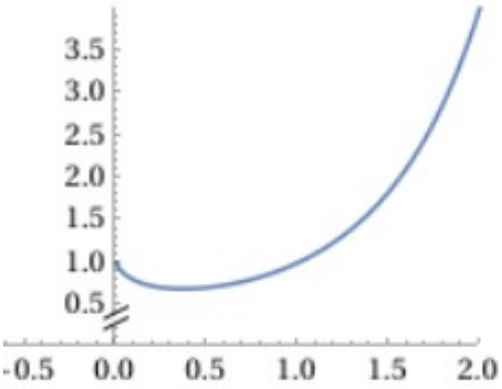


Рис. 1. Графік функції $f(x) = x^x, x > 0$, побудований у середовищі WolframAlpha

Нас цікавить значення границі цієї функції при наближенні x до нуля справа, тобто величина

$$\lim_{x \to 0^+} x^x.$$

З графіка, побудованого за допомогою системи комп'ютерної алгебри WolframAlpha, видно, що ця границя дорівнює 1 (див. рис.1).

Дамо формальне доведення цього факту. Перепишемо функцію у вигляді

$$f(x) = x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}.$$

Отже, для знаходження границі *достатньо*[1] обчислити

$$\lim_{x\to+0} x\ln(x).$$

Власне це – класична невизначеність типу $0\cdot(-\infty)$. Перетворимо її до дробу та застосуємо правило Лопіталя[2]:

$$x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{1/x}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to0+} x\ln(x) = \lim_{x\to0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to0+}(-x) = 0.$$

Отже,

$$\lim_{x\to0+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Таким чином, значення 1 є «природним» регуляризованим значенням для виразу 0^0 у відповідному аналітичному контексті.

З графіка видно, що функція x^x має єдиний (*глобальний*) мінімум. Відомо, що у точках мінімуму та максимуму похідна дорівнює нулю. Для знаходження похідної скористаємося рівністю, яка випливає з властивостей логарифма:

$$\ln(x^x) = x\ln(x).$$

Знайдемо похідні обох частин рівності: лівої частини – як похідну складеної функції та правої – як похідну добутку:

$$\frac{(x^x)'}{x^x} = \ln(x) + 1.$$

Відтак,

$$(x^x)' = x^x(\ln(x) + 1).$$

[1] Йдеться про те, що $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} e^{x\ln(x)} = e^{\lim_{x\to0+} x\ln(x)}$.

[2] Правило Лопіталя, опубліковане в 1696 році, стверджує, що за деяких умов (які в даному прикладі мають місце) границя частки двох функцій дорівнює границі частки їхніх похідних.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Прирівнюючи похідну до нуля та враховуючи, що $x^x \neq 0$, отримуємо

$$\ln(x) + 1 = 0 \Rightarrow x = e^{-1}.$$

Значення функції у точці мінімуму:

$$(e^{-1})^{e^{-1}} = e^{-1/e} \approx 0.6922.$$

Розглянемо тепер загальніший випадок, коли основа та показник степеня відрізняються. Інтуїтивно може здаватися, що твердження

$$a^b > b^a,$$

для $a > b > 0$ є логічним, оскільки «значення виразу сильніше залежить від основи, ніж від показника». Проте це припущення виявляється хибним.

Для всіх $a, b > 0$, де $a \neq b$, запишемо нерівність

$$a^b > b^a.$$

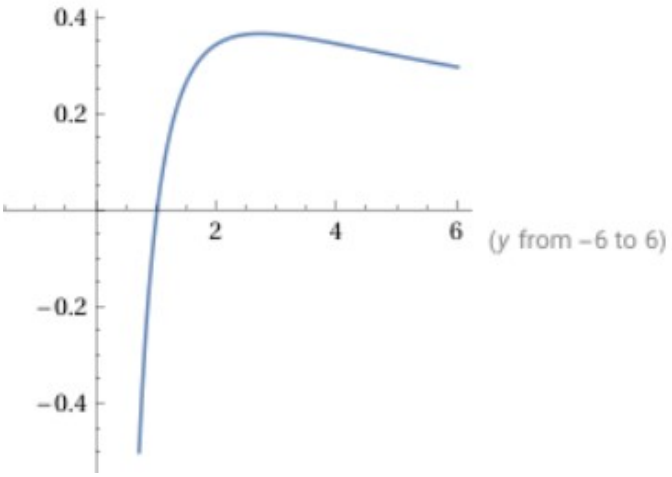


Рис. 2. Графік функції $f/g(y) = \ln(y)/y$, побудований у середовищі WolframAlpha

Прологарифмуємо її (знак нерівності не змінюється, оскільки логарифм – монотонно зростаюча функція):

$$\ln(a^b) > \ln(b^a),$$

$$b\ln(a) > a\ln(b),$$

$$\frac{\ln(a)}{a} > \frac{\ln(b)}{b}.$$

Отже, задача зводиться до порівняння значень функції

$$g(y) = \frac{\ln(y)}{y}.$$

Графік цієї функції для $y \in [-6,6]$ наведено на рисунку 2.

Як видно з графіка (рис. 2), функція $g(y)$ спочатку монотонно зростає від $-\infty$ до свого єдиного максимального значення, після чого спадає до 0 (оскільки $\lim_{y\to+\infty} g(y) = 0$).

Знайдемо максимальне значення, прирівнюючи до нуля похідну $g'(y)$:

$$g'(y) = \frac{1-\ln(y)}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = e, \qquad g(e) = \frac{1}{e}.$$

Отже, для всіх $a, b > 0$, $a \neq b$, маємо:

- якщо $a = e$, то $a^b > b^a$ (аналогічно, якщо $b = e$, то $a^b < b^a$);
- якщо $0 < a, b < e$, то з двох виразів a^bта b^a більшим є той, чия основа більша;
- якщо $a, b > e$, то з двох виразів a^b та b^a більшим є той, чия основа менша;
- якщо $a < e < b$ або $b < e < a$, то знак нерівності визначається «віддаленістю» чисел a і b від числа e. Ця залежність описується функцією Ламберта[3].

Графік також пояснює рівність

$$2^4 = 4^2,$$

оскільки числа 2 і 4 виявляються однаково «близькими» до числа e у сенсі порівняння значень функції $g(y)$ (рис. 3).

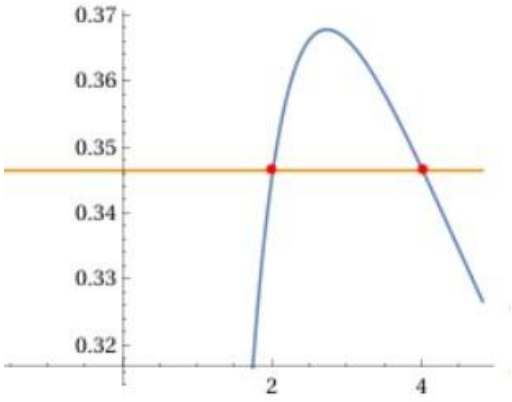


Рис. 3. Графічний розв'язок рівняння $\ln(y)/y = 2$, побудований у середовищі WolframAlpha

[3] Розв'язки рівняння $\ln(y)/y = c$ можна отримати з функції Ламберта: $y_1 = -\frac{1}{c}W_0(-c)$, $y_2 = -\frac{1}{c}W_1(-c)$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розглянемо подальше узагальнення – піднесення x до степеня x нескінченну кількість разів:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}.$$

Постає запитання: *для яких значень змінної x такий вираз має зміст?*

Позначимо цей вираз через $y(x)$. Тоді повинна виконуватися функціональна рівність:

$$y(x) = x^{y(x)}, \qquad x > 0, \qquad y(x) > 0.$$

Позначимо $y(x)$ як y та прологарифмуємо останню рівність. Отримуємо:

$$\ln(x) = \frac{\ln(y)}{y}.$$

Знову маємо справу з функцією $g(y) = \ln(y)/y$, з огляду на поведінку якої можемо відзначити наступне:

1)Коли $-\infty < \ln(x) \leq 0$, тобто $0 < x \leq 1$ – тут значення $y \in (0;\ 1]$ визначається однозначно; також, коли $\ln(x) = \frac{1}{e}$, $x = e^{1/e} \approx 1{,}444667$, $y = e$ – однозначно;

2)Коли $0 < \ln(x) < \frac{1}{e}$, тобто $1 < x < e^{1/e}$ – функція $\ln(y)/y$ набуває однакових значень вже при двох можливих значеннях змінної $y \in (1, +\infty)$.

Отже, вираз $x^{x^{x^{\cdots}}}$ має одне значення для всіх $0 < x \leq 1$ та $x = e^{1/e}$ і два – для всіх $1 < x < e^{1/e}$, а при $x > e^{1/e}$ цей вираз не має сенсу.

Обчисливши декілька можливих значень, отримуємо:

$$0{,}5^{0{,}5^{0{,}5^{0{,}5\ldots}}} \approx 0{,}641186, \qquad \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\ldots}}} \approx 2 \text{ або } 4,$$

а от значення $\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}^{\sqrt{3}\ldots}}}$ – не визначено.

Як бачимо, перехід до «нескінченних» операцій руйнує традиційні підходи.

3. Парадокс Гільберта про Grand Hotel

Давид Гільберт (23.01.1862 – 14.02.1943) (рис. 4) посідає чільне місце серед провідних математиків світового рівня (Bell, 1937). На II Міжнародному конгресі математиків, що відбувся в Парижі у 1900 році, він представив програмний список із 23 фундаментальних проблем, який визначив траєкторію розвитку математичної науки на наступні десятиліття. Станом на сьогодні дев'ять із цих проблем мають загальновизнані розв'язання; ще дев'ять вважаються частково розв'язаними; дві сформульовані настільки неконкретно, що їх формалізація видається неможливою; три залишаються відкритими.

З метою продемонструвати нетривіальні властивості нескінченних множин, Гільберт у 1920-х роках запропонував відомий логічний парадокс, що згодом отримав назву «*готелю Гільберта*». Він показує, що до повністю заповненого готелю з нескінченною кількістю номерів можна поселити не лише додаткового гостя, але й нескінченну кількість нових гостей.

Розглянемо уявний готель (рис. 5) зі зліченною множиною кімнат, кожна з яких зайнята. Інтуїтивно може здатися, що заселення нових відвідувачів неможливе, як це має місце у випадку зі скінченною кількістю кімнат. Однак нескінченність відкриває несподівані можливості. Щоб розмістити одного нового гостя, достатньо переселити мешканця кімнати 1 до кімнати 2, мешканця кімнати 2 – до кімнати 3 і т.д., звільнивши тим самим кімнату 1. Повторення цього процесу дає змогу звільнити місця для будь-якої скінченної кількості нових гостей.

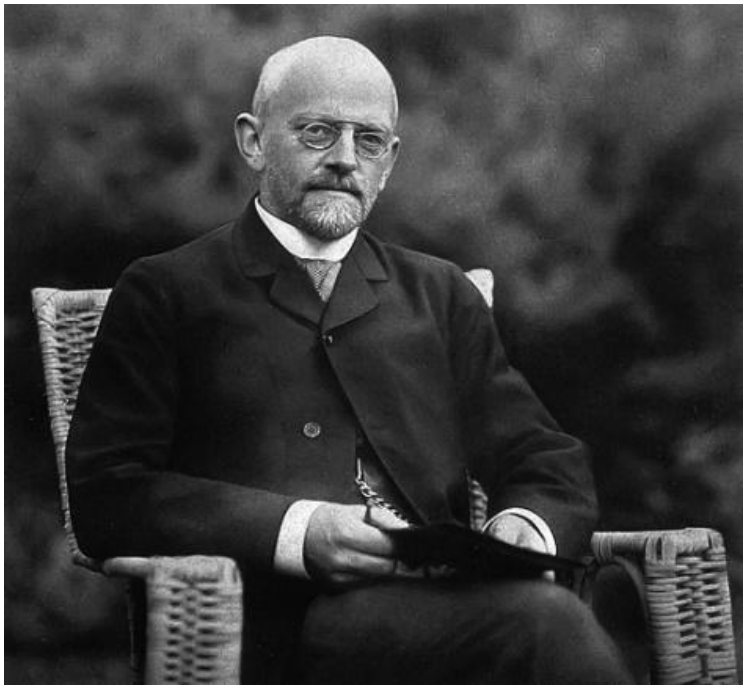


Рис. 4. Давид Гільберт

Більше того, у готелі можна розмістити й зліченну кількість додаткових гостей. Для цього кожного мешканця кімнати з номером n переселяють до кімнати з номером $2n$. У результаті всі непарні номери залишаються вільними для нових відвідувачів.

Парадоксальна природа нескінченності проявляється ще виразніше, коли йдеться про розміщення пасажирів зі зліченної кількості повних автобусів, у кожному з яких також міститься зліченна кількість людей. Після звільнення непарних кімнат можна застосувати нумерацію на основі простих чисел: пасажирів першого автобуса розселяють у кімнати з номерами 3^n, де $n = 1,2,3, \ldots$; пасажирів другого – у кімнати з номерами 5^m, де $m = 1,2,3, \ldots$, і так далі. Для автобуса з номером *i* використовують

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

номери вигляду p^k, де $p - (i+1)$-е просте число, а $k \in \mathbb{N}$. Такий підхід гарантує однозначне розміщення всіх пасажирів без конфліктів.

Концепція нескінченного готелю, запропонована Гільбертом, набула значного резонансу і стала популярною не лише в академічному середовищі, а й у художній літературі та кінематографі, де вона слугує образною ілюстрацією парадоксальних властивостей нескінченності.



Рис. 5. Готель Гільберта, візуалізований засобами Google Cemini

4. Розподіл простих чисел та проблема на мільйон доларів

Прості числа відіграють фундаментальну роль не лише в теорії чисел, а й у багатьох інших галузях математики. Одним із найдавніших і найвідоміших методів їх обчислення є алгоритм, запропонований давньогрецьким математиком Ератосфеном Киренським (див. рис. 6). Так зване *решето Ератосфена* дає змогу ефективно виписати всі прості числа, послідовно викреслюючи кратні вже знайдених простих чисел. Попри свою давність, цей алгоритм і сьогодні залишається одним із базових інструментів елементарної теорії чисел та початкових курсів алгоритмів.

Однак інтерес математиків до простих чисел з часом лише поглиблювався: від обчислювальних методів – до вивчення їхніх аналітичних властивостей. Важливий етап у цьому переході пов’язаний з роботами Леонарда Ойлера (15.04.1707 – 07(18).09.1783) (рис. 7 а)), який досліджував так звану дзета-функцію для дійсних значень s:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots .$$

Ойлер встановив (Euler, 1758), що ця функція може бути представлена у формі нескінченного добутку, який безпосередньо пов'язує її зі структурою простих чисел:

$$e(s) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5^s}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^s}} \cdots . \quad (1)$$

Установлене Ойлером представлення, відоме сьогодні як *добуток Ойлера*, є однією з центральних властивостей дзета-функції та підкреслює її фундаментальну роль у дослідженні розподілу простих чисел. Воно також стало ключовим кроком на шляху до формування аналітичної теорії чисел, що пізніше привела до робіт Йоганна Петера Густава Лежена Діріхле (13.02.1805 – 05.05.1859), Георга Фрідріха Бенграда Рімана (17.09.1826 – 20.07.1866) (рис. 7 б)) та інших дослідників.

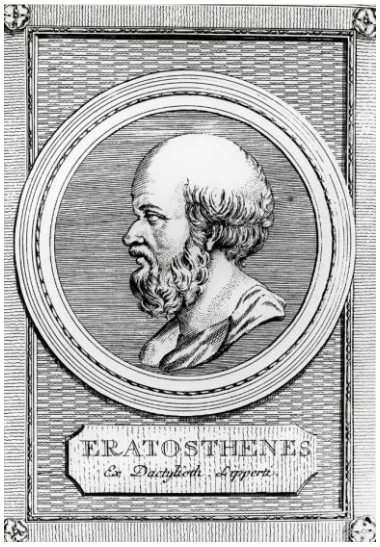


Рис. 6. Ератосфен Киренський (275-194 рр. до н.е.)

Розглянемо міркування, що приводять до добуткової формули Ойлера для дзета-функції. Якщо помножити вихідний ряд для дзета-функції на $\frac{1}{2^s}$, то отримаємо ряд, у якому в знаменниках містяться лише парні числа:

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \cdots .$$

Віднімемо цей вираз від початкового ряду. У результаті залишаються лише члени з непарними знаменниками:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\cdots .$$

Далі помножимо праву частину отриманого рівняння на $\frac{1}{3^s}$:

$$\frac{1}{3^s}\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{15^s}+\frac{1}{21^s}+\cdots .$$

Віднімемо цей ряд від попереднього:

$$\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\zeta(s)=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\frac{1}{17^s}+\frac{1}{19^s}+\frac{1}{23^s}+\cdots .$$



а)



б)

Рис. 7. Леонард Ойлер та Георг Фрідріх Бенград Ріман

Продовжуючи цю процедуру для наступних простих чисел $5,7,11,13,17,\ldots$, ми послідовно виключаємо всі доданки, окрім першого, що дорівнює 1. Таким чином, нескінченний добуток набуває вигляду

$$\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\cdots=1,$$

звідки отримуємо класичну формулу Ойлера:

$$\zeta(s)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{7^s}\right)\cdots}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\cdots.$$

Це подання встановлює глибинний зв'язок між дзета-функцією та простими числами і стало одним з ключових результатів ранньої аналітичної теорії чисел.

Леонард Ойлер також обчислив значення дзета-функції для парних додатних цілих аргументів. Зокрема, він розв'язав знамениту *базельську проблему*, показавши, що

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Дзета-функція відіграє центральну роль у сучасних дослідженнях і має фундаментальне значення не лише в теорії чисел, але й у математичній фізиці, теорії ймовірностей та прикладній статистиці. У відкритому доступі існують спеціалізовані ресурси, що надають можливість чисельно обчислювати нулі дзета-функції та досліджувати їх властивості (Zeroes of the zeta function, 2025).

У 1859 році Бернгард Ріман сформулював функціональне рівняння для дзета-функції, використовуючи гамма-функцію (Riemann, 1859):

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{\,s-1} e^{-t}\, dt,$$

що дозволило продовжити $\zeta(s)$ на всю комплексну площину. Отримане рівняння має вигляд

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{\,s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$

Із цього співвідношення випливає, що $\zeta(s) = 0$ для всіх парних від'ємних цілих s. Такі значення отримали назву *тривіальних нулів дзета-функції*. Крім того, було встановлено, що *всі можливі нетривіальні нулі функції* можуть знаходитися лише в так званій *критичній смузі* – комплексних числах із дійсною частиною в інтервалі від 0 до 1. Подальші дослідження показали, що дзета-функція набуває нульового значення у певних точках, дійсна частина яких дорівнює $\frac{1}{2}$.

Ріманівська гіпотеза стверджує, що всі нетривіальні нулі дзета-функції мають дійсну частину саме $\frac{1}{2}$. Це припущення було пізніше включено до списку проблем Гільберта під номером 8, а згодом – до переліку «Проблем тисячоліття» (англ. *Millennium Prize Problems*), які характеризують як «*важливі класичні задачі, розв'язання яких не знайдено впродовж багатьох років*». За розв'язання кожної з них Математичний інститут Клея у 2000 році встановив премію у розмірі 1 мільйона доларів США.

Вивчаючи прості числа, Леонард Ойлер встановив ще один цікавий факт. Він показав, що кількість простих чисел, не більших за n, позначається $\pi(n)$ та приблизно описується функцією $n/\ln(n)$. Питання про точність цієї апроксимації досліджував у своїх роботах 1848–1850 років відомий математик Пафнутій Чебишов (4(16).05.1821 –

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

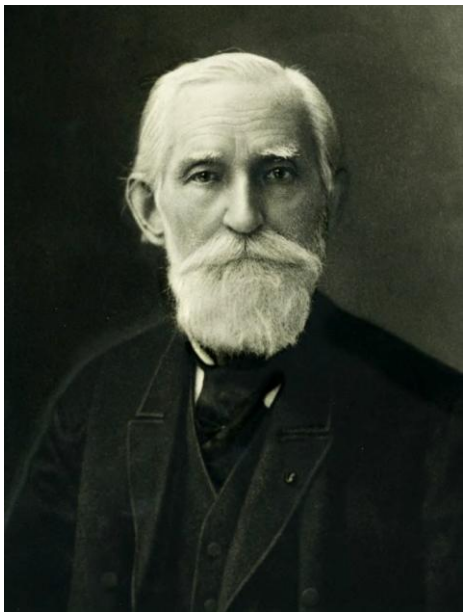
26.11.(08.12).1894) (див. рис. 8 а)) (Ball, 1937). Ним було доведено, що для всіх достатньо великих x значення відношення

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$$

лежить між двома сталими m та M, які задовольняють нерівності

$$0{,}92129 \le m \le M \le 1{,}10555.$$

Цікаво, що в цій оцінці з'являється обернена до логарифмічної функція $x/\ln(x)$, про яку вже йшлося раніше у зв'язку з представленням дзета-функції та розподілом простих чисел.



а)



б)

Рис. 8. Пафнутій Чебишов та Жак Соломон Адамар

У 1896 році, використовуючи властивості дзета-функції Рімана $\zeta(s)$ та показавши, що вона не має нулів на прямій $\Re(s) = 1$, Жаком Адамаром (08.12.1865 – 17.10.1963) (рис. 8 б)) доведено *теорему про розподіл простих чисел* (Zagier, 1997). Її ж незалежно довів Шарль Жан-Етьєн де ла Валле-Пуссен (14.07.1866 – 02.03.1962). Теорема *стверджує*, що функція $\pi(x)$, яка позначає кількість простих чисел, менших або рівних x, *зростає асимптотично* так само, як функція $x/\ln(x)$ (рис. 9).

Останнє відношення формально виражається так:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}, \qquad \text{коли} \quad x \to \infty.$$

Це означає, що відношення $\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}$ прямує до 1 зі зростанням x.

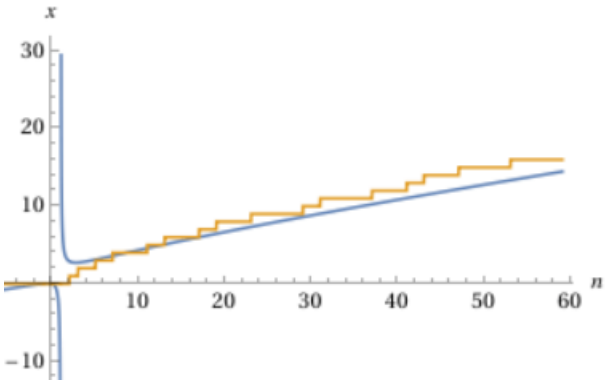


Рис. 9. Функції $\pi(n)$ та $n/\ln(n)$, побудовані у середовищі WolframAlpha

Власне теорема про розподіл простих чисел є наріжним каменем у розумінні того, як прості числа розподіляються серед натуральних чисел, підтверджуючи інтуїтивну гіпотезу Карла Фрідріха Гаусса.

5. Нескінченна сума натуральних чисел

У січні 1913 року відбулася одна з найбільш значущих подій у математичній історії XX століття: індійський математик-самоук Срініваса Аєнґар Рамануджан (22.12.1887 – 26.04.1920) (рис. 10 а)), який на той час працював клерком у Мадрасі, ініціював листування з видатним британським математиком Ґодфрі Гарольдом Харді (07.02.1877 – 01.12.1947), професором Кембриджського університету (рис. 10 б)).



а)



б)

Рис. 10. Срініваса Аєнґар Рамануджан та Ґодфрі Гарольд Харді

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Рамануджан надіслав Харді дев'ятисторінковий манускрипт, який містив близько 120 нетривіальних математичних теорем і формул без жодних супровідних доведень.

Лист починався скромно (Ramanujan's First Letter to G.H. Hardy, 1913): «Я ніхто, не маю університетської освіти, але відкрив багато нових істин».

Ця самохарактеристика підкреслювала статус Рамануджана як генія-самоука та його унікальний, інтуїтивний підхід до математики, який поєднував «початковий запас математичних фактів з величезною кількістю спостережень над конкретними числами».

Спочатку Харді скептично поставився до листа, проте після ретельного аналізу, проведеного спільно з Дж. Е. Літлвудом, він визнав, що формули були настільки глибокими та неординарними, що могли бути створені лише математиком «найвищого калібру». Це визнання стало кульмінацією, що привела до запрошення Рамануджана до Триніті-коледжу в Кембриджі, що знаменувало початок їхньої легендарної співпраці.

Серед іншого, Рамануджан у листі подає значення дзета-функції у від'ємних цілих точках, в стилі:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \tag{2}$$

Іншими словами, сума, яка за інтуїтивними уявленнями повинна бути нескінченною, дорівнює деякому дробовому числу, і до того ж – від'ємному. Дійсно, якщо згадати формальне визначення дзета-функції як

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots,$$

то при підстановці $s = -1$ виходить, що

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12}.$$

Але все не так просто… Справа в тому, що дзета-функція початково визначена лише для тих чисел, дійсна частина яких більша 1. Аналітичне продовження на всі числа, які лежать поза цією областю, не має того початкового сенсу і не може бути інтерпретоване настільки вільно.

Отже, сума $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ як була так і є нескінченною, а значення $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. І ці два факти не є суперечливими.

Найцікавіше, що значення дзета функції $\zeta(-1)$ використовується в кількох глибоких математичних і фізичних контекстах (хоча у «звичайній» математиці це не має сенсу):

по-перше, аналітичне продовження у точці $s = -1$ дзета-функції

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

дає значення саме $-\frac{1}{12}$;

по-друге, квантова теорія поля – обчислення сили Казимира між двома паралельними пластинами у вакуумі приводить до формальної суми натуральних чисел і результату $-\frac{1}{12}$, що добре узгоджується з результатами численних фізичних експериментів;

по третє, якщо поставити будь-яке інше значення для $\zeta(-1)$, крім $-\frac{1}{12}$ у бозонній теорії струн для розмірності простору-часу 26, то теорія стає неконзистентною, тобто з'являються серйозні фізичні та математичні суперечності, що руйнують саму можливість існування цієї теорії.

Хоч це й видається парадоксальним, але наступна сума (яку називають *гармонічним рядом*)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

є нескінченною навіть з точки зору дзета-функції, оскільки $\zeta(1) = +\infty$. Щоправда, зростання суми є дуже повільним: для того, щоб вона перевищила 100, необхідно близько 1043 доданків. Нескінченність цієї суми[4] можна довести, згрупувавши доданки:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = +\infty.$$

Леонард Ойлер довів, що *сума обернених величин простих чисел* також *розбігається до нескінченності* (як і гармонічний ряд)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots.$$

Він встановив нерівність

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \ldots \geq \ln\ln(n+1) - \ln\frac{\pi^2}{6}.$$

[4] Розглядаючи суму $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ та переходячи до границі при $x \to 1$, маємо $1 + 1 + 1 + \ldots = \frac{1}{0} = +\infty$, що не суперечить міркуванням.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Цей результат підтверджує, що *множина простих чисел нескінченна*, хоча щільність їхнього розподілу надзвичайно повільно зменшується, що відображає *подвійний логарифм* у нерівності.

6. Висновки

Проведене дослідження демонструє, що математика є не статичною системою аксіом і теорем, а динамічною дисципліною, розвиток якої часто стимулюється зіткненням із внутрішніми суперечностями та невизначеностями.

При переході до нескінченних операцій традиційні підходи, що застосовуються до скінченних операцій, перестають діяти: ми не можемо просто виконати скінченну операцію та перейти до границі. Ця обставина призводить до руйнування класичних інтуїтивних уявлень і відкриває шлях до виявлення нових, неочікуваних математичних структур та явищ, зокрема, до множинності розв’язків або їхньої повної відсутності в певних діапазонах.

Виявлені парадокси та ситуації невизначеності не повинні розглядатися як кінцеві обмеження, а скоріше як індикатори потенційного прориву. Неможливість традиційного тлумачення чи обчислення певних об'єктів часто свідчить про необхідність розробки нових теоретичних фреймворків.

Таким чином, математика являє собою багатогранний всесвіт, де суперечність і невизначеність функціонують як каталізатори, перетворюючи проблемні ситуації на інструменти для глибшого розуміння реальності та розширення меж наукового пізнання. Імовірність того, що черговий «неможливий» математичний об'єкт у майбутньому переверне наше розуміння дійсності, залишається високою, підтверджуючи її постійну еволюційну природу.

Список використаних джерел

Юсипів Т.В. (2024). Цеглини математичних досліджень: від античності до епохи штучного інтелекту. У світі математики, Том 1 №2 – С. 26-32. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.4

Bell E.T. (1937). Men of Mathematics. Simon & Schuster, Ink., New York. 608 p.

Euler, L. "Remarques sur un beau rapport entre les series des puissances tant directes que réciproques."Mémoires de l'academie des sciences de Berlin 17, 83-106, 1768. Reprinted in Opera Omnia, Series 1, Vol 15 pp. 70-90.

Google. Gemini [Електронний ресурс]. Режим доступу: [ai.google/gemini/]

Ramanujan’s First Letter to G.H. Hardy. (1913). – Режим доступу: Ramanujan’s First Letter to G.H. Hardy - by Jørgen Veisdal

Riemann B. (1859). On the number of primes below a given magnitude. – Режим доступу: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Ueber_die_Anzahl_der_Primzahlen_unter_einer_gegebenen.pdf

Zagier D. (1997). Newman's short proof of the prime number theorem. American Mathematical Monthly. 104 (8): 705—708. DOI: https://doi.org/10.1080/00029890.1997.11990704

Zeroes of zeta function [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.lmfdb.org/zeros/zeta. – Дата перегляду: 01.12.2025.

Отримано редакцією журналу: 04.11.2025
Прорецензовано: 10.12.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Taras YUSYPIV, Ph.D. in Mathematics
ORCID ID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna Zelenska, Ph.D. in Mathematics
ORCID ID: 0000-0002-7784-1030
e-mail: kopchuk@gmail.com
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky
Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

PARADOXES AND INFINITY IN MATHEMATICS: BETWEEN CONTRADICTION AND NEW MODELS OF REALITY

Abstract. *The article is devoted to the analysis of nonclassical and paradoxical aspects of modern mathematics that emerge in situations where conventional logical and arithmetic principles cease to be applicable. A range of conceptual issues is examined, including indeterminate forms, infinite power structures, comparisons of expressions involving exponentiation, and the phenomenology of infinite sets illustrated through Hilbert's "infinite hotel" paradox. Particular attention is given to methodological approaches for handling divergent series. The study highlights the fundamental differences between finite and infinite operations: upon transitioning to the infinite case, intuitive rules of elementary arithmetic lose their validity, creating "points of rupture" at which new mathematical structures arise. Drawing on historical examples – from Euler and Riemann to Ramanujan and Hilbert – the article demonstrates that the emergence of such contradictions does not undermine the mathematical system; rather, it stimulates the development of novel methods, concepts, and models of reality. The article argues that engagement with the "impossible" constitutes one of the key mechanisms driving the evolution of mathematical thought.*

Keywords: *mathematical paradoxes; Riemann zeta function; analytic continuation; infinite operations; divergent and infinite sums; Hilbert's infinite hotel.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 373.5.016:51 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.8**

Христина КІНДРАТІВ, студентка
ORCID: 0009-0006-0600-547X
e-mail: antonikkhristina@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У МАТЕМАТИЧНІЙ ОСВІТІ

Анотація. *Доведення нерівностей посідає важливе місце у шкільному курсі математики, оскільки сприяє розвитку логічного, аналітичного та критичного мислення учнів. Використання лише стандартних підходів до доведення нерівностей не завжди забезпечує глибоке розуміння математичних закономірностей і часто обмежує творчий потенціал учнів. Тому актуальним є впровадження нестандартних методів доведення, які сприяють формуванню дослідницьких умінь і розвитку математичної інтуїції. Метою статті є дослідження застосовності нестандартних методів доведення нерівностей і визначення можливостей їх використання в процесі навчання математики у закладах загальної середньої освіти.*

У роботі представлено метод допоміжних функцій, метод використання симетрії та інваріантів, техніку параметризації й метод монотонності для доведення нерівностей. Проаналізовано можливості їх застосування у навчальному процесі для підвищення пізнавальної активності учнів, розвитку логічного мислення та формування здатності до самостійного аналізу математичних тверджень. Наведені приклади демонструють ефективність кожного з методів у контексті формування компетентностей, необхідних для успішного опанування шкільного курсу математики та участі в математичних турнірах. Наведені методи доведення нерівностей мають значний дидактичний потенціал, забезпечують глибше розуміння сутності математичних фактів, сприяють розвитку дослідницької діяльності учнів та підвищують якість математичної підготовки. Їх інтеграція у навчальний процес сприятиме розвитку творчих і аналітичних здібностей учнів та розвитку математичної компетентності школярів.

Ключові слова: *нерівності; доведення; нестандартні методи; допоміжна функція; симетрія; параметризація; монотонність; методика навчання математики.*

1. Вступ

Сучасна математична освіта вимагає від учнів не лише засвоєння фактологічних знань, а й сформованості аналітичного, логічного та критичного мислення. Одним із важливих інструментів розвитку цих якостей є вміння доводити математичні твердження, зокрема нерівності. Тематика нерівностей традиційно посідає значне місце у шкільному курсі алгебри й аналізу, а також у системі підготовки до математичних олімпіад, конкурсів і зовнішнього незалежного оцінювання. Проте на практиці доведення нерівностей часто зводиться до використання обмеженого кола стандартних методів – таких як застосування похідних, розкриття дужок, піднесення до степеня чи використання відомих теорем типу Коші–Буняковського або Дженсена. Це призводить до формального підходу та втрати евристичного потенціалу навчання.

У педагогічній практиці дедалі більшого значення набуває пошук шляхів активізації пізнавальної діяльності учнів засобами проблемного, дослідницького та творчого

навчання. З цієї позиції ефективним засобом розвитку аналітичного мислення є впровадження нестандартних методів доведення нерівностей, які виходять за межі класичних алгоритмів і передбачають елементи дослідження, експерименту та пошуку нових підходів. Такі методи дозволяють не лише отримувати результат більш елегантним шляхом, а й глибше осмислювати структуру математичних об'єктів, виявляти закономірності, узагальнювати та моделювати ситуації.

Актуальність проблеми також зумовлена тим, що навчання доведенню нерівностей у старшій школі нерідко має репродуктивний характер і не забезпечує достатнього рівня самостійності учнів. Підвищення якості математичної підготовки потребує створення методичних умов, за яких учні зможуть свідомо обирати метод доведення, аргументувати свої дії та порівнювати різні підходи до розв'язування задач.

Таким чином, дослідження нестандартних методів доведення нерівностей має не лише теоретичне, але й прикладне педагогічне значення. Воно сприяє вдосконаленню методики навчання математики, розширенню дидактичного інструментарію вчителя, розвитку творчого потенціалу учнів та формуванню в них культури математичного мислення.

Метою роботи є аналіз основних нестандартних методів доведення нерівностей, визначення їх дидактичного потенціалу та шляхів ефективного використання у процесі навчання математики в закладах загальної середньої освіти.

Відтак виникає необхідність звернутися до нестандартних методів, які не лише дозволяють швидше отримати результат, але й поглиблюють розуміння структури нерівностей (Мельников, 2013, с. 15–18). У контексті математичних олімпіад та наукових змагань володіння такими методами є важливою складовою успішного виступу (Manfrino, Gomes & Delgado, 2000).

2. Результати

2.1. Метод допоміжних функцій

Цей метод є одним із найбільш потужних нестандартних підходів до доведення нерівностей. Він дозволяє перетворити складну нерівність на задачу дослідження властивостей простої функції (Мельников, 2013).

Ідея методу полягає у зведенні вихідної нерівності $A > B$ до задачі про знак певної *допоміжної функції* $f(x)$. Реалізація методу передбачає такі кроки:

крок 1: ***трансформація***. Перенесіть усі члени нерівності в один бік, щоб отримати вираз, який має бути більшим (або меншим) за нуль:

$$A - B > 0;$$

крок 2: *визначення функції*. Отриманий вираз прирівнюється до допоміжної функції:

$$f(x) = A - B;$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

крок 3: *доведення*. Задача зводиться до доведення нерівності $f(x) > 0$ (або $f(x) \geq 0$) для всіх допустимих значень змінної x.

Для дослідження знаку функції $f(x)$ використовуються поняття *похідної, монотонності* та *екстремумів* функції (табл. 1).

Таблиця 1

Інструменти методу допоміжних функцій

Крок	Дія	Мета
1. Знаходження похідної	Обчислити $f'(x)$	Визначити інтервали монотонності функції $f(x)$
2. Аналіз знаку $f'(x)$	Дослідити, коли $f'(x) > 0$ (зростає) або $f'(x) < 0$ (спадає)	Встановити, чи є функція $f(x)$ зростаючою або спадною на заданому проміжку
3. Знаходження екстремумів	Знайти точки, де $f'(x) = 0$ (критичні точки)	Визначити *мінімальне* (або *максимальне*) значення функції $f(x)$
4. Перевірка значення	Обчислити значення функції $f(x)$ у критичній точці або на кінці проміжку, де функція набуває мінімуму	Якщо мінімальне значення $f_{min} \geq 0$, то $f(x) \geq 0$ для всіх x, і нерівність доведено

Задача 1. *Доведемо для всіх* $x \neq 0$ *нерівність:*

$$e^x > 1 + x.$$

Розв'язання: Використовуючи метод допоміжних функцій, перенесемо члени нерівності $e^x - 1 - x > 0$. Відтак допоміжну функцію можна записати так:

$$f(x) = e^x - 1 - x.$$

Визначимо похідну функції $f(x)$:

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Далі знаходимо екстремум:

$$e^x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Отже, $x = 0$ є критичною точкою функції. Похідна $f'(x)$ змінює знак в точці $x = 0$ з мінуса на плюс, тому в цій точці функція має мінімум.

Оскільки $f(0) = 0$ є мінімальним значенням функції, то $f(x) > 0$ для всіх $x \neq 0$. Таким чином, $e^x - 1 - x > 0$, що доводить нерівність $e^x > 1 + x$.

■

Задача 2. *Доведемо, що для всіх $x > 0$ виконується*

$$\ln(1 + x) < x.$$

Розв'язання: Введемо допоміжну функцію $f(x) = x - \ln(1 + x)$ для $x > 0$.
Знайдемо її похідну:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{1 + x}.$$

Оскільки $x > 0$, то $f'(x) > 0$ для всіх $x > 0$, отже функція $f(x)$ строго зростає. При $x = 0$: $f(0) = 0$. Оскільки $f(0) = 0$ і функція зростає при $x > 0$, то $f(x) > 0$ для всіх $x > 0$, що доводить нерівність.

■

Задача 3. *Доведемо нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним (AM-GM):*

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

для додатних a і b.

Розв'язання. Введемо для $t > 0$ допоміжну функцію

$$f(t) = \frac{t + \frac{1}{t}}{2}.$$

Для знаходження екстремуму знайдемо похідну і прирівняємо її до нуля:

$$f'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right), \qquad \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 1,$$

оскільки за припущенням $t > 0$.

При переході через точку $t = 1$ похідна змінює знак. Для $t > 1$ маємо $f'(t) > 0$ (функція зростає). Для $0 < t < 1$ маємо $f'(t) < 0$ (функція спадає). При $t = 1$ маємо $f'(1) = 0$, тобто функція досягає мінімуму в точці $t = 1$.
Значення функції при $t = 1$:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$f(1) = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Отже, для всіх $t > 0$ маємо $f(t) \geq 1$. Якщо покласти $t = \sqrt{\frac{a}{b}}$, то:

$$\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2} \geq 1.$$

Помноживши обидві частини на $\sqrt{ab}$, отримуємо

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

■

Підсумовуючи, необхідно зазначити, що метод допоміжних функцій особливо ефективний для нерівностей, що містять *трансцендентні функції* (логарифми, експоненти, тригонометричні). Він надає чіткий, покроковий алгоритм для розв'язання та навчає учнів *конструювати власні інструменти* (функції) для розв'язування задачі, а не лише використовувати готові формули.

2.2. Використання симетрії та інваріантів

Цей метод належить до нестандартних підходів і базується на *виявленні прихованої структури* у виразі нерівності. Симетрія дозволяє спрощувати вираз, а інваріанти – фіксувати частину параметрів задачі, щоб зосередитися на ключових змінних (Собкович та Кульчицька, 2018).

Ідея полягає у використанні *повторюваності* або *збалансованості* виразу, щоб спростити його доведення, часто шляхом спеціального групування членів або заміни змінних (табл. 2).

- ***Симетрія*.** Якщо нерівність не змінюється при циклічній або довільній перестановці змінних (наприклад, $a \to b \to c \to a$), то її називають симетричною або циклічною нерівністю.
- ***Інваріант*.** Це величина (вираз), яка залишається незмінною протягом усього процесу перетворень або при певних підстановках. Використання інваріантних величин дозволяє зафіксувати частину параметрів задачі.

Таблиця 2

Інструменти методу використання симетрії та інваріантів

Прийом	Опис та мета	Приклад трансформації
1. Групування членів	Перетворення симетричного виразу на *суму квадратів*	$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$

	невід'ємних чисел. Якщо сума квадратів ≥ 0, то нерівність доведено	
2. Розкриття та використання AM-GM	Для симетричних виразів, які містять добутки, часто застосовується *нерівність між середнім арифметичним і середнім геометричним* до симетричних пар членів	$\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 2$
3. Підстановка / Параметризація	Якщо нерівність є циклічною, можна використати підстановку, яка «згортає» частину виразу або вводить інваріантну суму, щоб спростити знаменники	У нерівності $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, інваріантом є сума $S = a+b+c$

Задача 4. *Доведемо, що для дійсних чисел* a, b, c:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Розв'язання. Насамперед помічаємо, що нерівність є повністю симетричною – якщо поміняти місцями будь-які дві змінні, вираз не зміниться.

Групування членів (зведення до інваріантної форми). Перенесемо члени в ліву частину:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0.$$

Множення та групування. Помножимо обидві частини нерівності на 2, щоб мати можливість виділити повні квадрати:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0.$$

Далі розбиваємо кожен квадрат a^2, b^2, c^2 на дві частини і групуємо їх у повні квадрати:

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geq 0.$$

Фінальна інваріантна форма. Очевидно, що ліва частина останньої нерівності еквівалентна сумі квадратів:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Оскільки квадрат будь-якого дійсного числа є невід'ємним, то сума квадратів завжди невід'ємна. Нерівність доведено.

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 5. *Доведемо нерівність Коші для трьох змінних. Для додатних* a, b, c *виконується*

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Розв'язання. Використовуючи симетрію виразу, розкриємо дужки:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right).$$

За нерівністю AM-GM для кожної пари маємо:

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq 2\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)} = 2,$$

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geq 2\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)\cdot\left(\frac{a}{c}\right)} = 2,$$

$$\frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\left(\frac{c}{b}\right)\cdot\left(\frac{b}{c}\right)} = 2.$$

Підсумуємо і отримаємо:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3+2+2+2 = 9.$$

■

Задача 6. *Доведемо, що для додатних* a, b, c*:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Використаємо циклічну симетрію виразу та підстановку (Cvetkovski, 2010). Позначимо $S = a+b+c$. Тоді:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{S-a}, \qquad \frac{b}{c+a} = \frac{b}{S-b}, \qquad \frac{c}{a+b} = \frac{c}{S-c}.$$

Потрібно довести:

$$\frac{a}{S-a}+\frac{b}{S-b}+\frac{c}{S-c} \geq \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Зробимо підстановку $x = S - a,\ \ y = S - b,\ \ z = S - c$. Тоді $a = S - x,\ \ b = S - y,$ $c = S - z$, і $x + y + z = 3S - (a + b + c) = 2S$.

Нерівність (1) набуває вигляду:

$$\frac{S-x}{x} + \frac{S-y}{y} + \frac{S-z}{z} \geq \frac{3}{2}.$$

Це еквівалентно:

$$\frac{S}{x} + \frac{S}{y} + \frac{S}{z} - 3 \geq \frac{3}{2}.$$

$$S\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{9}{2}. \qquad (2)$$

Оскільки $x + y + z = 2S$, то

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} = \frac{9}{2S}$$

за нерівністю між гармонічним та арифметичним середніми (Станжицький та ін., 2022). Отже, $S9/(2S) \ = \ 9/2$, що доводить нерівність (2).

■

Представлений метод використання симетрії та інваріантів є елегантним інструментом, який дозволяє отримувати короткі та красиві доведення для симетричних задач, навчає учнів «бачити» структуру задачі та шукати приховані закономірності (симетрії) і часто є першим кроком, який суттєво спрощує подальше розв'язування.

2.3. Техніка параметризації (підстановок)

Техніка параметризації є потужним інструментом, особливо при роботі з нерівностями, що містять *багато змінних* або мають обмеження (умови), як-от фіксована сума чи добуток.

Основна ідея полягає у введенні додаткових параметрів (нових змінних) або використанні спеціальних підстановок, щоб трансформувати складну нерівність у простішу форму (табл. 3). Ці нові змінні часто відображають приховані математичні структури або дозволяють застосувати інші, більш знайомі методи (наприклад, метод допоміжних функцій). Параметризація дозволяє трансформувати складні нерівності в простіші форми (Cvetkovski, 2010).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Таблиця 3

Інструменти техніки параметризації

Прийом	Опис та мета	Приклад трансформації
1. Зведення до однієї змінної	Якщо нерівність залежить від двох змінних a і b, її можна звести до однієї змінної t шляхом підстановки $t = a/b$	Нерівність $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ зводиться до $t + \frac{1}{t} \geq 2\ (t = a/b)$
2. Використання обмежень (умов)	Якщо задана умова (інваріант), наприклад, $x + y + z = 3$, можна ввести параметри p, q, r, які задовольняють простіше обмеження $p + q + r = 0$	Якщо $x + y + z = 3$, підстановка $x = 1 + p$, $y = 1 + q$, $z = 1 + r$ приводить до $p + q + r = 0$
3.Тригонометрична підстановка	Для нерівностей, пов'язаних із сумою квадратів або обмеженням на одиничному колі ($x^2 + y^2 = 1$), використовують підстановки $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$	Для доведення нерівностей із замкнутою областю та квадратичними виразами

Задача 7. *Довести, що для додатних x, y, z за умови $x + y + z = 3$ виконується*

$$xy + yz + zx \leq 3.$$

Розв'язання. Припустимо, що x, y, z близькі до 1 (через умову, що їхня сума дорівнює 3). Введемо малі відхилення:

$$x = 1 + p, \qquad y = 1 + q, \qquad z = 1 + r.$$

Аналіз умови (інваріант). Підставляємо в умову $x + y + z = 3$:

$$(1 + p) + (1 + q) + (1 + r) = 3 \quad \Longrightarrow \quad 3 + (p + q + r) = 3.$$

Це дає нове, просте обмеження (інваріант): $p + q + r = 0$.

Трансформація нерівності. Підставляємо нові змінні у вираз $xy + yz + zx$:

$$xy + yz + zx = 3 + 2(p + q + r) + (pq + qr + rp).$$

Оскільки $p + q + r = 0$, вираз спрощується до:

$$xy + yz + zx = 3 + (pq + qr + rp).$$

Спрощена задача. Нерівність $xy + yz + zx \leq 3$ зводиться до

$$3 + (pq + qr + rp) \leq 3 \qquad \Longrightarrow \qquad pq + qr + rp \leq 0.$$

Доведення нової нерівності (через інваріант $p + q + r = 0$). Використовуємо формулу квадрата суми:

$$(p + q + r)^2 = p^2 + q^2 + r^2 + 2(pq + qr + rp) = 0.$$

Звідси: $p^2 + q^2 + r^2 = -2(pq + qr + rp)$. Оскільки $p^2 + q^2 + r^2 \geq 0$ (сума квадратів невід'ємна), то й $-2(pq + qr + rp) \geq 0$, що означає $pq + qr + rp \leq 0$. Нерівність доведено.

■

Задача 8. *Доведемо, що для додатних* a, b:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Розв'язання. Введемо параметр $t = a/b > 0$. Нерівність набуває вигляду:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2.$$

Використовуючи метод допоміжних функцій, розглянемо функцію

$$f(t) = t + \frac{1}{t}$$

для $t > 0$.

Знайдемо її похідну:

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2}. \qquad (3)$$

Знаходимо з (3) критичні точку $f'(t) = 0$. Для $t > 1$: $f'(t) > 0$ (зростання). Для $0 < t < 1$: $f'(t) < 0$ (спадання).

Отже, $t = 1$ є точкою мінімуму і $f(1) = 1 + 1 = 2$. Тому для всіх $t > 0$: $f(t) \geq 2$.

■

Техніка параметризації, як метод доведення нерівностей, незамінна, коли нерівність має складні обмеження (умови), дозволяючи перетворити складні

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

нерівності на простіші форми, які легше доводити. Використання техніки навчає учнів шукати приховані залежності та творчо підходити до вибору змінних.

2.4. Метод монотонності

Метод монотонності є одним із найбільш універсальних і фундаментальних інструментів для доведення нерівностей. Він спирається на властивості *зростаючих* та *спадних* функцій, використовуючи апарат *похідної* (Сарана, 2004).

Ідея полягає у зведенні доведення нерівності до дослідження поведінки (зростання або спадання) спеціально сконструйованої допоміжної функції $f(x)$ на певному проміжку (табл. 4).

- ***Монотонність***. Якщо функція $f(x)$ зростає на проміжку, то для будь-яких $x_1 < x_2$ на цьому проміжку виконується $f(x_1) < f(x_2)$. Якщо функція спадає, то $f(x_1) > f(x_2)$.
- ***Ключ до доведення.*** Знаючи, що функція зростає, достатньо перевірити її значення на початку проміжку (або в граничній точці). Якщо $f(x)$ зростає і $f(a) \geq 0$, то $f(x) \geq 0$ для всіх $x > a$.

Таблиця 4

Інструменти методу монотонності

Крок	Дія	Мета
1. Створення $f(x)$	Перетворити нерівність $A > B$ на допоміжну функцію $f(x) = A - B$	Звести доведення до аналізу знаку $f(x)$
2. Аналіз похідної	Знайти $f'(x)$ та дослідити її знак на заданому проміжку	Встановити, чи $f(x)$ зростає $(f'(x) > 0)$ чи спадає $(f'(x) < 0)$
3. Перевірка граничного значення	Обчислити значення $f(x)$ у точці, де починається проміжок (зазвичай $x = 0$ або межа області визначення)	Це значення буде *мінімальним* (якщо функція зростає) або *максимальним* (якщо функція спадає) на проміжку
4. Висновок	Якщо $f(x)$ зростає і $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для всіх $x > 0$. Отже, нерівність доведено	Довести, що $f(x) \geq 0$ (або $f(x) \leq 0$)

Задача 9. *Доведемо, що*

$$\sin x < x$$

для $x \in (0, \pi/2)$.

Розв'язання. Створимо допоміжну функцію, перенісши члени у ліву частину, щоб довести $x - \sin x > 0$. Відтак

$$f(x) = x - \sin x \text{ для } x \in (0, \pi/2).$$

Знайдемо похідну функції $f(x)$ та проаналізуємо її. Отримуємо

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

На проміжку $x \in (0, \pi/2)$ значення $\cos x < 1$. Отже, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$. Це означає, що функція $f(x)$ зростає на $(0, \pi/2)$.

Межова точка $x = 0$. Тоді $f(0) = 0 - \sin 0 = 0$.

Оскільки $f(0) = 0$ і функція $f(x)$ зростає при $x > 0$, то $f(x) > 0$ для всіх $x \in (0, \pi/2)$. Таким чином, $x - \sin x > 0$, що доводить нерівність $\sin x < x$.

■

Задача 10. *Доведемо, що для* $x \in (0, \pi/2)$*:*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Розв'язання. Дослідимо окремо дві допоміжні функції.

1) Розглянемо $f(x) = x - \sin x$ для $x \in (0, \pi/2)$. Похідна: $f'(x) = 1 - \cos x > 0$, оскільки $\cos x < 1$ для $x \in (0, \pi/2)$. Отже, $f(x)$ зростає, $f(0) = 0$, тому $f(x) > 0$, звідки $x > \sin x$.
2) Розглянемо $g(x) = \operatorname{tg} x - x$ для $x \in (0, \pi/2)$. Похідна:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} > 0$$

для $x \in (0, \pi/2)$. Отже, $g(x)$ зростає, $g(0) = 0$, тому $g(x) > 0$, звідки $tg\ x > x$.

Об'єднаємо результати:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

■

Задача 11. *Довести нерівність Бернуллі: для* $x > -1$ *та натурального* $n \geq 1$ *виконується*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Розв'язання. Для $n = 1$ нерівність очевидна: $1 + x = 1 + x$.

Для $n \geq 2$ розглянемо функцію

$$f(x) = (1 + x)^n - 1 - nx$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

для $x > -1$.

Дослідимо похідну функції $f(x)$.

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n = n[(1 + x)^{n-1} - 1]. \quad (4)$$

При $x = 0$: $f(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ і $f'(0) = n(1 - 1) = 0$.

Друга похідна:

$$f''(x) = n(n-1)(1 + x)^{n-2}. \quad (5)$$

Для $n \geq 2$ та $x > -1$ маємо $f''(x) > 0$, оскільки $(1 + x)^{n-2} > 0$.

Оскільки $f''(x) > 0$, функція $f(x)$ опукла. З умов $f(0) = 0$ і $f'(0) = 0$ випливає, що $x = 0$ є точкою глобального мінімуму, тому $f(x) \geq 0$ для всіх $x > -1$.

Отже, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ для всіх $n \geq 1$.

■

Метод монотонності є одним із найуніверсальніших підходів, який застосовний для різних типів трансцендентних функцій (тригонометричних, степеневих, логарифмічних). Його використання дозволяє учням не лише доводити нерівності, але й глибше розуміти їхню природу та поведінку функцій, надає чіткий, хоча й іноді громіздкий, *алгоритм* розв'язання, що є важливим для формування навичок доведення.

3. Висновки

Підсумовуючи, необхідно зазначити, що нестандартні методи доведення нерівностей мають ряд переваг:

- *універсальність*: кожен метод застосовний до широкого класу нерівностей;
- *елегантність:* дозволяють отримувати короткі та красиві доведення;
- *педагогічна цінність:* розвивають аналітичне мислення та математичну інтуїцію.

Метод допоміжних функцій є особливо ефективним для нерівностей з трансцендентними функціями. Як зазначається у (Мельников, 2013), вдало підібрана допоміжна функція може перетворити складну нерівність на майже очевидний результат. Розглянуті приклади проілюстрували різні аспекти методу: від простого аналізу монотонності до дослідження опуклості функцій.

Використання симетрії та інваріантів дозволяє значно спростити доведення для симетричних виразів. У (Собкович & Кульчицька, 2018) описано, що виявлення симетрії часто є першим кроком до знаходження ефективного розв’язання.

Техніка параметризації незамінна при роботі з багатьма змінними та обмеженнями. Параметризація дозволяє трансформувати складні нерівності в простіші форми, використовуючи приховані математичні структури (Cvetkovski, 2010).

Метод монотонності є одним з найуніверсальніших підходів, що дозволяє не лише доводити нерівності, але й глибше розуміти їхню природу (Сарана, 2004). Приклади ілюструють, як його застосовувати для тригонометричних та степеневої функції.

Порівняльний аналіз наведених вище прикладів дозволяє зробити висновок, що вибір методу суттєво залежить від структури нерівності:

- для нерівностей з логарифмічними та експоненціальними функціями оптимальним є метод допоміжних функцій;
- для симетричних виразів ефективне використання симетрії та інваріантів;
- для нерівностей з обмеженнями доцільна параметризація;
- для порівняння значень функцій природним є метод монотонності.

Опанування нестандартними методами суттєво збагачує математичну підготовку і є важливою складовою сучасної математичної освіти. Освітянська практика свідчить, що саме поєднання різних методів часто дає найкращі результати. Як зазначає (Manfrino, Gomes & Delgado, 2000), майстерність у доведенні нерівностей виражається не лише знаннями окремих прийомів, а й розумінням того, як їх комбінувати.

Для формування математичної компетентності важливим є впровадження цих підходів на заняттях з математики у закладах загальної середньої освіти при вивченні відповідних тем. Особливо важливим є поступове опанування даними методами через розробку комплексу вправ – від простіших до складніших, що забезпечуватиме глибоке розуміння та формуватиме стійкі навички розв’язування відповідних задач.

Список використаних джерел

Мельников, В. (2013). Доведення нестандартних нерівностей (на основі матеріалів Всеукраїнських олімпіад, інтернет-олімпіад та математичних турнірів). Освіта. С. 15–35.

Сарана О.А. (2004). Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібник. К.: Вид-во А.С.К., 344 с.

Собкович, Р., & Кульчицька, Н. (2018). Основні методи доведення нерівностей. Видавництво ЛНУ.

Станжицький О.М., Собчук В.В., Кушніренко С.В., Цань В.Б. (2022). Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина ІІ «Нерівності в шкільному курсі математики» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету. 2022, 123 с.

Cvetkovski, Z. (2010). Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems. Springer. 444 p.

Manfrino R.B., Gomes J.A., Delgado R.V. (2000). Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach. Birkhauser Verlag. 211 p.

Отримано редакцією журналу: 24.09.2025
Прорецензовано: 14.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Khrystyna KINDRATIV, Student.
0009-0006-0600-547X
e-mail: antonikkhristina@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

NON-STANDARD METHODS OF PROVING INEQUALITIES IN MATHEMATICS EDUCATION

Abstract. *The process of proving inequalities occupies an important place in the school mathematics curriculum, as it contributes to the development of students' logical, analytical, and critical thinking skills. Relying solely on standard approaches to proving inequalities does not always ensure a deep understanding of mathematical regularities and often limits students' creative potential. Therefore, the implementation of non-standard proof methods is of particular relevance, as they foster the formation of research skills and the development of mathematical intuition. The purpose of this article is to investigate the applicability of non-standard methods for proving inequalities and to determine the possibilities of their integration into the process of teaching mathematics in general secondary education institutions.*

The paper presents the method of auxiliary functions, the method of symmetry and invariants, the technique of parameterization, and the monotonicity method for proving inequalities. The possibilities of applying these approaches in the educational process are analyzed with regard to enhancing students' cognitive activity, developing logical reasoning, and fostering the ability to conduct independent analysis of mathematical statements. The provided examples illustrate the effectiveness of each method in the context of forming competencies essential for mastering the school mathematics curriculum and participating in mathematical competitions. The discussed proof methods possess considerable didactic potential, promote a deeper understanding of mathematical facts, encourage students' research-oriented activity, and improve the overall quality of mathematical training. Their integration into the educational process will contribute to the development of students' creative and analytical abilities and the enhancement of their mathematical competence.

Keywords: *inequalities; proof; non-standard methods; auxiliary function; symmetry; parameterization; monotonicity; mathematics teaching methodology.*

Математичний гурток

УДК 511.1:517.581]:531.73 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.9**

Олена ГРІНЕЧКО, студентка
ORCID:0009-0007-4017-6114
e-mail: olenagrinechko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ВЗАЄМНО ПРОСТІ ЧИСЛА У ЗАДАЧАХ НА ПЕРЕЛИВАННЯ РІДИН

Анотація. *Досліджуються особливості застосування властивості взаємно простих чисел у задачах на переливання рідин. Ці задачі мають важливе значення у розвитку логічного та алгоритмічного мислення в учнів. Акцент зроблено на використанні знань про взаємно прості числа для визначення можливості отримання певного об'єму рідини у задачах на переливання з двома посудинами. Розглядається підхід до розв'язування задач, що включає розуміння умови, застосування знань про взаємно прості числа та кратність чисел. Особлива увага приділена демонстрації того, що задачі на логіку часто потребують математичного пояснення, перед застосуванням стратегій чи розв'язуванні в цілому. У результаті дослідження описано метод, що дає змогу передбачати можливість отримання певного об'єму. Перспективи майбутніх досліджень пов'язані з розширенням умов на більшу кількість посудин або мінімальну кількість кроків.*

Ключові слова: *взаємно прості числа; переливання рідин; граф станів; алгоритм Ойлера.*

1. Вступ

Розвиток умінь, необхідних для життя XXI століття, зокрема критичного, логічного та алгоритмічного мислення, є одним із ключових завдань сучасної математичної освіти, визначених концепцією Нової української школи. Значну роль у формуванні цих компетентностей відіграють навчальні математичні задачі прикладного змісту, що спонукають учнів до пошуку обґрунтованих рішень, аналізу можливих стратегій та встановлення закономірностей.

До таких завдань належать математичні задачі на переливання рідин між посудинами різного об'єму. Вони традиційно застосовуються на уроках математики, у роботі математичних гуртків, на олімпіадах та під час інтерактивних заходів для школярів. Подібні задачі не лише стимулюють пізнавальний інтерес, а й дозволяють будувати логічні міркування, пов'язані з фундаментальними поняттями теорії чисел.

Одним із таких ключових понять є взаємна простота чисел – тема, що входить до шкільного курсу математики, але на практиці часто розглядається поверхово, обмежуючись базовими означеннями та типовими вправами з підручника. Однак саме властивості взаємно простих чисел лежать в основі теоретичного обґрунтування розв'язності задач на переливання рідин: можливість отримати певний об'єм у посудині без вимірювальних інструментів визначається найбільшим спільним дільником заданих об'ємів.

На практиці учні нерідко застосовують перебірний підхід: виконують послідовні переливання, сподіваючись на випадкове отримання потрібного результату. Така

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

стратегія інколи приводить до правильної відповіді, проте не сприяє формуванню узагальненого методу чи усвідомленню математичної сутності задачі. Таким чином, виникає потреба у більш глибокому методичному опрацюванні даного типу задач (Козлова, Перебийніс & Бурлуцька,2023).

Метою статті є опис і систематизація методу розв'язування задач на переливання рідин із застосуванням теорії взаємно простих чисел, а також демонстрація його ефективності через аналіз характерних прикладів.

Об'єктом дослідження є математичні задачі на переливання рідин між посудинами фіксованого об'єму.

Предмет дослідження – використання властивостей взаємно простих чисел під час обґрунтування можливості отримання заданого об'єму рідини.

2. Історія задач на переливання рідин

Задачі на переливання (або «*задачі Пуассона*») – це клас математичних головоломок, які вимагають мінімальної кількості переливань для отримання потрібної кількості рідини, використовуючи лише дві або три посудини відомого об'єму (зазвичай без міток). Вони є класичним прикладом застосування алгоритмічного мислення та теорії графів (або діофантових рівнянь) для пошуку оптимального рішення.

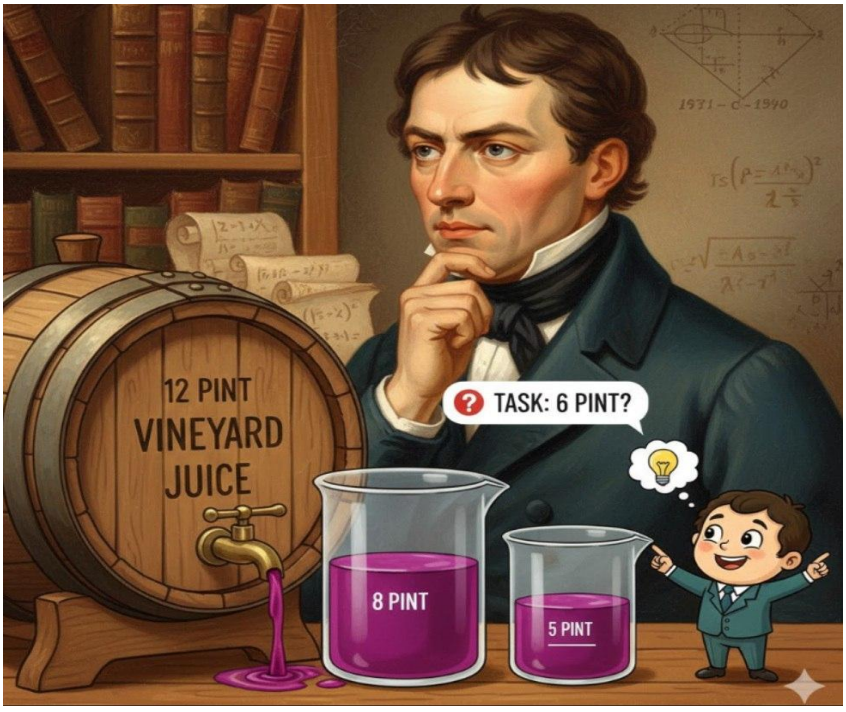


Рис. 1. Ілюстрація до задачі Пуассона

Симеон Дені Пуассон (21.06.1781 – 25.04.1840) – відомий французький математик, механік та фізик. Коли він був ще молодим і вагався у виборі життєвого шляху, приятель показав йому кілька задач, із якими сам не зміг упоратися. Пуассон швидко розв'язав усі. Але особливо йому сподобалася задача про дві посудини: «Дехто має 12 пінт виноградного соку (*пінта* – це 0,568 л) і хоче подарувати половину другу, але

у нього лише дві порожні посудини: одна – на 8, друга – на 5 пінт. Яким чином налити в більшу посудину 6 пінт?» (рис. 1) (Google. Gemini, 2025). «Ця задача визначила мою долю, – казав Пуассон. – Я вирішив, що обов'язково стану математиком».

Необхідно зауважити, що подібні задачі відомі ще з часів середньовічного математика *Фібоначчі* (справжнє ім'я Леонардо Пізанський (близько 1170 – близько 1250)), асоціація з іменем *Пуассона* закріпилася саме завдяки тому, що саме ця конкретна задача настільки сильно вплинула на його життєвий вибір і стала відомою історією.

Традиційно в таких задачах переливати можна тільки до тих пір, доки посудина, в яку заливається рідина, не буде вщент заповненою, або поки посудина, з якої виливається рідина, не буде повністю порожня. Просто зупинитися посередині або розлити вміст посудини на дві рівні частини теж не можна. Усі посудини без поділок.

3. Теоретичне підґрунтя

Ключовим питанням у задачах на переливання є *умова розв'язності* (*solvability condition*), а саме: *чи можливо відміряти цільовий об'єм рідини, використовуючи лише обмежений набір посудин із заданими об'ємами*.

Задачі на переливання рідин мають цілком строгий математичний фундамент. Нехай задано дві посудини з об'ємами a і b. Ці об'єми розглядаємо як натуральні числа. Нехай також потрібно отримати об'єм c, де $0 < c \leq \max(a, b)$.

Твердження 1. *За допомогою двох посудин об'ємом a і b можна отримати рідину об'ємом c тоді й лише тоді, коли c ділиться на найбільший спільний дільник чисел a і b, тобто* $\text{НСД}(a, b) \mid c$.

У процесі переливання отримувані об'єми можна описати рівнянням:

$$x \cdot a + y \cdot b = c,$$

де x і y – цілі числа (можуть бути як додатні, так і від'ємні, оскільки можливе і додавання, і «віднімання» об'єму шляхом виливання).

Відомо, що лінійне діофантове рівняння має розв'язки тоді й лише тоді, коли

$$\text{НСД}(a, b) \mid c.$$

Таким чином, переливання рідини є *практичною моделлю* класичної задачі з числами.

Якщо об'єми посудин *взаємно прості*, то *можна відміряти будь-який об'єм* у межах від 1 л до більшої посудини.

Якщо ж $\text{НСД}(a, b) = d > 1$, то можна отримати лише ті об'єми, що кратні d. Наприклад, для посудин об'ємом 10 л і 6 л – $\text{НСД}(10,6) = 2$. Відтак, неможливо відміряти 7 л, 9 л, 5 л тощо, але можна відміряти 2, 4, 6, 8, 10 л.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

4. Класифікація задач на переливання рідин

Задачі на переливання класифікуються за критерієм *обмеженості вихідного ресурсу (рідини)*. Цей поділ є фундаментальним для вибору відповідного математичного апарату для розв'язання.

Задачі з *необмеженим ресурсом* (тип I). Ці задачі часто розглядаються як класичні *головоломки на відмірювання* і зазвичай не вимагають обліку загального об'єму рідини. Доступна кількість рідини вважається *необмеженою* (наприклад, вода з крана, озера, рідина у нескінченно великій ємності). Дозволяється *багаторазове наповнення* порожніх або частково наповнених посудин до верху. Також дозволяється *виливати* рідину з посудин (умовний «стік» або «злив»). Такі задачі моделюються за допомогою теорії графів для пошуку найкоротшого шляху (мінімальної кількості переливань) між станами.

Задачі з *обмеженим ресурсом* (тип II). Такі задачі є складнішими, оскільки вимагають підтримання *сталого загального об'єму* рідини протягом усього процесу. Їх розв'язання часто пов'язане з діофантовими рівняннями та пошуком цілочислових рішень, що задовольняють рівняння вигляду $ax + by = c$, де a та b – об'єми посудин, а c – цільовий об'єм. Тут загальна кількість рідини обмежена і відома, оскільки вона знаходиться в одній або кількох початкових посудинах (наприклад, сік, молоко, дорогоцінна хімічна речовина). Рідину, як правило, *не можна проливати* або *виливати* з системи. Будь-яке переливання має відбуватися між наявними посудинами.

5. Приклади

Наступні приклади демонструють критерії необхідності та достатності, які визначають можливість або неможливість досягнення бажаного об'єму (літражу) шляхом послідовних операцій переливання.

Задача 1. *Чи можна за допомогою двох посудин: одна на 11 літрів, друга на 7 літрів, отримати 5 літрів рідини?*

Розв'язання. Маємо посудини 11 л та 7 л (рис. 2) (Google. Gemini, 2025).

$$\text{НСД}(11,7) = 1.$$

Це означає, що за допомогою цих двох посудин можна отримати будь-який цілий об'єм рідини від 1 до 11 літрів включно. Зокрема:

$$1 \mid 5,$$

а отже отримання 5 л можливе.

Цей висновок повністю підтверджує практичне розв'язування.

Позначимо 11-літрову посудину через A, а 7-літрову – через B. Початково обидві посудини порожні. На кожному етапі дозволено виконувати одну з трьох операцій:

1. *заповнення* обраної посудини до повного об'єму;
2. *спорожнення* посудини;
3. *переливання* рідини з однієї посудини до іншої, доки перша не спорожніє або друга не заповниться.



Рис. 2. Ілюстрація до задачі 1

Для досягнення результату послідовно виконаємо дії, наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Послідовність операцій у задачі 1

Крок	Операція	A, л	B, л
1	заповнити A	11	0
2	перелити $A \rightarrow B$	4	7
3	спорожнити B	4	0
4	перелити $A \rightarrow B$	0	4
5	заповнити A	11	4
6	перелити $A \rightarrow B$	8	7
7	спорожнити B	8	0
8	перелити $A \rightarrow B$	1	7
9	спорожнити B	1	0
10	перелити $A \rightarrow B$	0	1
11	заповнити A	11	1
12	перелити $A \rightarrow B$	**5**	7

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

На 12-му кроці у посудині A залишається рівно 5 літрів рідини, що й було задано. Таким чином, операції з переливання та перенесення рідини дозволяють отримати шуканий об'єм.

Відповідь: Відміряти 5 л за допомогою посудин на 11 л та 7 л *можливо*.

Такий підхід до розв'язування задачі формує алгоритмічне мислення, показує зв'язок між абстрактною теорією і реальними задачами, допомагає учням побачити, для чого потрібні взаємно прості числа.

Для аналізу можливості отримання певного об'єму рідини за допомогою двох посудин зручно використовувати *граф станів*, який є математичною моделлю процесу переливань. Кожному можливому стану системи відповідає вершина графа, а кожній допустимій операції – орієнтоване ребро між вершинами.

Стан системи задається парами чисел (a, b), де:

- a – кількість рідини в 11-літровій посудині,
- b – кількість рідини у 7-літровій посудині.

Отже, простір можливих станів:

$$0 \le a \le 11, \qquad 0 \le b \le 7.$$

На кожному кроці дозволяється одна з таких операцій:

1. *Заповнення посудини до країв*
   - $(a, b) \to (11, b)$,
   - $(a, b) \to (a, 7)$.
2. *Повне спорожнення посудини*
   - $(a, b) \to (0, b)$,
   - $(a, b) \to (a, 0)$.
3. Переливання між посудинами:
   - переливання з A в B:

$$(a, b) \to (a - \min(a, 7 - b), b + \min(a, 7 - b));$$

   - переливання з B в A:

$$(a, b) \to (a + \min(b, 11 - a), b - \min(b, 11 - a)).$$

Побудову графа починаємо з початкового стану $(11{,}0)$ і послідовно застосовуємо всі дозволені операції, додаючи нові стани як вершини графа і відповідні дії як орієнтовані ребра. Процес триває, доки не будуть отримані *усі можливі стани*, що досяжні з початкової конфігурації: кількість вершин (станів) 36, кількість орієнтованих ребер (операцій) 138 (рис. 3). Зауважимо, що на графі наведено усі можливі стани. Оптимальний шлях можна побудувати керуючись даними таблиці 1.

Зауважимо, що якщо загалом об'єми посудин m і n є взаємно простими, то можна отримати будь-який об'єм, що є лінійною комбінацією $am + bn$ у межах від 1 до $\max(m, n)$.

У нашому випадку $\text{НСД}(11,7) = 1$, тому отримання об'єму 5 л є теоретично можливим.

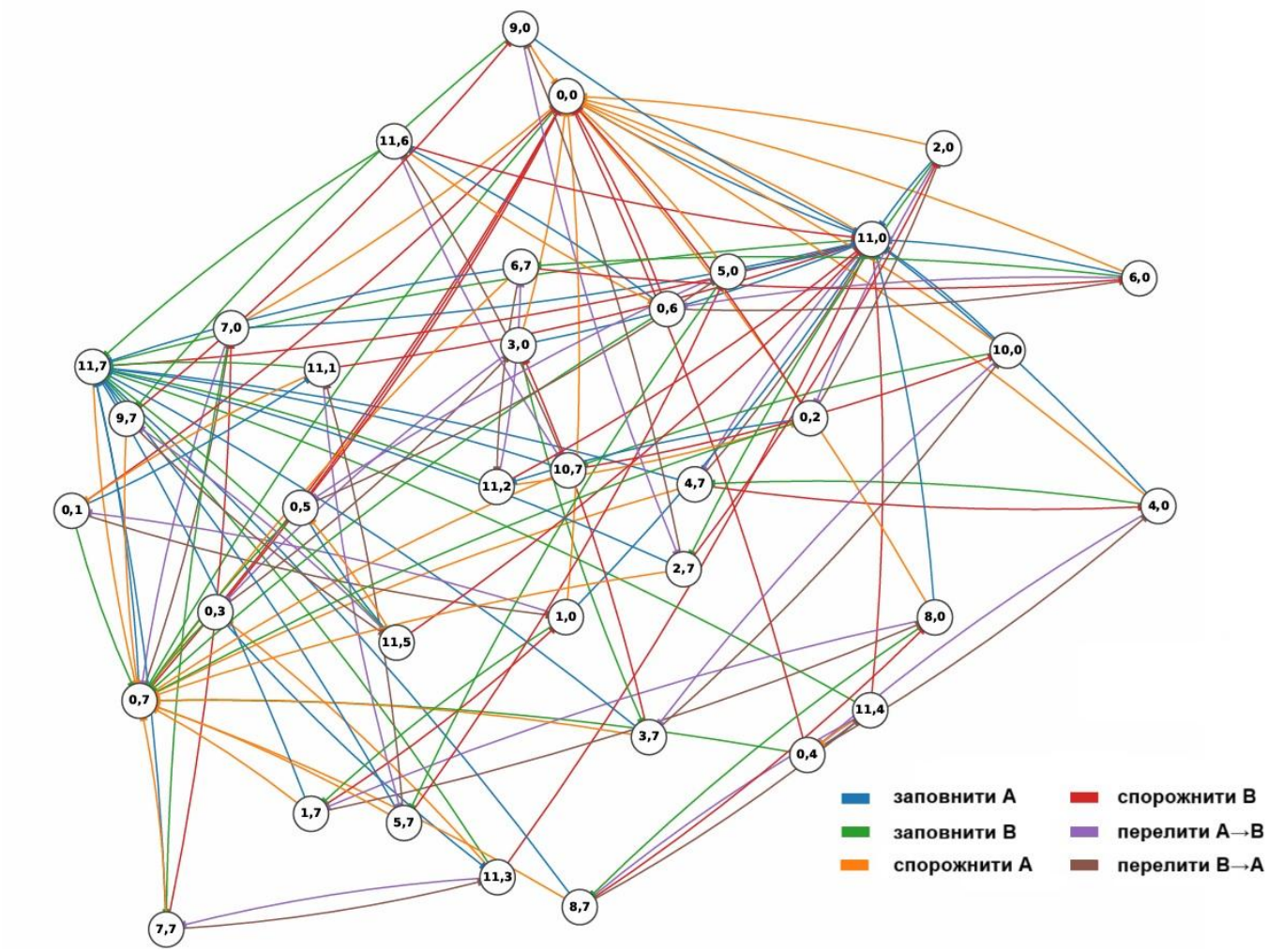


Рис. 3. Побудова графа станів до задачі 1

Задача 2. *Є дві посудини: одна на 8 літрів, друга на 20 літрів. Чи можна, використовуючи їх, відміряти 6 літрів?*

Розв'язання: Оскільки $\text{НСД}(8,20) = 4$, то усі досяжні об'єми повинні бути кратними 4. Тому величина 6 л, яка не є кратною 4, а відтак принципово не може бути отримана.

Це можна підтвердити й у результаті систематичного перебору станів (за таблицею переходів або графом досяжності) встановивши, що в посудинах виникають лише такі кількості води: 4 л, 8 л, 12 л, 16 л, 20 л та інші об'єми, що є кратними 4. Водночас значення 1 л, 2 л, 5 л, 6 л, 10 л, 11 л тощо жодного разу не з'являються.

Відповідь: Відміряти 6 л за допомогою посудин на 8 л та 20 л *неможливо*.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 3. *Є посудини об'ємами 15 і 21 літрів, чи можна отримати 3 літри?*

Розв'язання: Для даної задачі: $\text{НСД}\,(15{,}21) = 3$. Шуканий об'єм також дорівнює 3 л, відтак, з точки зору теорії лінійних комбінацій цілих чисел та класичної задачі про мірні посудини, отримання 3 л є можливим.

А за яку найменшу кількість кроків можна відміряти 3 літри?

Для цього побудуємо таблицю переходів. Вважатимемо при цьому, що дозволені стандартні операції: повне наповнення будь-якої з посудин, її повне спорожнення, а також переливання води з однієї посудини в іншу до моменту наповнення останньої або спорожнення першої.

Таблиця 2

Таблиця переходів у задачі 3

Крок	15 літрів	21 літр
1	15	0
2	0	15
3	15	15
4	9	21
5	9	0
6	0	9
7	15	9
8	3	21

На 8 кроці отримуємо потрібний об'єм.

Відповідь. Відміряти 3 л за допомогою посудин на 15 л та 21 л *можна* за щонайменше 8 кроків.

6. Алгоритм Евкліда розв'язування задач на переливання рідин

Обґрунтувати можливість того, що за допомогою посудин об'ємом 15 л та 21 л можна отримати будь-який об'єм, кратний 3 – зокрема й 3 л, можна, використовуючи *алгоритм Евкліда*. Алгоритм Евкліда – метод послідовного визначення найбільшого спільного дільника двох чисел. Використовуючи його, можна встановити, який саме об'єм є принципово можливим до отримання.

Для посудин місткістю 15 л і 21 л застосуємо алгоритм Евкліда:

$$21 = 15 \cdot 1 + 6,$$

$$15 = 6 \cdot 2 + 3,$$

$$6 = 3 \cdot 2 + 0.$$

Останній ненульовий залишковий член дорівнює 3, отже:

$$\text{НСД}\,(15{,}21) = 3.$$

Алгоритм Евкліда дає змогу зробити два важливі висновки:

1. Будь-який *об'єм води, що отримується у мірних посудинах, є лінійною комбінацією їхніх місткостей*

$$x \cdot 15 + y \cdot 21.$$

2. Алгоритм Евкліда встановлює, що *всі такі комбінації дають лише об'єми, кратні* $\text{НСД}\,(15{,}21) = 3$.

Оскільки шуканий об'єм дорівнює 3 л і

$$3 = 3 \cdot 1,$$

тобто є кратним $\text{НСД}\,(15{,}21)$, алгоритм Евкліда підтверджує, що цей об'єм можна отримати.

Крім того, зворотний хід алгоритму Евкліда дозволяє записати 3 як лінійну комбінацію 15 та 21:

$$3 = 15 - 2 \cdot 6,$$

а з першого співвідношення

$$6 = 21 - 15,$$

тому

$$3 = 15 - 2(21 - 15) = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 21.$$

Ця рівність показує, що об'єм 3 л можна сформувати відповідними операціями наливання та переливання, оскільки кожен множник відповідає повторенню певних операцій.

7. Задачі для самостійної роботи

1. У смарт–кафе новий робот–бариста не вміє точно відміряти порції сиропу. У нього є лише дві мірні колби об'ємами 18 і 30 мл. Для приготування авторського напою йому потрібно отримати 6 мл сиропу, а інших інструментів немає. Чи може робот точно відміряти 6 мл?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. У віртуальній хімлабораторії учень має змішати реагент так, щоб отримати рівно 4 г активної речовини. Але вимірювальні «контейнери» – це лише ємності 22 г і 40 г. Чи можливо отримати рівно 4 г речовини?

3. У системі автоматичного поливу сталася помилка. Поливальні ємності мають об’єми 21 і 33 літри, але для молодих рослин потрібно подати рівно 3 л води. Система може тільки: наповнити ємність повністю, спорожнити її, переливати воду між ємностями. Чи можна отримати 3 літри для точного поливу?

4. Інженери тестують дрон із новою паливною системою, де паливо вимірюється у «заряд–літрах». Є два резервуари: 32 і 48 «літрів». Для запуску тесту потрібні 8 одиниць палива, але датчик для точного наливання зламаний, доступне лише переливання. Чи реально виміряти 8 одиниць палива?

5. У відсіку космічного корабля потрібно точно відміряти 13 л гелію для стабілізації тиску. На борту є лише два гумові резервуари об’ємами 26 і 39 літрів, які можна наповнювати та переливати між собою. Чи можна отримати саме 13 л?

Зауваження 1. Вважаємо, що маємо необмежені можливості наповнити ємності, переливати їх і виливати вміст.

Зауваження 2. Відповідей «так» або «ні» не достатньо, розв’язок має містити доведення відповідного факту.

8. Висновки

У статті проаналізовано метод розв’язування задач на переливання рідини з використанням властивостей взаємно простих чисел. Проілюстровано, що подібні задачі мають чітке математичне підґрунтя, а їх розв’язання ґрунтується не лише на алгоритмічних діях, а й на теоретичних числових закономірностях. Дослідження трьох модельних задач показало, що можливість отримання заданого об’єму визначається структурою об’ємів доступних посудин. Зокрема, якщо об’єми є взаємно простими, то можна сформувати будь-який об’єм, що не перевищує більшу посудину; якщо ж об’єми мають спільний дільник, то досяжними є лише кратні цьому дільнику значення.

Запропонований підхід сприяє формуванню аналітичного мислення, переходу від механічного перебору можливостей до усвідомленого використання математичних понять, а також удосконаленню навичок логічного аргументування.

Розглянуті, на перший погляд ігрові задачі, мають важливе методичне значення, оскільки забезпечують глибше розуміння важливих математичних концепцій, які є інструментами формування ініціативності і підприємливості, інформаційно-цифрової компетентності школярів, які є такими необхідними в нинішньому висококонкурентному світі.

Список використаних джерел

Козлова О.М., Перебийніс С.М., Бурлуцька І.І. (2023). Матеріали для проведення занять факультативного курсу “Математичний калейдоскоп”. – Режим доступу: http://library.ippro.com.ua/attachments/article/718

Google. Gemini [Електронний ресурс]. Режим доступу: [ai.google/gemini/]

Отримано редакцією журналу: 23.11.2025
Прорецензовано: 25.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Olena HRINECHKO, Student
ORCID:0009-0007-4017-6114
e-mail: olenagrinechko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON COPRIME NUMBERS IN LIQUID-POURING PROBLEMS

Abstract. *This paper examines the application of the properties of coprime numbers in classical liquid-pouring problems. Such problems play an important role in developing students' logical and algorithmic thinking. The focus is placed on using knowledge about coprime integers to determine whether a specified volume of liquid can be obtained when working with two containers. The proposed approach to solving these problems involves a clear understanding of the task conditions, the application of number-theoretic concepts related to coprimality and divisibility, and the analysis of achievable volumes. Particular attention is given to demonstrating that logic-based puzzles often require underlying mathematical justification before solution strategies can be effectively applied. As a result of the study, a method is outlined that enables predicting the attainability of a given volume. Prospects for further work include extending the problem setting to a larger number of containers or optimizing solutions with respect to the minimal number of steps.*

Keywords: *coprime numbers; liquid-pouring problems; state graph; Euclidean algorithm.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Обрії математики

УДК 512.64+514:004.89]:004.738.5 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.10**

Валентин СОБЧУК, Д-р. техн. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-4002-8206
e-mail: sobchuk@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Катерина КЕКАЛО, студентка
ORCID: 0009-0002-0677-3955
e-mail: erozkova777@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

АНАТОМІЯ РЕКОМЕНДАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Анотація. *У статті розглянуто принципи побудови сучасних рекомендаційних систем соціальних платформ на прикладі TikTok та Instagram. Показано, що основою їхньої роботи є двоетапна архітектура, яка поєднує швидкий пошук потенційно релевантного контенту (Retrieval) і точне ранжування відібраних кандидатів (Ranking). Детально описано модель двох нейронних «веж» (Two-Tower Neural Network), у межах якої користувач і контент подаються у вигляді векторів у багатовимірному просторі, а їхня відповідність визначається за допомогою косинусної близькості. Проаналізовано, як текстові, візуальні, аудіальні та метадані контенту об'єднуються в єдине векторне представлення, а також, як поведінкові та контекстуальні ознаки формують динамічний профіль користувача. Окрему увагу приділено порівнянню підходів TikTok і Instagram, зокрема їхнім різним цілям оптимізації, швидкості адаптації та ступеню складності моделей. Стаття має на меті продемонструвати, що рекомендаційні системи не є «чорною скринькою», а спираються на добре відомі ідеї лінійної алгебри, геометрії та машинного навчання, доступні для розуміння учнями старших класів і студентами початкових курсів.*

Ключові слова: *рекомендаційні системи; Two-Tower Neural Network; Retrieval і Ranking; косинусна близькість; векторні представлення; TikTok; Instagram; машинне навчання.*

1. Вступ

Соціальні мережі стали головними генераторами інформації для мільярдів людей. Ми прокидаємося – і вже бачимо персональну добірку відео, мемів, новин чи оглядів. TikTok демонструє ролики, від переглядів яких важко відірватися; Instagram пропонує нові Reels, що ідеально збігаються з нашими настроями; YouTube, Facebook та інші сервіси щосекунди намагаються передбачити, що саме ми хочемо побачити далі.

Але як ці системи «вгадують» наші інтереси? Чи справді додатки «слухають» телефон, чи є раціональне математичне пояснення? Насправді за майже магічною точністю рекомендацій стоять цілком зрозумілі – хоча й дуже потужні – алгоритми машинного навчання. У цій статті ми спробуємо розібратися в анатомії таких

рекомендаційних систем, зосередившись на двох найвпливовіших платформах сучасності – TikTok та Instagram.

Попри те, що ці сервіси здаються дуже різними, їхні рекомендаційні системи мають спільну структуру. Обидві базуються на ідеї *двох нейронних «веж»* (*Two-Tower Models*) (Covington, Adams & Sargin, 2016), (Amatriain, 2012), які окремо описують користувача і контент, а потім порівнюють ці описи у вигляді багатовимірних векторів. Далі відбувається процес пошуку схожості, відбору найперспективніших відео серед мільйонів доступних, і фінального ранжування – визначення, що саме побачить користувач у першу чергу.

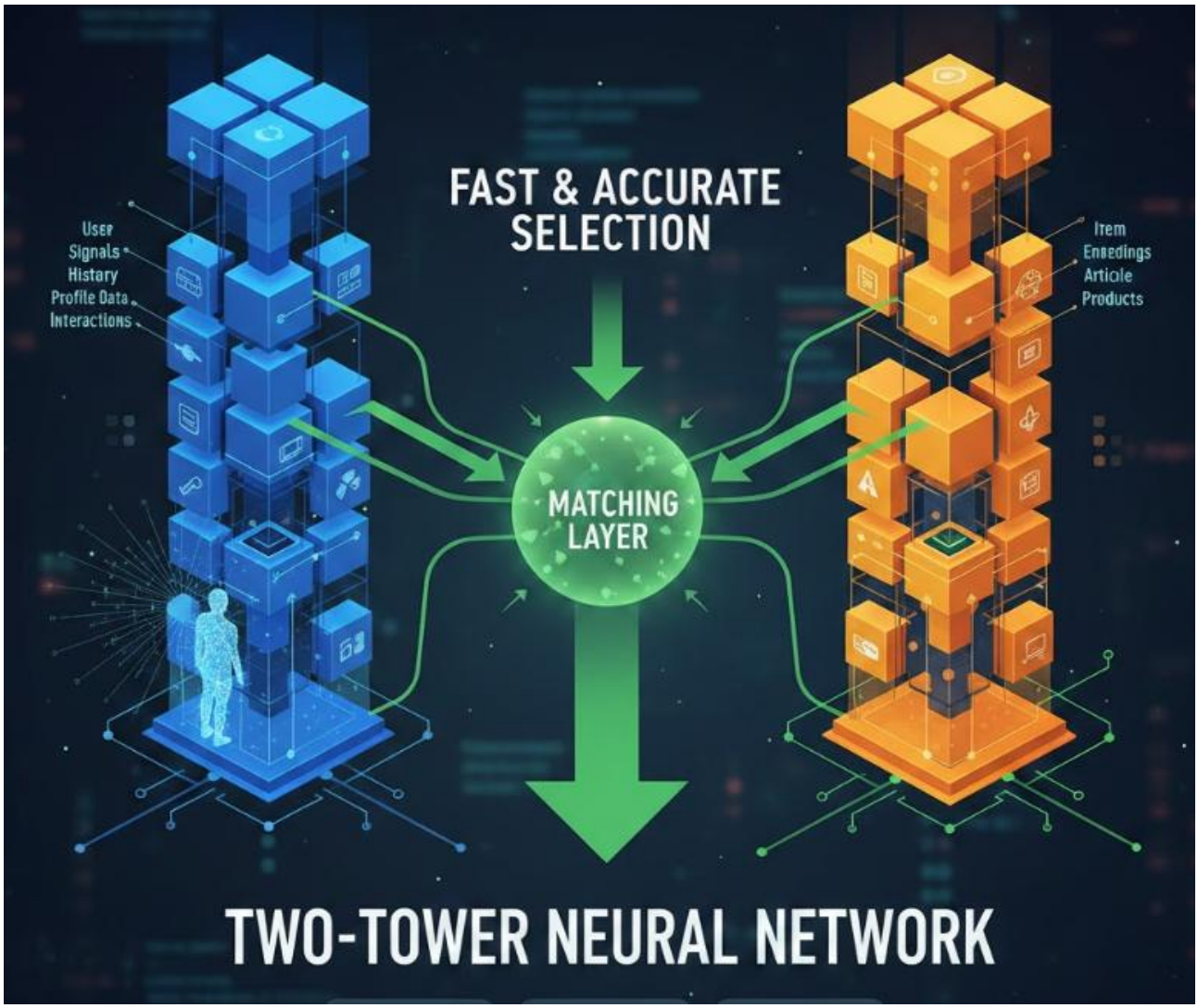


Рис. 1. Візуалізація архітектури Two-Tower Neural Network

У TikTok та Instagram працюють десятки різних алгоритмів, які щосекунди аналізують перегляди, лайки, час утримання уваги, попередні взаємодії, характеристики відео, текстові та візуальні ознаки, а часто й поведінку схожих користувачів. Хоча все це виглядає надскладною системою, її можна розкласти на зрозумілі математичні кроки, і саме це ми й зробимо.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Метою цієї статті є проілюструвати читачам, що рекомендаційні системи – це не загадкова «чорна скринька», а результат роботи геометрії, лінійної алгебри, теорії графів та оптимізаційних алгоритмів. Ми поглянемо на процес зсередини: від формування векторів контенту до ранжування, від пошуку найближчих сусідів до мультимодальних нейромереж.

2. Як працюють рекомендаційні системи: ідея двох «веж»

Сучасні платформи на кшталт TikTok, Instagram Reels, YouTube Shorts чи Netflix використовують масштабовані системи рекомендацій, здатні аналізувати мільярди взаємодій у реальному часі. Однією з найефективніших архітектур, що забезпечує швидкість і точність відбору контенту, є *Two-Tower Neural Network* – модель, у якій сигнал від користувача та від об'єкта рекомендації (відео/посту/товару) обробляється незалежними нейромережевими «вежами» (рис. 1) (Google Gemini, 2025).

Узагальнено, така система виконує дві ключові операції:

i. *кодування* користувача та контенту у векторні представлення,
ii. *оцінювання їхньої взаємної відповідності*.

Опишемо докладніше кожен етап.

2.1. Вежа користувача

Вежа користувача – це нейронна мережа, призначена для перетворення інформації про користувача на щільний вектор фіксованої довжини (embedding), який позначають u. Цей вектор є формалізованим описом інтересів, звичок і поведінкових патернів людини.

Вежа користувача перетворює весь набір наявної інформації на вектор u, який компактно відображає інтереси користувача у багатовимірному просторі (зазвичай 32–512-вимірному). Джерелами ознак тут є:

- *Історія переглядів*. Сучасні системи використовують *sequence models* (RNN, GRU, Transformers), щоб зрозуміти, як змінюються вподобання з часом. Модель аналізує: які відео переглядав користувач; як довго дивився кожне; чи додав у вибране; чи переглядав повторно; які категорії чи теми домінують у його історії.
- *Час утримання уваги* (*watch time*) є одним з ключових індикаторів. Якщо ролик переглянутий повністю, модель вважає його релевантним, а якщо ж користувач швидко прогорнув – це сигнал негативної взаємодії. Алгоритм не лише враховує абсолютний час, а й відсоток перегляду відео та місця, де користувач зупинявся або перемотував контент.
- *Типи відео, з якими він взаємодіє*. При цьому враховуються лайки, коментарі, шерінги, збереження, натискання «*не цікаво*», перегляди профілів авторів. Кожен тип взаємодії має власну вагу. Наприклад, «поділитися» зазвичай важливіше, ніж «лайк».

- *Географія*. За цією ознакою відстежують країну чи регіон проживання, часовий пояс, мову інтерфейсу, локальні тренди в даному регіоні. Рекомендації в даному випадку, особливо у TikTok, локалізуються.
- *Сигнали безпеки*. Система повинна гарантувати безпечний контент. Має бути забезпеченим фільтрація контенту за віковими обмеженнями, уникнення шкідливих тем, блокування матеріалів, позначених як потенційно небезпечні для неповнолітніх. User Tower враховує такі сигнали, щоб *не підбирати ризикований контент невідповідним споживачам.*
- *Час доби та інтенсивність користування.* У різний час доби користувач може віддавати перевагу різним типам контенту, наприклад, увечері – розважальний, вдень – освітній. Активні користувачі отримують більш «*свіжі*» рекомендації, а малоактивні користувачі – більш загального характеру. Власне це так звані *контекстуальні фактори*.
- *Поведінка схожих користувачів*. Система застосовує *колаборативну фільтрацію* – якщо група користувачів зі схожими поведінковими патернами масово взаємодіє з певним типом відео, то модель може рекомендувати його іншим користувачам у цій «кластерній» групі.

Опишемо математично представлення вектора користувача u.

У двовежевих рекомендаційних системах вектор користувача u – це компактне числове представлення його інтересів. Він є елементом багатовимірного простору

$$u \in \mathbb{R}^d,$$

де d – заздалегідь вибрана розмірність (наприклад, 64, 128, 256 або 512).

Щоб побудувати цей вектор, модель обробляє всі дані про користувача: історію переглядів, часові та поведінкові ознаки, географію, взаємодії та інше. Формально цей процес можна зобразити як перетворення

$$u = f_{\text{user}}(X),$$

де X – сукупність усіх доступних ознак.

Нехай для кожного користувача існує послідовність переглядів. Кожний елемент цієї послідовності (кожне відео) кодується у вектор:

$$e_{c_t} \in \mathbb{R}^d.$$

Далі ця послідовність подається в модель, наприклад GRU або Transformer[1], які «витягують» з неї узагальнену інформацію про зміну інтересів користувача:

$$s = \text{SeqModel}\left(e_{c_1}, \dots, e_{c_T}\right).$$

[1] Трансформер (англ. Transformer) – це архітектура штучної нейронної мережі, заснована на механізмі багатоголової уваги, в якій текст перетворюється на числові представлення, які називаються токенами, а кожен токен перетворюється на вектор шляхом пошуку з таблиці вбудовування слів.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отриманий вектор s можна розглядати як «динамічний профіль» користувача. Окрім самого факту перегляду, модель враховує лайки, коментарі, шерінги, натискання «не цікаво», час перегляду.

При цьому кожній взаємодії відповідає своя вага, яка показує, наскільки така взаємодія інформативна. Узагальнений вплив усіх взаємодій можна подати у вигляді вектора:

$$r = \sum_{\text{переглянутих відео } c} \alpha_c \, v_c,$$

де v_c – вектор відео, α_c – підсумкова вага взаємодії з цим відео (позитивної чи негативної).

При цьому модель також враховує додаткові фактори, як от мову інтерфейсу, регіон користувача, час доби, групи схожих користувачів тощо, які теж кодуються у вектори. Наприклад:

$$e_{\text{locale}}, e_{\text{country}}, e_{\text{time}}, e_{\text{cluster}}.$$

Це допомагає моделі розуміти локальні тренди та поведінку подібних (схожих) користувачів.

Усі описані вектори об'єднуються (*конкатенуються*[2]) в єдину велику ознакову репрезентацію:

$$x_{\text{emb}} = \left[s \parallel r \parallel e_{\text{locale}} \parallel e_{\text{country}} \parallel e_{\text{time}} \parallel e_{\text{cluster}} \right].$$

Останній крок – пропускання об'єднаного вектора через *нейронну мережу* (MLP)[3]:

$$u = \text{MLP}(x_{\text{emb}}). \qquad (1)$$

Результатом є щільний вектор u, який у багатовимірному просторі відповідає «профілю» користувача і використовується для порівняння з векторами контенту.

Відтак, оскільки *послідовність переглядів* формує «динамічне ядро» інтересів користувача, *взаємодії* (наприклад, лайки чи пропуски) підсилюють або, навпаки, послаблюють вплив окремих відео на його вподобання, а *контекстуальні ознаки* (час доби чи місцезнаходження) додатково коригують рекомендації під конкретний момент,

[2] Конкатенація (від лат. *concatenatio* – зчеплення, об'єднання) – це операція послідовного з'єднання двох або більше об'єктів лінійної структури (найчастіше текстових рядків, але також списків чи інших послідовностей) в одну, створюючи новий, довший об'єкт. У програмуванні це робиться, щоб об'єднати слова, речення, дані з різних змінних, часто за допомогою оператора $+$.

[3] MLP – це штучна *нейронна мережа* прямого поширення, яка виконує серію математичних операцій над вхідними даними для створення прогнозу або результату.

то вся ця складна інформація проглядається у *векторі* u, який є *стислим цифровим підсумком* того, що людина найбільше любить дивитися.

2.2. Вежа контенту

Розглянемо тепер підхід до математичного підходу представлення *вектора контенту* v.

Метою *вежі контенту* (*Item Tower*) є перетворення всіх доступних ознак відео/поста (текст, аудіо, кадри, хештеги, метадані) у єдиний вектор фіксованої довжини:

$$v \in \mathbb{R}^d.$$

Формально вежа контенту – це функція

$$v = f_{\text{item}}(Y),$$

де Y – множина всіх ознак конкретного відео.

Нехай відео має опис або підпис – тобто, певний текст T, який можна подати як послідовність токенів:

$$T = (w_1, w_2, \dots, w_n).$$

Кожен токен кодується у вектор:

$$e_{w_i} \in \mathbb{R}^{d_t}.$$

Для цих векторів застосовується модель обробки тексту (наприклад, Transformer або LSTM[4]):

$$t = \text{TextModel}(e_{w_1}, \dots, e_{w_n}) \in \mathbb{R}^d.$$

Тоді вектор t відображає зміст тексту та його тематику.

Якщо контент має відео або обкладинку, беруть вибрані кадри:

$$I = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}.$$

Кожен кадр обробляється візуальною моделлю (наприклад, CNN[5], Vision Transformer):

$$e_{F_j} = \text{VisionModel}(F_j) \in \mathbb{R}^d.$$

[4] LSTM (long short-term memory) – це особливий різновид архітектури рекурентних нейронних мереж, здатний до навчання довгостроковим залежностям.

[5] CNN або ConvNet (convolutional neural network) згорткові нейронні мережі – це клас глибоких штучних нейронних мереж прямого поширення, який успішно застосовувався до аналізу візуальних зображень.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Кадри агрегуються, наприклад, середнім або *attention-механізмом* – це механізм, який інтуїтивно імітує когнітивну увагу. Він обчислює «м'які» (soft) ваги для кожного слова, точніше, для його вкладення, у контекстному вікні. Ці ваги можна обчислювати або паралельно (як у трансформерах), або послідовно (як у рекурентних нейронних мережах). Як результат отримуємо вектор v_{img}, який характеризує візуальний зміст ролика:

$$v_{\text{img}} = \text{Agg}(e_{F_1}, \dots, e_{F_m}) \in \mathbb{R}^d.$$

Аудіодоріжка подається у вигляді спектрограми S – візуального представлення аудіосигналу, яке показує, як розподіл енергії (амплітуда) звуку змінюється з часом у різних частотах, або MFCC-фіч – набору ознак, отриманих зі спектрограми, які широко використовуються для розпізнавання мови та ідентифікації звуку. Вони імітують те, як людське вухо сприймає частоти. Модель аудіо (Audio CNN або Audio Transformer) обчислює:

$$a = \text{AudioModel}(S) \in \mathbb{R}^d.$$

Вектор a *кодує ритм, тональність, інструменти, голос, темп* та інші аудіофічі.

Опишемо тепер, як модель працює з метаінформацією – хештегами, авторами, тривалістю, форматом.

Нехай контент має множину хештегів: $H = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$. Кожний хештег має ембеддінг[6] $e_{h_i} \in \mathbb{R}^d$. Відтак агрегований вектор хештегів має вигляд:

$$v_H = \text{Agg}(e_{h_1}, \dots, e_{h_k}) \in \mathbb{R}^d.$$

Автор має вектор представлення

$$e_{\text{author}} \in \mathbb{R}^d,$$

який враховує популярність, стиль, тематику, історію взаємодій.

Тривалість, формат, технічні параметри – це числові й категоріальні ознаки, які після нормування або вкладення утворюють вектор:

$$e_{\text{meta}} \in \mathbb{R}^d.$$

Усі джерела інформації конкатенуються:

[6] Ембеддінг (англ. word embedding) – вкладання слів – це загальна назва низки методик мовного моделювання та навчання ознак в обробці природної мови (ОПМ), в яких слова або фрази зі словника відображують у вектори дійсних чисел. Концептуально воно дає математичне вкладення з простору з багатьма вимірами, по одному на слово, до неперервного векторного простору набагато нижчої розмірності.

$$uy_{\text{emb}} = \left[t \parallel v_{\text{img}} \parallel a \parallel v_H \parallel e_{\text{author}} \parallel e_{\text{meta}}\right]. \quad (2)$$

Останній крок – пропускання об'єднаного вектора через MLP:

$$v = \text{MLP}(y_{\text{emb}}) \in \mathbb{R}^d.$$

Це і є *векторне представлення кожного відео або поста*, яким система оперує для пошуку відповідних користувачів.

Іншими словами, наш розум сприймає цілісне мультимедійне повідомлення, коли *текст* пояснює, *про що* йдеться у відеоматеріалі, а *відео/зображення* демонструють, *що саме* ми бачимо, тоді як *аудіо* передає, *як* це звучить; при цьому *хештеги й автор* одразу вказують, *до якої категорії чи стильової ніші* належить цей контент, і вся ця інформація, разом із *метаінформацією*, що описує його формат, зливається у *вектор* v, який, мов *«цифровий відбиток»*, унікально характеризує контент у багатовимірному просторі.

2.3. Як вимірюється схожість між користувачем і відео

Оскільки u, і v – це вектори, їх можна порівняти за допомогою добре відомого з курсу геометрії способу.

Для визначення, який контент найбільше підходить користувачу, обчислюється схожість між вектором користувача u та *ембеддінгами контенту* v_i. Одним з найпоширеніших методів є *косинусна подібність* (Wu, Guanfeng, et al. 2024):

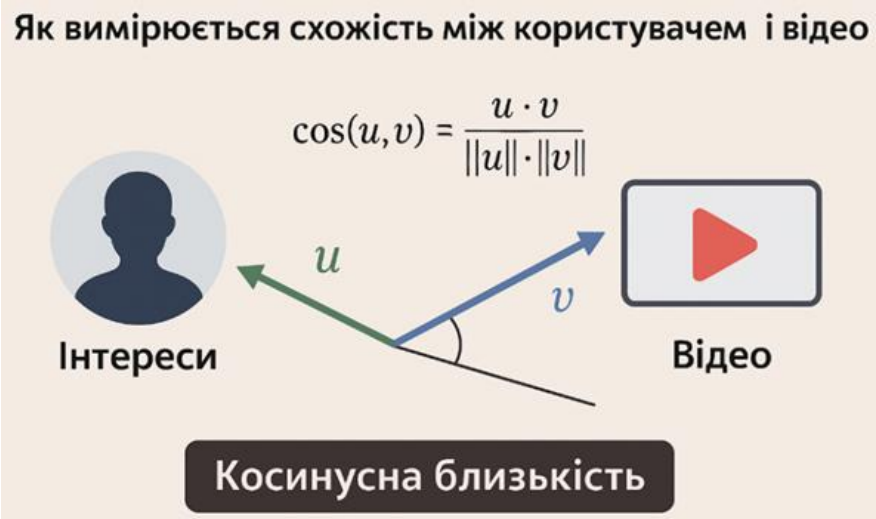


Рис. 2. Візуалізація косинусної подібності

$$\cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{\| u \| \cdot \| v \|}. \quad (3)$$

Тут

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$u \cdot v = \sum_i u_i \cdot v_i -$$

скалярний добуток, а

$$\| u \| = \sqrt{\sum_i u_i^2} -$$

довжина вектора. Косинусна подібність дає значення від -1 до 1.

Якщо $\cos(u, v)$ близький до 1 – вектори спрямовані однаково (максимальна схожіть) – ролик дуже схожий на те, що цікавить користувача. Якщо $\cos(u, v)$ дорівнює 0 – вектори ортогональні (не пов'язані). Якщо $\cos(u, v)$ близький до -1 – вектори спрямовані у протилежні боки.

Саме використання $\cos(u, v)$ є зручним, оскільки не важливою є довжина вектора, тобто кількість історії чи інформації; модель зважає лише на напрямок, тобто на тип змісту чи інтересів (рис. 2). Це дуже добре працює у великих нейронних мережах.

Приклад 1. *Вектор користувача* $u = (0.5, 0.2, -0.1, 0.8, 0.3)$, *вектори відео* $v_1 = (0.4, 0.1, 0.0, 0.7, 0.2)$; $v_2 = (-0.3, 0.8, 0.5, 0.0, 0.1)$; $v_3 = (0.5, 0.25, -0.05, 0.6, 0.35)$. *Обчислити косинусну подібність.*

Обчислимо косинусну подібність, використовуючи (3). Отримуємо:

$$\cos(u, v_1) \approx 0.989, \qquad \cos(u, v_2) \approx -0.010, \qquad \cos(u, v_3) \approx 0.982.$$

Висновок. Відео 1 має найвищий показник схожості, отже, система віддасть перевагу *відео 1*.

Для пересічного користувача в реальному житті це працює таким способом: уявімо, що у користувача є «вектор інтересів» – він любить футбол, хімію і гумористичні відео – кожне відео теж має свій «вектор змісту»: наприклад, про спорт, науку та стиль подачі. Якщо напрямки цих «векторів» майже збігаються, то система каже: «О! Це відео схоже на те, що любить цей користувач». Тоді алгоритм і показує користувачу відповідне відео у стрічці.

2.4. Навчання моделей

Системи TikTok та Instagram порівнюють мільйони прикладів «користувач – переглянутий ролик» та «користувач – пропущений ролик». На основі цих даних моделі оновлюються і краще вчаться передбачати поведінку.

По суті, модель – це *дитина, яка вчиться на своїх помилках, але робить це з величезною швидкістю*. Чим більше вона бачить прикладів «успіху» та «провалу», тим краще вона розуміє, які саме ознаки в користувачі (любить котиків, дивиться після 18:00) збігаються з ознаками в контенті (відео про котиків, завантажено о 17:50).

Власне тренування є своєрідною грою в «*Успіх*» чи «*Провал*». Кожна система збирає мільйони прикладів, які можна розділити на два типи:

- *Позитивний приклад (Успіх).* Користувачі довго подивилися якесь відео. Це означає, що *збіг* між стовпчиком користувача і стовпчиком відео був *вдалим*.
- *Негативний приклад (Провал).* Користувачам показали якесь відео, а вони його *майже одразу прогорнули* (пропустили). Це означає, що *збіг* був *невдалим*.

Модель намагається передбачити: «Якщо я покажу цьому користувачеві ось це відео, чи він його подивиться?». Працює так званий *конвеєр* Прогноз – Реальність – Оновлення (рис. 3). Це працює наступним способом.

Прогноз:	**Реальність:**
Модель робить свій прогноз. Наприклад, "Я думаю, він подивиться на 80%".	Модель дивиться на реальні дані. Якщо прогноз був неправильний (наприклад, модель думала, що ви подивитеся, а ви прогорнули), вона розуміє, що помилилася.
Оновлення:	
Далі, модель робить маленьку корекцію своїх внутрішніх налаштувань (це називається *оновлення ваг*). Вона ніби каже собі: «Ага, наступного разу, коли я бачу цього користувача (який любить музику), і це відео (яке про спорт), я маю знизити свій прогноз!».	

Ці корекції відбуваються мільйони разів на хвилину на мільйонах прикладів.

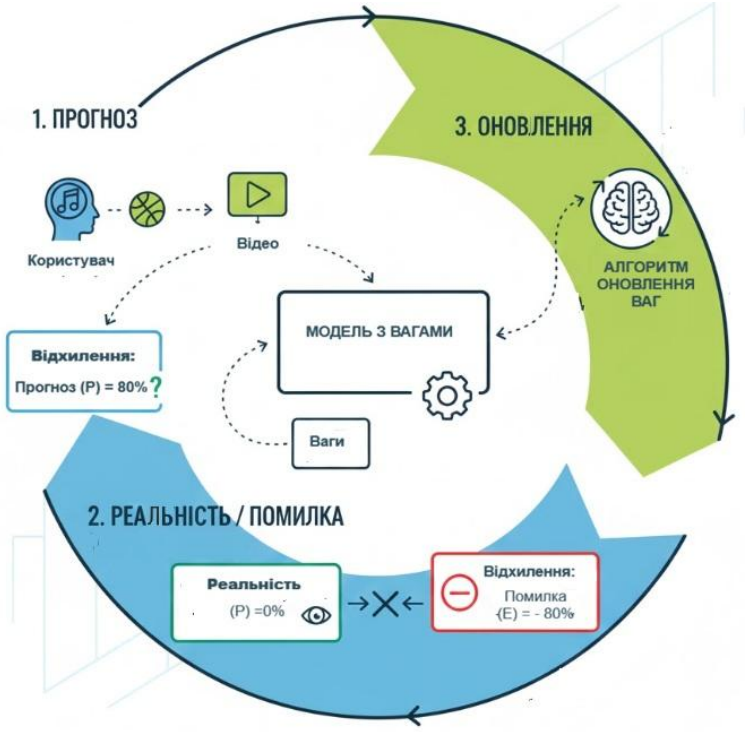


Рис. 3. Конвеєр Прогноз – Реальність – Оновлення

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

3. Пошук кандидатів: як із мільйонів знайти тисячі

Вище показано, що кожен користувач описується вектором u, кожне відео описується вектором v – чим ближчі ці вектори, тим більша ймовірність, що відео сподобається. Але виникає проблема. Навіть якщо існує можливість порівняти вектори користувача і відео, робити це для кожного існуючого ролика – неможливо. TikTok, YouTube чи Instagram щосекунди мають доступ до сотень мільйонів роликів, і повторне обчислення схожості для кожного з них, це займе не секунди, не хвилини, а години.

Очевидно, так робити не можна. Тому система діє у два етапи:

1. *Retrieval* – це швидкий чорновий відбір, його мета швидко знайти кілька тисяч можливих варіантів;
2. *Ranking* – уже потім уважно відсортувати їх.

Тому використовується перший етап – retrieval, або пошук кандидатів.

3.1. Ідея етапу Retrieval

На цьому етапі необхідно із сотень мільйонів відео залишити лише 1 000 – 10 000, які *в принципі* можуть сподобатися користувачу. Система не шукає ідеальний результат, допускає помилки, головне – *не пропустити цікаві відео*.

Як це виглядає образно? Уявімо, що:

- всі відео – це точки у величезному просторі;
- користувач – це вектор, яка показує напрямок його інтересів.

Тоді Retrieval – це запитання: «Які точки знаходяться *приблизно в тому ж напрямку*, що й вектор користувача?» Користувачам не потрібні всі точки. Їм потрібні лише *найближчі за напрямком*.

При цьому замість того, щоб порівнювати користувача з кожним відео, система робить розумніше – *об'єднує відео у групи* (*кластери*). Наприклад: одна група – спортивні відео; інша – гумор; ще одна – освіта; ще одна – музика. Кожна така група має *свій «середній вектор»*.

На практиці процес пошуку працює таким способом (рис. 4).



Рис. 4. Схема роботи процесу пошуку на етапі Retrieval

У результаті реалізації процесу пошуку система зі 100 000 000 відео відбирає 5 000 відео-кандидатів.

Чому це працює швидко? Тому що порівняти вектор користувача з 1 000 групами – дуже швидко, а порівняти зі 100 000 000 відео – дуже повільно.

Retrieval *жертвує точністю*, але *виграє у швидкості*. Retrieval не вибирає найкраще відео – він лише каже: «*Ось список тих, що можуть підійти*».

Після цього включається другий етап – *Ranking*, який детально аналізує кожне відео, враховує більше факторів, остаточно вирішує, що саме показати.

3.1. Ідея етапу Ranking

Після етапу Retrieval система вже має *невеликий список кандидатів* – не мільйони відео, а тисячі, приблизно від 1 000 до 10 000. Тепер постає нове питання: *Які з них показати першими, а які – взагалі не показувати?*

Власне для цього існує етап Ranking (ранжування) – точний і повільніший відбір. Він працює повільніше, аналізує кожне відео набагато детальніше, робить остаточний вибір.

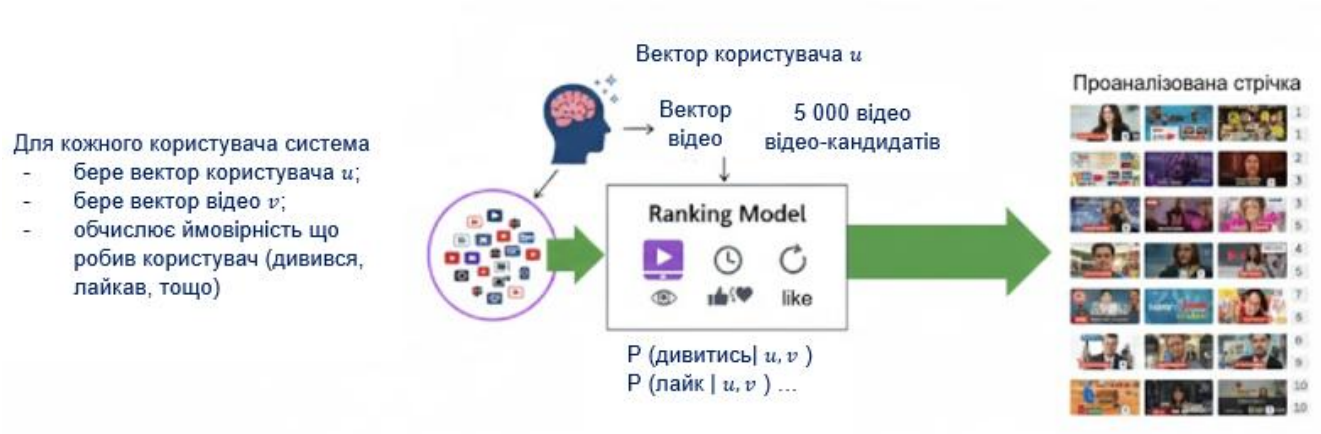


Рис. 5. Схема роботи процесу пошуку на етапі Ranking

Тобто, коли на етапі відбору система каже: «Ось можливі варіанти», то на етапі ранжування – «Ось найкращі з них» (рис. 5). При цьому для кожного відео-кандидата система:

1. бере *вектор користувача*;
2. бере *вектор відео*;
3. обчислює *ймовірність*, що користувач: подивиться відео, додивиться його до кінця, поставить лайк, поділиться з іншими.

Результатом цих дій етапу Ranking є можливість відповісти не на питання «схоже чи не схоже», а на питання *«що саме з цього варто показати зараз?».* Відмінності етапів Ranking та Retrieval дано у табл. 1.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Таблиця 1

Характеристика відмінностей етапів Ranking та Retrieval

Retrieval (пошук/відбір)	**Ranking (ранжування)**
швидкий,	повільніший,
грубий,	***точний***,
порівнює загальні інтереси,	аналізує багато деталей,
працює з мільйонами.	працює з тисячами.

Ranking дивиться на набагато більше речей, ніж Retrieval, зокрема: чи дивився користувач схожі відео раніше, як швидко він зазвичай перегортає контент, чи популярне відео серед схожих користувачів, чи свіже це відео, чи безпечне воно для цього користувача, у який час доби відбувається перегляд? Усе це об'єднується в *одну оцінку*.

Проілюструємо як це може працювати на прикладі.

Приклад 2. Уявімо, що Retrieval знайшов 5 відео:

1. про футбол;
2. про меми;
3. про фізику;
4. про рецепт піци;
5. про котиків.

Ranking може вирішити:

- зараз вечір → краще легкий контент;
- користувач сьогодні дивився меми;
- відео з котиками популярне серед схожих користувачів.

У результаті порядок, наприклад, стане таким:

1. Котики;
2. Мем;
3. Футбол;
4. Піца;
5. Фізика.

Підсумовуючи, зазначимо, що разом Retrieval швидко знаходить, що *можна* показати, а Ranking точно вирішує, що показати *першим*. Ця двохетапна архітектура є основою для побудови *швидких, точних і високоперсоналізованих* рекомендаційних систем, які здатні обслуговувати мільйони користувачів.

4. TikTok vs Instagram: у чому різниця систем

Instagram (укр. Інстаграм) – соціальна мережа, що базується на обміні світлинами, дозволяє користувачам робити світлини, застосовувати до них фільтри, а також

поширювати їх через свій сервіс і низку інших соціальних мереж. Належить компанії Meta Platforms. Є одним із найпопулярніших сервісів у мистецтві айфонографії.

Instagram розробили Кевін Систром та Майк Крігер, які обидва із Сан-Франциско, переорієнтувавши свій проєкт Burbn на мобільні фотографії. Застосунок з'явився в магазині App Store компанії Apple 6 жовтня 2010.

TikTok (відомий у Китаї як Douyin, кит. 抖音, «коротке відео Доуїнь») – китайський соцмедійний застосунок для створення та поширення коротких відео та проведення онлайн-трансляцій. Дозволяє створювати, редагувати і ділитися відеороликами тривалістю від кількох секунд до кількох хвилин, зазвичай під музику або якийсь аудіозапис.

Сервіс запущено у вересні 2016 року китайською компанією ByteDance. Це найпопулярніша платформа для коротких відео в Азії, яка поширилася на інші частини світу і набирає популярність. Кількість користувачів програми, які мешкають у 170 країнах, сягнула 1 млрд.

Філософія Instagram базується на використанні великої історичної бази користувачів та взаємодії між друзями/підписниками. Головною задачею соціальної мережі є розв'язання *десятків паралельних задач* – завдань рекомендацій для стрічки, історій, Explore, Reels, Shop, Direct тощо.

Філософія TikTok ґрунтується на утриманні уваги (Watch-time) – максимізації часу, який користувач проводить за переглядом відео. Головною задачею застосунку є зосередженість на одній ключовій меті, що забезпечує *максимум релевантності коротких відео.*

TikTok обробляє великі обсяги даних за короткий час**.** Система дуже швидко отримує фідбек про те, що працює, а що ні, завдяки швидкому споживанню контенту. Завдяки великій кількості даних і фокусу на короткому відео швидко навчається. При цьому більший акцент спрямовано на раннє прогнозування вірусності – система може швидко підхопити новий контент, що має потенціал, і показати його широкій аудиторії.

Instagram має більшу історичну базу користувачів. Навчається на тривалій історії взаємодії користувача з платформою. Система використовує складнішу, але повільнішу модель навчання через вирішення багатьох задач одночасно. Для прогнозування суттєвим є вплив перехресних взаємодій – рекомендації значною мірою залежать від взаємодії: коментарі, історії, підписки.

Модель авторів у TikTok досить сильна – будь-який новачок може «вистрілити». Алгоритм надає шанс новому контенту та авторам, незалежно від кількості підписників, якщо контент релевантний. Водночас безпека системи менш акцентована (або більш динамічна) порівняно з Instagram. Для якої характерною є строга система безпеки (наприклад, DV365). Це може уповільнювати швидкість поширення контенту, але забезпечує більшу надійність та відповідність стандартам.

Модель авторів Instagram вирізняється більшою залежність від соціального графу. Хоча Reels змінює це, традиційно вірусність більше пов'язана з наявністю аудиторії та взаємодіями.

Для TikTok притаманна висока конзистентність – єдиний фокус на короткому відео. При цьому весь додаток, по суті, є єдиною стрічкою коротких відео.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Водночас для Instagram характерна низька конзистентність – різні алгоритми для фото, історій, відео та Reels. Explore та Reels мають різні цілі та різні моделі. Explore фокусується на статичному контенті та акаунтах, які можуть зацікавити, тоді як Reels конкурує з TikTok і має схожу мету.

Головна причина, чому TikTok часто перемагає у швидкості росту та залученні, криється у фокусі та простоті його моделі.

Обидві платформи постійно донавчають свої моделі на свіжих даних, щоб швидко адаптуватися до нових вподобань користувача та підтримувати високу релевантність рекомендацій.

5. Висновки

У роботі показано, що ефективність рекомендаційних систем сучасних соціальних мереж базується на поєднанні математично строгих моделей і масштабних інженерних рішень. Використання векторних представлень користувачів і контенту дозволяє звести складну задачу персоналізації до геометричної проблеми пошуку та порівняння у багатовимірному просторі. Двоетапна архітектура Retrieval – Ranking забезпечує одночасно високу швидкість роботи системи та точність рекомендацій, що є критично важливим за умов мільйонів користувачів і контентних об'єктів. Порівняльний аналіз TikTok і Instagram засвідчує, що різні цілі платформ приводять до різних компромісів між складністю моделей, швидкістю навчання та глибиною персоналізації. Отримані результати підтверджують, що рекомендаційні системи є яскравим прикладом практичного застосування лінійної алгебри, теорії ймовірностей і нейронних мереж та можуть слугувати ефективним навчальним матеріалом для популяризації сучасної математики й інформатики серед молоді.

Список використаних джерел

Amatriain X. (2012). Building industrial-scale real-world recommender systems. In Proceedings of the Sixth ACM Conference on Recommender Systems, RecSys '12, pages 7– 8, New York, NY, USA. ACM.

Paul Covington, Jay Adams, Emre Sargin *Deep Neural Networks for YouTube Recommendations*. // Google, Mountain View, CA. [Електронний ресурс]. Режим доступу: [https://liamzebedee.com/ml/papers/deepnn-youtube.pdf]

Google. Gemini [Електронний ресурс]. Режим доступу: [ai.google/gemini/]

Wu, Guanfeng, et al. "Multi-modal video search by examples – A video quality impact analysis." *IET Computer Vision* 18.7 (2024): 1017-1033. https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1049/cvi2.12303

Отримано редакцією журналу: 01.11.2025
Прорецензовано: 25.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Valentyn SOBCHUK, Dr.Sc.Tech., Prof.
ORCID ID: 0000-0002-4002-8206
e-mail: sobchuk@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDYEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Kateryna KEKALO, Student
ORCID: 0009-0002-0677-3955
e-mail: erozkova777@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ANATOMY OF RECOMMENDATION SYSTEMS

Abstract. *This article examines the principles underlying modern recommendation systems used by social media platforms, with TikTok and Instagram serving as representative examples. It is shown that their operation is based on a two-stage architecture that combines fast retrieval of potentially relevant content with accurate ranking of the selected candidates. The Two-Tower Neural Network model is described in detail, within which users and content items are represented as vectors in a high-dimensional space, and their relevance is assessed using cosine similarity. The paper analyzes how textual, visual, audio, and metadata features of content are integrated into a unified vector representation, as well as how behavioral and contextual signals are used to construct a dynamic user profile. Particular attention is given to a comparative analysis of TikTok and Instagram, highlighting differences in optimization objectives, adaptation speed, and model complexity. The article aims to demonstrate that recommendation systems are not a "black box" but are grounded in well-established concepts from linear algebra, geometry, and machine learning, which are accessible to senior high school students and early undergraduate learners.*

Keywords: *recommendation systems; Two-Tower Neural Networks; retrieval and ranking; cosine similarity; vector embeddings; TikTok; Instagram; machine learning.*