КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

У СВІТІ МАТЕМАТИКИ

№1, 2026

У світі математики, випуск №1, 2026

Головною метою видання «У світі математики» є створення професійної платформи для публікації оригінальних наукових досліджень у галузі математичних наук, що сприяють розвитку фундаментальної та прикладної математики, а також інтеграція української математичної думки у світовий науковий простір.

Зберігаючи історичну спадкоємність та традиції просвітництва, Журнал спрямовує свою діяльність на публікацію результатів теоретичних та прикладних досліджень, що мають наукову новизну та теоретичну значущість у галузі знань Е «Природничі науки, математика та статистика» за спеціальностями Е7 «Математика» та Е8 «Статистика», висвітлення сучасних методів математичного моделювання в природничих, технічних та гуманітарних науках, публікації ґрунтовних оглядових статей, що систематизують знання з класичних та новітніх розділів математики, сприяючи професійному зростанню молодих науковців. Журнал фокусується на популяризації високої науки, трансформуючи складні математичні концепції у форми, доступні для фахової та молодої аудиторії (для молодих дослідників, аспірантів, студентів, школярів), з метою залучення молоді до активної наукової діяльності та самостійної дослідницької роботи. Журнал забезпечує академічну єдність **–** професійну орієнтацію та підтримку зв'язку між фундаментальною наукою та освітньою практикою, забезпечуючи високу якість доказової бази та логічну строгість матеріалів.

Друкується за рекомендацією вченої ради механіко-математичного факультету.

Редакційна колегія:

головний редактор:

Валентин Собчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

заступники головного редактора:

Юлія Мішура

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Вадим Радченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Світлана Кушніренко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

члени редакційної колегії:

Anar Turmaganbetkyzy Assanova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Science Committee of the Ministry Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan, Kazakhstan;

Sergey Dashkovskiy

University of Würzburg, Germany;

Michael Gekhtman

University of Notre Dame, USA;

Kęstutis Kubilius

Vilnius University, Lithuanian;

Konrad Kulakovsky,

AGH University of Krakow, Poland;

Oleksandr Misiats,

Virginia Commonwealth University, USA;

Petro Feketa
Victoria University of Wellington, New Zealand;

Myrzagali Ospanov
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan;

Оксана Безущак
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Яніна Гончаренко
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;

Михайло Городній
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Ігор Король
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна;

Ірина Лебедєва
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Тетяна Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Україна;

Андрій Олійник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Михайло Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;

Олег Перегуда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Володимир Рибалко
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна Національної академії наук України, Україна;

Ольга Чашечникова
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Україна;

Ростислав Ямненко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна.

Відповідальний секретар:

Євгенія Кочубінська
ПУ «Університет «Київська школа економіки», Україна.

Редакційний відділ:

Світлана Бабич

Адреса редакційної колегії:
Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка;
проспект академіка Глушкова, 4-е, 03127, Україна;
тел.: +38 (044) 259-07-85;
e-mail: usm@knu.ua;
сайт: https://usm.knu.ua;
ISSN 1029-4171 (print) **ISSN** 2524-2407 (online).

Засновник:
Київський національний університет імені Тараса Шевченка.

Свідоцтво про державну реєстрацію
KV No 22695-12595ПР від 24.03.2017.

Ідентифікатор медіа / Номер ліцензії
R30-04577 від 25.04.2024.
DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1

Назва кластеру: Математика та статистика.

Науковий профіль видання: Е7 «Математика», Е8 «Статистика».

Журнал включено до Переліку наукових фахових видань України у межах відповідних кластерів строком на три роки з 01 червня 2026 року по 31 травня 2029 року з присвоєнням категорії «Б».

Наказ Міністерства освіти і науки України № 928 від 11.06.2026 р.

Мова видання: українська.

Періодичність: 2 рази на рік.

Журнал видається безкоштовно. Оплата за обробку та оприлюднення статей відсутня.

Зміст

Наукові дискусії: проблеми та гіпотези

Грінченко В. І., Маципура В. І. *Про теореми існування і єдиності розв'язків. Як це розуміти ……..…….* 7

Оригінальні результати та математичне моделювання

Пришляк О. О. *Занурення проєктивної площини у тривимірний простір ……..….* 18

Сучасні методики та технології математичної освіти

Braverman A., Carmi O., Samovol P. *Integrals with a Hidden Solution: No Need for Complex Calculations……..……...* 28

Цань В. Б., Линець О. О., Печериця О. А. *ФізМатКолайдер як інноваційний формат інтегрованих учнівських змагань ……* 49

Хроніка та міжнародні огляди

Кочубінська Є. А. *Премія Абеля 2026: від Нільса Абеля до Герда Фалтінгса…..* 72

Креативна математика

Романенко В. І., Корніловська Н. В. *Reduce – класика комп'ютерної алгебри….* 80

Кекало К.О. *Ймовірнісні моделі та оптимізація стратегій у спортивних ставках……* 100

Курченко О. О., Синявська О. О. *До зображення раціональних чисел десятковими дробами ……..……..…..* 116

Математичні олімпіади

Бакай В. В., Давидова К. Й., Лукаш К. В., Печериця О. А. *Навколо теореми косинусів*…… 126

Перегуда О. В., Борисейко О. В. *Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики 2026* …… 153

ДОДАТОК

Математичний гурток

Кругляк А. С. *Вектори в просторі з використанням динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra* ……... 160

Тудошві Є. В. *Хвильові процеси та їх візуалізація* …….. 175

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Наукові дискусії: проблеми та гіпотези

УДК 517.911:531.262 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.1**

Віктор ГРІНЧЕНКО, Акад. НАН України, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ І ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ. ЯК ЦЕ РОЗУМІТИ

Анотація. *У теорії рівнянь математичної фізики теореми існування та єдиності розв'язків граничних задач відіграють фундаментальну роль. Проте у практичних застосуваннях ці теореми часто інтерпретуються формально, без належного усвідомлення змісту поняття «єдиність розв'язку». Це породжує методологічні труднощі при побудові аналітичних та чисельних розв'язків задач теорії потенціалу та інших задач математичної фізики. Тому важливим є уточнення практичного змісту поняття єдиності розв'язку та аналіз можливих форм його представлення.*

Метою роботи є поглиблення розуміння поняття єдиності розв'язку граничної задачі шляхом аналізу конкретного прикладу з теорії потенціалу. Основними завданнями є: побудова альтернативних аналітичних представлень розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа у прямокутній області; дослідження можливості отримання різних за формою аналітичних виразів, що описують один і той самий фізичний розв'язок; аналіз збіжності чисельних оцінок, отриманих на основі цих представлень.

У роботі використано аналітичні методи теорії рівнянь математичної фізики, зокрема метод розділення змінних, розкладання у ряди Фур'є та властивості повних систем функцій. Для аналізу збіжності різних представлень розв'язку застосовано чисельні обчислення і порівняння відносних похибок при використанні скінченних сум рядів.

Показано, що для простої граничної задачі теорії потенціалу можна отримати декілька різних аналітичних представлень розв'язку, зокрема у вигляді елементарної функції та у вигляді подвійного ряду. Продемонстровано, що введення довільної функції при продовженні граничних умов на нефізичну частину межі призводить до побудови нескінченної множини формально різних виразів для одного й того самого розв'язку. Чисельні експерименти підтверджують збіжність результатів, отриманих за різними формулами, при збільшенні кількості членів ряду.

Отримані результати показують, що єдиність розв'язку граничної задачі слід розуміти як єдиність функції у фізичній області, а не як єдиність її аналітичного представлення. Практична побудова розв'язку може приводити до різних за формою виразів, які при достатній точності обчислень дають тотожні значення шуканої функції. Такий підхід має важливе методологічне значення для інтерпретації теорем єдиності та для практики побудови аналітичних і чисельних розв'язків задач математичної фізики.

Ключові слова: *гранична задача; рівняння Лапласа; задача Діріхле; єдиність розв'язку; теорія потенціалу; ряди Фур'є.*

> Будь-яка істота схильна сприймати середовище свого проживання як щось безумовне, що й не може бути іншим і тому не породжує жодних питань. Так відноситься і математик до своєї науки, – і тільки зрідка, коли видається привід поглянути на неї з боку, він раптом помічає, з яким дивним, по суті неправдоподібним явищем мав справу все життя.
> І. Р. Шафаревич (Shafarevich, 1973)

1. Вступ

Кожен раз, коли ми звертаємося до фундаментальних *Принципів* Ньютона, згадується і його власна характеристика методики, котру він використовував при написанні книги: «*Я не вигадую жодних гіпотез*». Судячи з усього, Ньютон вважав особливо важливим підкреслити це. «*Мені ще не вдалося з'ясувати причину цих властивостей гравітації з явищ, і я не висуваю гіпотез. Бо все, що не виводиться з явищ, слід називати гіпотезою; а гіпотези, метафізичні чи фізичні, чи засновані на окультних якостях, чи механічні, не мають місця в експериментальній філософії. У цій філософії окремі твердження виводяться з явищ, а потім узагальнюються за допомогою індукції*».



Рис. 1. Графічне представлення основних складових наукового методу

Робота Ньютона була визначним внеском у процес формування першої наукової революції, що відбулася протягом 16–17 століть. У результаті осмислення наукових досягнень таких вчених, як Кеплер, Копернік, Галілей, Ньютон, Декарт, Гюйгенс, Лейбніц було сформовано науковий метод пізнання. Науковий метод – це емпіричний

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

метод отримання знань шляхом ретельного спостереження, суворого скептицизму, перевірки гіпотез та експериментальної перевірки. Однак і в наші дні основні етапи отримання нових знань (*спостереження – гіпотеза – експеримент*) залишаються незмінними. Послідовність етапів отримання нових знань у ході досліджень можна уявити у вигляді спіралі, яка складається з елементів, котрі повторюються (рис. 1).

Як бачимо, формулювання гіпотез та їх експериментальна перевірка стали невід'ємною частиною наукового методу. Декларація Ньютона просто виражала той факт, що він не мав ніяких ідей відносно природи гравітації. І ця проблема досі є актуальною. Навіть після формування загальної теорії відносності існують питання, для пояснення яких знадобилося використання таких невизначених феноменів, як темна матерія та темна енергія.

Приклад з теорією гравітації Ньютона стимулює інтерес до обговорення важливого питання в теорії пізнання – питання про співвідношення між знанням і розумінням. На цьому прикладі бачимо, що сформульований Ньютоном закон дає чітку відповідь на те, як взаємодіють дві маси, але не дає відповіді на питання – чому виникає гравітація. Теорія тяжіння Ньютона дає нам **знання законів**, але не **розуміння природи** сили тяжіння; вона пояснює *поведінку*, але не *походження*. Це надзвичайно цінний приклад для освіти, особливо математичної: студент може досконало володіти формулою – і водночас не розуміти, *що саме вона означає* і *де межі її сенсу*.

У даній статті обговорюємо одну з проблем у сфері математики, а саме: *розуміння поняття єдиності розв'язку граничної задачі*. Проведемо наше дослідження на основі аналізу розв'язку дуже простої конкретної задачі.

Будучи студентами, ми не раз зустрічалися з теоремою єдиності розв'язку граничної задачі. Відкриємо класичний підручник для студентів фізико-математичних та інженерних спеціальностей університету: М. О. Перестюк, В. В. Маринець «Теорія рівнянь математичної фізики» (Перестюк, Маринець, 2006). На сторінці 239 читаємо теорему 4.3 для граничної задачі рівняння Лапласа:

Теорема 4.3. *Якщо внутрішня або зовнішня задача Діріхле має розв'язок, то цей розв'язок єдиний*.

Подібні теореми формулюються і доводяться для граничних задач інших типів та інших граничних умов. Здається, все чітко і ясно в формулюванні і доведенні теореми. І все ж, коли ми починаємо практичну роботу побудови розв'язку конкретної задачі, відразу виникає питання: що значить – єдиний розв'язок – практично? Це питання стає особливо актуальним ще й тому, що в більшості випадків доведення теорем про єдиність розв'язку не є конструктивною процедурою. Ми підтверджуємо гіпотезу про єдиність розв'язку, не вказуючи алгоритму його побудови.

Щоб пояснити нашу думку зазначимо, що практична побудова розв'язку приводить до того, що самі конкретні розв'язки набувають певної форми, наприклад, нескінченних рядів. І виникає питання про те, чи існують декілька розв'язків різних по формі, які дають тотожні кількісні оцінки для шуканої функції в усіх точках області. Наш досвід дозволяє підняти і змістовно розглянути таке питання:

чи можна для граничних задач, де доведена теорема єдиності розв'язку, знайти нескінченно багато виразів для цього розв'язку?

Іншими словами: *єдиність розв'язку – це не єдиність форми розв'язку.*

Це важливо для розуміння сутності теореми єдиності з практичної точки зору нематематика. Для відповіді на поставлене питання розглянемо конкретну граничну задачу.

2. Проста задача теорії потенціалу

Отже, маємо досить просту задачу теорії потенціалу (Grinchenko, 1996), (Грінченко, 2008). Треба знайти значення гармонічної функції $\phi(x,y)$ у прямокутнику $|x| \le a$, $|y| \le b$, показаному суцільними лініями на рис. 2.

Граничні значення шуканої функції задамо рівностями

$$\phi(\pm a, y) = 0, \qquad \phi(x, \pm b) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right). \tag{1}$$

Очевидно, що шукана функція має вигляд

$$\phi(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\frac{\cosh\left(\frac{\pi y}{2a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi b}{2a}\right)}. \tag{2}$$

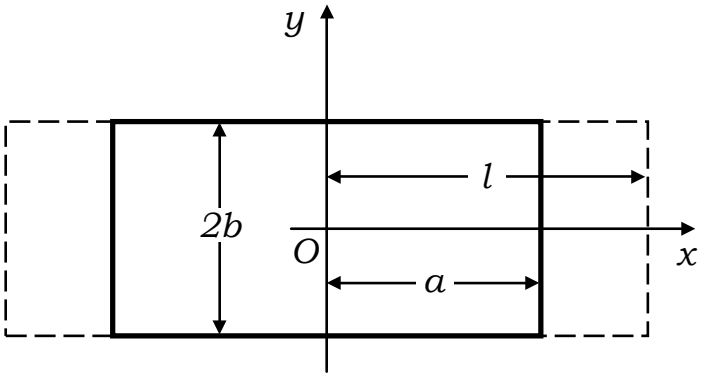


Рис. 2. Геометрія прямокутної області

Тепер розглянемо прямокутну область $-l \le x \le l$, $-b \le y \le b$, яка включає в себе заданий прямокутник. Для цієї нової області легко побудувати загальний розв'язок граничної задачі теорії потенціалу (Грінченко, 2008). Обмежуючись симетричним відносно обох осей випадком, такий розв'язок подамо у вигляді

$$\phi(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(\gamma_m y)\frac{\cosh(\gamma_m x)}{\cosh(\gamma_m l)} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x)\frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)}. \tag{3}$$

Тут прийняті такі позначення:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\gamma_m = \frac{(2m+1)\pi}{2b}, \qquad \delta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}. \tag{4}$$

Наявність нескінченного набору функцій $\cos(\gamma_m y)$ і $\cos(\delta_k x)$, які володіють властивостями повноти і ортогональності на відповідних відрізках, дозволяє задовольнити будь-які граничні умови на сторонах прямокутника $-l \le x \le l,\ -b \le y \le b$. Виконання граничних умов на сторонах цього прямокутника зводиться, по суті, до знаходження коефіцієнтів Фур'є B_m і A_k.

Однак згадаємо, що початкову граничну задачу сформульовано для прямокутника, показаного суцільними лініями на рис. 2. Тому дещо модифікуємо вираз (3) і введемо в розгляд замість (3) такий вираз:

$$\Phi(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos(\gamma_m y)\frac{\cosh(\gamma_m x)}{\cosh(\gamma_m a)} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x)\frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)}. \tag{5}$$

Ця функція, очевидно, задовольняє рівнянню Лапласа, але вираз (5) має смисл розглядати тільки в області $-a \le x \le a,\ -b \le y \le b$, адже для $|x| > a$ перший ряд, без спеціального вибору коефіцієнтів B_m, буде розбіжний. Незважаючи на це, в фізично визначеній області $-a \le x \le a,\ -b \le y \le b$ обидва ряди збіжні і вираз (5) можна трактувати як розв'язок задачі для прямокутника $-a \le x \le a,\ -b \le y \le b$. Основою для такого твердження є те, що вираз (5) має два ряди Фур'є і вибором значень коефіцієнтів B_m і A_k можна виконати довільні граничні умови на сторонах прямокутника $-a \le x \le a,\ -b \le y \le b$. І якщо це так, то ми одержимо ще один розв'язок даної граничної задачі, що суттєво відрізняється за формою від розв'язку (2).

Звісно, вираз (5), котрий дає розв'язок граничної задачі (1), виглядає суттєво складнішим її розв'язку у вигляді (2). Однак якісний аналіз цих виразів показує що між ними немає суттєвої різниці. Вираз (2) приваблює своєю простотою форми і часто трактується як точний розв'язок граничної задачі. Однак при першій же спробі одержати кількісні оцінки характеристик шуканого поля ми бачимо, що цей вираз містить набір трансцендентних чисел і функцій. Це просто значить, що кількісні оцінки поля можуть бути одержані лише з певною точністю, і в цьому сенсі між виразами (2) і (5) немає ніякої принципової різниці. Необхідність просумувати декілька членів ряду в сучасних умовах є просто тривіальним завданням.

На сторонах прямокутника $-a \le x \le a, -b \le y \le b$ маємо повні системи тригонометричних функцій. Однак, система функцій $\cos(\delta_k x)$ не є ортогональною на відрізку $-a \le x \le a$, на якому задано граничні умови. Та все ж, розглянемо можливість використання виразу (5) для виконання граничних умов (1). Розглянемо спочатку граничні умови на сторонах $y = \pm b$. При такому виборі значень параметрів γ_m і δ_k одержуємо функціональне рівняння

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) = \cos(\alpha_0, x), \qquad \alpha_0 = \frac{\pi}{2a}, \qquad -a \le x \le a. \tag{6}$$

Система тригонометричних функцій $\cos(\delta_k x)$ не є ортогональною на відрізку $-a \le x \le a$, але напевно є повною. Можна вказати декілька способів зведення цього рівняння до алгебраїчного. Одним з них може бути, наприклад, мінімізація інтеграла на вказаному проміжку середньоквадратичного відхилення значення нескінченного ряду зліва від значення тригонометричної функції справа в рівнянні (6). Саме така процедура приводить до

визначення коефіцієнтів ряду Фур'є в класичному випадку, коли $\delta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2a}$. При цьому визначення невідомих коефіцієнтів приводить до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Запропонуємо інший підхід до визначення невідомих у (6). Замінимо функціональне рівняння (6) таким:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\delta_k x) = \begin{cases} \cos(\alpha_0, x), & |x| \le a, \\ \xi(x), & a < |x| \le l. \end{cases} \tag{7}$$

Тут $\xi(x)$ – довільна інтегровна функція. Іншими словами, у виразі (7) ми продовжили граничні умови на нефізичні ділянки меж $a < |x| \le l$ у вигляді довільної функції $\xi(x)$. Тепер, використовуючи властивості повноти і ортогональності системи функцій $\cos(\delta_k x)$ на відрізку $|x| \le l$, коефіцієнти A_k знаходяться дуже просто:

$$A_k = \frac{2\alpha_0 \cos(\delta_k a)}{l(\alpha_0^2 - \delta_k^2)} + \xi_k, \tag{8}$$

де

$$\xi_k = \frac{2}{l} \int_{\alpha}^{l} \xi(x) \cos(\delta_k x)\, dx. \tag{9}$$

Використовуючи представлення гіперболічних функцій рядами Фур'є

$$\frac{\cosh(\delta_k y)}{\cosh(\delta_k b)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)} \cos(\gamma_m y), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \tag{10}$$

знаходимо із граничних умов на сторонах $x = \pm a$ значення коефіцієнтів B_m у виразі (5):

$$B_m = -\sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{2(-1)^m \gamma_m}{b(\gamma_m^2 + \delta_k^2)} \cos(\delta_k a). \tag{11}$$

Таким чином, для сформульованої граничної задачі теорії потенціалу (1) одержано два розв'язки (2) і (5). Обидва вирази задовольняють рівняння Лапласа і граничні умови на сторонах прямокутника. Отже, згідно з властивістю єдиності розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа, ці два вирази (2) і (5) мають бути тотожно рівними для всіх точок всередині прямокутника $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$.

Таке твердження виглядає дещо дивним, якщо врахувати, що вирази для коефіцієнтів рядів у (5) включають довільні величини ξ_k. Оскільки в одержаному виразі (8) ця величина є довільною, маємо зробити висновок, що такий аналіз конкретної задачі вказує на специфічний зміст поняття єдиності розв'язку розглянутої граничної задачі. Для даного випадку по суті можна побудувати нескінченну кількість конкретних виразів, які при обчисленнях будуть

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

приводити до тотожних значень потенціалу в кожній точці всередині прямокутника, задовольняючи при цьому задані граничні умови. Процедура одержання такого висновку дозволяє стверджувати, що така ситуація можлива для граничних задач різного виду, а не лише для рівняння Лапласа. Говорячи про єдиність розв'язку граничної задачі слід мати на увазі, що його практична побудова може приводити до виразів, що мають різні форми.

Звичайно, цікаво привести строге математичне доведення цього твердження. І в даному випадку можна навіть вказати шлях для одержання такого результату. Треба розкласти в подвійний ряд Фур'є обидва розв'язки і показати, що коефіцієнти двох рядів співпадають. Це виглядає привабливо, але не практично і вимагає досить складної аналітичної роботи.

Справа в тому, що при проведенні практичних обчислень ми обов'язково обмежуємося скінченними сумами і тому між конкретними числами для характеристик поля в різних точках фізичної області завжди буде певна скінченна різниця. Тому автори, які вже задекларували себе як нематематики (Грінченко, Маципура, 2025), пропонують інший підхід, що базується на використанні комп'ютера. Використання комп'ютера для доведення певних математичних тверджень вже має свою історію. Перш за все слід вказати на комп'ютерне доведення теореми про чотири кольори для географічних карт (McKenzie, 2001). Наскільки нам відомо, ця теорема дотепер не має класичного математичного доведення. Особливо ефективним використання комп'ютера може бути при доведенні несправедливості тверджень. Характерним прикладом цього може бути результат, що стосується проблем поділу множини цілих чисел на дві підмножини, в яких не існує піфагорових трійок. Результат, для одержання якого було проведено надзвичайно громіздкі обчислення, представлено в (Heule, Kullmann, Marek, 2016). Показано, що для множини до 7824 включно можливо декілька розв'язків. Для множини 7825 розв'язків не знайдено.

У випадку розглянутої вище задачі цікаво дослідити специфічну збіжність результатів при виборі довільних точок в області, а також з'ясувати вплив величини довільного параметра ξ_k на ефективність обчислювального процесу. Конкретні обчислення проведено для декількох наборів характерних параметрів. Основним показником близькості кількісних оцінок є величина модуля відносної похибки, вираженої у відсотках,

$$\Delta = \left| \frac{\phi(x,y) - \Phi(x,y)}{\max \phi} \right| \cdot 100\% \qquad (12)$$

від кількості доданків N у скінченних сумах формули (5). Оцінки за формулою (2) вважаємо точними. Величина $\max \phi = \phi(0,b) = 1$ – максимальне значення шуканої функції на границі визначеної області.

Розрахунки поля проведені у чотирьох точках, котрі розміщені уздовж діагоналі прямокутника від точки перетину діагоналей $x = 0,\ y = 0$ до кутової точки з координатами $x = a$, $y = b$ (рис. 3). Координати точок, у яких проводилися розрахунки, вказані на рис. 3 а) – 3 г) зверху над графіками. Геометричні параметри прямокутника: $a = 1{,}7,\ b = 2{,}7$. Уздовж осі ординат використано логарифмічний масштаб. Графіки відповідають трьом варіантам задання функції $\xi(x)$, $a < |x| \le l$, а саме:

i. $\xi(x) = 1$ – червоні точки,
ii. $\xi(x) = 0{,}5$ – сині точки,
iii. $\xi(x) = 0$ – чорні точки.

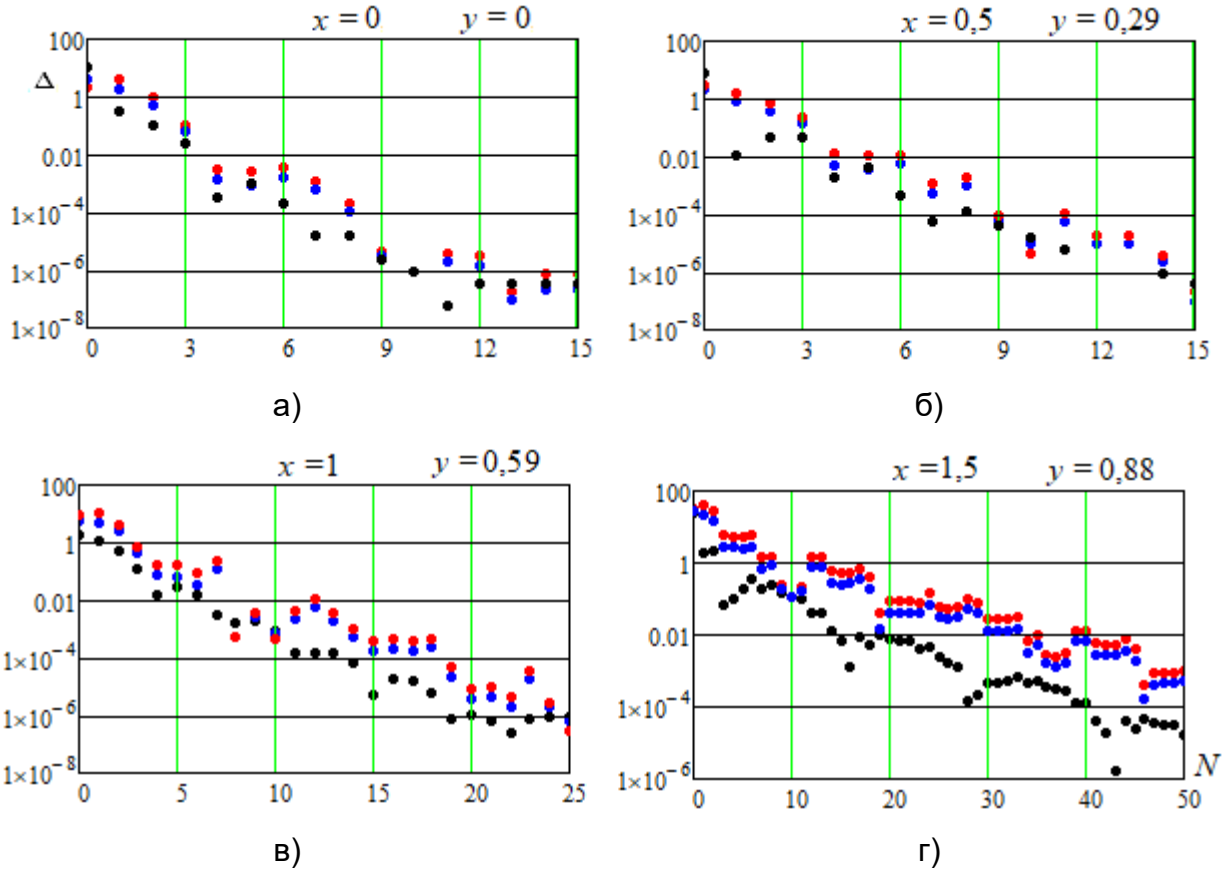


Рис. 3. Графіки залежності модуля відносної похибки, вираженої в процентах Δ %, від кількості доданків N у скінченних сумах формули (5).
Геометричні параметри прямокутника: $a = 1{,}7$, $b = 2{,}7$

Отже, як бачимо, всі три варіанти розрахунку впевнено демонструють наявність чітко вираженої тенденції до зближення значень шуканого розв'язку за формулами (2) і (5) при збільшенні кількості доданків N у скінченних сумах формули (5). При цьому практично точні значення знаходимо при відносно невеликих значеннях числа врахованих доданків N у скінченних рядах. Цікаво і практично важливо, що неперервне продовження граничних умов на нефізичну частину границі суттєво підвищує швидкість зближення оцінок за двома формулами при меншій кількості доданків N у скінченних сумах формули (5). Зауважимо, що для досягнення практичного збігу значень необхідно збільшувати кількість членів ряду.

3. Висновки

Метою роботи було бажання розглянути приклади, які дозволяють поглибити розуміння понять, що широко використовуються при формулюванні задач математичної фізики. Основна увага приділена поняттю єдиності розв'язку граничної задачі. При цьому мова йде не лише про загальні теоретичні міркування. Приведені результати вказують на практичну важливість врахування зміни форми розв'язку при

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

одержанні конкретних кількісних оцінок фізичних полів. Процедура побудови різних розв'язків граничної задачі шляхом продовження граничних умов на нефізичну частину поверхні може здатися надуманою і непотрібною в практиці аналізу фізичних полів різної природи. Однак практичні проблеми, що виникають при побудові аналітичних розв'язків у неканонічних областях, показують невідворотність використання такої процедури (Grinchenko, Vovk, Matsypura, 2018), (Грінченко, Маципура, 2025).

Внесок авторів

Віктор Грінченко – концептуалізація, методологія; Володимир Маципура – валідація даних, написання, перегляд і редагування.

Джерела фінансування

Ця робота не отримувала специфічного гранту від жодного фінансового агента у державному, комерційному чи неприбутковому секторах.

Список використаних джерел

Grinchenko, V. T. (1996). Development of the method for solving problems of sound radiation and scattering in non-canonical areas, Hydromechanics, 70, p. 27–40. [in Russian].

Грінченко В. Т. (2008). Задачі математичної фізики з неповністю визначеними граничними умовами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 51, № 2. С. 53–60.

Viktor T. Grinchenko, Igor V. Vovk & Vladimir T. Matsypura. (2018). Acoustic wave problems. New York : Begell House, Inc. 439 p. DOI: 10.1615/978-1-56700-459-5.0

Грінченко В. Т. & Маципура В. Т. (2025). Погляд нематематика на побудову загального розв'язку граничних задач в неканонічних областях // У світі математики. 2025, том 2, № 1 – С. 132–151. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.11

Перестюк М. О. & Маринець В. В. (2006). Теорія рівнянь математичної фізики: Підручник. К. : Либідь. 424 с. URL: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/3695

Shafarevich I. R. (1973). On some trends in the development of mathematics (Lecture on the occasion of the official awarding of the Heinemann Prize of the Göttingen Academy of Sciences) // Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Gettingem, Gettingen.

Heule M. J. H., Kullmann O. & Marek V. W. (2016). Solving and verifying the boolean pythagorean triples problem via cube-and-conquer, International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing, Springer, pp. 228–245. URL: arXiv:1605.00723v1 [cs.DM] 3 May 2016 https://doi.org/10.1007/978-3-319-40970-2_15

McKenzie D. (2001). Mechanizing Proof. Computing, Risk, and Trust, The MIT Press. 427 p. DOI: https://doi.org/10.7551/mitpress/4529.001.0001

References

Grinchenko, V. T. (1996). Development of the method for solving problems of sound radiation and scattering in non-canonical areas, Hydromechanics, 70, 27–40. [in Russian].

Grinchenko V. T. (2008). Problems of mathematical physics with incompletely defined boundary conditions // Mat. Methods and Phys.-Mechan. Fields. 51, No. 2. Pp. 53–60. [in Ukrainian].

Viktor T. Grinchenko, Igor V. Vovk & Vladimir T. Matsypura. (2018). Acoustic wave problems. New York : Begell House, Inc. 439 p. DOI: 10.1615/978-1-56700-459-5.0

Grinchenko V. T. & Matsypura V. T. (2025). A Non-Mathematician's View on the Construction of a General Solution to Boundary-Value Problems in Non-Canonical Domains // In the World of Mathematics. 2025, Volume 2, No. 1 – C. 132–151. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.11 [in Ukrainian].

Perestyuk M. O. & Marynets V. V. (2006). Theory of Equations of Mathematical Physics: Textbook. Kyiv: Lybid. 424 c. URL: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/3695 [in Ukrainian].

Shafarevich I. R. (1973). On some trends in the development of mathematics (Lecture on the occasion of the official awarding of the Heinemann Prize of the Göttingen Academy of Sciences) // Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Gettingem, Gettingen.

Heule M. J. H., Kullmann O. & Marek V. W. (2016). Solving and verifying the boolean pythagorean triples problem via cube-and-conquer, International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing, Springer, pp. 228–245. URL: arXiv:1605.00723v1 [cs.DM] 3 May 2016 https://doi.org/10.1007/978-3-319-40970-2_15

McKenzie D. (2001). Mechanizing Proof. Computing, Risk, and Trust, The MIT Press. 427 p. DOI: https://doi.org/10.7551/mitpress/4529.001.0001

Отримано редакцією журналу: 27.02.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Victor GRINCHENKO, Active Member of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

Volodymyr MATSYPURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON THE THEOREMS OF EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS. HOW TO UNDERSTAND IT

Abstract. *In the theory of equations of mathematical physics, the theorems on the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems play a fundamental role. However, in practical applications these theorems are often interpreted formally, without a proper understanding of the meaning of the concept of "uniqueness of a solution". This leads to methodological difficulties in the construction of analytical and numerical solutions to problems of potential theory and other problems of mathematical physics. Therefore, it is important to clarify the practical meaning of the concept of uniqueness of a solution and to analyze possible forms of its representation.*

The aim of this study is to deepen the understanding of the concept of uniqueness of a solution to a boundary value problem by analyzing a specific example from potential theory. The main objectives are: to construct alternative analytical representations of the solution to the Dirichlet problem for the Laplace equation in a rectangular domain; to investigate the possibility of obtaining analytically different expressions that describe the same physical solution; and to analyze the convergence of numerical estimates obtained from these representations.

The study employs analytical methods of the theory of equations of mathematical physics, in particular the method of separation of variables, expansions into Fourier series, and the properties of complete systems of functions. To analyze the convergence of different representations of the solution, numerical computations and comparisons of relative errors using finite partial sums of the series are performed.

It is shown that for a simple boundary value problem in potential theory, several different analytical representations of the solution can be obtained, including a representation in terms of an elementary function and a representation in the form of a double series. It is demonstrated that introducing an arbitrary function when extending the boundary conditions to the nonphysical part of the boundary leads to the construction of an infinite set of formally different expressions for the same solution. Numerical

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

experiments confirm the convergence of the results obtained by different formulas as the number of terms in the series increases.

The obtained results show that the uniqueness of a solution to a boundary value problem should be understood as the uniqueness of the function in the physical domain rather than the uniqueness of its analytical representation. The practical construction of a solution may lead to expressions of different forms which, with sufficient computational accuracy, yield identical values of the desired function. This approach has important methodological significance for interpreting uniqueness theorems and for the practical construction of analytical and numerical solutions of problems in mathematical physics.

Keywords: *boundary value problem; Laplace equation; Dirichlet problem; uniqueness of solution; potential theory; Fourier series.*

Received: 27.02.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

Оригінальні результати та математичне моделювання

УДК 512.623.32:515.173.6 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.2**

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р. фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАНУРЕННЯ ПРОЄКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ У ТРИВИМІРНИЙ ПРОСТІР

Анотація. *У статті досліджується занурення проєктивної площини у тривимірний евклідовий простір, що містить одну потрійну точку, а множина подвійних точок утворюється трьома петлями. Побудовано два трансверсальні занурення цього типу: класичне занурення, відоме як поверхня Боя, та його варіант – поверхня Гьолі. Кожна з трьох петель подвійних точок розташована у власному координатному куті, виходячи у додатному напрямку однієї з координатних осей і повертаючись з від'ємного напрямку іншої. У локальному околі цих петель поверхня Боя описується як об'єднання трубчастих околів петель і сполучних циліндрів. У випадку поверхні Гьолі відповідний локальний фрагмент додатково зазнає скручування вздовж однієї з петель. Побудова занурення ґрунтується на розбитті проєктивної площини на окремі частини та означенні відображення для кожної з них.*

Ключові слова: *занурення; вкладення; неорієнтований; стрічка Мебіуса; поверхня Боя; поверхня Гьолі; регулярна поверхня.*

1. Вступ

Топологічні та геометричні властивості проєктивної площини, яка є неорієнтованою поверхнею роду 1, детально проаналізовано у роботі (Пришляк, 2024). Подальший розвиток цієї тематики представлено в (Пришляк, 2025), де побудовано два занурення пляшки Клейна – неорієнтованої поверхні роду 2 – у тривимірний евклідовий простір. У цих зануреннях відсутні потрійні точки, а множина подвійних точок утворює замкнену криву.

Історично питання можливості занурення проєктивної площини у тривимірний простір має глибоке коріння. Давид Гільберт поставив перед своїм учнем Вернером Боєм задачу довести неможливість такого занурення. Проте у 1901 році Вернер Бой побудував приклад занурення, образ якого нині відомий як *поверхня Боя* (*Boy surface*). Протягом десятиліть залишалося відкритим питання явної параметризації цього занурення, і лише в 1978 році Бернар Морен запропонував першу таку параметризацію. Пізніше альтернативний параметричний опис було отримано Робом Куснером та Робертом Браянтом.

Вагомий внесок у розуміння структури множини самоперетинів занурених поверхонь здійснив Томас Банчофф (1974), який довів, що для гладкого трансверсального занурення замкненої неорієнтованої поверхні число потрійних точок має ту саму парність, що й її ейлерова характеристика. Оскільки ейлерова характеристика проєктивної площини дорівнює 1, будь-яке трансверсальне її

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

занурення повинно містити принаймні одну потрійну точку. У випадку, коли така точка єдина, множина подвійних точок утворює три петлі, що сходяться в ній.

Подальші дослідження показали, що окрім класичного занурення Боя існує ще одне топологічно відмінне занурення проєктивної площини з однією потрійною точкою та трьома петлями подвійних точок. Це занурення, яке контрастує з поверхнею Боя за локальною будовою околу петель, отримало назву *поверхні Гьолі* (*Göhly's surface*).

Об'єктом дослідження в цій роботі є поверхні в тривимірному просторі, отримані зануренням проєктивної площини, зокрема, поверхні Боя і Гьолі.

Метою роботи є опис структури двох топологічно різних занурень проєктивної площини з однією потрійною точкою та трьома петлями точок подвійного самоперетину.

2. Трансверсальні занурення та вкладення поверхонь

Нагадаємо, що *вкладення поверхні* – це регулярна поверхня (занурення), яка не містить точок самоперетину. Дві вкладені поверхні перебувають у *загальному положенні* (або *перетинаються трансверсально*), якщо серед їхніх спільних точок немає таких, у яких дотичні площини до поверхонь збігаються; інакше кажучи, поверхні не мають точок дотику в місцях перетину.

Занурення є локальним вкладенням. Це означає, що область визначення відображення занурення може бути поділена на підмножини, на кожній з яких відображення є вкладенням. Занурення називається *трансверсальним*, якщо образи цих підмножин перетинаються трансверсально. Крім того, для відображень у загальному положенні прообраз кожної точки містить не більш ніж три точки.

Із трансверсальності перетину випливає, що *потрійні точки* є ізольованими: для кожної такої точки існує окіл, який не містить інших потрійних точок. Водночас множина **подвійних точок** утворює об'єднання неперетинних кривих.

Приклад 1. *Дві різні координатні площини перетинаються трансверсально по координатній прямій. Якщо поверхня є об'єднанням трьох координатних площин, то вона має одну потрійну точку – початок координат*.

3. Поверхня Боя

Параметризації поверхні Боя. Наведемо декілька відомих параметризацій поверхні Боя. *Параметризація Апері* (Apery, 1987):

$$x(u,v)=\frac{\frac{2}{3}\left(\cos u\cos(2v)+\sqrt{2}\sin u\cos v\right)\cos u}{\sqrt{2}-\sin(2u)\sin(3v)},$$

$$y(u,v)=\frac{\frac{2}{3}\left(\cos u\sin(2v)-\sqrt{2}\sin u\sin v\right)\cos u}{\sqrt{2}-\sin(2u)\sin(3v)},$$

$$z(u,v)=\frac{\frac{2}{3}\cos^2 u}{\sqrt{2}-\sin(2u)\sin(3v)}.$$

Параметризація Браянта–Куснера (Apery, 1987). Нехай комплексне число w задовольняє нерівність $|w|\le 1$. Визначимо

$$g_1=-\frac{3}{2}\Im\left(\frac{w(1-w^4)}{w^6+\sqrt{5}w^3-1}\right),\qquad g_2=-\frac{3}{2}\Re\left(\frac{w(1+w^4)}{w^6+\sqrt{5}w^3-1}\right),$$

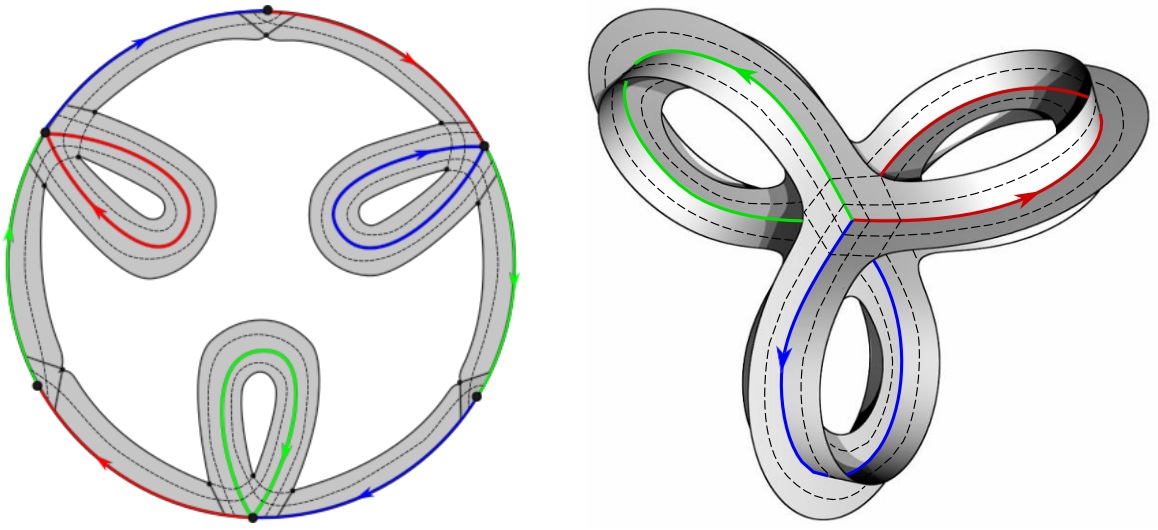
$$g_3=\Im\left(\frac{1+w^6}{w^6+\sqrt{5}w^3-1}\right),\qquad (x,y,z)=\frac{1}{g_1^2+g_2^2+g_3^2}(g_1,g_2,g_3).$$

Параметризація Морена–Апері (Apery 1987):

$$x(u,v)=\frac{\sqrt{2}\cos(2u)\cos^2 v+\cos u\sin(2v)}{2-\sqrt{2}\sin(3u)\sin(2v)},$$

$$y(u,v)=\frac{\sqrt{2}\sin(2u)\cos^2 v-\sin u\sin(2v)}{2-\sqrt{2}\sin(3u)\sin(2v)},$$

$$z(u,v)=\frac{3\cos^2 v}{2-\sqrt{2}\sin(3u)\sin(2v)}.$$



а) б)

Рис 1. Окіл потрійної та подвійних точок на проєктивній площині та поверхні Боя

Побудова поверхні Боя. Для побудови занурення проєктивної площини на поверхню Боя будемо використовувати модель проєктивної площини у вигляді двовимірного диска зі склеєними протилежними точками межі (Пришляк, 2024, Означення 3).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Дамо конструктивний опис поверхні Боя. Спочатку задамо множину, що складається з потрійної точки та подвійних точок, а також побудуємо її окіл на поверхні Боя.

Потрійною точкою є початок координат. Подвійні точки утворюють три петлі, що лежать у координатних кутах та дотичні в потрійній точці до осей координат: червона лежить у куті $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z = 0$, синя – у куті $y \geq 0$, $z \leq 0$, $x = 0$, зелена – у куті $z \geq 0$, $x \leq 0$, $y = 0$.

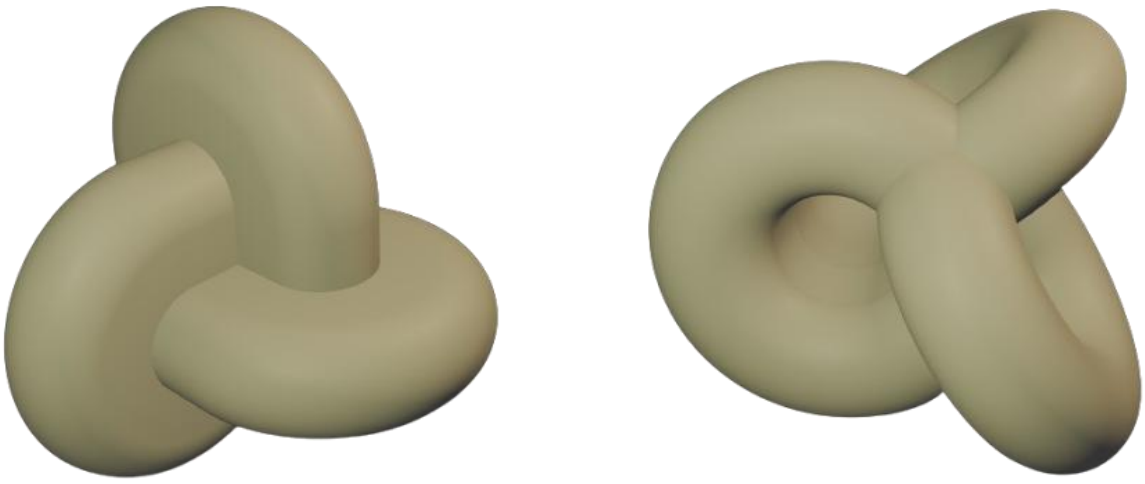
Червона петля (α) (в площині $z = 0$) складається з трьох частин:

1) відрізок $[0, 2] \times \{0\}$ (параметричне рівняння $x = t$, $y = 0$, $t \in [0, 2]$);
2) дуга кола радіуса 2 з центром у $(2,2)$ (параметричне рівняння $x = 2 + 2\cos t$, $y = -2 - 2\sin t$, $t \in [-\pi/2, \pi]$);
3) відрізок $\{0\} \times [-2, 0]$ (параметричне рівняння $x = 0$, $y = t$, $t \in [-2, 0]$).

Аналогічно задаються синя (β) та зелена (γ) петлі. Рух за кожною з петель починається у додатному напрямку однієї з координатних осей, а закінчується у від'ємному напрямку іншої осі. У результаті ми отримаємо гладку регулярну криву з однією потрійною точкою перетину у початку координат.

Для побудови її околу у поверхні Боя розглянемо відрізок $\{0\} \times [-1, 1]$ та будемо його рухати в площині xy перпендикулярно до α і так, що центр відрізка лежить на петлі α. В результаті отримаємо в площині x = 0 множину, що є об'єднанням таких трьох частин:

1) квадрата $[0, 2] \times [-1, 1]$;
2) області $\{(x, y) : 1 \leq (x - 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 9\} \setminus [0, 2] \times [-2, 0]$;
3) квадрата $[-1, 1] \times [-2, 0]$.



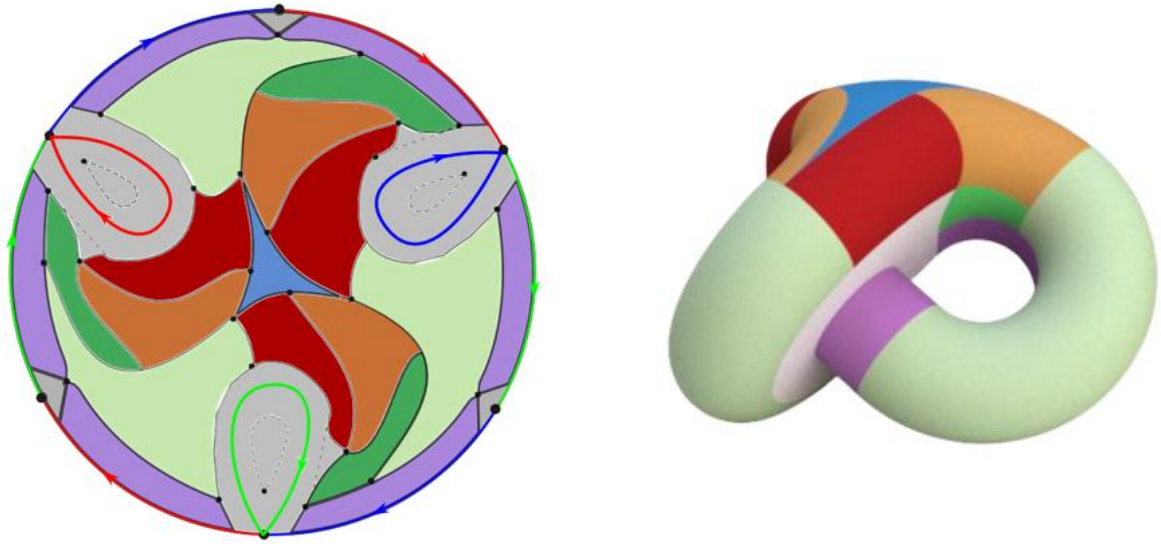
а) б)

Рис. 2. Поверхня Боя: а) вигляд спереду, б) вигляд ззаду

Далі продовжимо рухати відрізок вздовж синьої петлі β перпендикулярно площині $x = 0$. У результаті отримаємо циліндр $[-1, 1] \times \beta$. Після цього продовжуємо рухати відрізок в площині $y = 0$ перпендикулярно γ, де отримаємо її плоский окіл. Після цього рухаємося по α перпендикулярно площині $z = 0$. Отримаємо циліндр $\alpha \times [-1, 1]$. Далі

отримаємо плоский окіл β, а потім циліндр над γ. Ми повернулися в початкове положення відрізка і побудова околу закінчилась (див. рис. 1 б)). Отже, побудований окіл складається з трьох плоских околів петель та трьох циліндрів.

Для побудови поверхні Боя до околу на рисунку 1 б) додамо плоскі області, що лежать всередині петель (заклеюємо петлі двовимірними дисками). Далі будемо рухати петлю α вздовж напрямку петлі γ. Так само γ за β і β за α. Якби ми зразу рухали відрізок $[-2, 2]$ за всіма петлями, то в результаті рухів петель одна по іншій нам залишилось додати лише частини торів. Кожну з поверхонь, отриманих рухом петлі за іншою петлею, будемо називати *рукавом*. Кожен рукав обмежує тривимірне тіло. Беремо їх об'єднання та поверхню, що є його межею (рис. 2).



а) б)

Рис. 3. Занурення проєктивної площини як поверхні Боя

Побудована поверхня, крім початку координат і трьох петель, буде мати ще інші нерегулярні точки – точки перетинів рукавів. Після згладжування поверхні в їх околі отримаємо регулярну поверхню Боя (рис. 3 б)). Таке згладжування та розбиття на частини були запропоновані у (Cheritat, 2014). Маємо по три області кожного кольору, крім синього криволінійного трикутника. Поверхня Боя має вісь, при обертанні навколо якої області одного кольору переходять одна в іншу, а синій криволінійний трикутник сам у себе. Сірі області – це плоскі околи петель, до яких додані невеличкі частинки. Фіолетові області – це частини циліндрів над петлями. Криволінійний синій трикутник може бути розглянутий як область на сфері, а решта областей одного кольору – це частини торів. Кожна з таких областей може бути задана параметричними рівняннями, схожими на ті, які описано у (Пришляк, 2025) з обмеженням області визначення на потрібну множину.

3. Поверхня Гьолі

Крім поверхні Боя було знайдено іншу поверхню, яка також є трансверсальним зануренням проєктивної площини у тривимірний простір з однією потрійною точкою і

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

яка негомеоморфна поверхні Боя. Також було показано, що, з точністю до гомеоморфізму, інших поверхонь, крім цих двох, не існує. Тому, якщо одна з поверхонь має назву Боя, то іншу назвали *поверхнею Гьолі*. На відміну від поверхні Боя, поверхня Гьолі не має осі, обертання навколо якої переводить її саму в себе, тому її не можна розбити на три однакові частини і поверхня Гьолі має складнішу структуру.

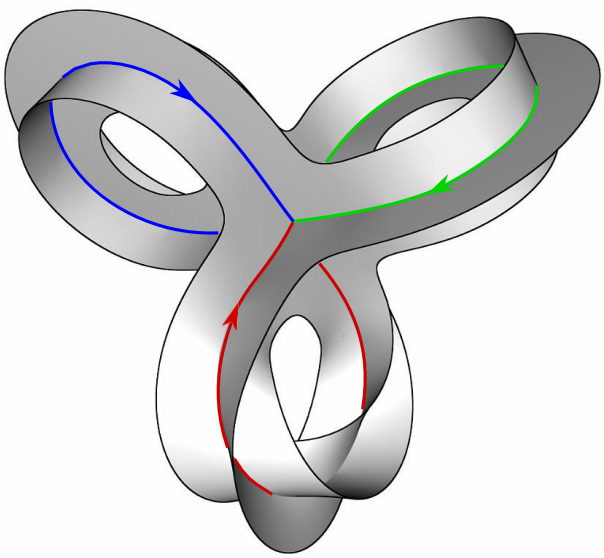


Рис. 4. Окіл потрійної та подвійних точок на поверхні Гьолі

Множина потрійної та подвійних точок, так само як для поверхні Боя, складається з початку координат та трьох петель. Окіл цієї множини отримаємо з відповідного околу для поверхні Боя (рис. 1 б)), перекручуючи окіл червоної петлі. Тобто, коли відрізок рухається по червоній петлі (тієї її частини, що є дугою кола), він у процесі руху ще робить оберт на 180° навколо неї. Рівняння цієї частини поверхні схоже до рівняння листа Мебіуса. Цей окіл зображено на рис. 4.

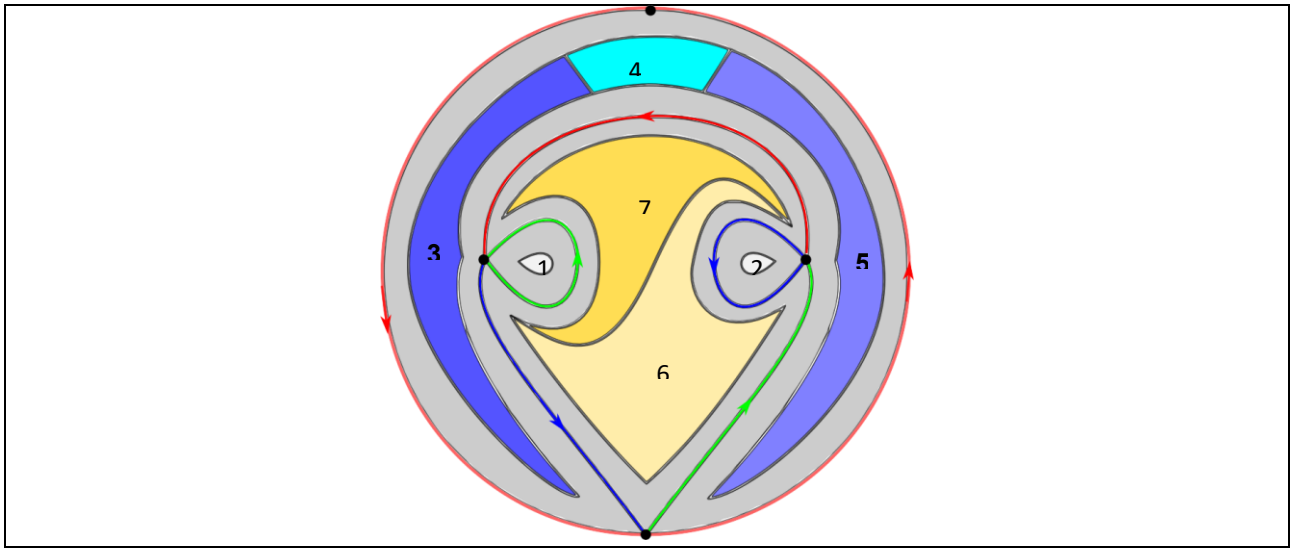


Рис. 5. Прообраз поверхні Гьолі на двовимірному диску

Для опису поверхні Гьолі та занурення проєктивної площини в неї розглянемо розбиття двовимірного диску, зображеного на рис. 5. Кожна з кривих одного кольору відображається на петлю такого самого кольору на поверхні Гьолі, а сіра область відображається в окіл на рис. 4.

Біла область з номером 1 лежить всередині зеленої петлі, а з номером 2 – всередині синьої петлі, за аналогією із поверхнею Боя.

Область 6 відображається в рукав, витягнутий від зеленої петлі вздовж синьої петлі, як на поверхні Боя. Для зручності, у цьому та інших рукавах під час витягування петля буде стискатися до менших розмірів (область 6 на рис. 6). Крім того, витягнемо рукави від зеленої петлі вздовж червоної петлі до її третини та від синьої петлі вздовж червоної петлі також до її третини з іншого боку. Цим рукавам відповідають області 5 та 3 відповідно. Утворені петлі та дугу напроти червоної петлі заклеюємо плівкою 4. Щоб краще собі зрозуміти це відображення, розіб'ємо область 4 на рис. 5 на відрізки, один кінець яких лежить на верхній дузі, а інший – на нижній. Межа рукава 5 відповідає правому відрізку, а рукава 3 – лівому відрізку. На рис. 4 перша межа – це дуга, що з'єднує верхню та праву стрічки на початку червоної петлі. При русі відрізка від межі рукава 5 до 3, ця дуга на рис. 4 верхнім кінцем робить невеликий рух вліво до заднього кінця межі рукава 3, а правим кінцем проходить по дузі близько до потрійної точки і виходить як лівий кінець межі рукава 3. Таким чином, образ області 4 схожий на частину листа Мебіуса, де відрізок обертається при русі по колу.

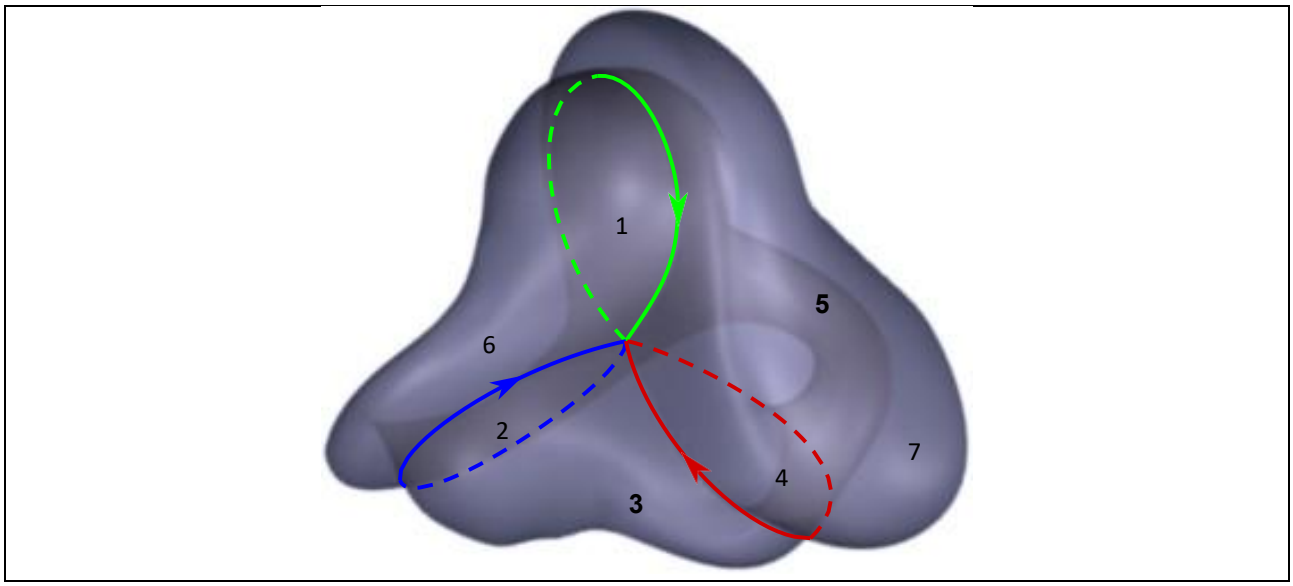


Рис. 6. Поверхня Гьолі

І врешті, зовнішню частину межі околу зеленої петлі і решту межі утвореної поверхні заклеюємо областю 7. Для цього спочатку розвернемо межу першого рукава назовні – будемо при витягуванні рукава точки, що знаходяться далі від початку координат витягувати дещо менше (чим далі від початку координат, тим менше). Виберемо сферу з початком координат, яка містить у собі всю зроблену конструкцію. Від незаклеєних точок межі проведемо відрізки вздовж радіусів до перетину зі сферою.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отримаємо замкнену криву на сфері, що за *теоремою Жордана* розбиває сферу на дві області, виберемо одну з цих областей. Отже, область 7 відображається на об'єднання цих відрізків та області. Після згладжування кутів отримаємо регулярну поверхню.

У результаті отримуємо відображення областей двовимірного диска на поверхню Гьолі. Ці відображення можна зробити такими, щоб вони збігалися на спільних межах криволінійних многокутників і, таким чином, разом будуть задавати відображення в поверхню Гьолі. Оскільки протилежні точки на межі мають однакові образи, то після склеювання цих точок отримаємо проєктивну площину та відображення занурення проєктивної площини.

Зауважимо, що, як і у випадку поверхні Боя, можна застосувати симетрію відносно площини, яка відображає синю петлю на зелену, а червону петлю саму в себе. Застосування симетрії відносно цієї площини до поверхонь Боя та Гьолі, приводить до нових поверхонь, які гомеоморфні початковим, але не можуть бути до них неперервно деформовані (в класі трансверсальних занурень).

4. Висновки

У роботі побудовано та проаналізовано два топологічно відмінні трансверсальні занурення проєктивної площини у тривимірний евклідовий простір, а також доведено регулярність відповідних відображень. Запропоновані конструкції мають важливі наслідки для топології неорієнтованих поверхонь: зокрема, вони дають змогу отримувати занурення поверхонь довільного роду шляхом виконання операції зв'язної суми.

Окрему цінність становить те, що описані занурення є наочними прикладами стратифікованих множин із однією потрійною точкою. Це відкриває можливість перенесення досліджень функцій та динамічних систем, визначених на таких поверхнях, на двовимірний диск за аналогією з результатами, наведеними в роботах (Prishlyak, Di Beo, 2022) та (Prishlyak, Loseva, 2022).

Джерела фінансування

Дослідження не отримало фінансової підтримки від державних, комерційних чи некомерційних організацій.

Список використаних джерел

Apéry F. (1987). Models of the real projective plane. Springer Book Archive. URL: https://www.doi.org/10.1007/978-3-322-89569-1

Banchoff T.F. (1974). Triple points and singularities of projections of smoothly immersed surfaces. Proceedings of AMS, 46(3): 407-413. URL: https://www.doi.org/10.2307/2040066

Boy W. (1903). Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Math.Ann. 57(2):151–184, URL: https://www.doi.org/10.1007/BF01444342

Chéritat A. (2014). A model of Boy's surface in Constructive Solid Geometry. URL: https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/boy-surface/index.html

Goodman S. & Kossowski M. (2009). Immersions of the projective plane with one triplepoint. Differential Geom. Appl., 27 (4): 527–542. URL: https://www.doi.org/10.1016/j.difgeo.2009.01.011

Goodman S., Mellnik A. & Séquin C. H. (2013). Girl's surface. Proceedings of Bridges: Math., 383–388. URL: http://archive.bridgesmathart.org/2013/bridges2013-383.html

Petit J.P. & Souriau J. (1981). Une représentation analytique de la surface de Boy. URL: http://www.jp-petit.org/science/maths_f/boy/f5101.htm

Prishlyak A. & Di Beo L. (2022). Flows with minimal number of singularities on the Boy's surface. Proceedings of the International Geometry Center, 15 (1):32-49. URL: https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i1.2225

Prishlyak A. & Loseva M. (2022). Toplogical structure of optimal flows on the Girl's surface. Proceedings of the International Geometry Center, 15(3-4): 184-202. URL: https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2338

Пришляк О. & Білун С. (2024). Геометрія та топологія проєктивної площини // *У світі математики*, випуск 1. С. 70-76.

URL: https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/30/16

Пришляк О. (2025). Занурення пляшки Клейна у тривимірний простір. *У світі математики*, випуск 2. С. 153-161. URL: https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/83/51

References

Apéry F. (1987). Models of the real projective plane. Springer Book Archive. URL: https://www.doi.org/10.1007/978-3-322-89569-1

Banchoff T.F. (1974). Triple points and singularities of projections of smoothly immersed surfaces. Proceedings of AMS, 46(3): 407-413. URL: https://www.doi.org/10.2307/2040066

Boy W. (1903). Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen. Math.Ann. 57(2):151–184, URL: https://www.doi.org/10.1007/BF01444342

Chéritat A. (2014). A model of Boy's surface in Constructive Solid Geometry. URL: https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/boy-surface/index.html

Goodman S. & Kossowski M. (2009). Immersions of the projective plane with one triplepoint. Differential Geom. Appl., 27 (4): 527–542. URL: https://www.doi.org/10.1016/j.difgeo.2009.01.011

Goodman S., Mellnik A. & Séquin C. H. (2013). Girl's surface. Proceedings of Bridges: Math., 383–388. URL: http://archive.bridgesmathart.org/2013/bridges2013-383.html

Petit J.P. & Souriau J. (1981). Une représentation analytique de la surface de Boy. URL: http://www.jp-petit.org/science/maths_f/boy/f5101.htm

Prishlyak A. & Di Beo L. (2022). Flows with minimal number of singularities on the Boy's surface. Proceedings of the International Geometry Center, 15 (1):32-49. URL: https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i1.2225

Prishlyak A. & Loseva M. (2022). Toplogical structure of optimal flows on the Girl's surface. Proceedings of the International Geometry Center, 15 (3-4): 184-202. URL: https://doi.org/10.15673/tmgc.v15i3-4.2338

Pryshlyak O. & Bilun S. (2024). Geometry and topology of the projective plane. // *U sviti matematyky*, vypusk 1. pp. 70-76. URL: https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/30/16 [in Ukrainian].

Pryshlyak O. (2025). Immersion of a Klein bottle in three-dimensional space. // *U sviti matematyky*, vypusk 2. pp. 153-161. URL: https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/83/51 [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 20.11.2025
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Alexandr PRISHLYAK, D.Sc. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

IMMERSION OF THE PROJECTIVE PLANE IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Abstract. *This paper investigates an immersion of the projective plane into three-dimensional Euclidean space that contains a single triple point, while the set of double points consists of three loops. We construct two transversal immersions of this type: the classical Boy surface and its variant, the Höhle surface. Each of the three double-point loops is located in its own coordinate octant, emerging in the positive direction of one coordinate axis and returning from the negative direction of another. In a neighborhood of these loops, the Boy surface is described as the union of tubular neighborhoods of the loops together with connecting cylinders. In the Höhle surface, the corresponding local region additionally undergoes a twist along one of the loops. The construction of the immersion is based on decomposing the projective plane into several parts and defining appropriate mappings on each of them.*

Keywords: *immersion; embedding; non-orintable surface; Möbius strip; Boy surface; Gyoli surface; regular surface.*

Received: 20.11.2025
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

УДК 517.31:[37.016:51-33] **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.3**

Alexander BRAVERMAN, PhD (Math)
ORCID: 0009-0007-3300-7291
e-mail: braive@gmail.com
Kaye Academic College of Education, Be'er-Sheva, Israel

Ohad CARMI, B.Sc. in Data Science
ORCID: 0009-0002-8235-1930
e-mail: carmiohad@gmail.com
Be'er-Sheva, Israel

Peter SAMOVOL, PhD (Phys&Math)
ORCID: 0009-0004-6770-7139
e-mail: peter.samovol@gmail.com
Ben-Gurion University of the Negev, Be'er-Sheva, Israel

INTEGRALS WITH A HIDDEN SOLUTION: NO NEED FOR COMPLEX CALCULATIONS

Abstract. *This article presents a collection of definite integrals that, while seemingly beyond the reach of standard high school techniques, can be evaluated using elementary properties and the Newton–Leibniz formula. These examples are designed to shift students' perception of integration from a purely procedural task to a conceptual exploration. The methods and insights discussed here are intended to enrich classroom instruction and serve as compact, curriculum-aligned challenge problems.*

Key words: *Definite integrals; Mathematics education; Conceptual exploration; Challenge problems.*

1. Introduction

The definite integral is typically introduced to high school students as a computational tool, evaluated through antiderivatives and standard algebraic techniques. However, many integrals that appear intractable using these methods can be resolved with surprisingly simple ideas already within students' reach such as symmetry, properties of even and odd functions, and the Newton-Leibniz formula.

This article aims to demonstrate how elegant reasoning can unlock integrals that initially seem complex or inaccessible. By presenting problems whose solutions rely not on advanced techniques but on insightful application of basic principles, we seek to highlight the conceptual beauty of integration. In doing so, we hope to foster mathematical curiosity and provide teachers with meaningful examples to enrich classroom learning.

The integrals presented here can be used as "short questions" in the high school curriculum, particularly in advanced-level courses. They emphasize not only technical skill but also strategic thinking an essential component of mathematical education.

2. Explanations and Justifications

The concept of the integral is not only fundamental in school-level mathematics, but also essential for further academic studies. According to research by (Jones, 2014), most

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

students perceive a definite integral either as the area under a curve or as an 'antiderivative', while only a minority recognize it as a sum. The findings of (Serhan, 2015) suggest that although students are capable of applying procedural knowledge to solve integration tasks, they often lack a deeper conceptual understanding of basic integration concepts.

In preparing this article, we asked ourselves how we could introduce students to integrals that do not extend beyond the boundaries of the high school curriculum. Of course, there are classical textbooks such as Thomas' Calculus (Thomas et al., 2004), upon which many high school materials are based. These typically present definite integrals as computational exercises reliant on indefinite integrals.

Our focus, instead, is on properties that follow from the definition of the definite integral and its inherent characteristics within the school curriculum. An additional objective is to generate a sense of mathematical discovery by revealing seemingly 'hidden' solutions and providing students with a meaningful experience of mathematical insight (Braverman, Samovol, Applebaum, 2004). Students also gain a valuable takeaway: even when an indefinite integral cannot be found for a specific function, the corresponding definite integral may still be computable.

3. The Newton–Leibniz Formula as a Source of Interesting Properties

We begin by presenting several calculus definitions and theorems we will use (Thomas et al., 2004).

Definition 1. *A function* F *is an antiderivative of* f *on an interval* D *if for all* x *in* D

$$F'(x) = f(x).$$

The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1.

Theorem 1. *If* f *is continuous on* $[a, b]$*, then*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

is continuous on $[a, b]$*, differentiable on* (a, b)*, and its derivative is* $f(x)$*; that is,* $F'(x) = f(x)$.

The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2 (Newton–Leibniz Formula).

Theorem 2. *If* f *is continuous at every point of* $[a, b]$*, and* F *is an antiderivative of* f *over* $[a, b]$*, then*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (*)$$

It is also worth noting that from the derivative property $(F(kx+n))' = kF'(kx+n)$ and from formula (*), it follows that:

$$\int_a^b f(kx+n)dx = \frac{1}{k}F(kx+n)\Big|_a^b = \frac{1}{k}F(kb+n) - \frac{1}{k}F(ka+n). \qquad (**)$$

Let $f(x)$ be a function defined and continuous for all $a \le x \le b$. We will now demonstrate several important properties of definite integrals that can be derived using the Newton–Leibniz formula (*).

Property (1) $I_1 = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$

Property (2) $I_2 = \int_{-\frac{(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} - x\right)dx = \int_a^b f(x)dx.$

If $f(x)$ is defined and continuous for all $0 \le x \le 1$, then:

Property (3) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$

If $f(x)$ is defined and continuous for all $-a \le x \le a$, then:

Property (4) $I_4 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx.$

If $f(x)$ is defined on the interval $[-a, a]$ and is an even function then:

Property (5) $I_5 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

If $f(x)$ is defined on the interval $[-a, a]$ and is an odd function then:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Property (6) $I_6 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Note: *Before each full solution, we offer a brief conceptual clue. Readers who grasp the underlying idea may choose to skip the detailed proof*.

3.1. Proving the properties

Note: *In all cases,* F *is an antiderivative of the function* f.
Clues: *If the function* $f(x)$ *is defined and continuous for all* $a \le x \le b$ *then:*

$$I_1 = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

1. Now prove that:

$$I_1 = \int_{a}^{b} f(a+b-x)\,dx.$$

2. Prove **Property (2)** using the Newton-Leibniz Formula.
3. Prove **Property (3)** using **Property (1)** for $a = 0,\ b = 0{,}5 \cdot \pi$.
4. Prove **Property (4)** using the Newton-Leibniz Formula.
5. Prove **Property (5)** using the Newton-Leibniz Formula.
6. Prove **Property (6)** using the Newton-Leibniz Formula.

Full proof.
To prove Properties (1) – (6), we will use the Newton–Leibniz Formula:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a) \qquad (*)$$

and also, the property:

$$\int_{a}^{b} f(kx+n)dx = \frac{1}{k}F(kx+n)\Big|_{a}^{b} = \frac{1}{k}F(kb+n) - \frac{1}{k}F(ka+n). \qquad (**)$$

We will now prove the properties:
Property (1) follows from formulas (*) and (**):

$$I_1 = \int_a^b f(a+b-x)dx = -F(a+b-x)\Big|_a^b = -F(a+b-b) + F(a+b-a) = \\ = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

Property (2) is established using (*) and (**) as well:

$$I_2 = \int_{-\frac{(b-a)}{2}}^{\frac{(b-a)}{2}} f\left(\frac{a+b}{2} - x\right)dx = -F\left(\frac{a+b}{2} - x\right)\Big|_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \\ = -F\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\right) + F\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\right) = \\ = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Property (3) proof we will use **Property (1)**:

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(0 + \frac{\pi}{2} - x\right)\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx. \tag{3}$$

Property (4) is established as follows:

$$I_4 = \int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx. \tag{4}$$

Applying **Property (1)** yields:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-a+0-x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

According to (**) we obtain:

$$\int_{-a}^{0} f(-a+0-x)dx + \int_0^a f(x)dx = -F(-a-x)\Big|_{-a}^{0} + \int_0^a f(x)dx =$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$= F(0) - F(-a) + \int_0^a f(x)dx.$$

We proceed according to (**):

$$F(0) - F(-a) + \int_0^a f(x)dx = -\big(F(-a) - F(-0)\big) + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Property (5). First, **Property (4)** is applied:

$$I_5 = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx.$$

Given the fact that the function is an even function we obtain:

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Property (6). Again, begin with **Property (4)**:

$$I_6 = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx.$$

Then we will use the fact that the function is odd and obtain:

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = 0.$$

3.1. Examples

Example 1. Evaluate the following integral using **Property (1)**:

$$I = \int_2^4 \frac{\ln x^2}{\ln x^2 + \ln(x^2 - 12x + 36)}\,dx.$$

(This example is taken from the 48th William Lowell Putnam Competition, 1987).
Solving. Clues:

1) Prove using **Property (1)** (with $a = 2,\ b = 4$) that:

$$I = \int_2^4 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(6-x)}\,dx.$$

2) Prove that:

$$I = \int_2^4 \frac{\ln(6-x)}{\ln(6-x) + ln\, x}\,dx.$$

3) Prove that:

$$2I = \int_2^4 \frac{\ln x + \ln(6-x)}{\ln x + \ln(6-x)}\,dx = 2.$$

Calculate I in a different way.

Full proof. First, simplify the expression inside the integral using logarithmic properties:

$$I = \int_2^4 \frac{\ln x^2}{\ln x^2 + \ln(x^2 - 12x + 36)}\,dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{2\ln x}{2\ln x + \ln(x-6)^2}\,dx = \int_2^4 \frac{2\ln x}{2\ln x + 2\ln(6-x)}\,dx = \int_2^4 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(6-x)}\,dx.$$

Now apply **Property (1)**:

$$\int_2^4 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(6-x)}\,dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{\ln(2+4-x)}{\ln(2+4-x) + \ln(6-(2+4-x))}\,dx = \int_2^4 \frac{\ln(6-x)}{\ln(6-x) + \ln x}\,dx.$$

Then:

$$I = \int_2^4 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(6-x)}\,dx.$$

But also:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$I = \int_2^4 \frac{\ln(6-x)}{\ln(6-x)+\ln x}\,dx.$$

Therefore:

$$I + I = \int_2^4 \frac{\ln x}{\ln x + \ln(6-x)}\,dx + \int_2^4 \frac{\ln(6-x)}{\ln x + \ln(6-x)}\,dx = \int_2^4 dx = 2.$$

And in conclusion:

$$2I = 2 \quad \Rightarrow \quad I = 1.$$

Answer: $I = 1$.

Example 2. Evaluate the following integral using **Property (3)**:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx.$$

Solving. Apply **Property (3)**:

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx.$$

Add the two resulting integrals:

$$I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\,dx.$$

Therefore:

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

So:

$$I = \frac{\pi}{4}.$$

Answer: $I = \frac{\pi}{4}$.

Example 3. Evaluate the following integral using **Properties (2)** and **(4)**

$$I = \int_{2}^{4} \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(x+3)} + \sqrt{\ln(9-x)}} dx.$$

Solving. Clues:

1. Prove using **Property (2)** with $a = 2,\ b = 4$ that:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6+x)}}{\sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(9-x)}} dx.$$

2. Prove using **Property (4)** with $a = -1, b = 1$ that:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6+x)} + \sqrt{\ln(6-x)}}{\sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(6+x)}} dx.$$

Full proof. Apply **Property (2)**:

$$I = \int_{2}^{4} \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(x+3)} + \sqrt{\ln(9-x)}} dx =$$

$$= \int_{-\frac{4-2}{2}}^{\frac{4-2}{2}} \frac{\sqrt{\ln\left(9 - \left(\frac{4+2}{2} - x\right)\right)}}{\sqrt{\ln\left(\left(\frac{4+2}{2} - x\right) + 3\right)} + \sqrt{\ln\left(9 - \left(\frac{4+2}{2} - x\right)\right)}} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6+x)}}{\sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(6+x)}} dx.$$

Then use **Property (4)**:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6+x)}}{\sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(6+x)}} dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6+x)}}{\sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(6+x)}} dx + \int_{0}^{1} \frac{\sqrt{\ln(6-x)}}{\sqrt{\ln(6+x)} + \sqrt{\ln(6-x)}} dx =$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{\ln(6+x)} + \sqrt{\ln(6-x)}}{\sqrt{\ln(6-x)} + \sqrt{\ln(6+x)}} dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Answer: $I = 1$.

Example 4. Evaluate the following integral using **Properties (5)** and **(6)**:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 5x^5 - 3x^3 + 8\tan^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

Solving. Clues:

1. Prove that:

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 5x^5 - 3x^3}{\cos^2 x} dx = 0.$$

2. Prove that:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\tan^2 x}{\cos^2 x} dx = 8 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, d(\tan x).$$

3. Calculate that $I = I_1 + I_2$.

Full proof. Rewrite the integral:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 5x^5 - 3x^3 + 8\tan^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 5x^5 - 3x^3}{\cos^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{8\tan^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

The function

$$f(x) = \frac{x^7 - 5x^5 - 3x^3}{\cos^2 x}$$

is odd so:

$$f(-x)=\frac{(-x)^7-5(-x)^5-3(-x)^3}{\cos^2(-x)}=-\frac{x^7-5x^5-3x^3}{\cos^2 x}=-f(x).$$

The function

$$g(x)=\frac{8\tan^2 x}{\cos^2 x}$$

is even so:

$$g(-x)=\frac{8\tan^2(-x)}{\cos^2(-x)}=\frac{8\tan^2 x}{\cos^2 x}=g(x).$$

Therefore, by **Properties (5)** and **(6)**:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^7-5x^5-3x^3}{\cos^2 x}dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{8\tan^2 x}{\cos^2 x}dx=0+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}8\tan^2 x\,d(\tan x)=\frac{8\tan^3 x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{3}.$$

Answer: $I=\frac{8}{3}$.

Example 5. Evaluate the following:

$$\int_0^1|f(x)-x|dx.$$

If you know that $f(x)$ is continues and symmetric with respect to $y=x$ and $f(0)=1$.

Solving. Clues:

1. Sketch $f(x)$ for $0\le x\le 1$.
2. Look at the provided sketch of a general $f(x)$ (Figure 1).
3. Explain why $S_2=S_3$, and $S_1=S_4$.
4. Check if necessarily $S_2+S_4=0{,}5$.
5. Prove that:

$$\mathrm{I}=\int_0^1|f(x)-x|dx=\int_0^{x_0}[f(x)-x]dx+\int_{x_0}^1[x-f(x)]dx.$$

6. Prove that $I=0{,}5\cdot S_{ABCD}$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

7. How might this problem be generalized?

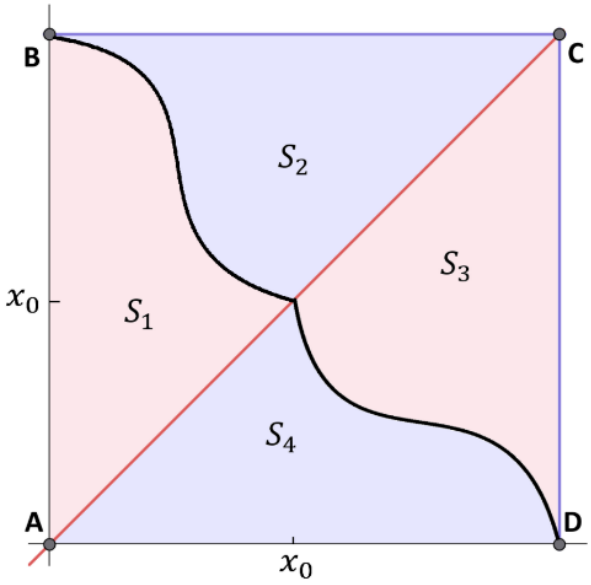


Figure 1. Sketch of $f(x)$.

Full proof. In Figure 1, point A is the origin, $B(0,1)$, $C(1,1)$, $D(1,0)$.

We know that $f(0) = 1$ and also that $f(x)$ is symmetrical with respect to $y = x$, it is its own inverse. Then $f(1) = 0$.

The function $f(x)$ intersects the line $y = x$ at the point (x_0, x_0), since it is continuous, point B lies above the line, and point D lies below it. We therefore obtain: $f(x_0) = x_0$.

ABCD is a square with side length 1 the diagonal AC divides it into two congruent triangles, each of area $\frac{1}{2}$. Since $f(x)$ is symmetric with respect to $y = x$, we obtain: $S_2 = S_3$, and $S_1 = S_4$.

We can see that:

$$S_3 + S_4 = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}.$$

Therefore:

$$S_2 + S_4 = S_3 + S_4 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^{x_0} |f(x) - x| dx + \int_{x_0}^1 |f(x) - x| dx.$$

That is because x_0 is the intersection with $y = x$, if $x \geq x_0$ we get that $x \leq f(x)$. If $x \leq x_0$ we get that $x \geq f(x)$.

So, for $x \leq x_0$:

$$|f(x)-x| = f(x)-x$$

and for $x \geq x_0$:

$$|f(x)-x| = x-f(x).$$

$$I = \int_0^{x_0} [f(x)-x]dx + \int_{x_0}^{1} [x-f(x)]dx = S_1 + S_3 = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2}.$$

Answer: $I = \frac{1}{2}$.

3.3. Integrals with reversed limits of integration

Example 6. Evaluate the following integral:

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan x}{1-x+x^2}\,dx\,, \qquad a > 1.$$

Solving. Clues:

1. Prove that:

$$I = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan \frac{1}{t}}{t^2-t+1}\,dt.$$

2. Use the fact that:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Prove that:

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2-x+1}\,dx.$$

4. Calculate $2I$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Full proof. This integral has limits of integration that are symmetric with respect to a transformation. Thus, we use the substitution $t = \frac{1}{x}$ which allows us to preserve the limits of integration.

We get $t = \frac{1}{x}$, $dt = -\frac{dx}{x^2}$ and if $x = \frac{1}{a}$, then $t = a$, if $x = a$ then $t = \frac{1}{a}$ $(a > 1)$:

$$I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan x}{1 - x + x^2} dx = \int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan \frac{1}{t}}{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = -\int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan \frac{1}{t}}{t^2 - t + 1} dt.$$

We know that:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx.$$

Therefore:

$$I = -\int_{a}^{\frac{1}{a}} \frac{\arctan \frac{1}{t}}{t^2 - t + 1} dt = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan \frac{1}{t}}{t^2 - t + 1} dt = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2 - x + 1} dx.$$

We now add the original integral to the expression we just obtained (which is equal to it):

$$I + I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan x}{1 - x + x^2} dx + \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{x^2 - x + 1} dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan x + \arctan \frac{1}{x}}{1 - x + x^2} dx.$$

We will use the fact that for all real x, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ therefore:

$$2I = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\arctan x + \arctan \frac{1}{x}}{1 - x + x^2} dx = \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - x + x^2} dx.$$

Complete the square in the denominator where appropriate, and simplify:

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_{\frac{1}{a}}^{a} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\frac{1}{a}}^{a} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}}\cdot\left(\arctan\frac{2a-1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{\frac{2}{a}-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Answer:

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\cdot\left(\arctan\frac{2a-1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{\frac{2}{a}-1}{\sqrt{3}}\right).$$

Example 7. Evaluate the following integral:

$$I = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$$

Solving. Clues:

1. Use Integration by parts.

Or

1. Calculate the inverse function.
2. Look at the lines $x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ and $y = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

Full proof. We will provide 2 proofs.
First: We will use Integration by parts,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Let's substitute:

$$dv = dx, \qquad u = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\downarrow$$

$$v = x,$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$du = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx = x \cdot \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx,$$

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx = x \cdot \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Now we can find I:

$$I = \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx = \left(x \cdot \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} + 1.$$

Second:

$$y = f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

We can see that:

$$f'(x) > 0.$$

Therefore, the function $f(x)$ is ascending throughout its entire domain, and there exists a function $f^{-1}(x)$:

Let's build $f^{-1}(x)$:

$$y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) \quad \text{(blue)};$$

$$x = \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) \quad \text{(red)};$$

$$y - e^x = \sqrt{1+y^2} \to y - e^x \geq 0;$$

$$y^2 - 2ye^x + e^{2x} = 1 + y^2.$$

We get:

$$y = f^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} < e^x \quad \text{(red)}.$$

It is known that the graphs of inverse functions are symmetric with respect to the line $y = x$ additionally, as shown in the diagram, the coordinates of point D are $\left(1, \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$ and the coordinates C are $\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right), 1\right)$.

We want to find the doted area which is equal to the dashed area (Figure 2).

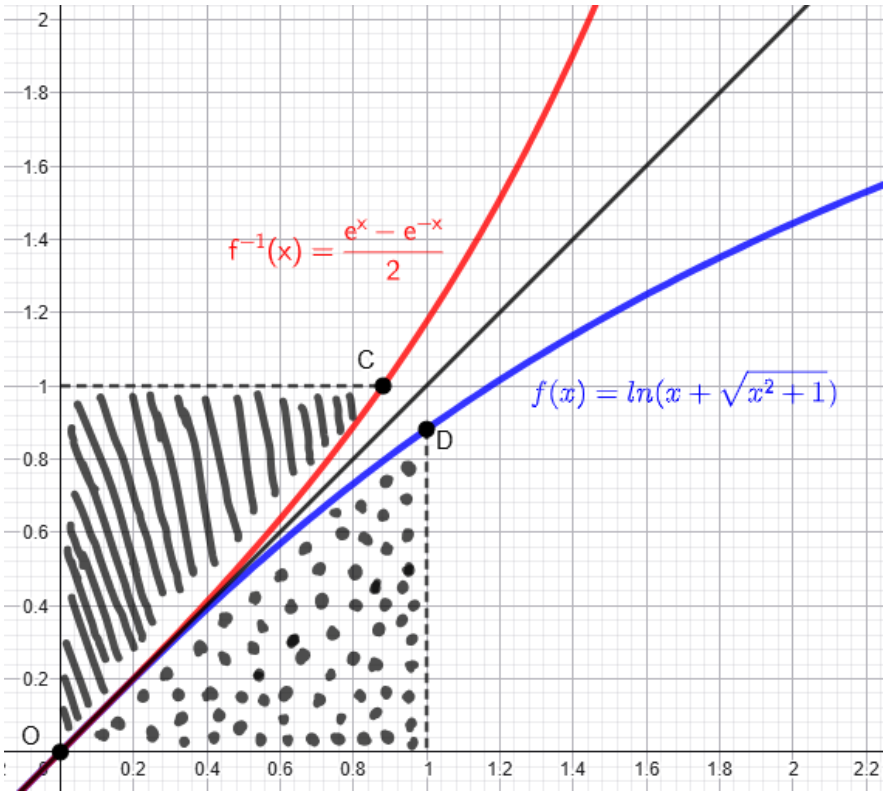


Figure 2. Diagram of $f(x)$ and its inverse

$$I = \int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \left(1 - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) dx = \left(x - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\Big|_0^{\ln(1+\sqrt{2})} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} + 1.$$

Answer: $I = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} + 1$.

4. Additional Examples (Without Solutions)

We now present several additional integrals that can be solved using the properties discussed above, but we leave their full solutions to the reader:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$I_I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{e^{\frac{1}{x}} + 1} dx\,;$$

$$I_{II} = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} dx\,;$$

$$I_{III} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^{\sqrt{2}} x} dx.$$

I_I – Cluse:

1. Use **Property (4)**.
2. Prove that:

$$I_I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} + \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} \right) dx.$$

Show that:

$$\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} + \frac{1}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} \right) = 1.$$

Conclude that:

$$I_I = 1.$$

I_{II} – Cluse:

1. Take $x = \tan(\phi)$ and check if:

$$I_{II} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan(\phi)\right) d\phi.$$

For $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$.

2. Check if

$$I_{II} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \phi\right)\right) d\phi.$$

3. Prove that:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\phi\right)\right) d\phi \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2)\, d\phi - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(\phi))\, d\phi.$$

4. Show that:

$$I_{II} = \frac{\pi}{8}\ln(2).$$

I_{III} – Cluse:

1. Define $f(x) = \frac{1}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}$ and $g(x) = \frac{\tan^{\sqrt{2}}x}{1+\tan^{\sqrt{2}}x}$ and see that $f(x)+g(x)=1$.
2. Prove that $g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{cotan}^{\sqrt{2}}(x)}$.
3. Verify that $g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.
4. Show that:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Prove that:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx.$$

6. Finally show that:

$$I_{III} = \frac{\pi}{4}.$$

5. Conclusion

In this article, we presented several properties of the definite integral that allow for the evaluation of integrals which, at first glance, seem unsolvable. The methods demonstrated here provide valuable material for teachers who wish to enrich their instruction on integration, and they also offer additional tools to students or undergraduates studying the topic of the definite integral.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

In our view, both the derivation of the formulas presented in the article and the evaluation of integrals using them can serve as a source for “short questions” in high school mathematics curriculum.

References

Braverman, A., Samovol, P. & Applebaum, M. (2004). Positive Impressing of a School Research Problem. *Didactics of Mathematics: Problems and Investigations* 22: 116 - 120. Donezk. https://donnu.ru/public/journals/files/22%2C%202004.pdf

Jones, S.R. (2014). *The frequencies of various interpretations of the definite integral in a general student population*. In Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,Vol. 3, pp. 401-408. Vancouver, Canada: PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599837.pdf

Serhan, D. (2015). *Students' understanding of the definite integral concept. International Journal of Research in Education and Science* (IJRES), 1(1), 84-88. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1105099.pdf

The Forty-Eighth Annual William Lowell Putnam Competition. Saturday, December 5, 1987. https://kskedlaya.org/putnam-archive/1987.pdf

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R. (2004). Thomas' calculus. Updated 11th ed., pp. 343-347. https://vulms.vu.edu.pk/Courses/MTH101/Downloads/Thomas%20Calculus%2011th%20Edition.pdf

Список використаних джерел

Braverman, A., Samovol, P. & Applebaum, M. (2004). Positive Impressing of a School Research Problem. *Didactics of Mathematics: Problems and Investigations* 22: 116 - 120. Donezk. https://donnu.ru/public/journals/files/22%2C%202004.pdf

Jones, S.R. (2014). *The frequencies of various interpretations of the definite integral in a general student population*. In Oesterle, S., Liljedahl, P., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36,Vol. 3, pp. 401-408. Vancouver, Canada: PME. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED599837.pdf

Serhan, D. (2015). *Students' understanding of the definite integral concept. International Journal of Research in Education and Science* (IJRES), 1(1), 84-88. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1105099.pdf

The Forty-Eighth Annual William Lowell Putnam Competition. Saturday, December 5, 1987. https://kskedlaya.org/putnam-archive/1987.pdf

Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J., Giordano, F. R. (2004). Thomas' calculus. Updated 11th ed., pp. 343-347. https://vulms.vu.edu.pk/Courses/MTH101/Downloads/Thomas%20Calculus%2011th%20Edition.pdf

Received: 25.02.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

Олександр БРАВЕРМАН, PhD (Математика)
ORCID: 0009-0007-3300-7291
e-mail: braive@gmail.com
Педагогічний коледж Кей, Беер-Шева, Ізраїль

Охад КАРМІ, бакалавр в Data Science
ORCID: 0009-0002-8235-1930
електронна адреса: carmiohad@gmail.com
Беер-Шева, Ізраїль

Петро САМОВОЛ, Канд. фіз.-мат. наук
ORCID: 0009-0004-6770-7139
електронна адреса: peter.samovol@gmail.com
Університет Бен-Гуріона в Негеві, Беер-Шева, Ізраїль

ІНТЕГРАЛИ З ПРИХОВАНИМ РОЗВ'ЯЗКОМ: НЕМАЄ ПОТРЕБИ В СКЛАДНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ

Анотація. *У цій статті представлено колекцію визначених інтегралів, які, хоча, здавалося б, виходять за межі досяжності стандартних шкільних методів, можна обчислити за допомогою елементарних властивостей та формули Ньютона-Лейбніца. Ці приклади розроблені для того, щоб змінити сприйняття учнями інтегрування з суто процедурного завдання на концептуальне дослідження. Методи та ідеї, що обговорюються тут, мають на меті збагатити навчання в класі та слугувати компактними, узгодженими з навчальною програмою складними задачами.*

Ключові слова: *визначені інтеграли; математична освіта; концептуальне дослідження; складні задачі.*

Отримано редакцією журналу: 25.02.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Сучасні методики та технології математичної освіти

УДК 378.6.091.27:53.01+510 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.4**

Вікторія ЦАНЬ, PhD у галузі «Мат. і стат.»,
вчитель математики вищої кат., старший вчитель
ORCID ID: 0000-0002-2748-9569
e-mail: viktoriia.tsan@knu.ua
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олександр ЛИНЕЦЬ, вчитель математики вищої кат.
ORCID ID: 0009-0006-6846-7573
Український фізико-математичний ліцей
e-mail: lynets.oleksandr@gmail.com
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олексій ПЕЧЕРИЦЯ, PhD у галузі «Мат. і стат.»,
вчитель математики вищої кат., вчитель-методист
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

«ФІЗМАТКОЛАЙДЕР» ЯК ІННОВАЦІЙНИЙ ФОРМАТ ІНТЕГРОВАНИХ УЧНІВСЬКИХ ЗМАГАНЬ

Анотація. *У статті представлено концепцію першого комплексного змагання «ФізМатКолайдер», проведеного 11–15 січня 2026 року командою Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Розглянуто концепцію змагання як інтегрованої моделі роботи з обдарованою молоддю, що поєднує індивідуальні та командні формати, математичні й фізичні дисципліни, теоретичні та експериментальні випробування. Проаналізовано структуру програми, зміст задач, педагогічний потенціал різних складових змагання.*

Ключові слова: *математичні змагання; фізико-математична освіта; обдарована молодь; олімпіадний та турнірний рух; математичні задачі.*

1. Вступ

Система роботи з математично та природничо обдарованою молоддю в Україні має глибокі традиції та вагомі результати. Учнівські олімпіади, турніри, командні чемпіонати й інші інтелектуальні змагання впродовж десятиліть були важливим механізмом виявлення талановитих школярів, формування майбутньої наукової еліти держави та підтримки престижу фізико-математичної освіти.

Класичні олімпіади традиційно спрямовані на перевірку індивідуальної здатності учасника розв’язувати нестандартні задачі впродовж обмеженого часу. Особливостями участі у турнірах є тривала колективна дослідницька робота і публічний захист результатів у процесі наукової дискусії. На противагу турнірам

командні чемпіонати перевіряють швидкість мислення, тактичну гнучкість і здатність працювати в умовах дефіциту часу. Кожен із цих форматів має власну педагогічну цінність, але кожен окремо дає лише часткове уявлення про потенціал учасника.

Сучасна освіта дедалі більше потребує моделей, що поєднують предметну глибину з компетентнісним підходом. Уже недостатньо оцінювати лише правильність письмового розв'язання. Не менш важливими стають здатність працювати в команді, переконливо аргументувати власну позицію, слухати інших, аналізувати дані експерименту, швидко адаптуватися до нових умов та витримувати інтенсивне інтелектуальне навантаження. Саме тому актуальним є пошук нових форматів змагань для обдарованої молоді.

Таким форматом став комплексний турнір «ФізМатКолайдер», що відбувся 11–15 січня 2026 року в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. Подія об'єднала учасників із різних регіонів України, зокрема, з Києва, Львова, Дніпра, Кременчука та Вінниці, та стала прикладом інтегрованого підходу до організації інтелектуальних змагань.

Назва турніру є символічною. У фізиці *колайдер* є установкою, у якій зіткнення частинок дає змогу досліджувати фундаментальні закономірності природи. В освітньому контексті «ФізМатКолайдер» став простором інтелектуальної взаємодії, де зустрілися сильні команди, складні задачі з фізики та математики, різні стилі мислення, змагальний азарт і спільна повага до знань. Ідея турніру полягала у створенні середовища, де учні можуть проявити себе багатовимірно – як в індивідуальних змаганнях, так і як члени команди, доповідачі й опоненти, як експериментатори та відповідальні партнери у спільній інтелектуальній роботі.

2. Огляд формату змагання

Змагання проходило у двох лігах: молодшій – для учнів 8–9 класів та старшій – для учнів 10–11 класів. Такий поділ дозволив коректніше врахувати вікові особливості учасників і забезпечити належний рівень конкуренції. У першому турнірі взяли участь 77 учасників в молодшій лізі та 75 учасників у старшій лізі, загалом по 14 команд у кожній. До організації, перевірки робіт, підготовки задач, суддівства та методичного супроводу були залучені десятки фахівців. Серед них викладачі Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, команда «Online Physics School» на чолі з тренером збірної України з фізики, Заслуженим вчителем України Максимом Пашком, представники спільноти «Українські математичні олімпіади», доктор фізико-математичних наук, професор Київського національного університету імені Тараса Шевченка, багаторічний голова журі Всеукраїнської олімпіади з математики, лідер національної збірної України з математики Богдан Рубльов, та інші представники українського фізико-математичного олімпіадного руху. Уже сам масштаб першого заходу засвідчив високий інтерес освітньої спільноти до подібних форматів.

Програма турніру охоплювала п'ять днів інтенсивної роботи. Фізико-математична олімпіада відкривала змагальну частину турніру і була головним індивідуальним

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

випробуванням для учасників обох ліг. Її формат передбачав самостійну письмову роботу з окремими блоками задач з математики та фізики, що дозволяло комплексно оцінити рівень підготовки школярів.

Математична частина охоплювала геометрію, алгебру, комбінаторику, теорію чисел, задачі на інваріанти, оцінки та логічні конструкції. Частина завдань була близькою до класичного олімпіадного стилю, де ключову роль відіграє одна нетривіальна ідея, інші вимагали поєднання кількох методів або послідовного дослідження структури задачі.

Фізичний блок завдань був створений таким чином, щоб охопити максимальну кількість розділів шкільної фізики і бути цікавими і посильними не лише досвідченим олімпійцям, а й тим учням, хто тільки починає свій шлях в олімпіадах. Такий формат дозволяв виявити справжню глибину індивідуальної підготовки учасників.

Фізико-математичні бої стали центральною командною подією турніру. Після отримання комплекту задач команди мали обмежений час на колективну роботу, розподіл ролей, пошук розв’язань та підготовку доповідей. Надалі відбувалися безпосередньо бої, під час яких представник однієї команди представляв розв’язання, іншої – виступав опонентом, а журі оцінювало як математичну, так і фізичну коректність. У такому форматі перевіряються як знання, так і навички роботи в команді, коректність сприйняття зауважень, здатність швидко перебудовувати аргументацію та захищати власну позицію. Добір задач для боїв вимагав особливої уваги: вони мали бути достатньо доступними для початку роботи, але водночас містити простір для різних підходів, узагальнень, часткових просувань і змістовної полеміки. Їхні умови будуть опубліковані у щорічних збірниках Всеукраїнських математичних олімпіад (за ред. Б. В. Рубльова) та Всеукраїнських фізичних змагань (за ред. М. І. Пашка).

Змагання з фізичного експерименту мало практичну спрямованість і суттєво відрізнялося від письмових турів. Учасники працювали з реальним обладнанням, проводили серії вимірювань, будували таблиці та графіки, оцінювали похибки і формулювали висновки щодо явищ, які досліджувались. Завдання добиралися так, щоб перевірити вміння школярів поводитися з приладами, бачити залежності між величинами та критично аналізувати експериментальні дані. Це наближало конкурс до реальної наукової практики, де важливо уміти отримувати інформацію з досліду та інтерпретувати її.

Чемпіонат з математики мав інший, динамічний, формат і був орієнтований на швидкість, точність та тактичне мислення. Учасники працювали з великою кількістю коротших задач, де важливими ставали оперативне розпізнавання ідеї, вміння не втрачати темп, раціонально розподіляти час та комбінувати кілька ідей в одному розв’язанні. Такий підбір дозволив перевірити технічну вправність, гнучкість мислення та здатність швидко знаходити структуру задачі. Чемпіонат став інтелектуально дуже насиченим етапом програми і гармонійно доповнив класичну олімпіаду та бої.

Підсумковий розподіл нагород будувався за багатокомпонентною системою. Окремо визначалися переможці в індивідуальних дисциплінах, командних змаганнях та загальному комплексному заліку. Такий підхід відповідав самій ідеї турніру: відзначити різнобічну силу учасників і команд. У загальному заліку враховувалися

результати різних форматів, що стимулювало стабільний виступ учасників упродовж усіх п'яти днів. Саме тому дипломи «ФізМатКолайдера» стали відзнакою не одного вдалого туру, а комплексної фізико-математичної підготовки високого рівня, витривалості та універсальності.

Особливу увагу привертає задачне наповнення турніру. Саме задачі визначають рівень будь-якого змагання, формують його репутацію та впливають на освітню цінність. Для «ФізМатКолайдера» були підготовлені комплекти задач із математики та фізики, авторами яких були члени журі фінального етапу Всеукраїнських олімпіад, тренери національних збірних з математики та фізики, а також випускники Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які свого часу формували кістяк команд ліцею не лише на Всеукраїнських олімпіадах, а й представляли Україну на міжнародному рівні.

3. Задачі чемпіонату з математики

Наведемо кілька характерних прикладів завдань, що пропонувалися учасникам чемпіонату з математики. Формат цього змагання передбачав динамічну роботу з різнорівневими завданнями, тому добір задач орієнтувався на глибину змісту та можливість швидко виявити математичну ідею, коректно реалізувати її та отримати завершене розв'язання у стислі часові терміни.

3.1. Теорія чисел

Завдання з теорії чисел охоплювали як класичні сюжети, так і оригінальні конструкції. Учасники працювали із задачами на подільність, алгоритм Евкліда, арифметику остач, діофантові рівняння, прості числа та числові оцінки. Такий тематичний добір дозволив перевірити технічну вправність, здатність швидко розпізнавати структуру задачі, знаходити ключову ідею та будувати строгі доведення.

Задача 1. (*Олександр Линець*). Знайдіть усі пари натуральних чисел m та n таких, що $m-n=10$, а сума m та n дорівнює сумі найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного чисел m та n.

Розв'язання. Нехай $d=\text{НСД}\,(m,n)$. Тоді $m=da$, $n=db$, де $\text{НСД}\,(a,b)=1$. Оскільки $m+n=\text{НСД}\,(m,n)+\text{НСК}\,(m,n)$, маємо

$$da+db=d+dab.$$

Після ділення на d одержуємо $a+b=1+ab$, звідки $ab-a-b+1=0$, тобто

$$(a-1)(b-1)=0.$$

Оскільки $m-n=10>0$, то $a>b$, тому $b=1$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Тоді з умови $m-n=10$ маємо $da-d=10$, або $d(a-1)=10$. Отже, d є додатним дільником числа 10. Перебираючи $d=1,2,5,10$, знаходимо відповідно

$$(a,n,m)\in\{(11,1,11),\ (6,2,12),\ (3,5,15),\ (2,10,20)\}.$$

Відповідь: $(11;1),\ (12;2),\ (15;5),\ (20;10)$.

Задача 2. (*КЈМО 2005, зі змінами*). (Art of Problem Solving online, 2025). Знайдіть нескоротний дріб q зі знаменником, меншим за 2026, такий, що $q\neq\frac{9}{25}$, але q є найближчим до $\frac{9}{25}$.

Розв'язання. Нехай $q=\frac{m}{n}$, де $m,n\in\mathbb{N}$, НСД $(m,n)=1$ та $n<2026$. Тоді

$$A=\left|\frac{9}{25}-\frac{m}{n}\right|=\frac{|9n-25m|}{25n}.$$

Потрібно знайти такі m і n, для яких величина A є найменшою.

Найменше можливе додатне значення чисельника $|9n-25m|$ дорівнює 1. Розглянемо обидва випадки.

Якщо $9n-25m=1$, то розв'язки в натуральних числах мають вигляд

$$m=9k+5,\qquad n=25k+14.$$

З умови $n<2026$ маємо $25k+14<2026$, звідки найбільше можливе значення k дорівнює 80. Тоді $m=725$, $n=2014$ і $A=\frac{1}{25\cdot2014}$.

Якщо $9n-25m=-1$, то розв'язки мають вигляд

$$m=9k+4,\qquad n=25k+11.$$

З умови $n<2026$ маємо $25k+11<2026$, звідки найбільше можливе значення k дорівнює 80. Тоді $m=724$, $n=2011$ і $A=\frac{1}{25\cdot2011}$.

Оскільки

$$A\geq\frac{2}{25n}>\frac{1}{25\cdot2026},$$

але $\frac{2}{25\cdot2026}>\frac{1}{25\cdot2014}$, тому такі дроби не є ближчими до $\frac{9}{25}$.

Відповідь: $\frac{725}{2014}$.

Задача 3. (*Andrew Kwon*). (Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition, 2016). Знайдіть усі натуральні n, для яких існують прості числа p, q, r, що задовольняють рівність

$$p^n + q^2 = r^2.$$

Розв'язання. Маємо

$$p^n = r^2 - q^2 = (r - q)(r + q),$$

причому $r > q$.

Спочатку використаємо міркування парності. Якщо числа p, q, r непарні, то

$$p^n + q^n \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4,$$

а квадрат непарного числа не може давати остачу 2 за модулем 4. Отже, одне з чисел a або b дорівнює 2.

Нехай $p = 2$. Тоді $2^n = (r - q)(r + q)$. Оскільки добуток дорівнює степеню двійки, обидва множники також є степенями двійки. Отже, існують $a < b$, для яких

$$r - q = 2^a, \qquad r + q = 2^b.$$

Віднімаючи, дістаємо $2q = 2^b - 2^a$. Оскільки q – просте непарне число, мусить бути $a = 1$. Тоді

$$q = 2^{b-1} - 1, \qquad r = 2^{b-1} + 1.$$

Позначимо $c = b - 1$. Маємо $q = 2^c - 1$, $r = 2^c + 1$. Якщо c непарне, то $2^c + 1$ ділиться на 3, а простим може бути при $c = 1$, де $q = 1$, що неможливо. Якщо $c > 2$ парне, то $2^c - 1$ ділиться на 3 і також не є простим. Отже, можливе лише $c = 2$. Тоді $q = 3$, $r = 5$, а з рівності $2^n = 25 - 9 = 16$ отримуємо $n = 4$.

Нехай тепер $q = 2$. Тоді $p^n = (r - 2)(r + 2)$. Оскільки добуток дорівнює степеню простого числа p, обидва множники мають бути степенями числа p: існують $a < b$, для яких

$$r - 2 = p^a, \qquad r + 2 = p^b.$$

Віднімаючи, маємо $p^b - p^a = 4$, тобто

$$p^a(p^{b-a} - 1) = 4.$$

Якщо $p = 2$, то r було б парним простим числом, що неможливо. Отже, p непарне, а тому p^a є непарним дільником числа 4. Звідси $a = 0$, тобто $p^b - 1 = 4$. Маємо $p^b = 5$, звідки $p = 5$, $b = 1$, $r = 3$. Тоді $n = a + b = 1$. Перевірка:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$5 + 4 = 9 = 3^2.$$

Отже, шуканими є лише два значення n.

Відповідь: $n = 1$, $n = 4$.

Задача 4. (*Київська міська олімпіада 2006–2007, зі змінами*). (Анікушин та ін., 2008). Троє божевільних учених розірвали енциклопедію на три частини. Коли кожен із них подивився на останню сторінку свого шматка, з'ясувалося, що там були три трицифрових числа, в запису яких використовується дев'ять різних ненульових цифр. Скільки сторінок щонайбільше може мати шматок енциклопедії, що був розташований посередині?

Розв'язання. Нехай останні сторінки трьох шматків мають номери a, b, c, де $a < b < c$. Тоді кількість сторінок у середньому шматку дорівнює $b - a$.

Оскільки енциклопедію поділено на три частини по аркушах, остання сторінка кожного шматка має парний номер. Отже, числа a, b, c закінчуються парними цифрами. У записах цих трьох трицифрових чисел використано всі дев'ять ненульових цифр по одному разу.

Щоб різниця $b - a$ була якомога більшою, число a має бути якомога меншим, а число b – якомога більшим. Найменшу сотню для a дає цифра 1, сотню для b доцільно взяти рівною 8, оскільки число c має бути ще більшим за b, тому воно повинно починатися з 9.

Отже, для останніх цифр чисел залишаються парні цифри $2, 4, 6$, а для середніх цифр $-$ $3, 5, 7$. Перевіряючи можливі варіанти розміщення цифр з урахуванням умов $a < b < c$, найбільшу різницю дає трійка:

$$a = 132, \qquad b = 876, \qquad c = 954.$$

Тоді середній шматок містить $876 - 132 = 744$ сторінки.

Відповідь: 744 сторінки.

Задача 5. (*Київська міська олімпіада 2003–2004*). (Лейфура та ін., 2008). Знайдіть усі натуральні n такі, що в десятковому записі чисел $6n$, $9n$, $13n$ усі цифри від 0 до 9 зустрічаються по одному разу.

Розв'язання. Усього в записах трьох чисел має бути 10 цифр. Оскільки $6n < 9n < 13n$, можливий лише випадок, коли числа $6n$ та $9n$ є трицифровими, а число $13n$ є чотирицифровим. Справді, якщо $13n$ було б не більш ніж трицифровим, загальна кількість цифр не перевищувала б 9, а якщо $13n$ було б п'ятицифровим, то разом із записами $6n$ та $9n$ цифр було б уже більше ніж 10.

Отже, маємо $100 \le 9n$ та $13n < 10\,000$, а також $13n \ge 1\,000$. Звідси достатньо врахувати оцінку $77 \le n \le 111$.

Сума всіх цифр від 0 до 9 дорівнює 45. Тому число $6n + 9n + 13n = 28n$ має суму цифр, що ділиться на 9. Отже, $28n$ ділиться на 9, а оскільки 28 взаємно просте з 9, то n ділиться на 9.

У проміжку $77 \le n \le 111$ залишаються лише числа

$$81, \quad 90, \quad 99, \quad 108.$$

Перевірка показує, що умову задовольняє тільки $n = 81$:

$$6n = 486, \quad 9n = 729, \quad 13n = 1053.$$

У записах чисел 486, 729, $1\,053$ кожна з цифр від 0 до 9 трапляється рівно один раз.

Відповідь: 81.

Задача 6. (*Примак Андрій, Київська міська олімпіада 2007–2008, зі змінами*). (Анікушин та ін., 2010). На дошці по колу виписані послідовно в порядку зростання за рухом годинникової стрілки усі натуральні числа від 1 до 2026. Сашко обирає деяке записане число і витирає його. Далі послідовно за рухом годинникової стрілки пропускає одне число і витирає. Сашко робить так до тих пір, поки не залишиться останнє число. З якого числа треба почати, щоб на дошці залишилося число 67?

Розв'язання. Розглянемо спочатку допоміжний факт. Якщо по колу записано 2^k чисел і першим витерти число 1, а далі щоразу пропускати одне число і витирати наступне, то останнім залишиться число 2^k.

Справді, після першого проходу будуть витерті всі непарні числа: $1, 3, 5, \dots, 2^k - 1$. Залишаться тільки парні числа $2, 4, 6, \dots, 2^k$. Якщо поділити їх номери на 2, отримаємо таку саму задачу для 2^{k-1} чисел. За індукцією останнім серед них буде число 2^{k-1}, тобто в початковій нумерації залишиться 2^k.

Тепер повернемося до 2026 чисел. Найбільший степінь двійки, що не перевищує 2026, дорівнює 1024. Маємо $2026 = 1024 + 1002$.

Якщо першим витерти число 1, то після перших 1002 витирань фактично відбувається зсув задачі до випадку зі степенем двійки. Для задачі Йосифа з кроком 2 відомо, що при $N = 2^k + l$ останнім залишається число $2l$, якщо першим витирається число 1. У нашому випадку $l = 1002$, тому останнім залишилося б число

$$2 \cdot 1002 = 2004.$$

Отже, якщо починати з числа 1, останнім буде 2004.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Тепер урахуємо, що початкове число можна змінити. Якщо першим витирати не 1, а деяке число s, то вся картина просто циклічно зсувається. При старті з s число s відіграє роль числа 1, число $s+1$ відіграє роль числа 2 і так далі по колу.

Оскільки при старті з 1 останнім є 2004, то при старті з s останнім буде число, яке стоїть на 2004-му місці від s за рухом годинникової стрілки. Треба, щоб це було 67.

Отже, число 67 має відповідати номеру 2004 у зсунутій нумерації. Тому стартове число має бути на 2003 позиції перед числом 67 по колу. Обчислюємо:

$$67 - 2003 = -1936.$$

Додаємо 2026 і отримуємо 90.

Перевіримо зсув: якщо $s = 90$, то число 90 має номер 1, число 91 має номер 2, а число 67 має номер 2004. Саме номер 2004 і залишається останнім.

Відповідь: треба почати з числа 90.

Задача 7. (*Київська міська олімпіада 2010 –2011, зі змінами*). (Анікушин та ін., 2011). Задано число

$$N = 5^{2026} \cdot 2026^5.$$

Скільки існує натуральних дільників числа N^2, які менші за N і при цьому не є дільниками N?

Розв'язання. Оскільки $2026 = 2 \cdot 1013$, маємо

$$N = 5^{2026} \cdot 2026^5 = 2^5 \cdot 5^{2026} \cdot 1013^5.$$

Тоді

$$N^2 = 2^{10} \cdot 5^{4052} \cdot 1013^{10}.$$

Кількість натуральних дільників числа N^2 дорівнює

$$(10+1)(4052+1)(10+1) = 490413.$$

Серед цих дільників рівно один дорівнює N. Усі інші дільники розбиваються на пари d і $\frac{N^2}{d}$, причому один із них менший за N, а інший більший за N. Отже, кількість дільників числа N^2, менших за N, дорівнює

$$\frac{490413 - 1}{2} = 245206.$$

Тепер порахуємо, скільки серед них є дільниками самого числа N. Кількість натуральних дільників числа N дорівнює

$$(5+1)(2026+1)(5+1) = 72972.$$

Серед них лише один дільник не менший за N, а саме саме число N. Тому дільників числа N, менших за N, є $72972 - 1 = 72971$.

Отже, кількість шуканих дільників числа N^2, які менші за N, але не є дільниками N, дорівнює

$$245206 - 72971 = 172235.$$

Відповідь: 172235.

3.2. Алгебра

Окремий тематичний блок чемпіонату з математики становили задачі з алгебри. Такий вибір є природним, оскільки саме алгебра поєднує обчислювальну культуру, уміння працювати з тотожностями, бачити структуру виразів і досліджувати залежності між величинами. Для змагального формату алгебра особливо цінна тим, що в межах одного розділу можна запропонувати як задачі на швидке перетворення, так і завдання, що потребують глибокого аналізу та нестандартної ідеї.

Учасникам чемпіонату були запропоновані задачі, пов'язані з многочленами, рівняннями, нерівностями, властивостями числових послідовностей, симетричними виразами та раціональними перетвореннями. Частина завдань перевіряла технічну вправність і точність обчислень, інші вимагали побачити приховану структуру або вдало використати класичні методи алгебри.

Особливий інтерес становили задачі, у яких елементарне формулювання поєднувалося з неочевидним розв'язанням. Саме такі завдання найкраще виявляють математичну зрілість учасника, здатність експериментувати з виразами та переходити від окремих спостережень до загального висновку.

Наведемо кілька характерних прикладів задач алгебраїчного блоку.

Задача 8. (*Київська міська олімпіада 2010–2011, зі змінами*). (Анікушин та ін., 2011). Знайдіть усі значення параметра b, при яких для кожного x принаймні одна з функцій

$$f_1(x) = x^2 + 2026x + b \quad \text{чи} \quad f_2(x) = x^2 - 2026x + b$$

приймає додатне значення.

Розв'язання. При $x = 0$ маємо $f_1(0) = f_2(0) = b$. Тому при $b \leq 0$ обидві функції в точці $x = 0$ не є додатними, отже, такі значення b умову не задовольняють.

Нехай тепер $b > 0$. Для довільного x додамо значення обох функцій:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$f_1(x) + f_2(x) = 2x^2 + 2b.$$

Оскільки $b > 0$, то $2x^2 + 2b > 0$ для кожного x. Отже, сума двох чисел $f_1(x)$ і $f_2(x)$ додатна, тому принаймні одне з них є додатним.

Таким чином, умову задачі задовольняють усі й тільки ті значення параметра, для яких $b > 0$.

Відповідь: $b > 0$.

Задача 9. (*Київська міська олімпіада 2012–2013, зі змінами*). Знайдіть усі строго спадні функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що для довільних дійсних x, y справджується рівність

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x - y) + 1.$$

Розв'язання. Покладемо в заданій рівності $x = y$. Тоді отримаємо

$$f\big(y + f(y)\big) = f(0) + 1.$$

Права частина не залежить від y, тому значення $f\big(y + f(y)\big)$ є сталим для всіх y. Оскільки функція f строго спадна, вона є ін'єктивною. Отже, вираз $y + f(y)$ також є сталим. Позначимо цю сталу через c. Маємо $y + f(y) = c$, тобто $f(y) = c - y$ для всіх $y \in \mathbb{R}$.

Підставимо $f(t) = c - t$ у початкову рівність. Ліва частина дорівнює

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x + c - y) = c - (x + c - y) = -x + y.$$

Права частина дорівнює

$$f(x - y) + 1 = c - (x - y) + 1 = -x + y + c + 1.$$

Отже, для всіх x, y має виконуватися рівність $-x + y = -x + y + c + 1$, звідки $c = -1$. Тому $f(x) = -x - 1$.

Перевірка показує, що ця функція справді строго спадна і задовольняє умову задачі.

Відповідь: $f(x) = -x - 1$.

Задача 10. (*Віталій Пінчук, Всеукраїнська олімпіада юних математиків 2007*). (Анікушин та ін., 2010). Для деяких дійсних чисел x, y, z має місце рівність

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = \frac{3}{2}.$$

Які значення може приймати вираз

$$\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}\ ?$$

Розв'язання. Позначимо

$$B=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{3}{2}$$

та

$$A=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}.$$

Тоді

$$B^2=A+2\left(\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(x-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}\right).$$

Перетворимо вираз у дужках:

$$\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(x-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}=\frac{(z-x)+(y-z)+(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0.$$

Отже, $B^2=A$. Оскільки $B=\frac{3}{2}$, маємо

$$A=B^2=\frac{9}{4}.$$

Залишається переконатися, що такі числа x,y,z існують. Наприклад, при $x=2$, $y=1$, $z=0$ маємо $x-y=1$, $y-z=1$, $z-x=-2$, тому

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=1+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Тоді

$$A=1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}.$$

Відповідь: $\frac{9}{4}$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 11. (*Андрій Анікушин, Всеукраїнська олімпіада юних математиків 2007*). (Анікушин та ін., 2010). Відомо, що $|x+y|+|x-y|=1$. Знайдіть найбільше значення виразу

$$x^2-6x+y^2-6y.$$

Розв'язання. Перетворимо заданий вираз:

$$x^2-6x+y^2-6y=(x-3)^2+(y-3)^2-18.$$

Отже, потрібно максимізувати величину $(x-3)^2+(y-3)^2$, тобто квадрат відстані від точки (x,y) до точки $(3,3)$.

Рівність $|x+y|+|x-y|=1$ задає квадрат. Справді, відомо, що

$$|x+y|+|x-y|=2\max\{|x|,|y|\},$$

тому з умови маємо

$$\max\{|x|,|y|\}=\frac{1}{2}.$$

Отже, точка (x,y) лежить на межі квадрата з вершинами

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$

Найвіддаленішою від точки $(3,3)$ є вершина $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Тоді

$$(x-3)^2+(y-3)^2=\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-3\right)^2=\frac{49}{2}.$$

Тому найбільше значення початкового виразу дорівнює

$$\frac{49}{2}-18=\frac{13}{2}.$$

Відповідь: $\frac{13}{2}$.

Задача 12. (*Київські відбори на Всеукраїнську олімпіаду з математики 2007, зі змінами*). (Анікушин та ін., 2010). Знайдіть соту цифру числа $|x|$, якщо x – ціле число, що задовольняє рівність

$$\left|\cdots\left|\left||x-1|-10\right|-10^2\right|\cdots-10^{2025}\right|=10^{2026}.$$

Розв'язання. Позначимо $a_0=|x-1|$ і для $k=1,2,\ldots,2025$ покладемо

$$a_k=|a_{k-1}-10^k|.$$

За умовою задачі $a_{2025}=10^{2026}$.

Будемо рухатися у зворотному напрямку. Маємо

$$|a_{2024}-10^{2025}|=10^{2026}.$$

Звідси формально $a_{2024}=10^{2025}+10^{2026}$ або $a_{2024}=10^{2025}-10^{2026}$. Другий варіант неможливий, бо він від'ємний. Отже,

$$a_{2024}=10^{2025}+10^{2026}.$$

Аналогічно на попередньому кроці:

$$|a_{2023}-10^{2024}|=10^{2025}+10^{2026}.$$

Варіант $a_{2023}=10^{2024}-(10^{2025}+10^{2026})$ неможливий, тому

$$a_{2023}=10^{2024}+10^{2025}+10^{2026}.$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо

$$|x-1|=10+10^2+\cdots+10^{2026}.$$

Тому

$$x=1+10+10^2+\cdots+10^{2026}$$

або

$$x=1-10-10^2-\cdots-10^{2026}.$$

У першому випадку $|x|$ є числом, у десятковому записі якого всі цифри дорівнюють 1:

$$|x|=\underbrace{111\ldots111}_{2027\text{ цифр}}.$$

У другому випадку

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$|x| = 10 + 10^2 + \cdots + 10^{2026} - 1.$$

Це число має вигляд

$$\underbrace{111\ldots111}_{2026\text{ цифр}}09.$$

У кожному з двох випадків сота цифра числа $|x|$ дорівнює 1.

Відповідь: 1.

3.3. Геометрія

Важливе місце в програмі чемпіонату з математики посідали задачі геометричного змісту. Геометрія традиційно є одним із найяскравіших і водночас найвибагливіших розділів олімпіадної математики, оскільки поєднує наочність із глибиною міркувань, вимагає точності побудови, уміння бачити конфігурацію в цілому та знаходити приховані зв'язки між її елементами.

Для змагального формату геометричні задачі мають особливу цінність. На відміну від багатьох алгебраїчних чи числових сюжетів, тут недостатньо лише виконати стандартні перетворення. Учасник повинен побачити правильну допоміжну побудову, вдало використати подібність трикутників, властивості кіл, симетрії, площі або кутові співвідношення. Саме тому геометричні задачі добре виявляють гнучкість мислення, просторову уяву та культуру доведення.

У чемпіонаті були представлені задачі на класичні конфігурації трикутника, кола, чотирикутника, відношення відрізків, площі, вписані та описані фігури. Частина завдань мала коротке елегантне розв'язання, інші вимагали послідовного аналізу кількох пов'язаних тверджень.

Особливий інтерес становлять задачі, у яких простий рисунок приховує нетривіальну ідею. Саме такі приклади найкраще демонструють красу геометрії як мови математичного мислення.

Наведемо кілька характерних задач геометричного блоку чемпіонату.

Задача 13. (Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition, 2018). Нехай ABC – трикутник. На стороні AC обрані точки D та E так, що точка D належить відрізку AE. На стороні AB обрали точку F таку, що $EF \parallel BC$. Відрізки BD і EF перетинаються в точці X. Якщо $AD = 1$, $DE = 3$, $EC = 5$ і $EF = 4$, обчисліть FX.

Розв'язання. Маємо $AE = AD + DE = 4$ та $AC = AD + DE + EC = 9$ (рис. 1). Оскільки $EF \parallel BC$, то $\triangle AEF \sim \triangle ACB$. Звідси

$$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AC},$$

тобто

$$BC = EF \cdot \frac{AC}{AE} = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9.$$

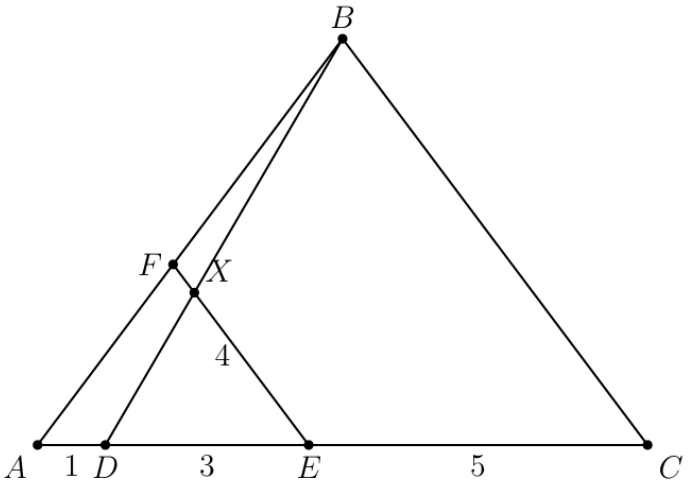


Рис. 1. Трикутник ABC

Крім того, оскільки $EX \parallel CB$, то $\triangle DEX \sim \triangle DCB$. Маємо $DE = 3$ та $DC = DE + EC = 8$, тому

$$\frac{EX}{BC} = \frac{DE}{DC} = \frac{3}{8}.$$

Отже,

$$EX = 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{27}{8}.$$

Тоді

$$FX = EF - EX = 4 - \frac{27}{8} = \frac{5}{8}.$$

Відповідь: $\frac{5}{8}$.

Задача 14. (*Георгій Жилінський*). У трикутник ABC з кутом $A = 30°$ та стороною $BC = 8$ вписали коло, яке дотикається до сторін AC та AB в точках E і F відповідно. Нехай M – середина відрізка BC, а точка H – проєкція M на EF. Знайдіть довжину відрізка HM.

Розв'язання. Опустимо з точок B і C перпендикуляри на пряму EF. Нехай p – півпериметр трикутника ABC (рис. 2). Оскільки коло дотикається до сторін AB і AC у точках F та E, маємо $BF = p - AC$ і $CE = p - AB$.

Оскільки $\angle A = 30°$, а точки дотику E і F лежать на сторонах кута при вершині A, пряма EF перпендикулярна до бісектриси кута A. Тому кут між стороною трикутника та

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

перпендикуляром до EF дорівнює $15°$. Звідси відстані від точок B і C до прямої EF дорівнюють відповідно $BF\cos 15°$ та $CE\cos 15°$.

За умовою M – середина відрізка BC. Відтак відстань від M до прямої EF дорівнює середньому арифметичному відстаней від точок B і C до цієї прямої. Отже,

$$MH = \frac{BF\cos 15° + CE\cos 15°}{2}.$$

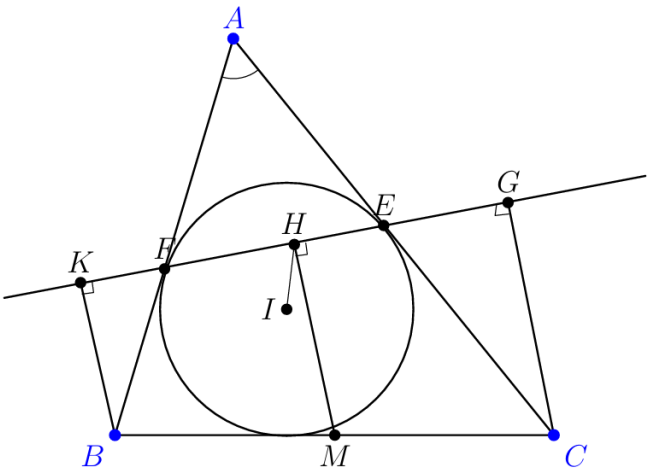


Рис. 2. Трикутник ABC

Тоді $2MH = (BF + CE)\cos 15°$. Але

$$BF + CE = (p - AC) + (p - AB) = 2p - (AB + AC) = BC = 8.$$

Тому $MH = 4\cos 15°$. Оскільки

$$\cos 15° = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

маємо

$$MH = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

Відповідь: $\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

3.4. Комбінаторика

Помітне місце в програмі чемпіонату посідали задачі з комбінаторики. Цей розділ математики особливо цінний для змагального формату, оскільки вимагає не стільки обчислювальної техніки, скільки вміння аналізувати структуру множин, знаходити закономірності, будувати конструкції та оцінювати кількість можливих варіантів.

Комбінаторні задачі традиційно вирізняються великою різноманітністю методів. Учасники могли застосовувати принцип Діріхле, подвійний підрахунок, інваріанти, рекурентні співвідношення, розфарбування, комбінаторні оцінки, графові інтерпретації та елементи теорії ймовірностей. Часто навіть коротко сформульована задача потребує нетривіальної ідеї, а не механічного використання відомої формули.

Наведемо кілька характерних прикладів задач комбінаторичного блоку.

Задача 15. (*Київська міська олімпіада 2012–2013*). (Анікушин та ін., 2014). На дошці записані числа $1, 2, 3, \dots, 2026$. Сергій обирає довільні два із записаних чисел $a,\ b$ та записує замість них число $|a-b|$. Після 2025-ї такої операції на дошці залишиться одне число. Яке найбільше число при цьому може залишитись?

Розв'язання. Кожне число, що з'являється на дошці в будь-який момент, не перевищує 2026, адже воно утворюється як модуль різниці двох уже наявних чисел.

Крім того, число $|a-b|$ має таку саму парність, як і число $a+b$. Тому під час кожної операції парність суми всіх чисел, записаних на дошці, не змінюється.

На початку на дошці записані числа $1, 2, 3, \dots, 2026$. Серед них є 1013 непарних і 1013 парних чисел, тому початкова сума є непарною. Отже, і останнє число на дошці має бути непарним. Тому найбільше можливе число не може дорівнювати 2026, і воно не перевищує 2025.

Покажемо, що число 2025 справді може залишитися. Розіб'ємо числа на пари

$$(2,3), \qquad (4,5), \qquad \cdots, \qquad (2024,2025), \qquad (1,2026).$$

Після застосування операції до перших 1012 пар отримаємо 1012 одиниць, а з пари $(1,2026)$ отримаємо число 2025.

Далі розіб'ємо отримані 1012 одиниць на 506 пар. Кожна пара $(1,1)$ дає число 0. Після цього всі нулі можна послідовно об'єднувати з числом 2025, оскільки

$$|2025-0| = 2025.$$

Отже, в кінці на дошці може залишитися число 2025.

Відповідь: 2025.

Задача 16. (*Robert Trosten*). (Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition, 2024). Майк кидає п'ять гральних костей із відповідно 4, 6, 8, 12 і 20 гранями (кожна грань кості пронумерована від 1 до k, де k – кількість її граней). Скількома різними способами може випасти фул-хаус (три однакові числа і два інших однакових числа)?

Однакові числа, що випадають на різних костях, вважаються різними фул-хаусами, тому комбінації $(1,1,1,2,2)$ і $(2,2,1,1,1)$ обидві зараховуються.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язання. Розглянемо найменшу за кількістю граней кость серед тих, на яких випало число, що утворює трійку.

Якщо цією костю є восьмигранник, то трійка може випасти лише на костях із 8, 12 і 20 гранями. Число для трійки можна вибрати 8 способами. Пара тоді утворюється на костях із 4 і 6 гранями, тому число для пари можна вибрати 4 способами. Оскільки числа у трійці та парі мають бути різними, отримуємо $4 \cdot 7$ способів.

Якщо найменшою костю у трійці є шестигранник, то число для трійки можна вибрати 6 способами, а число для пари – 4 способами. Знову відкидаємо випадки, коли ці числа однакові. Тому маємо $4 \cdot 5$ способів.

Якщо найменшою костю у трійці є тетраедр, тобто кость із 4 гранями, то число для трійки можна вибрати 4 способами. Найменшою костю у парі може бути кость із 6, 8 або 12 гранями. Відповідно число для пари можна вибрати 6, 8 або 12 способами, але воно має відрізнятися від числа у трійці. Тому маємо

$$4 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 11 = 4 \cdot 23$$

способи.

Додаємо всі випадки:

$$4 \cdot 7 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 23 = 28 + 20 + 92 = 140.$$

Отже, кількість таких фул-хаусів дорівнює 140.

Відповідь: 140.

Задача 17. (*Олесь Гордійчук*). Під час плавання Одіссей з командою опинився на дивному архіпелазі, що складається з N островів. Між ними прокладено K мостів так, що між двома островами є не більше одного мосту. Посейдон із Зевсом грають у гру. Спочатку Посейдон обирає два острови. На одному з цих островів Зевс розміщує Одіссея, на іншому – Пенелопу, і ходить першим. За свій хід Зевс може змусити Одіссея пройти по мосту на інший острів. Посейдон у свій хід руйнує один з мостів. Зевс виграє, якщо Одіссей дістанеться острова Пенелопи, а Посейдон – якщо ні. При якому найбільшому значенні K для кожного заданого значення N Посейдон гарантовано виграє?

Розв'язання. Максимальна можлива кількість мостів між N островами дорівнює

$$\frac{N(N-1)}{2}.$$

Якщо мостів саме стільки, то кожні два острови з'єднані мостом. Тоді, які б два острови не обрав Посейдон, Зевс розмістить Одіссея на одному з них, Пенелопу на іншому, і вже першим ходом Одіссей зможе перейти до Пенелопи. Отже, при

$$K = \frac{N(N-1)}{2}.$$

Посейдон гарантовано не має перемоги.

Покажемо, що якщо мостів хоча б на один менше, то Посейдон може виграти. Якщо

$$K \leq \frac{N(N-1)}{2} - 1,$$

то існують принаймні два острови, між якими немає мосту. Саме ці два острови Посейдон і обирає на початку гри. Зевс розміщує Одіссея на одному з них, а Пенелопу – на іншому.

Оскільки між цими двома островами немає мосту, Одіссей не може дістатися Пенелопи першим ходом. Далі Посейдон діє так: якщо після чергового ходу Зевса Одіссей опинився на острові, який з'єднаний мостом з островом Пенелопи, Посейдон руйнує саме цей міст. Оскільки між двома островами є не більше одного мосту, після цього Одіссей не зможе перейти з поточного острова безпосередньо до Пенелопи.

Таким чином, перед кожним ходом Зевса острів, на якому перебуває Одіссей, не з'єднаний мостом з островом Пенелопи. Отже, Одіссей ніколи не зможе дістатися Пенелопи, і Посейдон гарантовано виграє.

Відповідь: $\frac{N(N-1)}{2} - 1$.

4. Висновки

З педагогічного погляду комплексний характер турніру є надзвичайно цінним. Він дозволяє побачити учня не одновимірно, а в різних ситуаціях інтелектуальної діяльності. Один учасник може блискуче працювати в індивідуальному письмовому турі, інший виявляє себе як сильний стратег команди, третій має талант до публічного захисту ідей, четвертий особливо успішний в експериментальній роботі. У сукупності це створює значно повнішу картину індивідуальних здібностей школярів та синергетичного ефекту від поєднання зусиль у командній роботі.

Перший «ФізМатКолайдер» мав також важливий суспільний вимір. Турнір відбувався в умовах повномасштабної війни, постійних безпекових викликів, складної логістики та психологічної напруги. Сам факт прибуття десятків команд до Києва став свідченням довіри до організаторів і водночас доказом того, що українське суспільство не відмовляється від розвитку науки й освіти навіть у найважчі часи.

Окремого значення набуває той факт, що турнір відбувався в очному форматі. Для сучасного покоління школярів значна частина навчального досвіду припала на роки пандемічних обмежень, тривалого дистанційного навчання та вимушених онлайн-комунікацій, а згодом і на період воєнних викликів. За цих умов жива інтелектуальна взаємодія стала особливо цінною. Саме офлайн-змагання дають можливість відчути справжню атмосферу наукового суперництва, негайно реагувати на аргументи

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

опонента, злагоджено працювати в команді в реальному часі, навчатися культури академічної дискусії та переживати спільний успіх або поразку як важливий досвід особистісного зростання. Безпосереднє спілкування між учасниками з різних регіонів також сприяє формуванню горизонтальних зв'язків у майбутній академічній спільноті України.

Для багатьох школярів це була можливість уперше за тривалий час зустрітися наживо із ровесниками, які поділяють любов до математики та фізики, побачити інший рівень задач, відчути жваву конкуренцію й академічну спільноту.

Перший досвід проведення «ФізМатКолайдера» дає підстави говорити про значний потенціал цього формату як нової змагальної традиції. Поєднання індивідуальних і командних випробувань, математичних та фізичних дисциплін, високого рівня задач і сучасної організаційної культури робить турнір чудовим майданчиком для розвитку талановитої молоді, обміну досвідом між учасниками та формування спільноти учнів, які зацікавлені в науці, дослідженнях і командній роботі. У перспективі можливими є розширення географії учасників, запровадження регіональних відбіркових етапів, створення молодших ліг, міжнародна участь команд-партнерів, публікація щорічних збірників задач та методичних матеріалів. Якщо розвиток змагання буде послідовним, «ФізМатКолайдер» може посісти помітне місце в календарі українських інтелектуальних подій і стати знаковим майданчиком для зустрічі найсильніших юних математиків і фізиків країни.

Внесок авторів

Вікторія Цань – оригінальний текст статті; Олександр Линець – аналіз джерел, підготовка текстів задач чемпіонату з математики та їхніх розв'язань; Олексій Печериця – концептуалізація ідеї статті, перевірка, адаптація та коректура остаточного тексту.

Джерела фінансування

Ця робота не отримала жодного гранту від фінансових установ у державному, комерційному чи некомерційному секторах.

Список використаних джерел

Анікушин, А. В., Арман, А. Р. та ін. (2008). Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006–2007: навч.-метод. посіб. Літера ЛТД.

Анікушин, А., Арман, А., Білокопитов, Є. та ін. (2010). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009: навч.-метод. посіб. (Б. В. Рубльов, Ред.). Каменяр.

Анікушин, А. В. та ін. (2011). Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2010–2011: навч.-метод. посіб. (Б. В. Рубльов, Ред.). Гімназія.

Анікушин, А. В., Ківва, Б. С., Клурман, О. О. та ін. (2014). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2012/13 навч. рік: навч.-метод. посіб. (Б. В. Рубльов, Ред.). Гімназія.

Лейфура, В. М., Мітельман, І. М., Радченко, В. М., & Ясінський, В. А. (2008). Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. Каменяр.

Art of Problem Solving. (n.d.). *Community* (c868170). https://artofproblemsolving.com/community/c868170

Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition. (2016). Number theory. https://cmimc.com/archive/cmimc2016/2016_NumberTheory.pdf

Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition. (2018). Geometry. https://cmimc.com/archive/cmimc2018/2018_Geometry.pdf

Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition. (2024). CMIMC 2024 *combinatorics and computer science*. https://cmimc.com/archive/cmimc2024/CMIMC_2024_COMBO-CS.pdf

References

Anikushyn, A. V., Arman, A. R. et al. (2008). *Matematychni olimpiadni zmagannia shkoliariv. 2006–2007: navch.-metod. posib.* [Mathematical olympiad competitions for schoolchildren. 2006–2007: Educational and methodical manual]. Litera LTD. [in Ukrainian]

Anikushyn, A., Arman, A., Bilokopytov, Ye. et al. (2010). *Matematychni olimpiadni zmagannia shkoliariv Ukrainy: 2007–2008 ta 2008–2009: navch.-metod. posib.* [Mathematical olympiad competitions for schoolchildren of Ukraine: 2007–2008 and 2008–2009: Educational and methodical manual] (B. V. Rublov, Ed.). Kameniar. [in Ukrainian]

Anikushyn, A. V. et al. (2011). *Matematychni olimpiadni zmagannia shkoliariv Ukrainy. 2010–2011: navch.-metod. posib.* [Mathematical olympiad competitions for schoolchildren of Ukraine. 2010–2011: Educational and methodical manual] (B. V. Rublov, Ed.). Gimnaziya. [in Ukrainian]

Anikushyn, A. V., Kivva, B. S., Klurman, O. O. et al. (2014). *Matematychni olimpiadni zmagannia shkoliariv Ukrainy: 2012/13 navch. rik: navch.-metod. posib.* [Mathematical olympiad competitions for schoolchildren of Ukraine: 2012/13 academic year: Educational and methodical manual] (B. V. Rublov, Ed.). Gimnaziya. [in Ukrainian]

Art of Problem Solving. (n.d.). Community (c868170). https://artofproblemsolving.com/community/c868170

Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition. (2016). Number theory. https://cmimc.com/archive/cmimc2016/2016_NumberTheory.pdf

Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition. (2018). Geometry. https://cmimc.com/archive/cmimc2018/2018_Geometry.pdf

Carnegie Mellon Informatics and Mathematics Competition. (2024). CMIMC 2024 combinatorics and computer science. https://cmimc.com/archive/cmimc2024/CMIMC_2024_COMBO-CS.pdf

Leifura, V. M., Mitelman, I. M., Radchenko, V. M., & Yasinskyi, V. A. (2008). *Matematychni olimpiady shkoliariv Ukrainy: 2001–2006*. [Mathematical olympiads for schoolchildren of Ukraine: 2001–2006]. Kameniar. [in Ukrainian]

Отримано редакцією журналу: 20.04.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Viktoriia TSAN, PhD in Mathematics and Statistics,
Teacher of Mathematics of Higher Category,
ORCID ID: 0000-0002-2748-9569
e-mail: viktoriia.tsan@knu.ua
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksandr LYNETS, Teacher of Mathematics of Higher Category,
ORCID ID: 0000-0006-6846-7573
e-mail: lynets.oleksandr@gmail.com
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Oleksii PECHERYTSIA, PhD in Mathematics and Statistics,
Teacher of Mathematics of Higher Category, Teacher-Methodist
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

"PHYSMATHCOLLIDER" AS AN INNOVATIVE FORMAT OF INTEGRATED STUDENT COMPETITIONS

Abstract. *The article presents the concept of the first comprehensive competition "PhysMathCollider", held on January 11–15, 2026 by the team of the Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum of Taras Shevchenko National University of Kyiv. The concept of the competition as an integrated model of work with gifted youth, combining individual and team formats, mathematical and physical disciplines, theoretical and experimental tests, is considered. The structure of the program, the content of the tasks, the pedagogical potential of various components of the competition are analyzed.*

Keywords: *mathematical competitions; physics and mathematics education; gifted youth; olympiad and tournament movement; mathematical problems.*

Received: 20.04.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

УДК 06.05Абель:512.742(09) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.5**

Євгенія КОЧУБІНСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0003-4404-4278
e-mail: ekochubinska@kse.org.ua
Приватна установа «Університет «Київська школа економіки», Київ, Україна

ПРЕМІЯ АБЕЛЯ 2026: ВІД НІЛЬСА АБЕЛЯ ДО ГЕРДА ФАЛТІНГСА

Анотація. *У статті розглянуто історію виникнення премії Абеля — однієї з найпрестижніших математичних нагород світу, яку часто називають «Нобелівською премією з математики». Простежено шлях від перших спроб її створення наприкінці XIX століття до офіційного заснування премії у 2002 році. Особливу увагу приділено постаті Нільса Генріка Абеля та його внеску в розвиток сучасної математики. Також висвітлено результати лауреата премії Абеля 2026 року Герда Фалтінгса, пов'язані з арифметичною геометрією, діофантовими рівняннями та гіпотезою Морделла. Через приклади еліптичних кривих і Великої теореми Ферма показано, як геометричні методи допомагають досліджувати властивості чисел. Стаття має науково-популярний характер і спрямована на ознайомлення широкого кола читачів із сучасними ідеями математики та історією їх розвитку*

Ключові слова: *премія Абеля; Герд Фалтінгс; арифметична геометрія; діофантові рівняння; еліптичні криві; гіпотеза Морделла.*

1. Вступ

Чи може одна з найпрестижніших наукових премій світу з'явитися як відповідь на відсутність іншої? Так, може. Вручення саме такої премії відбулося 26 травня 2026 року в Норвезькій академії наук – премії Абеля – нагороди, яку часто називають найвищим визнанням у світі математики. Як вона виникла, чому стала настільки важливою і хто отримав її цього року?

Добре відомо, що Нобелівську премію не вручають математикам. Навколо цього факту виникло чимало легенд: зокрема, часто можна почути історію про те, що дружина Альфреда Нобеля нібито втекла з математиком – навіть називають ім'я Гости Міттаг-Леффлера. Втім, ця версія не витримує жодної критики: Нобель ніколи не був одружений. Найімовірніше, причина значно прозаїчніша – він просто не вважав математику галуззю, досягнення в якій слід відзначати премією. У своєму заповіті, оголошеному 1897 року, Альфред Нобель чітко визначив перелік наук – і математики серед них не було.

Дізнавшись про це, видатний норвезький математик Софус Лі запропонував створити окрему нагороду – своєрідний «математичний аналог» Нобелівської премії. Вона мала відзначати досягнення саме в чистій математиці й носити ім'я іншого великого норвежця – Нільса Генріка Абеля.

2. Хто такий Нільс Генрік Абель?

Нільс Генрік Абель (1802–1829) – постать, без якої важко уявити математику XIX століття, а також математику наступних століть. Із його іменем ми, самі того не

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

помічаючи, знайомимося ще в школі. Саме там ми вперше стикаємося з об'єктом, що є прикладом структури, яку називають *абелевою групою*. Хоч цей термін у шкільній програмі зазвичай не звучить, його зміст нам добре знайомий.

Згадаймо властивості цілих чисел відносно додавання:

1. Сума двох цілих чисел знову є цілим числом.
2. Виконується сполучний (асоціативний) закон: $(a+b)+c=a+(b+c)$ для довільних цілих чисел a, b, c.
3. Існує число 0, яке не змінює значення: $a+0=0+a=a$ для довільного цілого числа a.
4. Для кожного цілого числа a існує протилежне: $a+(-a)=(-a)+a=0$.
5. І, нарешті, відома кожному властивість: від перестановки доданків сума не змінюється, тобто для довільних цілих чисел a і b: $a+b=b+a$.

Саме ці прості правила і визначають структуру, яку в математиці називають *абелевою групою*. Якщо виконуються перші чотири умови, то маємо *групу*, а якщо додається ще й п'ята, то група стає *абелевою*. При цьому і множина, і дія можуть бути якими завгодно – важливо лише, щоб виконувалися відповідні аксіоми.

І це лише один із численних слідів, які Абель залишив у науці. Серед іншого він довів неможливість розв'язання загального рівняння п'ятого степеня в радикалах, заклав основи теорії еліптичних і абелевих функцій, вплинув на формування поняття абелевої групи і зробив вагомий внесок у дослідження збіжності степеневих рядів.

3. Історія створення премії

Софус Лі, усвідомлюючи значення математики та масштаб постаті Абеля, використав свій міжнародний авторитет, щоб зібрати підтримку для створення спеціального фонду. За його задумом, Абелівську премію мали вручати раз на п'ять років за видатні досягнення в чистій математиці. Втім, тоді цим планам так і не судилося здійснитися.

Однією з причин невдачі стала смерть головного натхненника – Софус Лі помер 1899 року. Попри підтримку провідних математичних центрів Європи, більшість домовленостей і контактів трималися саме на його особистому авторитеті. Коли його не стало, ці зусилля швидко зійшли нанівець.

До ідеї премії повернулися лише 1902 року. З нагоди 100-річчя від дня народження Нільса Генріка Абеля норвезький король Оскар II вирішив відродити цей задум. У співпраці з Науковим товариством Крістіанії (нині – Норвезька академія наук) математики Карл Стьормер і Людвіг Силов навіть розробили статут і правила майбутньої премії.

Здавалося, ще трохи і нагороду таки буде засновано. Але вирішальним чинником, як це часто буває, стала політика. У 1905 році розпався союз між Швецією та Норвегією, і в нових умовах у країни просто не вистачило коштів для реалізації такого амбітного проєкту.

Полярний дослідник Фрітьоф Нансен, чий фонд свого часу надихнув Софуса Лі, із жалем зазначав: навіть за наявності підтримки з-за кордону Норвегія не змогла

самостійно створити фонд Абеля. У листі 1906 року до математика Елінга Голста він гірко підсумував: «Абелівська премія, обіцяна покійним королем Оскаром, пішла на небо разом із унією».

На щастя, ідеї такого масштабу рідко зникають назавжди. Так і ця ідея лише чекала свого часу і повернулася майже через століття.

У серпні 2000 року біограф Абеля Арілд Стубгауг зустрівся з генеральним директором компанії Telenor Тормодом Хермансеном, щоб вдихнути нове життя в давній задум міжнародної премії імені Абеля. Ідею швидко підхопили в академічному середовищі: вже у березні 2001 року було створено робочу групу, яка активно взялася за її реалізацію.

Того ж року уряд Норвегії заснував фонд Абеля з початковим капіталом у 200 мільйонів норвезьких крон. А вже у 2002 році – до 200-річчя від дня народження Абеля – премію було офіційно засновано.

Сьогодні премія Абеля має дві ключові місії: відзначати найвидатніші досягнення в математиці та популяризувати цю науку серед широкого загалу, особливо серед молоді.

Першу нагороду вручили у 2003 році – її лауреатом став французький математик Жан-П'єр Серр (нар. 1926).

4. За що вручено премію Абеля 2026 року?

Цього року премію Абеля присуджено німецькому математику Герду Фалтінгсу (нар. 1954), науковцю Інституту Макса Планка (Бонн, Німеччина), «за впровадження потужних інструментів в арифметичну геометрію та доведення давно сформульованих діофантових гіпотез Морделла і Ленга». Його доведення гіпотези Морделла вважають одним із головних проривів арифметичної геометрії XX століття. Цікаво, що Фалтінгс також є лауреатом іншої престижної математичної нагороди, яку теж часто називають Нобелівською премією для математиків, – медалі Філдса.

Щоб зрозуміти, у чому полягає результат, за який Фалтінгс отримав нагороду, варто трохи зануритися в саму ідею задач, з якими працював математик. Звісно, далі піде спрощений виклад без строгих означень і доведень – повне розуміння цих ідей потребує кількох років університетської математики.

Почнімо з класики. Однією з найдавніших задач у математиці є пошук цілочисельних розв'язків рівнянь із цілими коефіцієнтами. Такі рівняння називають діофантовими – на честь давньогрецького математика Діофанта.

Класичним прикладом діофантового рівняння є теорема Піфагора, яку багато хто з нас формулює так:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Цілочисельні розв'язки цього рівняння називають піфагоровими трійками. Таких трійок існує нескінченно багато, і найвідомішою є $(3, 4, 5)$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Інший, значно наочніший приклад діофантового рівняння – це рівняння кола. Найпростіша його форма:

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (2)$$

Ми можемо зобразити розв'язки цього рівняння на площині:

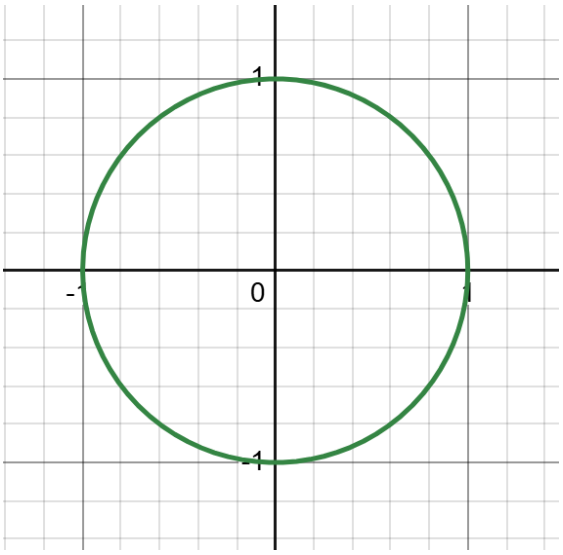


Рис. 1. Коло $x^2 + y^2 = 1$.

Або ж переписати це рівняння у вигляді $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ і шукати точки, де ця функція перетворюється на 0, тобто $f(x, y) = 0$.

Грубо кажучи, саме такий погляд – через геометричні об'єкти на властивості чисел – привів до виникнення арифметичної геометрії. Одним із найяскравіших представників цієї галузі є цьогорічний лауреат премії Абеля – Герд Фалтінгс.

Повернімося до рівняння кола. Його цілочисельні розв'язки легко перелічити: їх лише чотири, а саме: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$.

Водночас існує нескінченно багато раціональних розв'язків, тобто таких, що можуть бути записані як відношення двох цілих чисел. Наприклад, $x = \frac{3}{5}, y = \frac{4}{5}$ – також розв'язок цього рівняння.

Втім, ще значно більше точок на цій кривій мають ірраціональні координати, тобто такі, що не можуть бути зображені як відношення двох цілих чисел.

Отже, рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 0$ має цілі, раціональні та ірраціональні розв'язки. Але якщо змінити другий степінь на третій, то рівняння $x^3 + y^3 - 1 = 0$ додатних раціональних розв'язків не матиме.

Давайте тепер ускладнимо задачу. Що буде, якщо у рівнянні $a^2 + b^2 = c^2$ піднести a, b і c до третього степеня? А якщо далі – до четвертого, п'ятого, n-го степенів? І будемо намагатися шукати розв'язки таких рівнянь. Таким чином ми дійдемо до *Великої теореми Ферма*, яка стверджує, що рівняння $a^n + b^n = c^n$ не має цілих розв'язків, якщо $n > 2$.

Це твердження, яке за легендою Ферма записав на полях «Арифметики» Діофанта, виявилося надзвичайно складним. Протягом століть нікому не вдавалося знайти жодного цілочисельного розв'язку для випадку $n \geq 3$. Видатні математики – серед них Леонард Ойлер, Софі Жермен, Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле та Адрієн-Марі Лежандр – змогли довести теорему лише для окремих випадків.

І лише 1995 року британський математики Ендрю Вайлс довів її в загальному випадку: цілих розв'язків не існує для жодного $n > 2$. До речі, за цей результат він 2016 року отримав премію Абеля.

Як ми вже бачили, рівняння, у яких поєднуються додавання і множення, можна уявити як криві, намальовані на «числовій площині» у певному числовому полі. Спрощуючи, скажемо так: числове поле – це множина чисел із операціями додавання і множення, у якій можна додавати, віднімати, множити й ділити (окрім ділення на нуль), причому обидві операції є комутативними, тобто від перестановки доданків чи множників результат не змінюється. Важливо, що виконання цих дій не виводить нас за межі цієї множини: результат завжди залишається в ній. Наприклад, множина цілих чисел не є полем, адже частка двох цілих чисел не обов'язково є цілим числом. Натомість раціональні, дійсні та комплексні числа утворюють поля.

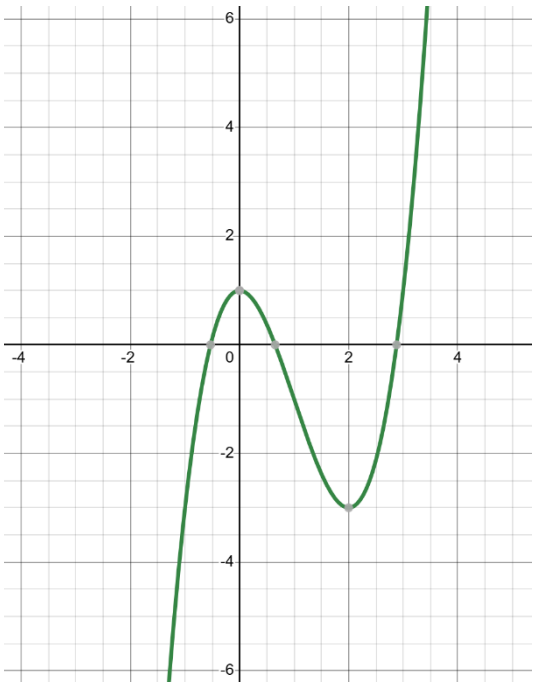


Рис. 2. Крива $y = x^3 - 3x^2 + 1$

Коли ми починаємо працювати в таких «замкнених світах чисел», природно виникають рівняння, побудовані за допомогою цих операцій. Найпростішими серед них є поліноміальні рівняння – ті, що містять різні степені однієї змінної. Наприклад,

$$x^3 - 3x^2 + 1 = 0. \qquad (3)$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Хоча на вигляд це лише алгебраїчний вираз, геометрично рівняння $y = x^3 - 3x^2 + 1$ задає криву.

І саме максимальний степінь у рівнянні визначає важливу характеристику цієї кривої – її рід, який, умовно кажучи, відображає кількість «отворів» у відповідному геометричному об'єкті.

Серед усіх таких кривих особливе місце займають так звані *еліптичні криві*, що можна задати рівняннями вигляду $y^2 = x^3 + ax + b$. Вони мають степінь 3 і рід 1.

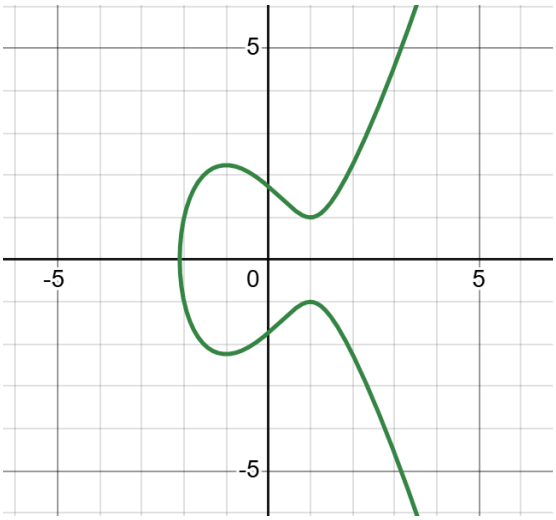


Рис. 3. Еліптична крива

Саме ці об'єкти виявилися напрочуд глибокими: еліптичні криві стали ключем до доведення Великої теореми Ферма, яке здійснив Ендрю Вайлс. Ба більше, вони давно вийшли за межі чистої теорії – саме на них, зокрема, базуються алгоритми електронного цифрового підпису, якими ми користуємося щодня, навіть не замислюючись про ту глибоку математику, яка там прихована.

І тут природно виникає питання: що відбувається, коли ми рухаємося ще далі – до складніших кривих? Уже в першій половині XX століття Луї Джоел Морделл звернув увагу на те, що поведінка раціональних точок на таких об'єктах може підкорятися певним закономірностям. Для еліптичних кривих він довів, що їхні раціональні точки утворюють скінченно породжену абелеву групу – структуру, яку ми вже згадували раніше.

Але коли йдеться про криві вищого роду – тобто більш складні *алгебраїчні криві* – ситуація різко ускладнюється. Морделл висловив гіпотезу, що для кривих роду 2 і вище кількість раціональних точок завжди скінченна, однак довести це він не зміг.

Лише у 1983 році Герд Фалтінгс зробив прорив, який став справжньою сенсацією в математиці. Він довів гіпотези Шафаревича і Тейта про скінченність, а разом із ними – і гіпотезу Морделла, яка сьогодні відома як *теорема Фалтінгса*. Його підхід виявився несподіваним: замість класичних методів діофантових наближень, яких очікували багато математиків, він використав інструменти арифметичної геометрії та класифікацію алгебраїчних кривих.

Пізніше математик Пол Войта використав діофантові наближення для отримання нового доведення, що відкрило нові напрями досліджень для Фалтінгса. Застосовуючи ці інструменти, він довів теорему про добуток Фалтінгса, а згодом гіпотезу Морделла–Ланга про розподіл раціональних точок.

Праці Фалтінгса в арифметичній геометрії й досі залишаються точкою відліку для нових досліджень: вони не лише дозволили розв'язати давні математичні проблеми, а й відкрили зовсім інший спосіб бачити зв'язок між геометрією та теорією чисел. Те, що колись здавалося набором окремих задач і технічних прийомів, сьогодні постає як єдина картина – де числа і форми, рівняння і криві описують одну й ту саму глибоку структуру. І саме в цьому переході від «обчислень» до «розуміння форми чисел» і полягає один із найважливіших зсувів у сучасній математиці.

Список використаних джерел

Abel Prize. (2026). The Abel Prize 2026 awarded to Gerd Faltings. https://abelprize.no/biography/2026-abel-prize-recipient-biography-gerd-faltings

Abel Prize. (n.d.). History of the Abel Prize. https://abelprize.no

Dunham, W. (1990). Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics. Penguin Books.

Edwards, H. M. (1977). Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. Springer.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (n.d.). Niels Henrik Abel. MacTutor History of Mathematics Archive. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abel/

References

Abel Prize. (2026). The Abel Prize 2026 awarded to Gerd Faltings. https://abelprize.no/biography/2026-abel-prize-recipient-biography-gerd-faltings

Abel Prize. (n.d.). History of the Abel Prize. https://abelprize.no

Dunham, W. (1990). Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics. Penguin Books.

Edwards, H. M. (1977). Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory. Springer.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (n.d.). Niels Henrik Abel. MacTutor History of Mathematics Archive. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abel/

Отримано редакцією журналу: 20.04.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Eugenia KOCHUBINSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0003-4404-4278
e-mail: ekochubinska@kse.org.ua
Kyiv School of Economics, Kyiv, Ukraine

ABEL PRIZE 2026: FROM NIELS ABEL TO GERD FALTINGS

Abstract. *The paper examines the history of the Abel Prize, one of the world's most prestigious awards in mathematics, often referred to as the "Nobel Prize of Mathematics." The paper traces the development of the idea of the prize from the first attempts to establish it at the end of the nineteenth century to its official foundation in 2002. Special attention is devoted to the figure of Niels Henrik Abel and his contribution to the development of modern mathematics. The article also discusses the achievements of*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

the 2026 Abel Prize laureate Gerd Faltings, particularly his work in arithmetic geometry, Diophantine equations, and the Mordell conjecture. Using examples of elliptic curves and Fermat's Last Theorem, the paper demonstrates how geometric methods can be applied to the study of properties of numbers. The paper has a popular science character and aims to familiarize a broad audience with modern mathematical ideas and the history of their development.

Keywords: *Abel Prize; Gerd Faltings; arithmetic geometry; Diophantine equations; elliptic curves; Mordell conjecture.*

Received: 20.04.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

Креативна математика

УДК 512:004.8:517 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.6**

Віктор РОМАНЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Пров. наук. співроб.
ORCID ID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Інститут фізики НАН України, Київ, Україна

Наталя КОРНІЛОВСЬКА, Канд. тех. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-8331-8027
e-mail: kornilovska.natalya@kntu.net.ua
Херсонський національний технічний університет, Хмельницький, Україна

REDUCE – КЛАСИКА КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ

Анотація. *Стаття містить короткий огляд системи комп'ютерної алгебри REDUCE. Незважаючи на значний вік, REDUCE досі активно використовується дослідниками. Метою роботи є надання базових знань про REDUCE, які допоможуть читачеві розпочати роботу з цією системою. Більшість наведених прикладів стосуються математики; їх добір зумовлений прагненням продемонструвати максимально широкий спектр базових можливостей системи в межах короткої публікації.*

Ключові слова: *комп'ютерна алгебра; математичний аналіз; елементарні функції.*

1. Вступ

Сьогодні практично неможливо виконати науково-дослідницьку чи проєктно-конструкторську роботу без застосування комп'ютерних обчислень чи комп'ютерної обробки отриманих при дослідженнях результатів. Серед сукупності прикладних програм, які при цьому використовуються, є і системи комп'ютерної алгебри (СКА, CAS – Computer Algebra Systems), які значно спрощують аналітичні розрахунки і роблять їх надійнішими. Особливо це важливо у теоретичній фізиці, де раніше подібні розрахунки могли тривати кілька днів без гарантії надійності результату. Водночас ці системи можуть бути корисними і в більш буденних сферах застосування, наприклад, вчителям математики при перевірці правильності наведених у посібниках прикладів або підготовці нових завдань для уроку чи контрольної роботи. Зрозуміло, що зростаючий попит на такі системи призвів до їхньої комерціалізації, і зараз на ринку значне і почесне місце займають такі продукти, як Maple і Mathematica. Навіть у добре відомому середовищі технічних обчислень MATLAB можна виконувати аналітичні розрахунки. Крім комерційних алгебраїчних систем, існують і безкоштовні – REDUCE, Maxima, Axiom. Перша з них створювалася від початку як засіб для розрахунків у теоретичній фізиці, тоді як Maxima і Axiom мають більш універсальне призначення і використовуються як у наукових дослідженнях, так і в навчанні.

Першою великою системою, яка вже вміла працювати з поліномами, виконувати інтегрування та диференціювання, була FORMAC (MacCallum, 2018). Її розробка почалася у 1962 році і була завершена у 1964 році. Ця система базувалася на мові

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

програмування FORTRAN IV. Наступна СКА, REDUCE, базувалася вже на мові LISP. Власне, вона виникла в результаті спілкування Ентоні Херна (Anthony Hearn) з Джоном Маккарті (John McCarthy), фахівцем з комп'ютерних наук в Стендфордському університеті. Е. Херн прагнув використати комп'ютери для обчислень у квантовій електродинаміці на основі фейнманівських діаграм, і Дж. Маккарті переконав його, що для цього добре підходить мова LISP. Так у 1963 році почалася робота над REDUCE.

Досить швидко Е. Херн зрозумів, що розроблена ним програма може становити загальний інтерес для математичних обчислень, а не бути лише засобом вузької спеціалізації. Опис системи REDUCE було опубліковано у 1968 році (Hearn, 1968). Перша версія для широкого загалу, REDUCE 2, створена однією людиною, з'явилася у 1970 році. Згодом до розробки REDUCE приєдналися інші фахівці та користувачі, що дозволило вже у 1983 році створити дуже продуктивну і добре знайому користувачам версію REDUCE 3 (Hearn, 2005). Загальна кількість спеціалістів, які брали участь у її створенні та розвитку, становила понад сто осіб.

Як правило, великими літерами записують акроніми. REDUCE не є акронімом. Таке написання вибране Е. Херном і частково має жартівливий характер – це натяк на те, що система REDUCE робить вирази простішими (Hearn, 2005). Стосовно REDUCE варто також зазначити, що від самого початку ця СКА була орієнтована на економію ресурсів комп'ютера (Rayna, 1987). Ще однією особливістю REDUCE є модульність – можливість розширення функціональності системи шляхом додавання модулів без зміни її ядра. Крім того, від самого початку REDUCE створювалася як інтерактивна система, що на той час було менш поширеною практикою, ніж нині. За словами Е. Херна, який написав передмову до книги Дж. Райна (Rayna, 1987), REDUCE застосовують у квантовій електродинаміці та квантовій хромодинаміці, небесній механіці, механіці рідин, загальній теорії відносності, чисельному аналізі, фізиці плазми, а також у різноманітних інженерних задачах, таких як аналіз електричних мереж і проєктування турбін та корпусів кораблів. Така зрілість системи дає користувачеві впевненість у надійності та зручності використання REDUCE.

Окрім REDUCE, із систем старшого покоління досить успішною виявилася також MACSYMA, робота над якою тривала з 1968 до 1969 року (MacCallum, 2018). Її назва є акронімом від Project MAC SYmbolic MAnipulator – проєкту Massachusetts Institute of Technology. Зараз ця система існує під назвою Maxima і, як і REDUCE, базується на LISP (діалекти різні; REDUCE – на Standard LISP) та є безкоштовним програмним продуктом. Обидві системи – класика комп'ютерної алгебри. Вони не лише заклали основу для появи комерційних гігантів Maple і Mathematica (компаній Maplesoft та Wolfram Research відповідно), але й досі залишаються актуальними, зокрема як безкоштовні інструменти.

Крім Maxima і REDUCE, до безкоштовних СКА-ветеранів належить також Axiom, розробка якої, як зазначає Axiom Development Team (n.d.), почалася у 1971 році. Не заглиблюючись у деталі порівняння цих трьох систем, зазначимо, що REDUCE від самого початку орієнтувався на фахівців у галузі теоретичної фізики, тоді як Axiom більшою мірою орієнтована на фахівців у галузі математики.

Далі ми розглянемо базові можливості REDUCE і покажемо, як можна швидко почати працювати з цією системою. Зрозуміло, що в короткій статті неможливо дати скільки-небудь повний опис мови REDUCE; наша мета – дати читачеві можливість використовувати цю СКА для простих обчислень. Повний опис REDUCE подано в REDUCE User's Manual (Hearn та Schöpf, 2025). Цей посібник користувача можна знайти в розділі Documentation на сайті розробника: https://reduce-algebra.sourceforge.io/. Крім того, там також наведено список книг з REDUCE та навчальні матеріали (Tutorials).

2. Базові поняття

Почнемо з базових понять, знання яких необхідне для коректного запису команд REDUCE та розуміння результатів їх виконання.

Записуючи команди та ідентифікатори REDUCE, перш за все треба зважати на **допустимий набір символів** цієї мови. Це літери англійської абетки (великі і малі літери REDUCE не розрізняє), цифри від 0 до 9 та спеціальні символи: _ ! " $ % ‘ ( ) * + , - . / : ; < > = { } і пробіл.

Числа в REDUCE можуть бути цілими або раціональними (відношенням двох цілих). За необхідності можна змусити REDUCE працювати з наближеними значеннями чисел у форматі з плаваючою точкою (з будь-якою заданою точністю). Такі числа називають дійсними. Приклад запису одного і того ж числа у різних формах: `128, 128.0, 0.128E3, 12.8E1.` Положення **десяткової точки** можна регулювати. Не можна писати `.5`, правильно `0.5`.

Будь-який **ідентифікатор** має починатися з літери і може містити цифри, а також символ підкреслення (але не на початку). Наприклад, `this_is_parameter123`, але не `_this_is_parameter`.

Послідовність символів з букв і цифр, яка починається з цифри, REDUCE інтерпретує як добуток. Наприклад, `32a2c` як $32 \times a2c$. Виняток – якщо після цифри йде `e`: `32e2c` інтерпретується як $3200 \times c$, `32ec` інтерпретується як $32 \times c$ (якщо немає цифри після `e`, інтерпретується як `e0`). Щоб уникнути несподіванок, краще пишіть **операцію множення** у явному вигляді.

Ідентифікатори слугують для позначення змінних, міток, масивів, операторів і процедур. Не слід використовувати зарезервовані ідентифікатори – їхній список наведено у посібнику користувача (Hearn, Schöpf, 2025).

Якщо **змінній** не надано якесь значення (числове чи алгебаїчний вираз), її значення дорівнює їй самій.

Рядок – це будь-яка кількість символів, взята у подвійні лапки. Якщо подвійні лапки повинні бути частиною рядка, їх набирають двічі.

Для розуміння програми, написаної на REDUCE, пишуться **коментарі**. Коментарі можна записувати так: 1) все, що написано від слова COMMENT (нагадаємо, малі і великі літери REDUCE не розрізняє) до символу ; (крапка з комою) або $ REDUCE сприймає як коментар; 2) частина рядка після знаку % теж сприймається як коментар; 3) все, що записано між /* і */ – коментар.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Оператори в REDUCE можуть бути двох типів – префіксні та інфіксні. **Префіксні оператори** мають аргументи в дужках, розділені комами, якщо їх два або більше. Приклади: sin(x) – обчислення синуса x, df(cos(x),x) – обчислення похідної від косинуса. В деяких випадках дужки можна не писати, але краще цього уникати.

Низку **інфіксних операторів** визначено системою. Серед них:

- арифметичні: + (додавання), - (віднімання), * (множення), / (ділення), ** та ^ (обчислення степеня);
- оператори відношення: = (дорівнює для математичних рівнянь), > (більше), >= (більше або дорівнює), < (менше), <= (менше або дорівнює), eq (дорівнює для логічних перевірок), neq (не дорівнює);
- логічні оператори or (або), and (і) та деякі інші.

Оператор := слугує для присвоєння значення змінній. Символ ; (крапка з комою) в кінці виразу повідомляє REDUCE про необхідність вивести результат на дисплей. Якщо ж в кінці виразу стоїть $ (результат лише обчислюється і не виводиться).

3. Швидкий старт

Відійдемо від систематичного викладу мови REDUCE, щоб показати низку простих, але поширених на практиці операцій, які можна виконувати за допомогою REDUCE. Викладених базових знань про мову програмування REDUCE загалом достатньо для розуміння цих операцій; пояснення нових конструкцій наводитимуться у відповідних місцях.

3.1. Графічний інтерфейс

На сайті розробника REDUCE https://reduce-algebra.sourceforge.io/ у розділі **Obtain and Run** (меню ліворуч) наведено детальні інструкції щодо встановлення пакета на комп'ютери з операційними системами Microsoft Windows, Linux та macOS.

Для завантаження дистрибутива можна скористатися останнім пунктом меню – **Download REDUCE from SOURCEFORGE**. Крім того, передбачена можливість роботи з онлайн-версією системи: у нижній частині меню слід обрати пункт **Web REDUCE**.

Онлайн-версія має експериментальний характер: не всі функціональні можливості REDUCE у ній реалізовані. Водночас вона є достатньою для ознайомлення з основними принципами роботи системи. У разі використанні мобільних пристроїв передбачено відповідний режим доступу.

Надалі припускатимемо, що користувач працює саме з вебверсією REDUCE.

3.2. Перші спроби

Відкриваємо вебсторінку REDUCE. У віконці внизу (**Input Editor**) записуємо команди і скеровуємо їх на виконання (**Send Input**). Можна також за допомогою нижнього меню переходити між раніше введеними командами, редагувати їх і знову виконувати. Меню вгорі дозволяє полегшити введення команд. Його призначення

інтуїтивно зрозуміле. Ми не будемо ним користуватися: робота з меню може бути корисною для невеликих інтерактивних завдань, тоді як для розв'язування задач у більшості випадків створюють програму у файлі, вміст якого (можливо, частинами) потім можна спрямувати на виконання через вікно **Input Editor**.

Вводимо

```
(a+b)^2;
```

Натискаємо **Send Input**. Отримуємо:

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Як бачимо, REDUCE розкрив дужки. Результат обчислень зберігається у робочій змінній ws (work space). Присвоїмо його змінній w:

```
w:=ws;
```

Отримаємо

$$w := a^2 + 2ab + b^2.$$

Виконання операцій множення та піднесення до степеня в алгебраїчних виразах залежить від положення перемикача exp. За замовчуванням він перебуває в положенні on (у наведеному вище прикладі обчислюється квадрат суми змінних a і b). Переведемо цей перемикач у положення off і подивимося, як виглядає w:

```
off exp;
w;
```

Отримаємо

$$a^2 + 2ab + b^2.$$

Це природно, адже саме в такому вигляді ми присвоїли змінній w її значення операцією w:=ws;. Але якщо тепер виконати аналогічну операцію для четвертого степеня суми a і b, дужки не будуть розкриті:

```
u:=(a+b)^4;
```

Отримаємо

$$u := (a + b)^4.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Як подати вираз для w в компактному вигляді, як під час початкового введення? Для цього слугує перемикач factor, який за замовчуванням вимкнений (off, REDUCE не виконує факторизацію виразу). Увімкнемо його і подивимося на w:

```
on factor;
w;
```

Отримаємо

$$(a+b)^2.$$

Якби ми хотіли зберегти w саме в такому вигляді, потрібно б було виконати операцію

```
w:=w;
```

Залежно від положення перемикачів exp і factor система спочатку визначає, чи потрібно розкривати дужки, обчислювати степені, а потім – чи слід факторизувати результат. Може статися, що при різних положеннях перемикачів результат матиме однаковий вигляд: розкриття дужок компенсується факторизацією.

Тепер обчислимо

```
u/w;
```

Отримаємо

$$(a+b)^2.$$

Як бачимо, REDUCE скорочує спільні множники. Найпростіші випадки виконуються автоматично, а складніші керуються перемикачем gcd (greatest common devisor, за замовченням off). Проілюструємо це на прикладі:

```
w1:=a^3-b^3;
w2:=a^2-b^2;
w1/w2;
on gcd;
w1/w2;
```

Результат:

$$w_1 := a^3 - b^3;$$

$$w_2 := a^2 - b^2;$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2};$$

$$\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

Бачимо, що скорочення відбулося.

Зауваження. Під час одночасного введення кількох команд може з'явитися повідомлення +++ error: (99 "End-of-file read"). Це пов'язано з особливостями вебінтерфейсу. У такому разі команди слід вводити послідовно, по одній.

Крім перемикача gcd, існує також однойменна функція gcd, яка знаходить найбільший спільний дільник двох поліномів або чисел. Наприклад:

```
gcd(a^4-b^4,a^3-b^3);
gcd(123456,654321);
```

Результат:

$$a-b;$$

3.

Ще один оператор, корисний при роботі з поліномами і цілими числами – `factorize`. Наприклад:

```
factorize(1234567890);
```

Результат:

$$\{\{2,1\},\{3,2\},\{5,1\},\{3607,1\},\{3803,1\}\}.$$

Останнє означає, що

$$1234567890 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1 \times 3607^1 \times 3803^1.$$

Інший приклад:

```
factorize(x^4-1);
```

Результат:

$$\{\{x^2+1,1\},\{x+1,1\},\{x-1,1\}\}.$$

Тобто

$$x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1).$$

Увімкнемо перемикач `complex` і повторимо цю операцію:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

```
on complex;
factorize(x^4-1);
```

Результат:

$$\{\{x+i,1\},\{x-i,1\},\{x+1,1\},\{x-1,1\}\}.$$

Тобто

$$x^4-1=(x+i)(x-i)(x+1)(x-1).$$

Зауваження. Експериментуючи з різними перемикачами, можна легко забути їхній поточний стан. Можна або явно задавати їх щоразу, або перезапускати REDUCE, оновивши сторінку браузера чи скориставшись меню **REDUCE**, пункт **Restart Reduce** над вікном **Input/Output Display**. Через це саме меню можна також роздрукувати результати.

Положення перемикачів за замовчуванням (зразу після запуску REDUCE): `on exp`, `off factor`, `off gcd`, `on allfac` (регулює винесення спільного множника у виразі).

3.3. Вигляд формул у вікні Input/Output Display

Вигляд формул у вікні виведення команд та результатів їх виконання визначається перемикачами fancy (вишуканий) та nat (natural — природний), які за замовчуванням увімкнені. Проілюструємо це на прикладі:

```
w:=x^2/(x+1);
```

Отримаємо (у стандартному режимі `on fancy, on nat`):

$$w:=\frac{x^2}{x+1}.$$

Вимкнемо перемикач `fancy`:

```
off fancy; w;
```

Результат набуває вигляду:

```
      2
     x
    ----  .
     x+1
```

Тепер вимкнемо також перемикач `nat`:

```
off nat; w;
```

Результат не виведено.

Знову ввімкнемо `fancy`:

```
on fancy; w;
```

Отримаємо лінійний запис формули:

```
x**2/(x+1)$
```

(у цьому режимі степінь позначається як **).

Отже, для якісного, «книжкового» відображення формул використовують комбінацію `on fancy, on nat` (це режим за замовчуванням). Для однорядкового запису, який зручно копіювати і використовувати під час подальшого введення в **Input Editor**, застосовують `on fancy, off nat`. Комбінація `off fancy, off nat` не завжди автоматично виводить результат. У разі потреби його можна вивести явно за допомогою команди `write w;`.

3.4. Обчислення з плаваючою точкою

У REDUCE передбачено можливість виконання обчислень із плаваючою точкою, як і в інших мовах програмування. На відміну від більшості з них, тут обчислення можна проводити з довільною заданою точністю. Перехід до режиму обчислень із плаваючою точкою здійснюємо командою

```
on rounded;
```

Кількість значущих цифр (за замовчуванням – 12), які обчислюються в цьому режимі, задається командою precision. Щоб дізнатися поточне значення точності, слід виконати команду

```
precision 0;
```

Розглянемо кілька прикладів.

```
on rounded; pi;
```

Отримаємо:

$$3.14159265359.$$

Тепер змінимо точність:

```
precision 0; precision 50; pi; sqrt(2); precision 0;
```

Результат:

$$12;$$
$$12;$$
$$3.14159265358979323846264338327950288419716939937 51;$$
$$1.41421356237309504880168872420969807856967187537 69;$$
$$50.$$

Пояснимо отримані результати.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

- Після виконання `precision 0;` система виводить поточну точність – 12 значущих цифр.
- Команда `precision 50;` також повертає попереднє значення точності (12), яке діяло на момент її виконання.
- Після цього всі обчислення виконуються з точністю 50 значущих цифр, що видно з поданих значень числа π та $\sqrt{2}$.
- Остання команда `precision 0;` показує нове поточне значення точності – `50`.

4. Розв'язання рівнянь

Мабуть, розв'язання рівнянь – одна з можливостей СКА, які найчастіше використовуються в різних природничих (і не тільки) науках, в інженерних розрахунках, у задачах економічної теорії. Звичайно, існує багато чисельних методів розв'язування рівнянь, але СКА дають змогу отримувати розв'язки в символьному вигляді, а вже потім, за потреби, обчислювати числові значення для конкретних значень параметрів.

Це можуть бути рівняння статики в інженерних розрахунках, правила Кірхгофа для розрахунку електричних кіл, шкільні задачі про рух тіла під дією сили тяжіння та багато інших прикладів.

4.1. Система лінійних рівнянь

Розглянемо систему трьох лінійних рівнянь. У вікні **Input Editor** вводимо:

```
w1:=x+y+z=6;
w2:=x+y-z=0;
w3:=x-y+z=2;
wsol:=solve({w1,w2,w3},{x,y,z});
```

У вікні **Input/Output Display** отримуємо:

$$w_1 := x + y + z = 6$$
$$w_2 := x + y - z = 0$$
$$w_3 := x - y + z = 2$$
$$\text{wsol} := \{\{x = 1, y = 2, z = 3\}\}$$

Оператор `solve` має два аргументи:

- перший аргумент – список рівнянь (упорядкована множина виразів у фігурних дужках, який може містити вкладені списки),
- другий аргумент – список невідомих.

Результат ми присвоїли змінній `wsol`; він має вигляд списку.

Знайдений розв'язок ми можемо підставити, наприклад, у вираз, що містить змінні x, y, z:

```
w4:=x^2+y^2+z^2; sub(wsol,w4);
```

Отримаємо:

$$w_4 = x^2 + y^2 + z^2.$$
$$14$$

Той самий результат дає команда

```
sub({x=1,y=2,z=3},w4);
```

Тут sub – оператор підстановки. Перший аргумент оператора sub – список «змінна = значення», другий – вираз, у який ці значення підставляються. Знайдені значення невідомих x, y, z можна зберегти в окремих змінних:

```
xx:=sub(wsol,x); yy:=sub(wsol,y); zz:=sub(wsol,z);
```

Безпосередньо присвоювати знайдені значення змінним x, y, z зазвичай небажано. Якщо ж це потрібно, можна виконати:

```
x:=xx; y:=yy; z:=zz;
```

4.2. Квадратне рівняння

Якщо розв'язується одне рівняння, його і відповідну невідому в операторі solve можна не оформлювати як списки:

```
sol:=solve(x^2+5x+6=0,x);
```

Отримаємо:

$$\{x = -2, x = -3\}.$$

Знайдено два корені квадратного рівняння.

Щоб присвоїти їх змінним x1, x2, скористаємося операторами part, lhs (ліва частина рівності) та rhs (права частина).

Присвоїмо їхні значення змінним x1, x2. Для цього нам потрібні оператори part та lhs (left-hand side), rhs (right-hand side).

Спочатку продемонструємо роботу part:

```
length(sol); part(sol,0); part(sol,1); part(sol,2);
```

Результат:

$$2$$
$$\text{list}$$
$$x = -2;$$
$$x = -3.$$

За потреби можна звернутися і до складових рівняння. Наприклад:

```
length(part(sol,1)); part(sol,1,0); part(sol,1,1); part(sol,1,2);
```

Тепер присвоїмо значення коренів змінним x1, x2:

```
x1:=rhs(part(sol,1)); x2:= rhs(part(sol,2));
```

Отримаємо:

$$x_1 = -2;$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$x_2 = -3.$$

Перевіримо, що знайдені корені задовольняють рівняння $x^2 + 5x + 6 = 0$:

```
sub(x=x1,x^2+5x+6=0); sub(x=x2,x^2+5x+6=0);
```

У результаті отримаємо дві рівності вигляду $0 = 0$.

4.3. Кубічне рівняння

Спробуємо розв'язати кубічне рівняння:

```
equ:=x^3-x+5=0; solve(equ,x);
```

Отримаємо:

$$\{x = \text{root_of}\,(x_^3 - x_ + 5, x_, \text{tag}_1)\}.$$

Якщо розв'язок рівняння громіздкий, він за замовчуванням не розгортається. Щоб побачити його в явному вигляді, слід увімкнути перемикач `fullroots`. Тут для ілюстрації наведемо лише один з трьох розв'язків:

```
on fullroots; wsol:=solve(equ,x)$ length(wsol); part(wsol,3);
```

Тут знак `$` використано замість `;` щоб не виводити весь список розв'язків. Потім за допомогою `part` виведено третій корінь. REDUCE записав тут розв'язок кубічного рівняння не через радикали, а через гіперболічні функції.

Результат:

$$x = \frac{-2\cosh\left(\frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)}{3}\right)^3}{\sqrt{3}}.$$

Якщо достатньо числового значення кореня, можна перейти до наближених обчислень (за замовчуванням – 12 значущих цифр), навіть не вмикаючи fullroots. Вимкнемо nat, щоб результат легко копіювався:

```
off fullroots; on rounded; off nat; solve(equ,x);
```

Отримаємо:

```
{x=0.952080429567 + 1.31124804408*i, x=0.952080429567 -
        1.31124804408*i, x = -1.90416085913}.
```

5. Диференціювання

Диференціювання в REDUCE здійснюється оператором `df`. За допомогою оператора `depend` можна оголосити одну змінну функцією іншої (або кількох інших).

Розглянемо приклади обчислення похідних:

```
depend u,x; w:=cos(x*u); df(w,x); df(cos(sin(x)),x);
```

Отримаємо:

$$w := \cos(ux)$$

$$-\sin(\mathrm{ux})\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}x + \mathrm{u}\right)$$

$$\cos(\sin(x))\cos^2(x) + \sin(\sin(x))\sin(x).$$

У першому випадку обчислено похідну за змінною x від $w := \cos(ux)$ за умови, що u є функцією x. У другому – похідну від $\cos(\sin(x))$.

Обчислити другу похідну від w за x можна командою `df(w,x,x)` або `df(w,x,2)`.

Засобами REDUCE можна розкласти функцію у **ряд Тейлора**. Наприклад, для функції помилок

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

розклад біля точки $x = 0$ до членів порядку x^5 включно можна отримати так:

```
w:=erf(x); u:=taylor(w,x,0,5); length(u); part(u,0);
```

Результат:

$$w := \mathrm{erf}(x);$$

$$\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}x - \frac{2\sqrt{\pi}}{3\pi}x^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{5\pi}x^5 + O(x^6).$$

У цьому прикладі:

- перший аргумент taylor – функція, яку потрібно розкласти в ряд;
- другий – змінна розкладу;
- третій – точка розкладу;
- четвертий – порядок розкладу (включно).

Є можливість розкладу за двома і більше змінними, але на цьому тут не зупиняємося.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Окрім оператора `taylor`, для роботи зі степеневими рядами можна використовувати оператор `ps` (powers series) з пакету TPS (Truncated/Extendible Power Series). Він створює об'єкт типу «степеневий ряд», з яким можна працювати як із формально нескінченним рядом. Оператор pstruncate перетворює такий ряд на поліном заданого порядку.

Розглянемо приклад:

```
u:=sin(x);
ups:=ps(u,x,0);
```

Отримаємо:

$$\mathrm{u} := \sin(\mathrm{x})\,;$$

$$\mathrm{ups} := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7).$$

Тут змінній u присвоєно значення $\sin(x)$, після чого виконано розклад у ряд біля точки $x = 0$.

Тепер обріжемо ряд до сьомого порядку за x:

```
up:=pstruncate(ups,7);
```

Отримаємо:

$$\mathrm{up} := \frac{x(-x^6 + 42x^4 - 840x^2 + 5040)}{5040}.$$

Вираз трохи незвичний, оскільки REDUCE звів дроби до спільного знаменника і виніс спільний множник за дужку.

Щоб отримати почленне ділення, увімкнемо перемикач div, а щоб система не виносила спільний множник – вимкнемо `allfac`

```
on div; off allfac;
```

Тепер введемо:

```
up;
```

У результаті маємо:

$$-\frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x.$$

6. Інтегрування

Для інтегрування в REDUCE використовується оператор `int`.

Приклад невизначеного інтеграла:

```
int(exp(-x)*x,x);
```

Результат:

$$\frac{-(x+1)}{e^x}.$$

Приклад визначеного інтеграла (від 0 до нескінченності):

```
int(exp(-x^2),x,0,infinity);
```

Результат:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Якщо інтеграл не обчислюється аналітично, можна скористатися чисельним інтегруванням за допомогою оператора `num_int`. Наприклад,

```
num_int(sin(sin(x)),x,0,1);
```

Результат:

$$0.430606103121.$$

7. Диференціальні рівняння

Для розв'язування диференціальних рівнянь у REDUCE використовується оператор `odesolve`.

Розглянемо приклад:

```
depend y, x; eqy:=df(y,x,x)=-y-g*df(y,x); odesolve(eqy,y,x);
```

Спочатку директивою `depend` повідомляємо REDUCE, що змінна y залежить від x. Далі записуємо диференціальне рівняння (у даному разі вільного осцилятора із затуханням) і присвоюємо його змінній `eqy`. Після цього викликаємо `odesolve`.

Аргументи оператора `odesolve`:

1. рівняння,
2. залежна змінна,
3. незалежна змінна.

Отримуємо результат:

$$\mathrm{eqy} := \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{\partial y}{\partial x} g - y;$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\left\{ y = \frac{\mathrm{arbconst}(2) + e^{\sqrt{g^2-4}\,x}\,\mathrm{arbconst}(1)}{\exp\left(\frac{\sqrt{g^2-4}\,x + g\,x}{2}\right)} \right\}.$$

Тут $\mathrm{arbconst}(1)$ та $\mathrm{arbconst}(2)$ – довільні сталі інтегрування, значення яких визначаються з початкових умов.

8. Робота з поліномами

REDUCE, як і інші системи комп'ютерної алгебри, надає широкі можливості для роботи з поліномами. Розглянемо деякі з них на прикладах.

Візьмемо поліном з раціональними коефіцієнтами

```
y:= 2+3/2*x+ a*x-5/3*x^2+b*x^2;
```

За замовчуванням перемикачі мають стандартні значення, тому результат подається зі спільним знаменником:

$$y := \frac{6ax + 6bx^2 - 10x^2 + 9x + 12}{6}.$$

Якщо потрібно отримати запис із раціональними коефіцієнтами, вмикаємо перемикач `rational`:

```
on rational; y;
```

Отримаємо:

$$ax + bx^2 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2.$$

Збираємо коефіцієнти при x:

```
factor x; y;
```

Результат:

$$x^2\left(b - \frac{5}{3}\right) + x\left(a + \frac{3}{2}\right) + 2.$$

Вимкнемо `rational` і, скасовуючи збирання за x, знайдемо чисельник і знаменник початкового запису:

```
off rational; remfac x; yn:=num(y); yd:=den(y);
```

Отримаємо:

$$\text{yn}:=6ax + 6bx^2 - 10x^2 + 9x + 12;$$

$$\text{yd}:=6.$$

Тепер знайдемо найбільший степінь x у чисельнику yn, коефіцієнт при x^1 та доданок з найвищим степенем x:

```
deg(yn,x); coeffn(yn,x,1); lterm(yn,x);
```

Результати:

$$2;$$

$$3(2a + 3);$$

$$2x^2(3b - 5).$$

Таким чином, REDUCE надає зручні інструменти для аналізу структури поліномів.

9. Трохи тригонометрії

За тригонометричні перетворення в REDUCE відповідає пакет **trigsimp**. За замовчуванням він завантажений на початку роботи системи. Продемонструємо деякі його можливості на прикладах перетворення тригонометричних формул:

```
w:=sin(2*x)+cos(y)^2+sin(x+y);
trigsimp(w,expand);
```

У результаті отримаємо:

$$w := \cos^2(y) + \sin(x + y) + \ sin(2x);$$

$$2\cos(x)\sin(x) + \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(x) - \sin^2(y) + 1.$$

Тут використано параметр expand; в результаті розкрито формули подвійного кута та суми аргументів. Тут ми звели вираз до тригонометричних функцій одного аргументу.

Тепер виконаємо обернене перетворення — понизимо степені тригонометричних функцій і зведемо вираз до функцій лінійних комбінацій аргументів:

```
u:=sin(x)^3+cos(y)*sin(x);
trigsimp(u,combine);
```

Отримаємо:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$u := \sin(x)\,(\cos(y) + \sin^2(x));$$

$$\frac{2\sin(x-y) + 2\sin(x+y) - \sin(3x) + 3\sin(x)}{4}.$$

У цьому випадку використання параметра `combine` зумовлює застосування формул перетворення добутків і степенів тригонометричних функцій до сум і різниць аргументів.

10. Некомутуючі оператори

Ще одна цікава можливість REDUCE – робота з некомутуючими операторами, що може бути корисною, зокрема, під час розв'язування задач з квантової механіки.

Розглянемо приклад:

```
operator a, b; noncom a, b;
commutator := a(1)*b(1) - b(1)*a(1);
```

Отримаємо:

$$\text{commutator} := a(1)b(1) - b(1)a(1).$$

Тут формально введено аргумент оператора. Тепер задамо правило перестановки, аналогічне співвідношенню для операторів народження та знищення в квантовій механіці:

```
let a(1)*b(1)=>b(1)*a(1)+1; commutator;
```

Результат:

$$1.$$

Перевіримо, як система враховує це правило в інших виразах:

```
(a(1)+b(1))^2;
```

Отримаємо:

$$a(1)^2 + b(1)^2 + 2b(1)a(1) + 1.$$

Таким чином можна задати правила перестановки для некомутуючих операторів, а REDUCE автоматично враховує їх під час перетворення виразів.

11. Висновки

У статті наведено частину команд системи комп'ютерної алгебри REDUCE, яка може слугувати основою для самостійного опанування цієї системи. Для первинного ознайомлення з можливостями REDUCE достатньо скористатися вебверсією на сайті розробників (саме так виконувалися обчислення під час підготовки цієї статті). Однак для систематичної та тривалої роботи доцільно встановити REDUCE на власний комп'ютер.

Зрозуміло, що наведений огляд далеко не вичерпний. Обсяг повного посібника REDUCE User's Manual (Hearn та Schöpf, 2025) становить 1389 сторінок. Поза межами статті залишилися такі можливості системи, як читання команд із файлу та запис результатів у файл, побудова графіків, робота з масивами, матрицями, векторами й тензорами, спеціальні функції, оператори заміни змінних у диференціальних рівняннях, неперервні дроби, обчислення границь, лінійні оператори, задання правил перетворення (зокрема, саме цей механізм використовується в пакеті trigsimp), програмування (функції, процедури, умовні оператори, цикли), пакети для задач диференціальної геометрії та небесної механіки тощо.

REDUCE є прикладом того, як класичні ідеї комп'ютерної алгебри органічно поєднуються із сучасними потребами дослідників і студентів.

Джерела фінансування

Ця робота не отримала жодного гранту від фінансових установ у державному, комерційному чи некомерційному секторах.

Список використаних джерел

Axiom Development Team. (n.d.). Axiom: The scientific computation system. Retrieved February 8, 2026, from https://www.nongnu.org/axiom/

MacCallum, M. A. (2018). Computer algebra in gravity research. Living reviews in relativity, 21 (1), 6. https://doi.org/10.1007/s41114-018-0015-6

Maxima Manual Version 5.48.1. https://maxima.sourceforge.io/ext/maxima.pdf

Hearn, A. C. (1968). REDUCE: A user oriented interactive system for algebraic simplification. In M. Klerer & J. Reinfelds (Eds.), Interactive systems for experimental applied mathematics (pp. 79–90). Academic Press. https://dl.acm.org/doi/10.1145/2402536.2402544

Hearn, A. C. (2005). REDUCE: The first forty years [Conference presentation]. A3L Conference in Honor of the 60th Birthday of Volker Weispfenning, Passau, Germany. http://www.reduce-algebra.com/reduce40.pdf

Hearn, A. C., & Schöpf, R. (2025). REDUCE user's manual: Free version (Rev. 7146). Retrieved February 8, 2026, from https://reduce-algebra.sourceforge.io/

Rayna, G. (1987). Reduce: Software for algebraic computation. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4806-4

References

Axiom Development Team. (n.d.). Axiom: The scientific computation system. Retrieved February 8, 2026, from https://www.nongnu.org/axiom/

MacCallum, M. A. (2018). Computer algebra in gravity research. Living reviews in relativity, 21 (1), 6. https://doi.org/10.1007/s41114-018-0015-6

Maxima Manual Version 5.48.1. https://maxima.sourceforge.io/ext/maxima.pdf

Hearn, A. C. (1968). REDUCE: A user oriented interactive system for algebraic simplification. In M. Klerer & J. Reinfelds (Eds.), Interactive systems for experimental applied mathematics (pp. 79–90). Academic Press. https://dl.acm.org/doi/10.1145/2402536.2402544

Hearn, A. C. (2005). REDUCE: The first forty years [Conference presentation]. A3L Conference in Honor of the 60th Birthday of Volker Weispfenning, Passau, Germany. http://www.reduce-algebra.com/reduce40.pdf

Hearn, A. C., & Schöpf, R. (2025). REDUCE user's manual: Free version (Rev. 7146). Retrieved February 8, 2026, from https://reduce-algebra.sourceforge.io/

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Rayna, G. (1987). Reduce: Software for algebraic computation. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4806-4

Отримано редакцією журналу: 20.01.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Victor ROMANENKO, Dr. of Sci. (Phys&Math), Leading Researcher
ORCID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Nataliya KORNILOVSKA, Ph.D (Tech. Sci.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-8331-8027
e-mail: kornilovska.natalya@kntu.net.ua
Kherson National Technical University, Khmelnytskiy, Ukraine

REDUCE – A CLASSIC OF COMPUTER ALGEBRA

Abstract. *The article provides a brief overview of the computer algebra system REDUCE. Despite its considerable age, REDUCE is still actively used by researchers. The purpose of the work is to provide basic knowledge of REDUCE that will help readers begin working with the system. Most of the examples presented relate to mathematics; their selection is intended to demonstrate the widest possible range of the system's basic capabilities within the scope of a short publication.*

Keywords: *computer algebra; mathematical analysis; elementary functions.*

Received: 20.01.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

Креативна математика

УДК 519.2:[796.01:339.152] **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.7**

Катерина КЕКАЛО, студентка
ORCID: 0009-0002-0677-3955
e-mail: erozkova777@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ СТРАТЕГІЙ У СПОРТИВНИХ СТАВКАХ

Анотація. *У статті досліджено математичне підґрунтя функціонування ринку спортивних ставок, який в умовах інтенсивної медійної промоції помилково інтерпретується масовою свідомістю як сфера випадкового успіху. Акцентовано увагу на невідповідності між маркетинговим образом «легкого прибутку» та об'єктивною математичною реальністю, що ґрунтується на детермінованих алгоритмах забезпечення дохідності букмекерських організацій.*

Метою статті є аналіз ключових математичних інструментів, що пояснюють природу спортивних ставок: маржі букмекера, очікуваного значення (EV), дисперсії, критерію Келлі та розподілу Пуассона. Показано, як маржа забезпечує стабільний прибуток компанії, EV дозволяє визначати «цінність» ставки, дисперсія описує рівень ризику й невизначеності, а критерій Келлі дає оптимальну формулу розміру ставки. Використання розподілу Пуассона розглянуто як приклад статистичного прогнозування результатів у футболі.

Результати дослідження доводять, що математичний підхід може зробити ставку раціональнішою, однак не усуває системної переваги букмекера. Перспективи подальших досліджень полягають у поєднанні класичних ймовірнісних моделей з сучасними методами машинного навчання, а також у міждисциплінарному аналізі впливу реклами та психологічних чинників на поведінку гравців.

Ключові слова: *очікуване значення; дисперсія; критерій Келлі; розподіл Пуассона; спортивні ставки; маржа букмекера.*

1. Вступ

У сучасному світі спортивні ставки стали важливою складовою спортивної індустрії, що поєднує економіку, статистику та психологію. Їх популярність зростає, зокрема в Україні, де букмекерські сервіси активно рекламуються, формуючи у гравців ілюзію легких грошей та відсутності ризику. Однак за системою ставок стоять не випадковість і удача, а математично обґрунтовані моделі, які забезпечують прибуток організаторам. Актуальність дослідження обумовлена необхідністю точного оцінювання ймовірностей та коригування букмекерських коефіцієнтів для більш раціональної гри.

Фундаментальна проблема аналізу спортивних подій полягає у наявності *маржі букмекера* (overround), яка штучно занижує виплати та спотворює об'єктивну ймовірнісну картину події. Оскільки сума зворотних величин коефіцієнтів у лінії завжди перевищує одиницю, безпосереднє використання котирувань для оцінки реальних шансів є некоректним.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Незважаючи на існування класичних методів деривації «чистих» імовірностей, кожен із них має суттєві методологічні недоліки:

- *адитивні моделі та проста нормалізація* – часто ігнорують нелінійну природу розподілу маржі, що в окремих випадках призводить до математичних аномалій (отримання ймовірностей, що виходять за межі діапазону $[0, 1]$);
- *логарифмічні та ітеративні алгоритми* – попри вищу точність, вони не завжди здатні адекватно нівелювати системні викривлення, такі як ефект «фаворита-аутсайдера» (*favorite-longshot bias*), де ринок схильний недооцінювати фаворитів і переоцінювати малоймовірні результати.

Отже, існує нагальна потреба у розробці та впровадженні вдосконалених методів калібрування, які б дозволяли не лише усувати надлишкову маржу, а й враховувати психологічні та ринкові чинники формування коефіцієнтів. Це є критично важливим для побудови точних прогнозних моделей та досягнення позитивного математичного сподівання у довгостроковій перспективі.

Аналіз останніх досліджень показує, що питання коригування коефіцієнтів активно вивчається. Так, (Clarke, 2017) запропонував метод коригування, який усуває overround без негативних імовірностей і враховує упередження фаворитів та аутсайдерів. Дослідження (Dmochowski, 1977) та (Stefani, 2017) демонструють ефективність математичних моделей, зокрема методу найменших квадратів, для прогнозування результатів футбольних та баскетбольних матчів. Ці роботи підкреслюють важливість статистичного підходу у прийнятті рішень у ставках.

Об’єктом дослідження є методи коригування букмекерських коефіцієнтів для усунення overround та їх вплив на точність прогнозування спортивних подій. Метою роботи є розробка та оцінка ефективності таких методів. Для досягнення мети поставлено завдання: проаналізувати існуючі підходи та порівняти їх ефективність на реальних даних.

Методи дослідження включають статистичний аналіз на прикладі футбольних матчів, що дозволяє оцінити точність прогнозів та оптимізувати прийняття рішень у ставках.

2. Аналіз ключових математичних інструментів прогнозування результатів спортивних подій

2.1. Маржа букмекера

Одним із ключових інструментів отримання прибутку букмекерських компаній є так звана маржа. Вона відображає приховану комісію, яку букмекер закладає у коефіцієнти, та фактично гарантує його виграш у довгостроковій перспективі незалежно від результату події.

Розглянемо умовний футбольний матч між збірними Англії та Іспанії. Якщо обидві команди мають рівні шанси на перемогу, то «чиста» математична ймовірність виграшу

кожної з них становитиме 50%. У такому випадку коефіцієнти ставок без врахування маржі дорівнювали б:

$$k_{\text{Англія}} = k_{\text{Іспанія}} = \frac{1}{0{,}5} = 2. \quad (1)$$

Припустимо, один гравець ставить 1000 грн на Англію, а інший – 1000 грн на Іспанію. У такому випадку після матчу гроші просто переходять від того, хто програв, до того, хто виграв, і букмекер нічого не заробляє. Саме тому у реальності коефіцієнти навмисно занижуються, аби створити «приховану комісію». Наприклад, замість 2,00 на обидві команди, букмекер може запропонувати 1,90 проти 1,90. Тоді сума зворотних величин коефіцієнтів перевищує 1, що утворює маржу.

$$M = \left(\frac{1}{1{,}9} + \frac{1}{1{,}9} - 1\right) \cdot 100\% \approx 5{,}26\%. \quad (2)$$

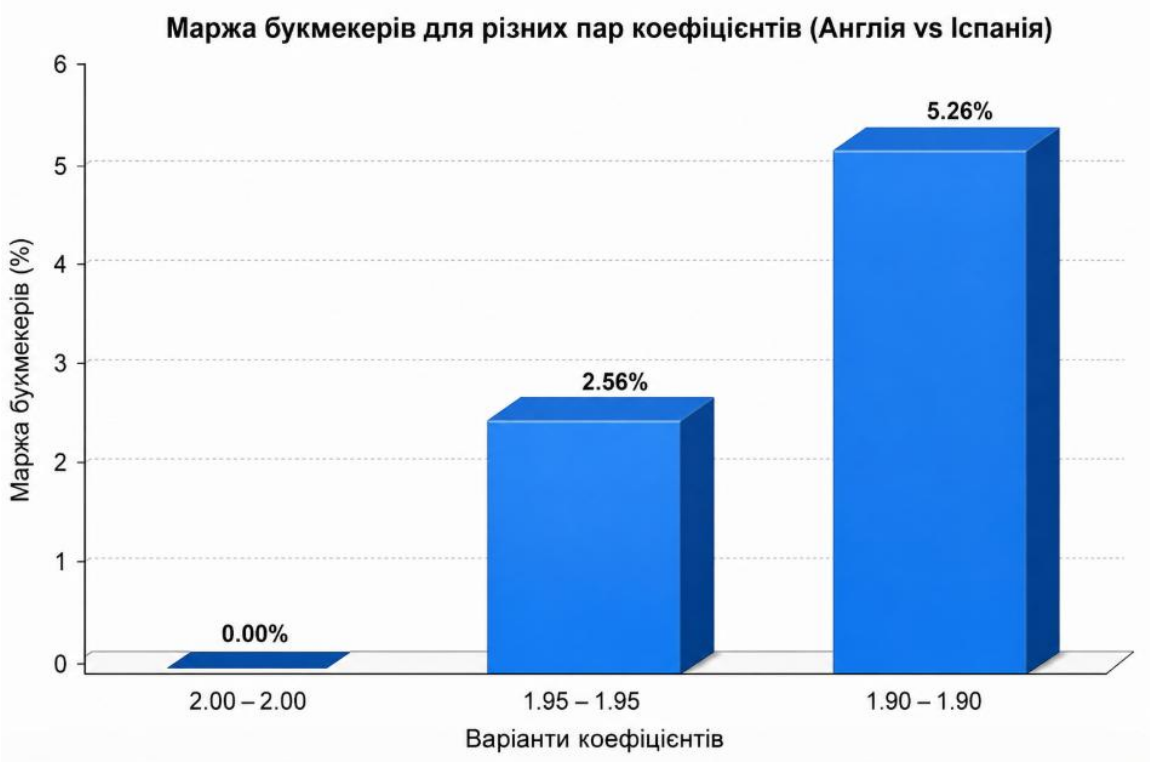


Рис 1. Залежність маржі від виставлених коефіцієнтів

У такій ситуації незалежно від результату букмекер гарантовано отримує близько 5,26% від загальної суми ставок (див. рис. 1).

2.2. Математичне сподівання

Коли гравці роблять ставку, їх цікавить не лише шанс виграшу, а й середній результат у довгостроковій перспективі. Цей показник називається *математичним*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

сподіванням (англ. *expected value (EV)*) – це середня сума грошей, яку гравець може очікувати виграти або програти при багаторазовому повторенні ставки з однаковими умовами.

$$EV = s_1 \cdot p_1 - s_2 \cdot p_2, \tag{3}$$

де s_1 − виграна сума за ставку, p_1 − ймовірність виграшу, s_2 − сума програшу за ставку, p_2 − ймовірність програшу.

EV показує чи «вигідна ставка» у довгостроковій перспективі:

- якщо $EV > 0$ − у гравця є перевага виграшу;
- якщо $EV = 0$ − гра між букмекером і гравцем на рівні, ніхто не в плюсі;
- якщо $EV < 0$ − у довгостроковій перспективі гравець програє.

Приклад 1. Зробити ставку у розмірі 1000 грн на перемогу футбольного клубу «Динамо». Букмекерський коефіцієнт на перемогу «Динамо» становить 2.2. Оцінити математичне сподівання EV цієї ставки та визначити, чи є вона вигідною для гравця у довгостроковій перспективі.

Для аналізу вигідності ставки побудуємо таблицю розподілу ймовірностей прибутку та втрат, після чого розрахуємо математичне сподівання.

Таблиця 1

Коефіцієнт на виграш «Динамо» – 2,2

Прибуток/втрата з 1000 грн	Поставили на виграш «Динамо»	Ймовірність
«Динамо» (виграш)	$(2200 - 1000) = +1200$ грн	$\frac{1}{2,2} = 0,45$
«Реал» (програш)	-1000 грн	$1 - 0,45 = 0,55$

$$EV = 1200 \cdot 0,45 - 1000 \cdot 0,55 = -10.$$

Отримане від’ємне значення математичного сподівання свідчить про те, що ставка на «Динамо» в довгостроковій перспективі є невигідною для гравця. Це означає, що середньостатистично з кожної ставки у 1000 грн він буде втрачати близько 10 грн. Таким чином, навіть за привабливих коефіцієнтів букмекер зберігає математичну перевагу над гравцем.

Отже, ставка на «Динамо» в довгостроковій перспективі для гравця є невигідною.

Як розрахувати математичне сподівання у ставках на спорт можна познайомитись (The Mathematical Truth About Sports Betting | Sports betting explained. (2025, September

19). YouTube), (What is Positive EV Sports Betting? (Better than Arbitrage!) (using OddsJam). (2025, September 19). YouTube).

2.3. Дисперсія

Одним із важливих показників оцінки ризику у ставках є *дисперсія*. Вона показує, наскільки сильно можливі результати можуть відхилятися від середнього значення (математичного сподівання). Якщо EV вказує на середній результат у довгостроковій перспективі, то дисперсія описує «розкид» навколо цього результату.

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EV)^2 \cdot p_i, \tag{4}$$

де x_i − можливі результати випадкової величини (виграш чи програш), EV − математичне сподівання, p_i − ймовірність настання відповідного результату.

Чим більша дисперсія, тим вищі коливання виграшів і програшів у короткостроковій перспективі. Це означає, що високі коефіцієнти (наприклад $5{,}0$ чи $10{,}0$) зазвичай пов'язані з величезною дисперсією: ставка може довго не давати виграшу, але іноді приносити великий виграш.

Приклад 2. Розглянемо ту ж ставку на матч «Динамо» – «Реал» з наступними параметрами:

- коефіцієнт на «Динамо» $= 2{,}2$;
- ймовірність перемоги «Динамо» $= 0{,}45$;
- ставка $= 1000$ грн.

Розрахувати дисперсію $D(x)$ та *середньоквадратичне відхилення* $\sigma = \sqrt{D(x)}$ для цієї ставки, а також інтерпретувати отримані результати з погляду ризику у короткостроковій та довгостроковій перспективах.

Можливі результати:

- якщо виграє «Динамо»: чистий прибуток $x_1 = +1200$ грн, з імовірністю $p_1 = 0{,}45$;
- якщо виграє «Реал» (або нічия): втрата $x_2 = -1000$ грн, з імовірністю $p_2 = 0{,}55$.

Математичне сподівання відповідно до розрахунків прикладу 1, $EV = -10$ грн.

Тепер рахуємо дисперсію:

$$D(x) = (x_1 - EV)^2 \cdot\ p_1 + (x_2 - EV)^2 \cdot\ p_2.$$

$$D(x)\ =\ \big(1200 - (-10)\big)^2 \cdot\ 0{,}45\ + \big(-1000 - (-10)\big)^2 \cdot\ 0{,}55\ =\ 1\,197\,900.$$

Отже, дисперсія становить майже 1,2 млн грн^2.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Оскільки дисперсія вимірюється у квадратних одиницях (грн^2), для зручності аналізу використовують середньоквадратичне відхилення, яке повертає показник до початкових грошових одиниць – грн:

$$\sigma = \sqrt{D(x)} \approx \sqrt{1\,197\,900} \approx 1\,094 \text{ грн.}$$

Це означає, що у короткостроковій перспективі отримане значення $\sigma \approx 1094$ грн, тобто фактичні результати навіть однієї ставки можуть суттєво відхилятися від середнього очікуваного значення (-10 грн) – приблизно на $\pm\,1094$ грн.

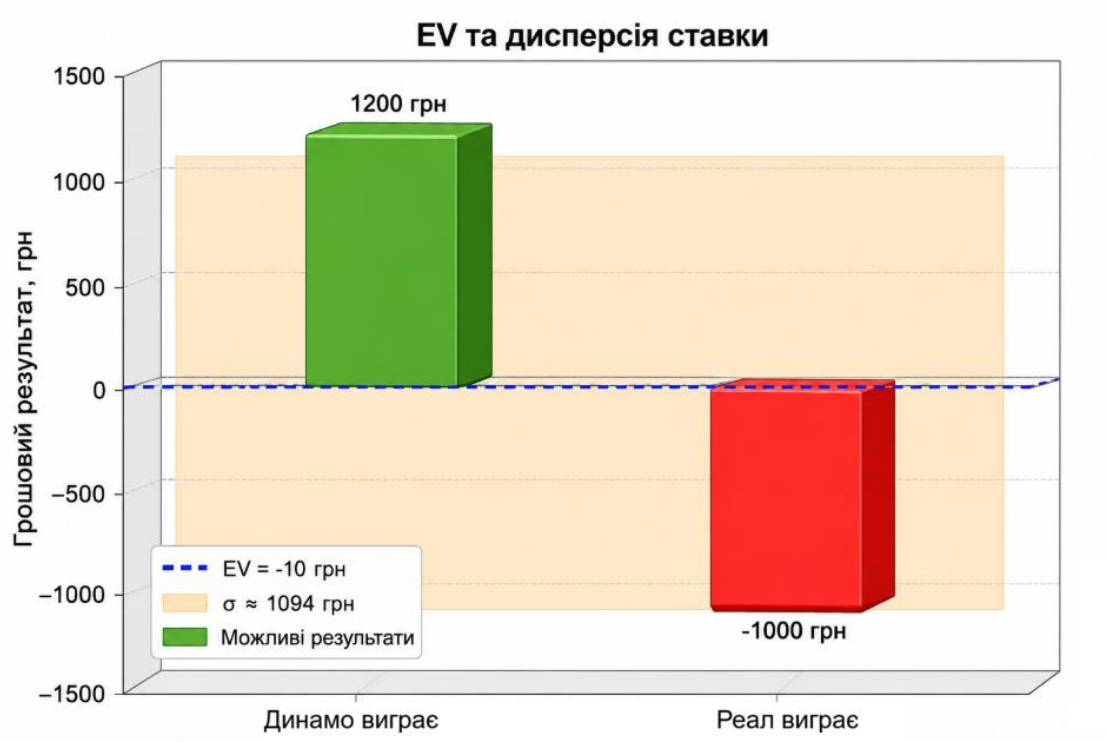


Рис 2. Середній результат і коливання ставки

Дисперсія є ключовим показником *ризику*. Навіть за умови негативного EV висока дисперсія здатна створювати ілюзію «везіння» або виграшної серії на коротких дистанціях.

Попри будь-які випадкові коливання у короткостроковому періоді на великій кількості ставок (у довгостроковій перспективі) гравець усе одно неминуче залишиться в мінусі через системну перевагу букмекера (див. рис. 2) (How to Use Expert Predictions to Your Advantage. (2020, April 23). Betting.team).

2.4. Критерій Келлі

Критерій Келлі – це математичний метод управління розміром ставки, який допомагає максимізувати зростання капіталу у довгостроковій перспективі, враховуючи ймовірність виграшу і коефіцієнт ставки:

$$C = \frac{K \cdot V - 1}{K - 1}, \tag{5}$$

де K − коефіцієнт букмекера, V − ймовірність виграшу, C − оптимальна ставка (Carta, Conversano, 2020).

Приклад 3. Необхідно визначити оптимальну частку капіталу C для ставки на матч «Динамо» за такими даними:

- коефіцієнт букмекера на виграш «Динамо» $K = 2{,}2$;
- ймовірність виграшу за власною оцінкою гравця $V = 0{,}5$ (або 50%).

Для визначення оптимального розміру ставки скористаємося математичною моделлю критерію Келлі (5). Тоді

$$C = \frac{2{,}2 \cdot 0{,}5 - 1}{2{,}2 - 1} = \frac{1}{12} \approx 0{,}0833.$$

Отримане значення $C \approx 0{,}0833$ означає, що оптимальний розмір ставки становить $8{,}33$ % від поточного загального капіталу (ігрового банку) гравця.

Отже, оптимальна частка капіталу становить $8{,}33$ %.

Приклад 3 ілюструє, що якщо гравець планує поставити 1000 грн, то за критерієм Келлі варто поставити лише 83 грн. Таким чином гравець максимізує очікуваний приріст своїх грошей для ставок у довгостроковій перспективі, одночасно зменшуючи ризик значних втрат.

Примітка. Критерій Келлі пропонує виділяти частку банку лише тоді, коли чисельник $K \cdot V - 1 > 0$ (тобто коли ставка має додатне математичне сподівання з погляду гравця). Оскільки оцінка ймовірності виграшу гравця $V = 0{,}5$ вища за оцінку букмекера $\frac{1}{2{,}2} \approx 0{,}45$, формула вказує на наявність переваги і розраховує безпечний відсоток для максимізації капіталу.

2.5. Емпіричний аналіз

Для перевірки теоретичних положень щодо застосування ймовірнісних моделей у спортивних ставках було проведено емпіричне дослідження результативності футбольного клубу «Динамо» (Київ) на основі історичних даних матчів. У роботі використано інформацію про кількість голів, забитих командою в офіційних матчах за період з 2018 по 2025 роки.

Загальна вибірка склала 406 матчів, що дозволяє розглядати отримані результати як статистично репрезентативні. Основною досліджуваною випадковою величиною є кількість голів, забитих ФК «Динамо» в одному матчі, яка є дискретною та набуває невід'ємних цілих значень.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

З метою аналізу можливих структурних змін у результативності команди всі матчі було поділено на дві підвибірки: мирний період (2018 - 2021 роки) – 206 матчів та період після 2022 року (2022 - 2025 роки) – 200 матчів.

Такий поділ дозволяє оцінити вплив зовнішніх соціально-історичних чинників на статистичні характеристики результативності команди.

На першому етапі дослідження було побудовано емпіричні розподіли кількості забитих голів для кожного з розглянутих періодів. Для цього підраховано кількість матчів, у яких «Динамо» забивало 0, 1, 2, …, 6 голів.

Таблиця 2

Емпіричний розподіл кількості голів ФК «Динамо» у матчах за періоди 2018 - 2021 та 2022 - 2025 років. (https://fcdynamo.com/calendar/dynamo-k)

Голи	2018 - 2021	2022 - 2025
0	37	41
1	62	53
2	50	49
3	28	32
4	16	15
5	11	9
6	2	1
Всього матчів	206	200
Вибіркове середнє	1,830097087	1,79

Для загальної характеристики спортивних результатів ФК «Динамо» проаналізовано співвідношення виграшів, нічиїх та програшів у кожному з досліджуваних періодів. На рис. 3 наведено структуру результатів матчів у період 2018–2021 років та у період 2022–2025 років відповідно.

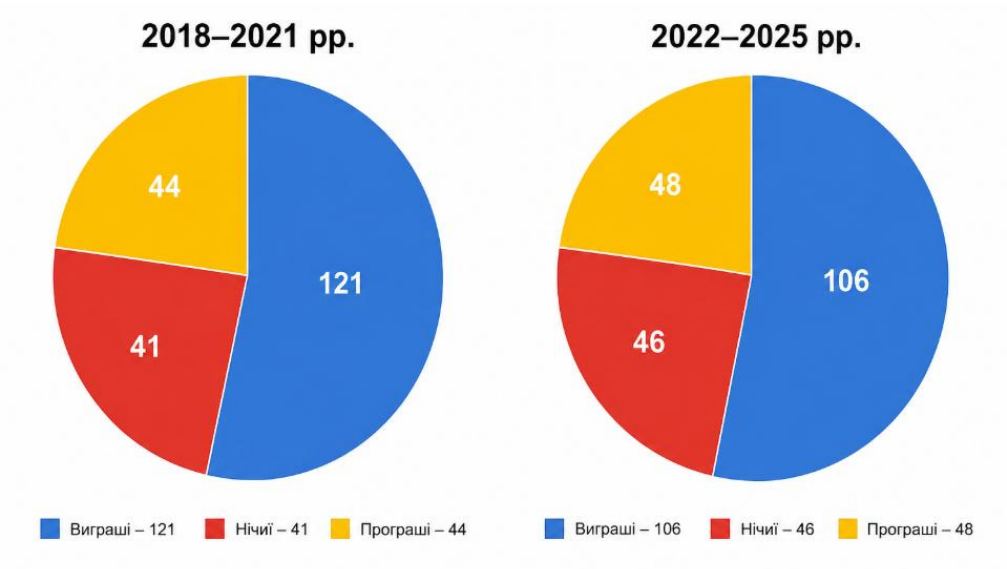


Рис 3. Структура результатів матчів ФК «Динамо» у періоди 2018 - 2021 та 2022 - 2025 років

Аналіз свідчить, що в обох періодах переважають виграші, однак після 2022 року спостерігається відносне зменшення їх частки та одночасне збільшення частки нічиїх і програшів. Це може свідчити про зростання конкурентності матчів та ускладнення умов виступів команди внаслідок воєнного стану в Україні, що є важливим моментом для подальшого аналізу результативності за кількістю забитих голів.

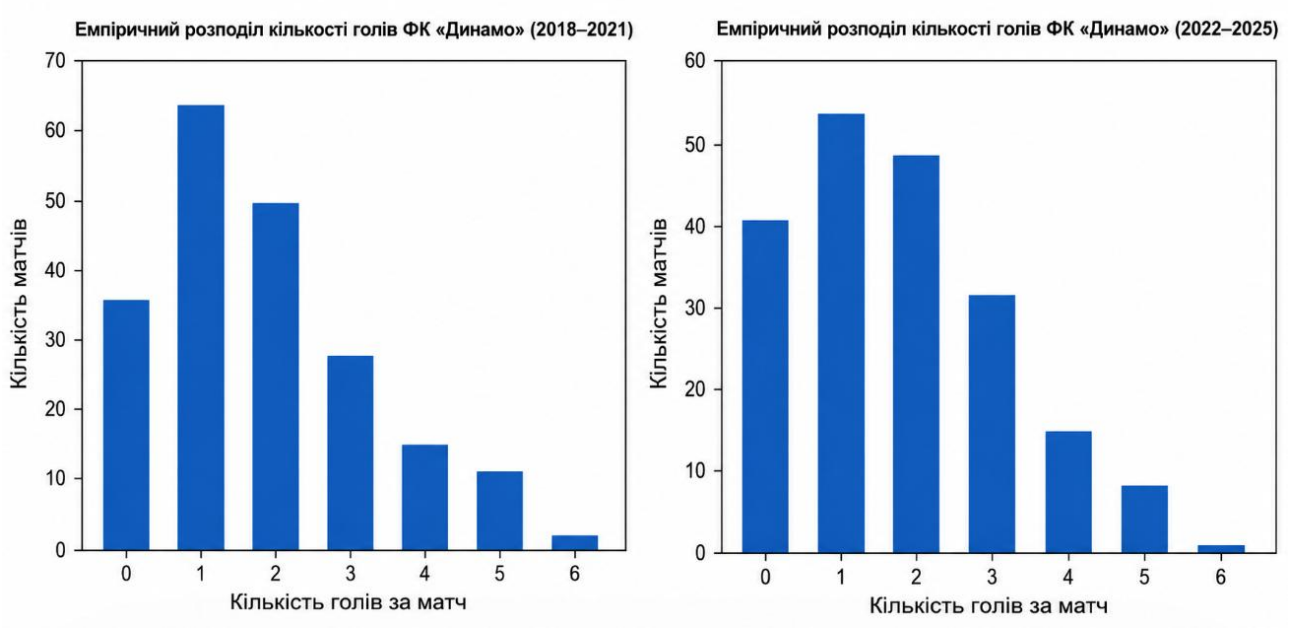


Рис 4. Розподіли кількості голів ФК «Динамо» у періоди 2018 - 2021 та 2022 - 2025 років

Для наочності емпіричні розподіли кількості голів було подано у вигляді гістограм для кожного з періодів окремо (рис. 4). Візуальний аналіз показує, що обидва розподіли є асиметричними з максимумом у зоні малих значень та поступовим спадом для більших значень кількості голів. Така форма характерна для дискретних розподілів рідкісних подій і узгоджується з припущенням про пуассонівський характер досліджуваної випадкової величини.

Кількість голів у футбольному матчі може розглядатися як результат настання незалежних подій протягом обмеженого проміжку часу. За умови відносної сталості середньої інтенсивності забивання голів та незалежності подій, така випадкова величина природно моделюється пуассонівським розподілом.

3. Розподіл Пуассона

3.1. Оцінка параметра λ пуассонівського розподілу

Параметр λ пуассонівського розподілу інтерпретується як середня кількість подій за одиницю часу, у даному випадку – *середня кількість голів*, забитих командою в одному матчі. Параметр λ, в нашому випадку, оцінюватимемо за допомогою вибіркового середнього значення кількості голів.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Використання вибіркового середнього як оцінки λ є статистично обґрунтованим, оскільки для пуассонівського розподілу вибіркове середнє є оцінкою максимальної правдоподібності та є незміщеною і асимптотично ефективною оцінкою. Натомість використання оцінки оберненої величини до вибіркового середнього не має теоретичного обґрунтування в межах пуассонівської моделі та тому не розглядається.

Постає питання, чи могли б бути використані альтернативні оцінки параметра λ. Формально можна розглянути, наприклад, оцінку $\frac{1}{\bar{X}}$, яка також залежить від λ. Однак така оцінка є зміщеною. Щоб показати це, скористаємося розкладом Тейлора функції

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

в околі точки λ:

$$\frac{1}{\bar{X}} \approx \frac{1}{\lambda} - \frac{\bar{X} - \lambda}{\lambda^2} + \frac{(\bar{X} - \lambda)^2}{\lambda^3}.$$

Беручи математичне сподівання та враховуючи, що $E[\bar{X}] \approx \lambda$ і

$$Var\,(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n},$$

отримуємо наближення

$$E\left[\frac{1}{\bar{X}}\right] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2 n}.$$

Отже, навіть для скінченних вибірок математичне сподівання оцінки $\frac{1}{\bar{X}}$ перевищує $\frac{1}{\lambda}$, що свідчить про її зміщеність. Лише при $n \to \infty$ це зміщення зникає. Крім того, величина $\frac{1}{\bar{X}}$ не має безпосередньої інтерпретації як оцінка інтенсивності потоку подій у пуассонівській моделі та не виникає з методу максимальної правдоподібності. Тому в подальшому аналізі використовується вибіркове середнє як коректна та статистично обґрунтована оцінка параметра λ.

3.2. Критерій χ^2

З метою формальної перевірки припущення про пуассонівський характер розподілу кількості голів, зробленого на основі емпіричного аналізу, у подальшому застосовується статистичний критерій χ^2 Пірсона. Використання цього тесту дозволяє кількісно оцінити ступінь відповідності емпіричного розподілу теоретичній пуассонівській моделі та підтвердити коректність її застосування для аналізу результативності ФК «Динамо».

Постановка статистичних гіпотез

Для кожного з періодів формулювались однакові гіпотези:

- *нульова гіпотеза* H_0: емпіричний розподіл кількості голів у матчах ФК «Динамо» узгоджується з пуассонівським розподілом; спостережувані відхилення мають випадковий характер;
- *альтернативна гіпотеза* H_1: емпіричний розподіл не узгоджується з розподілом Пуассона; відхилення є статистично значущими.

Критерій узгодженості встановлено на стандартному рівні значущості $\alpha = 0{,}05$.

Однією з необхідних умов коректного застосування критерію χ^2 є достатньо великі очікувані частоти в кожній категорії. Згідно з правилом Кокрена, очікуване значення E_i не повинно бути меншим за 5. Під час розрахунку теоретичних частот для категорій із великою кількістю голів було встановлено, що для значення 6 голів очікувана частота є меншою за 2 в обох періодах. Використання таких малих значень могло б призвести до спотворення статистики χ^2 та некоректних висновків.

У зв'язку з цим здійснюємо агрегацію хвостових значень: категорії «5 голів» та «6 голів» об'єднано в одну групу «5 і більше голів», що забезпечує виконання умов застосовності критерію.

Ступені свободи та p-value

Під час застосування критерію згоди χ^2 необхідно визначити кількість ступенів свободи, оскільки від цього залежить критичне значення статистики та p-value. У загальному випадку кількість ступенів свободи обчислюється за формулою:

$$df = k - 1 - m, \tag{6}$$

де k − кількість категорій (груп) у емпіричному розподілі після об'єднання інтервалів, а m − кількість параметрів теоретичного розподілу, які оцінюються за вибіркою.

У даному випадку після агрегації хвостових значень використаємо шість категорій: 0, 1, 2, 3, 4, 5+. Оскільки для пуассонівського розподілу оцінюється один параметр – середнє значення λ, кількість ступенів свободи дорівнює: $df = 6 - 1 - 1 = 4$.

p-value інтерпретується як імовірність отримати значення статистики χ^2 не менше за спостережуване за умови істинності нульової гіпотези. Якщо p-value > 0.05, нульову гіпотезу не відхиляють, що свідчить про узгодженість емпіричних даних з теоретичною моделлю.

Зокрема, перевіряючи період з 2018 року по 2021 рік вибіркове середнє становить $\lambda = 1{,}83$, обсяг вибірки – $N = 206$.

Отримане значення статистики $\chi^2 \approx 5{,}27$ (див. табл. 3), що є меншим за критичне значення $\chi^2_{0{,}95}(4) = 9{,}49$.

p-value дорівнює $0{,}261$, що значно перевищує рівень значущості. Таким чином, нульова гіпотеза не відхиляється.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Таблиця 3

Результати перевірки гіпотези (2018 – 2021 рр.)

Голи (k)	Реально (O)	Очікувано (E)	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	37	33,05	0,47
1	62	60,48	0,04
2	50	55,34	0,52
3	28	33,76	0,98
4	16	15,44	0,02
5+	13	7,93	3,24
Всього	206	206	$\chi^2 \approx 5{,}27$

Для періоду з 2022 по 2025 роки $\lambda = 1{,}79$, $N = 200$ (табл. 4). Отримали: $\chi^2 = 4{,}07$, p-value $= 0{,}396$. Нульова гіпотеза також не відхиляється, що свідчить про високу узгодженість емпіричних даних з пуассонівською моделлю.

Таблиця 4

Результати перевірки гіпотези (2022 – 2025 рр.)

Голи (k)	Реально (O)	Очікувано (E)	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	41	33,05	1,73
1	53	59,77	0,77
2	49	53,50	0,38
3	32	31,92	0,00
4	15	14,28	0,04
5+	10	7,14	1,15
Всього	200	200	$\chi^2 \approx 4{,}07$

У ставках на спорт цей розподіл часто використовують для оцінки кількості голів у матчі. Формула розподілу Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \tag{7}$$

де параметр λ – середня кількість голів, які забиває за гру команда.

Опишемо логіку розрахунку таблиць. Для кожного періоду збираються реальні дані (стовпчик Реально (O) – *Observed*). Далі, використовуючи формулу розподілу Пуассона (7) з розрахованим середнім λ, знаходимо теоретичну ймовірність для

кожної кількості голів і множимо її на загальну кількість матчів N. Так отримуємо стовпчик Очікувано (E) – *Expected*.

В останньому стовпчику розраховуємо міру розбіжності між теорією та практикою за формулою:

$$\frac{(O - E)^2}{E}.$$

Сума значень цього стовпчика і є значенням статистики χ^2. Що менша ця сума, то ближчими є реальні дані до теоретичної моделі.

Результати статистичної перевірки підтверджують адекватність використання пуассонівського розподілу для моделювання кількості забитих голів ФК «Динамо» у матчі. Це узгоджується як з теоретичними передумовами, так і з емпіричними спостереженнями.

По-перше, гол у футболі є дискретною подією, що відбувається відносно рідко протягом фіксованого проміжку часу, за умов великої кількості атак та малої ймовірності реалізації кожної окремої спроби. Такі умови є класичними для виникнення пуассонівського потоку подій.

По-друге, у спортивній аналітиці традиційно припускається відносна незалежність моментів забиття голів, що дозволяє застосовувати спрощену стохастичну модель без урахування складних динамічних ефектів.

По-третє, застосовані критерії згоди χ^2 для двох незалежних часових періодів показали відсутність статистично значущих відхилень від пуассонівського розподілу ($p > 0{,}05$). Це дозволяє вважати модель стійкою до змін зовнішніх умов і використовувати її для подальшого аналізу, зокрема для прогнозування результативності та оцінювання ймовірностей подій у спортивних ставках.

3.3. Використання розподілу Пуассона

Розподіл Пуассона – це математична модель, яка показує ймовірність того, що певна подія відбудеться певну кількість разів за фіксований проміжок часу. Цей підхід часто використовують у спорті.

Аналітичний відділ футбольного клубу (або букмекерська компанія) досліджує результативність ФК «Динамо» за два тривалі часові періоди: з 2018 по 2021 рік ($N_1 = 206$ матчів) та з 2022 по 2025 рік ($N_2 = 200$ матчів). За статистичними даними, вибіркове середнє кількості забитих голів за матч у першому періоді становило $\lambda_{a_1} = 1{,}83$, а в другому – $\lambda_{a_2} = 1{,}79$.

Для оптимізації прогнозування майбутніх результатів висунуто припущення, що кількість голів, яку команда забиває в одному матчі, є випадковою величиною, яка підпорядковується закону розподілу Пуассона.

Завдання.

1. *Перевірити статистичну гіпотезу* про відповідність емпіричних (реальних) даних кількості забитих голів теоретичному розподілу Пуассона

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

для обох періодів за допомогою критерію згоди Хі-квадрат (χ^2) Пірсона на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Для цього об'єднати хвостові значення вибірки в категорію «5+» голів та визначити кількість ступенів свободи.

2. *Зробити статистичний висновок* на основі отриманих значень статистики χ^2 та показника p-value щодо адекватності використання цієї моделі.

Використовуючи побудовану модель, розрахувати теоретичну ймовірність того, що в наступному окремому матчі (наприклад, проти ФК «Реал») команда заб'є рівно 2 голи, якщо її поточна середня результативність λ становить $1{,}5$ гола за гру. Важливо розуміти, що в окремому матчі не можна забити півтора гола, але як середній показник багатьох попередніх ігор це число є базою для прогнозу.

Значення параметра $k = 2$ – це цільова кількість голів у події, імовірність якої хочемо дізнатися. Тобто шукаємо точну ймовірність того, що команда заб'є рівно 2 голи в конкретному майбутньому матчі проти «Реала». Тоді використовуючи (7), отримаємо:

$$P(X = 2) = \frac{1{,}5^2 \cdot e^{-1{,}5}}{2!} \approx 0{,}25102.$$

Знайдене число 0,251 переводиться у відсотки. Отримуємо приблизно 25,1% (або округлено 25%).

Що це означає для аналітика або гравця на ставках? Якщо «Динамо» зіграє велику кількість матчів із суперниками аналогічного рівня за такої ж форми, то приблизно в кожному четвертому матчі (25% випадків) команда забиватиме рівно 2 голи.

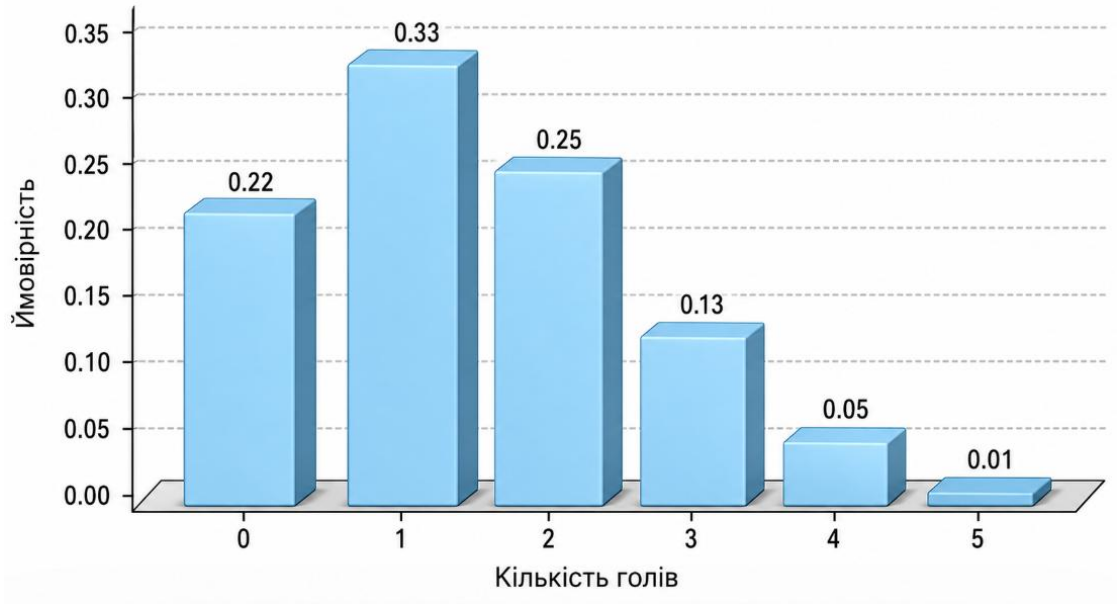


Рис 5. Ймовірність кількості голів «Динамо» за розподілом Пуассона

За допомогою цієї ж формули можна порахувати ймовірність для $k = 0$ (0 голів), $k = 1$ (1 гол), $k = 3$ тощо, щоб отримати повну картину розподілу ймовірностей для цього матчу (див. рис. 5).

У букмекерському бізнесі цей показник одразу перевели б у «чистий» коефіцієнт ($\frac{1}{0,251} \approx 3,98$). Якщо букмекер пропонує на цей результат коефіцієнт, вищий за $4,0$, така ставка вважатиметься вигідною.

Використання цього підходу дозволяє кількісно оцінювати ймовірність різних результатів матчу. Можна комбінувати для обох команд, щоб передбачити точний рахунок. (How to Use Expert Predictions to Your Advantage. (2020, April 23). Betting.team).

4. Висновки

Результати дослідження підтверджують, що математичний підхід до спортивних ставок дозволяє оцінювати ризики та приймати більш обґрунтовані рішення. Зокрема, аналіз маржі букмекера свідчить, що вона забезпечує стабільний прибуток гравців незалежно від результату події, що узгоджується з висновками, який наголошує на впливі overround на реальні ймовірності подій. Розрахунки математичного сподівання (EV) і дисперсії демонструють, що навіть вигідні на перший погляд ставки можуть мати високий ризик коливань результатів, що підтверджує висновки щодо важливості врахування варіаційних характеристик у прогнозуванні спортивних подій.

Критерій Келлі показав, що оптимальний розмір ставки дозволяє максимізувати приріст капіталу у довгостроковій перспективі, одночасно зменшуючи ризик значних втрат, що узгоджується з теоретичними розрахунками. Використання розподілу Пуассона для прогнозування кількості голів у матчах підтверджує ефективність статистичних моделей у спортивних прогнозах, що відповідає рекомендаціям практиків щодо застосування ймовірнісних моделей у практиці ставок.

Отже, дослідження відповідає на поставлені питання: математичні моделі дозволяють оцінювати прибутковість ставки, рівень ризику та оптимальний розмір ставки. Практичне значення роботи полягає у тому, що представлені методи можуть бути використані як гравцями для раціональної гри, так і аналітиками для покращення прогнозів спортивних результатів. Перспективи подальших досліджень включають інтеграцію класичних моделей з методами машинного навчання та міждисциплінарний аналіз впливу психологічних та маркетингових чинників на поведінку гравців.

Список використаних джерел

How to calculate expected value in betting. (n.d.). Smarkets Help Centre. https://help.smarkets.com/hc/en-gb/articles/214554985-How-to-calculate-expected-value-in-betting

How to Use Expert Predictions to Your Advantage. (2020, April 23). Betting.team. https://betting.team/blog/smart-betting-exprtpred

The Mathematical Truth About Sports Betting | Sports betting explained. (2025, September 19). YouTube. https://youtu.be/4dS77MY9wUU

What is Positive EV Sports Betting? (Better than Arbitrage!) (using OddsJam). (2025, September 19). YouTube. https://youtu.be/s6R9xB1RdZU

Adjusting bookmaker's odds to allow for overround. (2017). Outlier.Bet. https://outlier.bet/wp content/uploads/2023/08/2017-clarke-adjusting_bookmakers_odds.pdf

Carta A and Conversano C (2020) Practical Implementation of the Kelly Criterion: Optimal Growth Rate, Number of Trades, and Rebalancing Frequency for Equity Portfolios. Front. Appl. Math. Stat. 6:577050. doi: 10.3389/fams.2020.577050

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

References

How to calculate expected value in betting. (n.d.). Smarkets Help Centre. https://help.smarkets.com/hc/en-gb/articles/214554985-How-to-calculate-expected-value-in-betting

How to Use Expert Predictions to Your Advantage. (2020, April 23). Betting.team. https://betting.team/blog/smart-betting-exprtpred

The Mathematical Truth About Sports Betting | Sports betting explained. (2025, September 19). YouTube. https://youtu.be/4dS77MY9wUU

What is Positive EV Sports Betting? (Better than Arbitrage!) (using OddsJam). (2025, September 19). YouTube. https://youtu.be/s6R9xB1RdZU

Adjusting bookmaker's odds to allow for overround. (2017). Outlier.Bet. https://outlier.bet/wp content/uploads/2023/08/2017-clarke-adjusting_bookmakers_odds.pdf

Carta A and Conversano C (2020) Practical Implementation of the Kelly Criterion: Optimal Growth Rate, Number of Trades, and Rebalancing Frequency for Equity Portfolios. Front. Appl. Math. Stat. 6:577050. doi: 10.3389/fams.2020.577050

Отримано редакцією журналу: 20.03.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Kateryna KEKALO, Student
ORCID: 0009-0002-0677-3955
e-mail: erozkova777@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

PROBABILITY MODELS AND OPTIMIZATION OF STRATEGIES IN SPORTS BETTING

Abstract. *The article explores the mathematical basis of the functioning of the sports betting market, which, in the conditions of intensive media promotion, is mistakenly interpreted by the mass consciousness as a sphere of random success. The focus is on the discrepancy between the marketing image of "easy profit" and the objective mathematical reality, which is based on deterministic algorithms for ensuring the profitability of bookmaker organizations. The aim of the article is to analyze the key mathematical tools that explain the nature of sports betting: bookmaker's margin, expected value (EV), variance, Cayley criterion and Poisson distribution. It is shown how the margin ensures a stable profit for the company, EV allows you to determine the "value" of the bet, variance describes the level of risk and uncertainty, and Cayley criterion gives the optimal formula for the size of the bet. The use of the Poisson distribution is considered as an example of statistical prediction of results in football. The results of the study prove that a mathematical approach can make betting more rational, but does not eliminate the bookmaker's systemic advantage. Prospects for further research lie in combining classical probability models with modern machine learning methods, as well as in an interdisciplinary analysis of the impact of advertising and psychological factors on player behavior.*

Keywords: *expected value; variance; Cayley criterion; Poisson distribution; sports betting; bookmaker's margin.*

Received: 20.03.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

Креативна математика

УДК 511.14 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.8**

Олександр КУРЧЕНКО, Д-р. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-0417-5970
e-mail: oleksandrkurchenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ольга СИНЯВСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-2711-3940
e-mail: olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород, Україна

ДО ЗОБРАЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ДЕСЯТКОВИМИ ДРОБАМИ

Анотація. *Перехід від звичайних дробів до десяткових є однією з важливих тем арифметики, що поєднує елементарну математику з деякими значними результатами із теорії чисел. У статті досліджено питання зображення раціональних чисел десятковими дробами. Доведено теорему про зображення раціональних чисел скінченними десятковими дробами та теорему про зображення раціональних чисел чисто періодичними десятковими дробами. Також розглянуто перетворення нескінченного періодичного десяткового дробу у звичайний дріб. Для аналізу довжини періоду десяткового дробу, що відповідає звичайному дробу, застосовано основні поняття теорії чисел, зокрема функцію Ейлера, порядок числа за модулем та теорему Ейлера. Наведено низку прикладів, які ілюструють застосування отриманих теоретичних результатів.*

Ключові слова: *раціональне число; дріб; десятковий дріб; періодичний дріб; прості числа; взаємно прості числа.*

1. Вступ

Проблема зображення раціональних чисел десятковими дробами є однією з фундаментальних у шкільному курсі математики й має важливе значення для формування числових уявлень та розвитку логічного мислення.

Вивчення десяткових дробів у закладах загальної середньої освіти України (5-6 класи) зазнало суттєвих змін із впровадженням концепції Нової української школи (НУШ). Основний акцент змістився із механічного виконання різних арифметичних операцій на розуміння суті процесів та застосуванні знань, навичок та вмінь при розв'язуванні задач дослідницького характеру (Істер, 2021).

Об'єктом дослідження є раціональні числа.

Метою дослідження є теоретичне обґрунтування властивостей десяткових дробів, що зображують раціональні числа, а також застосування деяких важливих понять з теорії чисел для дослідження періодичності та довжини періоду десяткових дробів.

Нехай додатне раціональне число задано у вигляді звичайного дробу $\frac{p}{q}$, де p, q – натуральні числа. Надалі будемо вважати, що цей дріб нескоротний, тобто натуральні числа p, q не мають спільних дільників, відмінних від одиниці. Такі числа називаються

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

взаємно простими (Безущак, Ганюшкін, 2003). Наприклад, 3 і 8 – взаємно прості числа, дріб $\frac{3}{8}$ нескоротний.

2. Зображення раціональних чисел скінченними десятковими дробами

Наступна теорема містить необхідні і достатні умови зображення нескоротного звичайного дробу у вигляді скінченного десяткового дробу.

Теорема 1. *Нескоротний звичайний дріб* $\frac{p}{q}$ $(p \cdot q \neq 0)$ *зображується у вигляді скінченного десяткового дробу тоді й тільки тоді, коли знаменник q є дільником деякого натурального степеня числа* 10.

Доведення. Необхідність. Нехай нескоротний звичайний дріб $\frac{p}{q}$ зображується у вигляді скінченного десяткового дробу, тобто для деякого натурального числа n справджується рівність

$$\frac{p}{q} = a_0, a_1 \dots a_n, \qquad (1)$$

де a_0 – натуральне число або нуль, $a_1, \dots, a_n$ – цифри десяткової системи числення, тобто цілі числа від нуля до дев'яти.

Помножимо праву і ліву частини рівності (1) на десять у степені n. Отримаємо рівність

$$\frac{p \cdot 10^n}{q} = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n.$$

Права частина цієї рівності – ціле число. Отже, $\frac{p \cdot 10^n}{q}$ також ціле число. Оскільки числа p, q взаємно прості, то q є дільником числа 10^n.

Достатність. Нехай нескоротний звичайний дріб $\frac{p}{q}$ такий, що q є дільником числа 10^n для деякого натурального числа n. Покладемо $m = \frac{10^n}{q}$. Тоді

$$\frac{p}{q} = \frac{pm}{qm} = \frac{pm}{10^n}$$

є скінченним десятковим дробом.

Теорему доведено.

■

Приклад 1. Розглянемо нескоротний правильний дріб $\frac{7}{25}$. Число 25 є дільником числа $100: \frac{100}{25} = 4$. Маємо $\frac{7}{25} = \frac{7 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{28}{100} = 0{,}28$ – скінченний десятковий дріб. До цього ж результату приводить ділення у стовпчик.

$$\begin{array}{rr|l} & 70 & 25 \\ \hline - & 50 & 0{,}28 \\ \hline & 200 & \\ - & 200 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Нескінченні десяткові дроби з періодом дев'ять або нуль дорівнюють відповідним скінченним десятковим дробам. Наприклад, $3{,}13(9) = 3{,}14(0) = 3{,}14$. Тому надалі будемо розглядати нескінченні десяткові дроби без періоду дев'ять або нуль.

Теорема 2. *Нехай $\frac{p}{q}$ – нескоротний звичайний дріб і при жодному натуральному числу n знаменник q не є дільником числа 10^n. Тоді дріб $\frac{p}{q}$ зображується нескінченним періодичним десятковим дробом.*

Доведення. Нехай знаменник q звичайного дробу $\frac{p}{q}$ не є дільником числа 10^n для жодного натурального n. Виконаємо ділення $p:q$ у стовпчик.

Якщо процес ділення закінчиться на скінченному кроці, то дріб $\frac{p}{q}$ зобразиться скінченним десятковим дробом.

Внаслідок теореми 1 знаменник q буде дільником деякого натурального степеня числа 10, що суперечить умові теореми 2. Отже, процес ділення не закінчиться на скінченному кроці.

Доведемо, що нескінченний дріб, отриманий у результаті ділення $p:q$ буде періодичним. Дійсно, після того, як у частці з'явиться кома, на кожному кроці ділення будуть зноситися нулі. При цьому у процесі ділення нулі будуть приписуватися до остач від ділення на q, тобто до одного з чисел $1,2,\dots,q-1$.

При повторенні остач процес ділення зациклиться, що приведе до нескінченного періодичного десяткового дробу.

Теорему доведено.

■

Наслідок 1. *Кожне раціональне число зображується скінченним або нескінченним періодичним десятковим дробом.*

Наведемо приклад зображення звичайного дробу у вигляді нескінченного періодичного дробу.

Приклад 2. Напишемо у вигляді десяткового дробу нескоротний звичайний дріб $\frac{12}{7}$. Зауважимо, що для довільного натурального числа n число 7 не є дільником числа $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Тому у результаті маємо отримати нескінченний періодичний дріб. Виконаємо ділення у стовпчик.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 12 & 7 \\
\hline
- & 7 & 1{,}7142857\ldots \\
\hline
 & 50 & \\
- & 49 & \\
\hline
 & 10 & \\
- & 7 & \\
\hline
 & 30 & \\
- & 28 & \\
\hline
 & 2 & \\
\hline
 & \ldots &
\end{array}
$$

Отже, $\frac{12}{7} = 1,(714285)$ – чисто періодичний десятковий дріб.

3. Перетворення нескінченного періодичного дробу у звичайний

Нагадаємо формулу для суми членів геометричної прогресії із знаменником $q \in (-1;1)$:

$$q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q}{1-q}. \tag{2}$$

Нехай $a_0, a_1 \ldots a_m(b_1 \ldots b_n)$ – періодичний десятковий дріб. Покладемо

$$A = 10^{m-1}a_1 + 10^{m-2}a_2 + \cdots + 10a_{m-1} + a_m,$$

$$B = 10^{n-1}b_1 + 10^{n-2}b_2 + \cdots + 10b_{n-1} + b_n.$$

Маємо:

$$
\begin{gathered}
a_0, a_1 \ldots a_m(b_1 \ldots b_n) = \\
= a_0 + 10^{-m}\left(A + B(10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \cdots)\right) = \\
= 10^{-m}\left(A + B \cdot \frac{10^{-n}}{1-10^{-n}}\right).
\end{gathered} \tag{3}
$$

В останній рівності застосована формула (2) для $q = 10^{-n}$. Далі,

$$A + B \cdot \frac{10^{-n}}{1-10^{-n}} = A + \frac{B}{10^n - 1} = \frac{A \cdot \underbrace{9 \ldots 9}_{n} + B}{\underbrace{9 \ldots 9}_{n}}. \tag{4}$$

Із рівностей (3), (4) випливає, що

$$a_0, a_1 \dots a_m(b_1 \dots b_n) = a_0 + \frac{A \cdot \underbrace{9 \dots 9}_{n} + B}{\underbrace{9 \dots 9}_{n}\underbrace{0 \dots 0}_{m}}. \quad (5)$$

Приклад 3.

$$0{,}1(23) = \frac{99 + 23}{990} = \frac{122}{990} = \frac{61}{495}.$$

Для чисто періодичного десяткового дробу формула (5) спроститься:

$$a_0, (b_1 \dots b_n) = a_0 + \frac{B}{\underbrace{9 \dots 9}_{n}}. \quad (6)$$

Приклад 4.

$$1, (714285) = 1 + \frac{714285}{999999} = 1 + \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}{3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37} = 1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}.$$

Наступні, важливі у теорії чисел, поняття будуть потрібні для дослідження довжини періоду десяткового дробу, що зображує звичайний дріб.

4. Функція Ейлера, порядок числа за модулем. Теорема Ейлера

Функція Ейлера $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ визначається наступним чином: для натурального числа m значення функції Ейлера $\varphi(m)$ дорівнює кількості всіх натуральних чисел, які взаємно прості з m і не перевищують m (Оглобіна, Сушко, Шрамко, 2015). Зрозуміло, що $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1$. Для $m \geq 2$: $\varphi(m) \leq m - 1$. Для простого числа p: $\varphi(p) = p - 1$.

Приклад 5. Знайдемо $\varphi(12)$. Серед чисел від 1 до 11 лише чотири числа, а саме: $1, 5, 7, 11$ взаємно прості з числом 12. Тому $\varphi(12) = 4$.

У теорії чисел доводять такі властивості функції Ейлера (Raji, 2013):

1. Мультиплікативність. Для взаємно простих натуральних чисел m, n:

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n).$$

2. Для простого числа p і натурального числа k:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

3. Нехай $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n на прості множники. Тоді

$$\varphi(n) = \left(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}\right) \cdot \dots \cdot \left(p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1}\right). \quad (7)$$

Приклад 6. Розклад числа 12 на прості множники: $12 = 2^2 \cdot 3$. За формулою (7),

$$\varphi(12) = (2^2 - 2) \cdot (3 - 1) = 4.$$

Теорема Ейлера. *Нехай натуральні числа a, m – взаємно прості. Тоді m є дільником числа $a^{\varphi(m)} - 1$.*

Для взаємно простих натуральних чисел $a, m \geq 2$ твердження теореми означає, що число $a^{\varphi(m)}$ при діленні на m має остачу 1.

У теорії чисел це записують так (Raji, 2013):

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m). \quad (8)$$

Формула (8) читається так: a у степені $\varphi(m)$ дорівнює одиниці за модулем m.

Приклад 7. Нехай $a = 5, m = 12$. Ці числа взаємно прості, $\varphi(12) = 4$. Із теореми Ейлера слідує, що $5^4 - 1$ ділиться на 12 без остачі.

Нехай $m = p$ – просте число, a – натуральне число, взаємно просте з числом p. Тоді $\varphi(m) = \varphi(p) = p - 1$ і, внаслідок теореми Ейлера, $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Це твердження називають *малою теоремою Ферма* (Raji, 2013).

Нехай a, m – взаємно прості натуральні числа. Порядком числа a за модулем m (відносно числа m) називається найменше натуральне число k таке, що $a^k - 1$ ділиться без остачі на число m. Позначення: $P_m(a), ord_m a$. Для $a, m \geq 2$ порядок $P_m(a)$ дорівнює найменшому натуральному числу k такому, що $a^k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$ (Raji, 2013).

Внаслідок теореми Ейлера $P_m(a) \leq \varphi(m)$ для довільного натурального числа a, взаємно простого з натуральним числом m.

Приклад 8. Для $p = 37$ (просте число): $\varphi(37) = 37 - 1 = 36$; 10 і 37 – взаємно прості числа. Знайдемо $P_{37}(10)$. Маємо:

$$10^1 = 37 \cdot 0 + 10;$$

$$10^2 = 37 \cdot 2 + 26;$$

$$10^3 = 37 \cdot 27 + 1,$$

звідси слідує, що $P_{37}(10) = 3$.

Лема 1. *Нехай a, m – взаємно прості натуральні числа, $a, m \geq 2$, n – натуральне число, $a^n \equiv 1(mod\ m)$. Тоді число n ділиться на порядок $P_m(a)$ без остачі.*

Доведення. Для скорочення запису $P_m(a)$ позначимо літерою $k = P_m(a)$. Для доведення твердження застосуємо метод доведення від супротивного. Припустимо, що число n ділиться на порядок $P_m(a)$ з остачею, тобто

$$n = bk + r,$$

де b, r – натуральні числа, $1 \leq r \leq k - 1$. Тоді $a^n = a^{bk+r} = a^{bk} \cdot a^r$. Далі, $(a^{bk}) = (a^k)^b$. За означенням порядку $P_m(a)$, a^k при діленні на m має остачу 1, a^r має остачу, відмінну від 1. Далі, $(a^k)^b$ має остачу 1 від ділення на m. Тоді число $a^n = a^{bk} \cdot a^r$ має від ділення на m остачу, відмінну від 1. Отримали суперечність. Отже, n ділиться на порядок $P_m(a)$ без остачі.

Лему доведено.

■

Наслідок 2. *Порядок $P_m(a)$ є дільником значення функції Ейлера $\varphi(m)$.*

Доведення. За теоремою Ейлера $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$, тобто число $a^{\varphi(m)}$ від ділення на m має остачу 1. Внаслідок леми 1 порядок $P_m(a)$ є дільником числа $\varphi(m)$.

Наслідок доведено.

■

5. Зображення чисто періодичним десятковим дробом

Теорема 3. *Звичайний нескоротний правильний дріб $\frac{p}{q}$ зображується чисто періодичним десятковим дробом тоді і тільки тоді, коли числа 2 і 5 не є дільниками знаменника q.*

Доведення. Необхідність. Нехай

$$\frac{p}{q} = 0, (b_1 \dots b_n).$$

За правилом перетворення десяткового дробу у звичайний,

$$0, (b_1 \dots b_n) = \frac{B}{\underbrace{9 \dots 9}_{n}},$$

де

$$B = 10^{n-1}b_1 + 10^{n-2}b_2 + \cdots + 10b_{n-1} + b_n.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, $\frac{p}{q}=\frac{B}{\underbrace{9\ldots9}_{n}}$. Оскільки дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний, то знаменник q є дільником числа $\underbrace{9\ldots9}_{n}$. Останнє число не ділиться без остачі ні на 2, ні на 5. Тому числа 2 і 5 не є дільниками знаменника q.

Достатність. Нехай числа 2 і 5 не є дільниками знаменника q, тобто числа q і 10 взаємно прості. Покладемо $k=P_q(10)$ так, що q – дільник числа 10^k-1; через Q позначимо частку

$$Q=\frac{10^k-1}{q}.$$

Тоді $\frac{1}{q}=\frac{Q}{10^k-1}$. Зауважимо, що $\frac{1}{10^k-1}=\frac{1}{\underbrace{9\ldots9}_{k}}=0,\left(\underbrace{0\ldots01}_{k}\right)$ – чисто періодичний дріб. Далі,

$$\frac{p}{q}=\frac{pQ}{10^k-1}<1$$

і тому $pQ<10^k-1$.

Отже, $\frac{p}{q}=p\cdot Q\cdot 0,\left(\underbrace{0\ldots01}_{k}\right)$ – чисто періодичний десятковий дріб з довжиною періоду k.

Теорему доведено.

■

З доведення достатності теореми 3 випливає наслідок.

Наслідок 3. *Звичайний правильний нескоротний дріб $\frac{p}{q}$, де знаменник q взаємно простий з числом 10, зображується чисто періодичним десятковим дробом з довжиною періоду $P_q(10)$.*

Приклад 9. Розглянемо дріб $\frac{1}{37}$. Знаменник – просте число. За наслідком 3 цей дріб зображується чисто періодичним десятковим дробом з довжиною періоду $P_{37}(10)=3$ (приклад 8). За допомогою ділення в стовпчик знаходимо цей десятковий чисто періодичний дріб:

$$\begin{array}{rl|l} & 100 & 37 \\ \hline - & 74 & 0{,}0270 \\ \hline & 260 & \\ - & 259 & \\ \hline & 100 & \end{array}$$

звідки $\frac{1}{37}=0,(027)$.

Приклад 10. Розглянемо дріб $\frac{1}{6}$. Жодний степінь числа 10 не є кратним числу 6 і тому $\frac{1}{6}$ зображується нескінченним десятковим дробом. Знаменник 6 має множник 2 і тому періодичний десятковий дріб буде змішаним періодичним. За допомогою ділення в стовпчик знаходимо цей змішаний періодичний дріб:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \cline{2-2} -\ 6 & 0{,}166 \\ \cline{1-1} 40 & \\ -\ 36 & \\ \cline{1-1} 40 & \end{array}$$

звідки $\frac{1}{6} = 0{,}1(6)$.

6. Висновки

Дана стаття присвячена дослідженню зображення раціональних чисел десятковими дробами. У роботі розглянуто властивості скінченних і періодичних десяткових дробів, а також застосовано елементи теорії чисел для аналізу довжини періоду десяткового дробу. Актуальність дослідження полягає у поглибленні теоретичних уявлень про десяткові дроби, що зображують раціональні числа, і можливості використання отриманих результатів у навчальній та науковій діяльності.

Внесок авторів

Олександр Курченко – концептуалізація; методологія, написання; Ольга Синявська – аналіз джерел, підготовка огляду літератури, написання, перегляд і редагування.

Список використаних джерел

Raji, W. (2013). *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Saylor Academy. https://resources.saylor.org/wwwresources/archived/site/wp-content/uploads/2013/05/An-Introductory-in-Elementary-Number-Theory.pdf

Безущак, О.О. & Ганюшкін, О.Г. (2003). *Елементи теорії чисел*: Навчальний посібник. К.: Видавничо–поліграфічний центр «Київський університет». 203 с.

Істер, О.С. (2021). *Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи»* для закладів загальної середньої освіти. Міністерство освіти і науки України. https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/

Оглобіна, О.І., Сушко, Т.С., & Шрамко, Ю.В. (2015). *Елементи теорії чисел*: Навчальний посібник. Суми: Сумський державний університет. 186 с. http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/42788

References

Raji, W. (2013). *An Introductory Course in Elementary Number Theory*. Saylor Academy. https://resources.saylor.org/wwwresources/archived/site/wp-content/uploads/2013/05/An-Introductory-in-Elementary-Number-Theory.pdf

Bezushchak, O. O. & Haniushkin, O. H. (2003). *Elements of number theory*: A textbook. Kyiv University Publishing and Printing Center. 203 p. [in Ukrainian].

Ister, O. S. (2021). *Model curriculum "Mathematics. Grades 5-6"* for institutions of general secondary education. Ministry of Education and Science of Ukraine. [in Ukrainian]. https://imzo.gov.ua/model-ni-navchal-ni-prohramy/matematychna-osvitnia-haluz/matematyka/

Ohlobina, O. I., Sushko, T. S., & Shramko, Y. V. (2015). *Elements of number theory*: A textbook. Sumy State University. http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/42788 [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 20.11.2025
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Olexandr KURCHENKO, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-0417-5970
e-mail: oleksandrkurchenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Olga SYNIAVSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-2711-3940
e-mail: olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine

ON THE REPRESENTATION OF RATIONAL NUMBERS AS DECIMAL FRACTIONS

Abstract. *The transition from common fractions to decimal fractions is one of the essential topics in arithmetic, bridging elementary mathematics with significant results in number theory.*
This article explores the representation of rational numbers as decimal fractions. A theorem on the representation of rational numbers as finite decimal fractions and a theorem on the representation of rational numbers as purely periodic decimal fractions are proved. Furthermore, the conversion of infinite periodic decimal fractions into common fractions is examined. To analyze the period length of a decimal fraction corresponding to a common fraction, fundamental concepts of number theory are applied, specifically Euler's totient function, the order of a number modulo n, and Euler's theorem. A substantial number of examples illustrating the application of the obtained theoretical results are provided

Keywords: *rational number; fraction; decimal fraction; periodic fraction; prime numbers; coprime numbers.*

Received: 20.11.2025
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

Математичні олімпіади

УДК 514.1:37.091.27 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.9**

Василь БАКАЙ, вчитель математики
ORCID ID: 0009-0001-4960-7490
e-mail: wassyl2001@knu.ua
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Катерина ДАВИДОВА, вчитель математики вищої кат., вчитель-методист
ORCID ID: 0009-0008-3067-8695
e-mail: kotica70@gmail.com
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Катерина ЛУКАШ, канд. фіз.-мат. наук, Заслужений вчитель України,
вчитель математики вищої кат., вчитель-методист
ORCID ID: 0009-0006-6110-4921
e-mail: lukash_k@ukr.net
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олексій ПЕЧЕРИЦЯ, PhD у галузі «Мат. і стат.»,
вчитель математики вищої кат., вчитель-методист
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

НАВКОЛО ТЕОРЕМИ КОСИНУСІВ

Анотація. *У статті розглядається теорема косинусів та наслідки з неї – простий і водночас фундаментальний інструмент геометрії, який розширює можливості учнів у задачах на розв'язування трикутників. Особлива увага приділяється саме розв'язуванню задач поглибленого рівня та олімпіадних. Стаття присвячена Савченку Леоніду Мироновичу (24.07.1945 - 14.09.2021) – Вчителю, який понад 50 років свого життя присвятив Українському фізико-математичному ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, який умів показати красу математики та закохати у неї на все життя, автору підручника з геометрії для 8 - 9 класів з поглибленим вивченням математики та спецкурсу «Краса і творчість у математиці» для слухачів інституту вдосконалення вчителів імені Бориса Грінченка. Стаття адресована школярам, учителям закладів загальної середньої освіти та усім, хто любить математику.*

Ключові слова: *теорема косинусів; наслідки з теореми косинусів; задачі з геометрії поглибленого рівня; олімпіадні задачі з геометрії.*

1. Вступ

До основних причин вивчення теореми косинусів можна віднести універсальність (адже теорема застосовна до довільного трикутника), зв'язок з іншими розділами

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

математики (зокрема з алгеброю і тригонометрією) та можливість використання у задачах поглибленого рівня та задачах математичних олімпіад, турнірів і конкурсів. До таких задач відносяться:

- доведення рівностей та нерівностей у трикутнику (наприклад, доведення нерівності між сторонами трикутника);
- обчислення відстаней у нестандартних геометричних конфігураціях;
- комбіновані задачі, у поєднанні з іншими теоремами (наприклад, теоремами синусів або Менелая);
- обчислення невідомих кутів у трикутнику, де звичайні тригонометричні методи є складними або незручними;
- аналіз геометричних місць точок, що задовольняють певні умови.

Класичну теорему косинусів та формулу для знаходження косинуса кута трикутника за трьома сторонами можна знайти в підручниках з геометрії для 9 класів з поглибленим вивченням математики (Мерзляк, Полонський, Якір, 2017), (Бурда, Савченко, 2004), (Апостолова, 2006), (Нікулін, Кукуш, 1999), (Єршова та ін., 2014).

Нагадаємо також властивість діагоналей паралелограма та формулу медіани трикутника за його сторонами, які є відомими наслідками теореми косинусів.

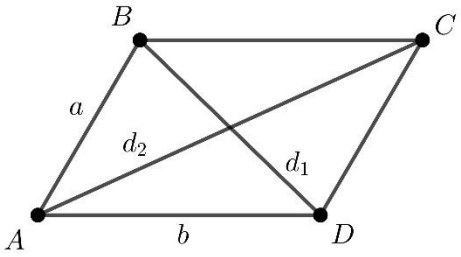


Рис. 1. Паралелограм $ABCD$ до теореми 1

Нехай a, b – сторони паралелограма $ABCD$, а d_1, d_2 – його діагоналі (рис 1).

Теорема 1. *Для сторін та діагоналей паралелограма справджується рівність*

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$

Доведення. На рис. 1 $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$. Нехай також $\angle A = \alpha$, тоді за властивістю кутів паралелограма $\angle B = 180^\circ - \alpha$, і за формулами зведення $\cos\angle B = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

За теоремою косинусів для трикутників ABD та ABC відповідно:

$$d_1^2 = BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\angle A = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

$$d_2^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

Додавши почленно праві та ліві частини останніх двох рівностей, одержимо твердження теореми.

■

Нехай у трикутнику ABC: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, а m_a – медіана, проведена до сторони a (рис. 2 а)).

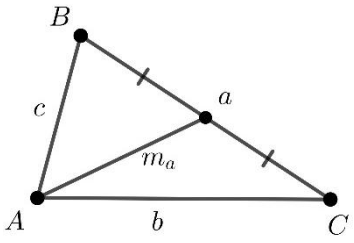


Рис. 2 а). Трикутник ABC до теореми 2

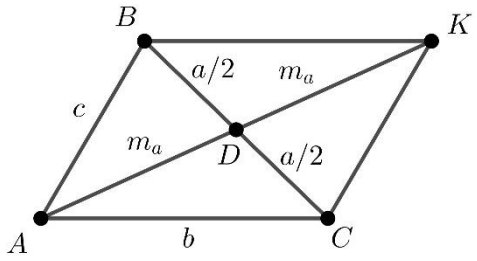


Рис. 2 б). Чотирикутник $ABKC$ після подвоєння медіани трикутника ABC до теореми 2

Теорема 2. *Для медіани, проведеної до сторони a трикутника ABC, виконується рівність*

$$m_a = \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{2}.$$

Доведення. Подовжимо медіану m_a удвічі за точку D (основу медіани). Утвориться чотирикутник $ABKC$ (рис. 2 б)), у якому діагоналі BC та AK перетинаються в точці D та діляться цією точкою навпіл, оскільки $BD = DC$ за умовою, а $AD = DK$ за побудовою. За ознакою цей чотирикутник є паралелограмом.

Отже, за теоремою 1:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2),$$

тобто

$$AK^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2),$$

$$(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2).$$

Звідси

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

що і треба було довести.

■

Зауваження. Аналогічні рівності справджуюся для двох інших медіан:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$m_b = \frac{\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}}{2}, \qquad m_c = \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{2}.$$

Далі ми розглянемо застосування цих теорем, а також виведемо низку менш відомих, але не менш корисних наслідків з них.

Наслідок 1. *Якщо* $c > b$, *то* $m_c < m_b$.

Доведення. Скористаємось аналітичним підходом із використанням властивостей числових нерівностей.

Оскільки $c > b$, причому величини b і c строго додатні, то $c^2 > b^2$. За допомогою еквівалентних перетворень отримаємо наступний ланцюжок нерівностей.

$$3c^2 > 3b^2;$$

$$2c^2 - b^2 > 2b^2 - c^2;$$

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 > 2a^2 + 2b^2 - c^2;$$

$$\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} > \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

З доведення теореми 2 випливає, що

$$m_b^2 > m_c^2.$$

Оскільки мова йде про довжини відрізків, то остання нерівність еквівалентна нерівності між довжинами медіан трикутника, яку потрібно було довести.

■

2. Застосування теореми косинусів та її наслідків до розв'язування олімпіадних задач

Розглянемо приклади задач олімпіадного і турнірного характеру (Рубльов та ін., 2018, 2019, 2020), ідеї розв'язань яких потребують застосування теореми косинусів або її наслідків.

Задача 1. (*Київська міська олімпіада юних математиків, 9 клас, задача 5.1, 2017 рік*). У трикутнику ABC проведено медіани BB_1 і CC_1, що перетинаються в точці M. Довести, що в чотирикутник AC_1MB_1 можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $AB = AC$.

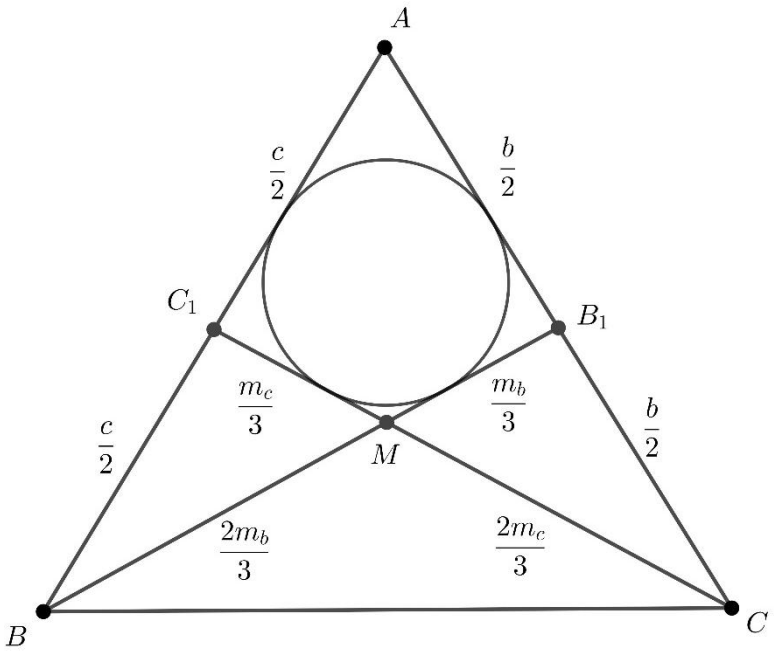


Рис. 3. Трикутник ABC до задачі 1

Доведення. Чотирикутник AC_1MB_1 (рис. 3) є описаним тоді і тільки тоді, коли

$$AC_1 + MB_1 = AB_1 + CM_1,$$

що в стандартних позначеннях виглядає так:

$$\frac{c}{2} + \frac{m_b}{3} = \frac{b}{2} + \frac{m_c}{3}.$$

Тобто

$$\frac{c-b}{2} = \frac{m_c - m_b}{3}.$$

Якщо $c > b$, то $m_c < m_b$, що безпосередньо випливає з наслідку 1. Але тоді ліва і права частини рівності відрізняються знаком. Аналогічно розглядається випадок $c < b$. Звідси $c = b$.

■

Задача 2. (*II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, 11 клас, Задача 1, 2016 рік*). Дано квадрат $ABCD$ зі стороною 1. У зовнішній бік від квадрата побудовано рівносторонні трикутники ABM і BCN (рис. 4). Знайти довжину відрізка MN.

Розв'язання. Обчислимо величину $\angle MBN$.

$$\angle MBN = 360° - \angle MBA - \angle ABC - \angle CBN = 360° - 60° - 90° - 60° = 150°.$$

$$MB = BN = AB = 1.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

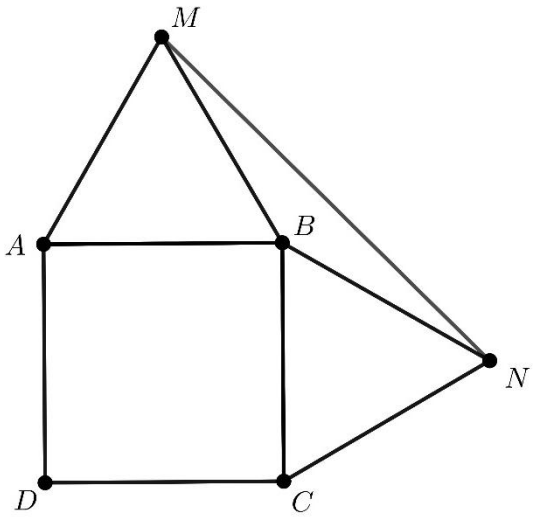


Рис. 4. Квадрат $ABCD$ до задачі 2

Тому з трикутника NBM за теоремою косинусів

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2MB \cdot BN \cos\angle MBN = 2 + \sqrt{3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 + 2\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(1^2 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)^2.$$

Отже,

$$MN = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

Задача 3. (*Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Математичний Занзібар, середня ліга, задача 8, 2016 рік*). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомі довжини всіх сторін $AB = 24$, $BC = 20$, $CD = 15$, $AD = 7$ та однієї діагоналі $BD = 25$. Знайти довжину іншої діагоналі.

Розв'язання. За наслідком теореми косинусів з трикутника BCD (рис. 5) маємо, що

$$\cos\angle CBD = \frac{CB^2 + BD^2 - DC^2}{2BC \cdot BD} = \frac{400 + 625 - 225}{1000} = \frac{4}{5},$$

а за основною тригонометричною тотожністю

$$\sin\angle CBD = \frac{3}{5}.$$

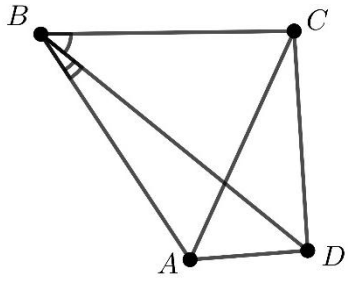


Рис. 5. Чотирикутник $ABCD$ до задачі 3

Аналогічно в трикутнику BAD маємо, що

$$\cos\angle ABD = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{576 + 625 - 49}{1200} = \frac{24}{25}$$

і тоді

$$\sin\angle ABD = \frac{7}{25}.$$

Тепер

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD,$$

отже,

$$\cos\angle ABC = \cos\angle ABD\cos\angle CBD - \sin\angle ABD\sin\angle CBD = \frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25} - \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25} = \frac{3}{5}.$$

Тому за теоремою косинусів в трикутнику ABC маємо, що

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,BC\cos\angle ABC = 576 + 400 - 576 = 400,$$

звідки $AC = 20$.

Відповідь: 20.

Задача 4. (*Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Усна командна олімпіада, старша ліга, задача 4, 2025 рік*). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомі довжини сторін $AB = 10$, $BC = 14$, $CD = 11$ та $AD = 5$. Які значення може набувати кут між діагоналями цього чотирикутника?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

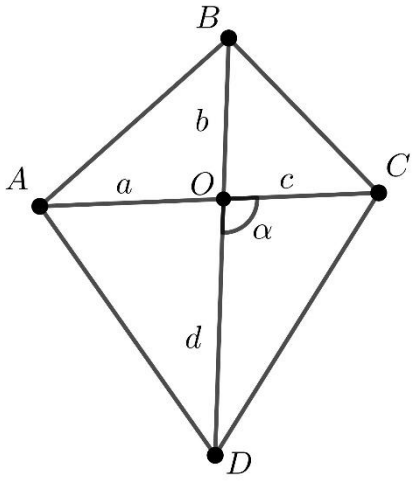


Рис. 6. Чотирикутник $ABCD$ до задачі 4

Розв'язання. Запишемо теорему косинусів для чотирьох трикутників: AOB, COB, COD та AOD, при цьому позначимо відрізки $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$ та $DO = d$, а кут $\angle COD = \alpha$ (рис. 6). Тоді

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha,$$

$$BC^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

$$CD^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha,$$

$$DA^2 = d^2 + a^2 + 2ad\cos\alpha.$$

Оскільки з умов задачі випливає, що

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2,$$

то

$$ab\cos\alpha + cd\cos\alpha = -bc\cos\alpha - ad\cos\alpha.$$

Припустимо, що $\cos\alpha \neq 0$, тоді

$$ab + cd + dc + ad = (a + c)(b + d) = 0.$$

Але це неможливо, оскільки кожен відрізок має додатну довжину, тобто має справджуватися умова $cos\alpha = 0$, а тому й кут між діагоналями дорівнює $90°$.

Відповідь: $90°$.

Задача 5. (*Київська міська олімпіада юних математиків, III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, I тур, 11 клас, задача 2, 2019 рік*). У гострокутному трикутнику ABC, у якому $AB < AC$, точка M – середина сторони BC, а точка K – середина ламаної BAC. Довести, що $\sqrt{2}KM > AB$.

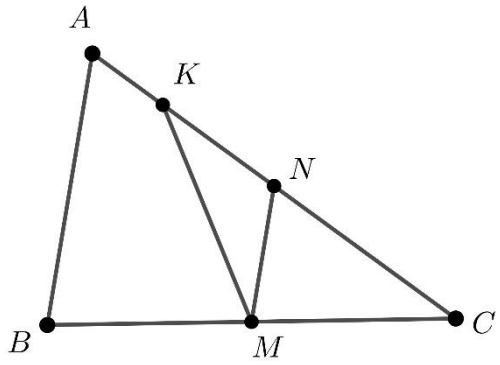


Рис. 7. Трикутник ABC до задачі 5

Доведення. Нехай N – середина сторони AC, тоді MN – середня лінія трикутника ABC (рис. 7) і тому

$$MN = \frac{1}{2}AB$$

і

$$\angle BAC = \angle MNC = \alpha < 90°.$$

Далі

$$\frac{1}{2}(AB + AC) = KC = KN + NC = KN + \frac{1}{2}AC,$$

отже,

$$KN = \frac{1}{2}AB = MN.$$

Тепер за теоремою косинусів в трикутнику KMN маємо, що

$$KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2KN \cdot NM \cos\angle KNM =$$

$$= 2KN^2 - 2KN^2 \cos(180° - \alpha) = 2KN^2(1 + \cos\alpha) = \frac{1}{2}AB^2(1 + \cos\alpha).$$

Оскільки $\alpha < 90°$, то $\cos\alpha > 0$, тому

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$KM^2 > \frac{1}{2}AB^2,$$

звідки $\sqrt{2}KM > AB$, що і потрібно було довести.

■

Задача 6. (*Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Усна особиста олімпіада, старша ліга, задача 2, 2017 рік*). На стороні CD опуклого чотирикутника $ABCD$ вибрано точку F таким чином, що $AC \cap BF = E$, $AB = FC$, $AE = 14$, $BE = 10\sqrt{2}$, $\angle BAC = \angle BFD$, $\angle BEA = 45°$ (рис. 8). Знайти довжину відрізка EF.

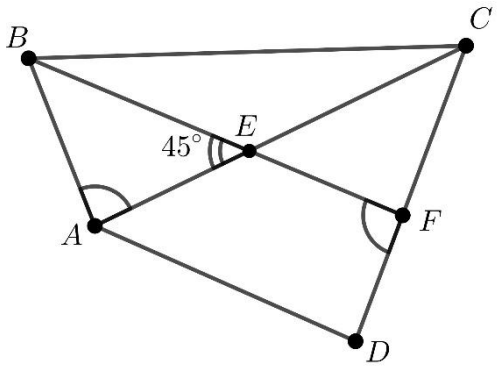


Рис. 8. Чотирикутник $ABCD$ до задачі 6

Розв'язання. Запишемо теорему синусів для трикутників ABC і FBC:

$$\frac{BA}{\sin\angle BCA} = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{BC}{\sin(180° - \angle BAC)} = \frac{BC}{\sin(180° - \angle BFD)} = \frac{BC}{\sin\angle BFD} = \frac{CF}{\sin\angle FBC}.$$

Враховуючи рівність $AB = FC$ і те, що $\angle BCA < 45°$ і $\angle FBC < 45°$, матимемо, що

$$\angle BCA = \angle FBC,$$

звідки $BE = EC$.

За теоремою косинусів в трикутнику ABE:

$$AB^2 = BE^2 + EA^2 - 2BE \cdot EA\cos\angle BEA = 200 + 196 - 280 = 116.$$

Позначимо $EF = x$ і запишемо теорему косинусів у трикутнику EFC з урахуванням того, що $BE = EC = 10\sqrt{2}$ і $AB^2 = CF^2 = 116$:

$$CF^2 = CE^2 + EF^2 - 2CE \cdot EF\cos\angle CEF;$$

$$116 = 200 + x^2 - 20x;$$

$$x^2 - 20x + 84 = 0;$$

$$x = 6 \text{ або } x = 14.$$

У випадку $x = EF = 14$ матимемо $EF = FC = 14$, тобто трикутник EFC прямокутний і рівнобедрений, але тоді $EC = EF\sqrt{2} = 14\sqrt{2} \neq 10\sqrt{2}$. Отже, $EF = x = 6$.

Відповідь: 6.

Задача 7. (*Київський турнір математичних боїв імені Лесі Рубльової, Математичний бій №2, середня ліга, група А, задача 2, 2016 рік*). Відомо, що a, b, c – сторони трикутника. Довести, що система рівнянь

$$\begin{cases} by + cz + at = 1, \\ bx + az + ct = 0, \\ cx + ay + bt = 0, \\ ax + cy + bz = 0 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Доведення. Домножимо перше рівняння на c, а друге на a і віднімемо їх, маємо

$$\begin{cases} bcy + c^2z + act = c, \\ abx + a^2z + act = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad -abx + bcy + (c^2 - a^2)z = c.$$

Тепер перше рівняння помножимо на b, а третє на a і віднімемо їх

$$\begin{cases} b^2y + bcz + abt = b, \\ acx + a^2y + abt = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad -acx + (b^2 - a^2)y + bcz = b.$$

Отримуємо систему з вилученою змінною t

$$\begin{cases} -abx + bcy + (c^2 - a^2)z = c, \\ -acx + (b^2 - a^2)y + bcz = b, \\ ax + cy + bz = 0. \end{cases}$$

Позбудемось тепер аналогічним чином змінної z і отримаємо

$$\begin{cases} ca(c^2 - a^2 - b^2)x + \left(b^2c^2 - (c^2 - a^2)(b^2 - a^2)\right)y = ba^2, \\ -2acx + (b^2 - a^2 - c^2)y = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(b^2 + c^2 - a^2)y - c(a^2 + b^2 - c^2)x = ab, \\ (c^2 + a^2 - b^2)y + 2acx = -b. \end{cases}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Поділимо перше рівняння на $2abc$, а друге – на $2ac$, отримаємо

$$\begin{cases} \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}y - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}x = \dfrac{a}{2ac}, \\ \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}y + x = -\dfrac{b}{2ac}. \end{cases}$$

Але a, b, c – сторони деякого трикутника ABC, тому

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \cos\angle A\,, \qquad \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \cos\angle C\,, \qquad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \cos\angle B$$

за наслідком теореми косинусів.

Тоді отримуємо нову систему

$$\begin{cases} y\cos\angle A - x\cos\angle C = \dfrac{a}{2ac}, \\ y\cos\angle B + x = -\dfrac{b}{2ac}, \end{cases}$$

з якої вилучимо y і отримаємо

$$-(\cos\angle B\cos\angle C + \cos\angle A)x = \frac{a\cos\angle B + b\cos\angle A}{2ac}.$$

$a\cos\angle B + b\cos\angle A$ – це сума проєкцій сторін a і b на сторону c, тому

$$a\cos\angle B + b\cos\angle A = c.$$

Також

$$\cos A = \cos\big(180° - (\angle B + \angle C)\big) = -\cos(\angle B + \angle C) = -\cos\angle B\cos\angle C + \sin\angle B\sin\angle C,$$

і зрозуміло, що $\sin\angle B\sin\angle C \neq 0$, звідки

$$-\sin\angle B\sin\angle C\,x = \frac{1}{2a} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2a\sin\angle B\sin\angle C} = -\frac{abc}{8\left(\frac{1}{2}ac\sin\angle B\right)\left(\frac{1}{2}ab\sin\angle C\right)} = -\frac{abc}{8S^2}.$$

Тепер по черзі знайдемо інші змінні аналогічним чином:

$$y = \frac{abc\cos\angle B}{8S^2}, \quad z = \frac{abc\cos\angle C}{8S^2}, \quad t = \frac{abc\cos\angle A}{8S^2},$$

що і потрібно було довести.

■

Задача 8. (*Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Математичний бій №3, старша ліга, група А, задача 9, 2017 рік*). Дано рівногранний тетраедр $SABC$, усі грані якого – рівні нерівносторонні трикутники, SO – висота тетраедра, H – ортоцентр грані ABC. Чи можуть довжини відрізків OH, AB, BC, CA бути різними натуральними числами?

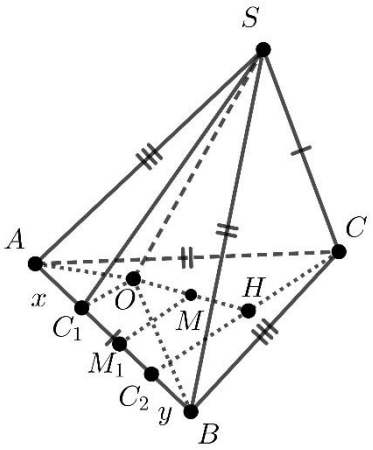


Рис. 9. Тетраедр $SABC$ до задачі 8

Розв'язання. Як відомо, всі грані рівногранного тетраедра є гострокутними трикутниками, а також мимобіжні ребра є попарно рівними: $AB = SC$, $BC = SA$, $AC = SB$. Позначимо C_1, C_2 – проєкції точок O, H на сторону AB (рис. 9). Нехай M – середина відрізка OH і M_1 – проєкція цієї точки на сторону AB. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SC_1 \perp AB$.

За теоремою Піфагора (Лебедєва, Чубикіна, 2025) для трикутників ASC_1 і BSC_1 маємо

$$SC_1^2 = AS^2 - AC_1^2 = BS^2 - BC_1^2,$$

звідки

$$BC_1^2 - AC_1^2 = BS^2 - AS^2.$$

Але $BS = AC$, $AS = BC$, тому

$$BS^2 - AS^2 = AC^2 - BC^2.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Зрозуміло, що CC_2 – висота в трикутнику ABC. Тоді за теоремою Піфагора для трикутників ACC_2 і BCC_2 маємо

$$CC_2^2 = AC^2 - AC_2^2 = BC^2 - BC_2^2,$$

звідки

$$AC^2 - BC^2 = AC_2^2 - BC_2^2.$$

Отже, маємо ланцюг рівностей

$$BC_1^2 - AC_1^2 = BS^2 - AS^2 = AC^2 - BC^2 = AC_2^2 - BC_2^2.$$

Нехай $AB = c$, $AC_1 = x$, $BC_2 = y$, тоді остання рівність записується так:

$$(c - x)^2 - x^2 \ = \ (c - y)^2 - y^2,$$

звідки

$$-2cx = -2cy,$$

отже,

$$x = y = AC_1 = BC_2,$$

і тому M_1 – середина сторони AB. Тоді точка M проєктується на середину сторони AB.

Аналогічно отримуємо, що точка M проєктується і на середини сторін BC і AC. Отже, M $(OH = 2MH)$ – центр описаного кола трикутника ABC. І задача зводиться до побудови гострокутного трикутника ABC, у якого MH, AC, AB і BC – натуральні числа.

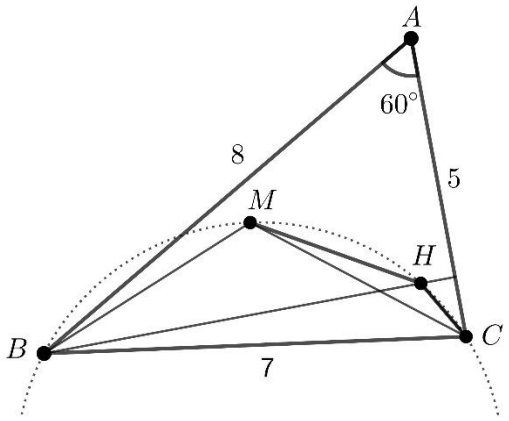


Рис. 10. Трикутник ABC до задачі 8

Розглянемо трикутник ABC, у якого $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $AC = 5$ (рис. 10). Тоді, за теоремою косинусів,

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49,$$

отже, $BC = 7$. Крім того, за властивостями ортоцентра та центра описаного кола

$$\angle BMC = 2\angle A = 120°,$$

$$\angle BHC = 180° - \angle A = 120°,$$

тому точки B, M, O і C лежать на одному колі, радіус якого за теоремою синусів для трикутника BMC дорівнює

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BMC} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Позначимо $\angle ABC = \beta$ (цей кут менший за $60°$, бо $AC < BC$). Тоді

$$\angle MBC = \frac{180° - \angle BMC}{2} = 30°,$$

$$\angle ABH = 90° - \angle A = 30°.$$

Звідси $\angle MAH = 60° - \beta$. І тому, за лемою про довжину хорди

$$MH = 2R\sin(60° - \beta) = \frac{14}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\beta - \frac{1}{2}\sin\beta\right) = 7\cos\beta - \frac{7}{\sqrt{3}}\sin\beta.$$

З трикутника ABC за теоремою косинусів

$$\cos\beta = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{64 + 49 - 25}{112} = \frac{11}{14}.$$

Далі за основною тригонометричною тотожністю

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Тому

$$MH = 7 \cdot \frac{11}{14} - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} = 3$$

і

$$OH = 2MH = 6.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Тепер $AB = 8,\ BC = 7,\ AC = 5,\ OH = 6$ виражені чотирма різними натуральними числами.

Відповідь: так, наприклад, $AB = 8, BC = 7, AC = 5, OH = 6$.

3. Інші наслідки теореми косинусів

Нижче виведемо ряд важливих тверджень для трикутників (зокрема декілька нерівностей для тригонометричних функцій кутів довільних трикутників), які також є наслідками теореми косинусів.

Нехай у трикутнику ABC: $AB = c, BC = a, CA = b$ (рис. 11).

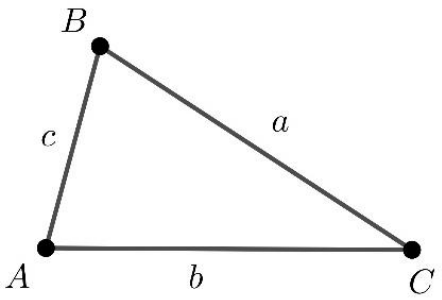


Рис. 11. Трикутник ABC до теореми 3

Теорема 3. *Для довільного трикутника ABC справедливі рівності*

$$a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}; \tag{1}$$

$$a^2 = (b-c)^2 + 4S\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}; \tag{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\,\mathrm{ctg}A; \tag{3}$$

$$\mathrm{ctg}\,A + \mathrm{ctg}\,B + \mathrm{ctg}\,C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}; \tag{4}$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}; \tag{5}$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 4S\,\mathrm{ctg}\frac{A}{2} \tag{6}$$

та нерівності

$$\sin\frac{A}{2} \le \frac{a}{2\sqrt{bc}}; \tag{7}$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}; \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{4S}; \tag{9}$$

$$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\ge\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}. \tag{10}$$

Доведення. За теоремою косинусів

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\cos A-2bc+2bc=$$

$$=b^2-2bc+c^2+2bc(1-\cos A),$$

звідки використавши формулу квадрата різниці і синуса половинного кута одержуємо (1).

Оцінимо (1). Оскільки повний квадрат – величина невід'ємна, то

$$a^2\ge 4bc\sin^2\frac{A}{2}\ \Rightarrow\ \sin^2\frac{A}{2}\le\frac{a^2}{4bc}.$$

Добувши корінь з обох частин останньої нерівності одержимо (7).

Запишемо нерівності аналогічні до (7) для інших кутів трикутника:

$$\sin\frac{B}{2}\le\frac{b}{2\sqrt{ac}};$$
$$\sin\frac{C}{2}\le\frac{c}{2\sqrt{ab}}$$

та перемножимо їх. Тоді

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}\cdot\frac{b}{2\sqrt{ac}}\cdot\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{1}{8}.$$

Отримали (8).

З формули площі трикутника

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

та формули синуса подвійного кута маємо, що

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$bc = \frac{S}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

Отримане підставимо в формулу (1):

$$a^2 = (b-c)^2 + 4\frac{S}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\sin^2\frac{A}{2}.$$

Після скорочення одержимо рівність (2). Аналогічні формули неважко отримати для сторін b та c.

Оцінимо (2). Оскільки повний квадрат – величина невід'ємна, то

$$a^2 \geq 4S\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}.$$

Виражаючи тангенс з останньої нерівності одержуємо (9).

З формули площі трикутника

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

виражаємо bc та підставляємо в рівність з теореми косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2\frac{2S}{\sin A}\cos A.$$

Таким чином отримано рівність (3).

Виражаємо з рівності (3) та її аналогів для інших кутів трикутника котангенси

$$\mathrm{ctg}\,A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}, \qquad \mathrm{ctg}\,B = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}, \qquad \mathrm{ctg}\,C = \frac{b^2+a^2-c^2}{4S}$$

та додаємо отримані рівності

$$\mathrm{ctg}\,A + \mathrm{ctg}\,B + \mathrm{ctg}\,A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4S} + \frac{b^2+a^2-c^2}{4S}.$$

Після спрощення отримуємо рівність (4).

З останньої рівності та нерівності (9) і її аналогів для інших кутів трикутника одержуємо нерівність (10).

Далі – аналогічно до доведення формул (1) та (2).

За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos A - 2bc + 2bc =$$

$$= b^2 + 2bc + c^2 - 2bc(1 + \cos A),$$

звідки використавши формулу квадрата суми і косинуса половинного кута одержуємо (5).

Підставивши у рівність (5) вираз

$$bc = \frac{S}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}},$$

одержуємо рівність (6). Аналогічні формули неважко отримати для сторін b та c.

Теорему доведено.

■

Ще одним важливим наслідком теореми косинусів є теорема Стюарта про формулу довжини чевіани трикутника.

Теорема 4. (Стюарта). *Для довільної точки D на стороні BC трикутника ABC виконується рівність:*

$$AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - BD \cdot DC \cdot BC.$$

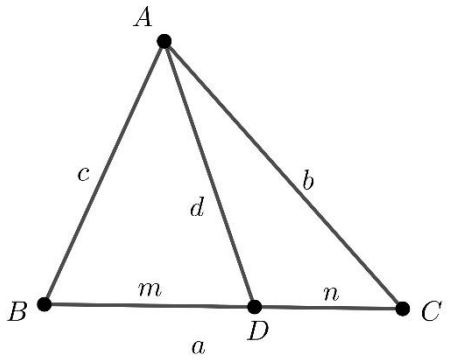


Рис. 12. Трикутник ABC до теореми 4

Зауваження. Якщо використати позначення $AD = d$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $BD = m$, $DC = n$, то теорема Стюарта матиме вигляд:

$$ad^2 = c^2n + b^2m - amn,$$

що можна переписати як

$$man + dad = bmb + cnc.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Тому для запам'ятовування цієї теореми можна скористатися мнемонічною фразою англійською мовою «A ***man*** and his ***dad*** put a ***b***o***mb*** in the **s**i**n*k***».

Доведення. Для доведення використаємо рис. 12 та позначення, введені в зауваженні до теореми.

Запишемо наслідок з теореми косинусів для трикутника ABC та кута B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

і той самий наслідок для цього ж кута B в трикутнику ABD:

$$\cos B = \frac{c^2 + m^2 - d^2}{2cm}.$$

Прирівнюємо результати в правих частинах

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{c^2 + m^2 - d^2}{2cm}$$

та множимо обидві частини рівності на вираз $2acm$

$$m(a^2 + c^2 - b^2) = a(c^2 + m^2 - d^2).$$

Після спрощень отримаємо рівність

$$a^2m + c^2m - b^2m = c^2a + m^2a - d^2a$$

або переставляючи доданки:

$$d^2a = c^2a + m^2a - a^2m - c^2m + b^2m.$$

Зауважимо, що $a = m + n$, тому справедливі рівності:

$$d^2a = c^2(m + n) + m^2a - a^2m - c^2m + b^2m,$$

$$d^2a = c^2m + c^2n + m^2a - a^2m - c^2m + b^2m,$$

$$d^2a = c^2n - am(a - m) + b^2m.$$

Оскільки $a - m = n$, то

$$d^2a = c^2n + b^2m - amn,$$

що і треба було довести.

■

Наслідками теореми Стюарта є формули довжини медіани (див. теорему 2) та довжини бісектриси довільного трикутника. Наведемо їх.

Наслідок 4.1. (Формула довжини медіани). *Для медіани, проведеної до сторони a трикутника ABC, виконується рівність*

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Доведення (другий спосіб). Якщо $AD = d = m_a$ – медіана (рис. 13), то

$$m = \frac{a}{2}, \qquad n = \frac{a}{2}.$$

За теоремою Стюарта маємо, що $d^2a = c^2n + b^2m - amn$.

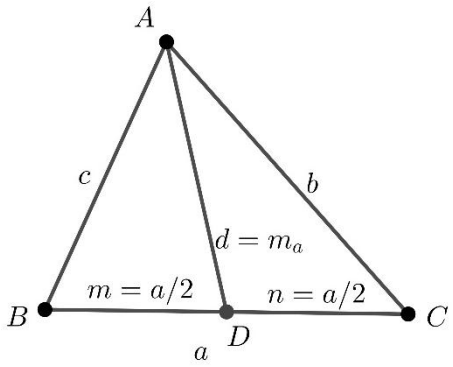


Рис. 13. Трикутник ABC до наслідку 4.1

Підставимо в цю рівність наші дані

$$m_a^2 a = \frac{ac^2}{2} + \frac{ab^2}{2} - \frac{a^3}{4}$$

та поділимо на a

$$m_a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4},$$

що і треба було довести.

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Наслідок 4.2. (Формула довжини бісектриси*). Для бісектриси* l_a *кута* A *трикутника* ABC *виконується рівність*

$$l_a = \sqrt{bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}.$$

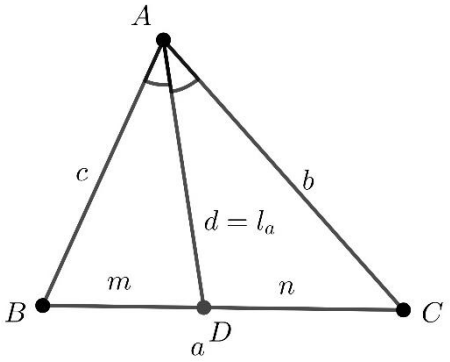


Рис. 14. Трикутник ABC до наслідку 4.2

Доведення. За властивістю бісектриси трикутника

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{cx}{bx}$$

і $BC = BD + DC$, тобто

$$a = bx + cx \Rightarrow x = \frac{a}{b+c}.$$

Тому маємо, що

$$m = cx = \frac{ac}{b+c}$$

і

$$n = bx = \frac{ab}{b+c}.$$

Крім того $d = l_a$ (рис. 14).

Тоді в рівності з теореми Стюарта $d^2a = c^2n + b^2m - amn$ підставимо отримані дані:

$$l_a^2 a = \frac{abc^2}{b+c} + \frac{ab^2c}{b+c} - \frac{a^3bc}{(b+c)^2},$$

поділимо на a та добудемо корінь з обох частин рівності:

$$l_a^2 = \frac{bc^2}{b+c} + \frac{b^2c}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc\left(\frac{c}{b+c} + \frac{b}{b+c} - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = bc\left(\frac{b+c}{b+c} - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right),$$

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) \Rightarrow l_a = \sqrt{bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)},$$

що і треба було довести.

■

Зауваження. Аналогічно для інших бісектрис:

$$l_b = \sqrt{ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)};$$

$$l_c = \sqrt{ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)}.$$

4. Застосування наслідків теореми косинусів до розв'язування задач поглибленого рівня.

Задача 9. ABC – правильний трикутник з стороною a. Точка D належить стороні AB. $DK||BC$, $DL||AC$, $KL = d$. Знайти площу трикутника DKL. При яких значеннях параметра d задача має розв'язок?

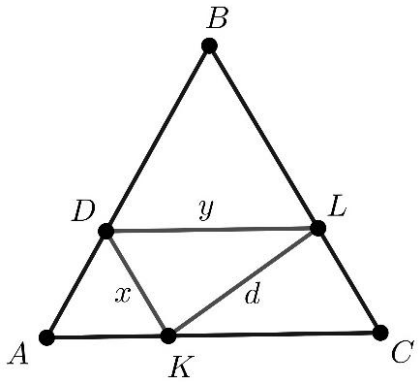


Рис. 15. Трикутник ABC до задачі 9

Розв'язання. Нехай $DK = x$, $DL = y$ (див. рис. 15). При будь-якому розташуванні точки D на відрізку AB виконується рівність

$$x + y = a,$$

оскільки $AD = KD$, $DL = LB$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

З формули (6) для трикутника DKL : $d^2 = (x+y)^2 - 4S\text{ctg}30^0$, тобто

$$d^2 = a^2 - 4S\text{ctg}30^0 = a^2 - S\sqrt{3} \Rightarrow S = \frac{a^2-d^2}{4\sqrt{3}}.$$

У трикутнику DKL за теоремою косинусів:

$$d^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 6\,0^0 = x^2 + y^2 - xy = x^2 + (a-x)^2 - x(a-x) =$$

$$= 3x^2 - 3xa + a^2 = 3(x^2 - xa) + a^2 = 3(x^2 - ax + \frac{a^2}{4}) - \frac{3a^2}{4} + a^2 = 3(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{a^2}{4}.$$

Отже,

$$d^2 \geq \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad 0 < d \leq \frac{a}{2}.$$

Відповідь: $S_{DKL} = \frac{a^2-d^2}{4\sqrt{3}}$, $0 < d \leq \frac{a}{2}$.

Зацікавленому читачу пропонуємо розв'язати наступні задачі.

Доведіть, що у довільному трикутнику ABC справджуються рівності:

$$1)\ \ ab\cos C + ac\cos B + bc\cos A \geq \frac{1}{6}P^2,$$

де P – периметр трикутника.

$$2)\ \frac{a(a-b+c)}{b(b+c-a)} = \frac{1-\cos A}{1-\cos B},$$

$$3)\ \frac{a\cos A + b\cos B + c\cos C}{a+b+c} = \frac{r}{R},$$

де r та R – радіуси вписаного та описаного навколо трикутника ABC кіл відповідно.

5. Висновки

Дана стаття, адресована учасникам освітнього процесу та усім, хто любить математику, висвітлює ширші можливості застосування класичної теореми косинусів, ніж зазвичай це відображено у шкільній навчальній літературі. Зокрема, у ній показано користь від застосування теореми косинусів та наслідків з неї для розв'язування

завдань олімпіадного і турнірного характеру, виведено ряд важливих тверджень для трикутників, які допомагають у дослідженні геометричних об'єктів різної конструкції.

Авторський колектив щиро сподівається, що текст статті стане у пригоді читачам при розв'язуванні різноманітних геометричних задач або ж під час складання власних умов, які у майбутньому можна буде використати у навчальному або змагальному процесі.

Внесок авторів

Катерина Давидова – концептуалізація ідеї статті, написання початкового варіанта (чернетки) тексту. Катерина Лукаш – аналіз джерел, перегляд і редагування, внесення змін і доповнень до тексту статті. Василь Бакай – аналіз джерел, підбір текстів задач та підготовка їхніх розв'язувань. Олексій Печериця – концептуалізація ідеї статті, перегляд і редагування, внесення змін і доповнень до тексту статті.

Подяка

Стаття присвячена Савченку Леоніду Мироновичу (24.07.1945 – 14.09.2021) – Вчителю, який понад 50 років свого життя присвятив Українському фізико-математичному ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка, який умів показати красу математики та закохати у неї на все життя, автору підручника з геометрії для 8 - 9 класів з поглибленим вивченням математики та спецкурсу «Краса і творчість у математиці» для слухачів інституту вдосконалення вчителів імені Бориса Грінченка.

Джерела фінансування

Це дослідження не отримало жодного гранту від фінансових установ у державному, комерційному чи некомерційному секторах.

Список використаних джерел

Апостолова Г. В. (2006). Геометрія : підручник для 9-го класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Генеза. 256 с.

Бурда М. І., Савченко Л. М. (2004). Геометрія : навчальний посібник для 8–9 класів шкіл з поглибленим вивченням математики. Київ : Освіта, 238 с.

Єршова А. П., Голобородько В. В., Крижановський О. Ф., Єршов С. В. (2014). Геометрія. 9 клас : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. 5-те вид. Харків : Видавництво «Ранок». 256 с.

Лебедєва І.В., Чубикіна А.О., 25 способів підкорити теорему Піфагора: від класики до сучасності // *У світі математики* 2025, випуск 1. С. 54-77. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5

Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. (2017). Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків: Гімназія, 304 с.

Нікулін О. В., Кукуш О. Г. (1999). Геометрія. Поглиблений курс: 7–9 класи : навчальний посібник. Київ ; Ірпінь : ВТФ «Перун». 352 с.

Рубльов Б.В., та ін. (2018). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016/17 навчальний рік : навчально-методичний посібник / А. В. Анікушин, А. В. Лисакевич, В. Г. Лішунов та ін. ; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія. 464 с.

Рубльов Б.В., та ін. (2019). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2017/18 навчальний рік : навчально-методичний посібник / А. В. Анікушин, І. В. Жук, А. В. Лисакевич та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія. 464 с.

Рубльов Б.В., та ін. (2020). Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2018/19 навчальний рік : навчально-методичний посібник / А. В. Анікушин, І. Жук, О. Мекуш та ін.; за ред. Б. В. Рубльова. Харків : Гімназія. 464 с.

XVIII Всеукраїнський турнір математичних боїв. Розклад першого бою. Результати усної командної олімпіади. URL: https://matholymp.com.ua/vseukrayinskii-cikl/xviii-vseukrayinskii-turnir-matematicnix-boyiv-rozklad-persogo-boyu-rezultati-usnoyi-commnadnoyi-olimpiadi-25k632 (дата звернення: 24.06.2026).

References

Apostolova G. V. (2006). Geometry: a textbook for the 9th grade of secondary schools. Kyiv: Geneza. 256 p. [in Ukrainian].

Burda M. I., Savchenko L. M. (2004). Geometry: a textbook for the 8th–9th grades of schools with in-depth study of mathematics. Kyiv: Osvita, 238 p. [in Ukrainian].

Yershova A. P., Holoborodko V. V., Kryzhanovsky O. F., Yershov S. V. (2014). Geometry. 9th grade: a textbook for secondary schools. 5th ed. Kharkiv: Publishing house "Ranok". 256 p. [in Ukrainian].

Lebedeva I.V., Chubykina A.O., 25 ways to conquer the Pythagorean theorem: from classics to modernity // In the world of mathematics 2025, issue 1. P. 54-77. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5 [in Ukrainian].

Merzlyak A. G., Polonsky V. B., Yakir M. S. (2017). Geometry for general educational institutions with in-depth study of mathematics: a textbook for the 9th grade of general educational institutions. Kharkiv: Gymnasium, 304 p. [in Ukrainian].

Nikulin O. V., Kukush O. G. (1999). Geometry. Advanced course: grades 7–9: a textbook. Kyiv; Irpin: VTF "Perun". 352 p. [in Ukrainian].

Rublev B.V., et al. (2018). Mathematical Olympiads of Schoolchildren of Ukraine: 2016/17 academic year: teaching and methodological manual / A. V. Anikushin, A. V. Lysakevych, V. G. Lishunov et al. ; ed. B. V. Rublev. Kharkiv: Gymnasium. 464 p. [in Ukrainian]

Rublev B.V., et al. (2019). Mathematical Olympiads of Schoolchildren of Ukraine: 2017/18 academic year: teaching and methodological manual / A. V. Anikushin, I. V. Zhuk, A. V. Lysakevych et al. ; ed. B. V. Rublev. Kharkiv: Gymnasium. 464 p. [in Ukrainian].

Rublev B.V., et al. (2020). Mathematical Olympiad Competitions of Schoolchildren of Ukraine: 2018/19 Academic Year: Educational and Methodological Guide / A. V. Anikushin, I. Zhuk, O. Mekush and others; ed. B. V. Rublyova. Kharkiv: Gymnasium. 464 p. [in Ukrainian].

XVIII All-Ukrainian Tournament of Mathematical Battles. Schedule of the First Battle. Results of the Oral Team Olympiad. URL: https://matholymp.com.ua/vseukrayinskii-cikl/xviii-vseukrayinskii-turnir-matematicnix-boyiv-rozklad-persogo-boyu-rezultati-usnoyi-commnadnoyi-olimpiadi-25k632 (access date: 06/24/2026). [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 20.04.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Vasyl BAKAI, Teacher of Mathematics
ORCID ID: 0009-0001-4960-7490
e-mail: wassyl2001@knu.ua
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Kateryna DAVYDOVA, Teacher of Mathematics of Higher Category, Teacher-Methodist
ORCID ID: 0009-0008-3067-8695
e-mail: kotica70@gmail.com
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Kateryna LUKASH, Ph.D (Phys&Math), Honored Teacher of Ukraine,
teacher of mathematics of higher category, teacher-methodist
ORCID ID: 0009-0006-6110-4921
e-mail: lukash_k@ukr.net
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksii PECHERYTSIA, PhD in Mathematics and Statistics,
teacher of mathematics of higher category, teacher-methodist
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

AROUND THE LAW OF COSINES

Abstract. *This article examines the law of cosines and its corollaries – a simple and fundamental tool of geometry that expands students' capabilities in solving triangle problems. Special attention is given to problem-solving, particularly advanced-level and mathematical olympiad problems. The article is dedicated to Leonid M. Savchenko (July 24, 1945 – September 14, 2021), a Teacher who devoted more than 50 years of his life to the Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum of Taras Shevchenko National University of Kyiv. He had a unique ability to reveal the beauty of mathematics and inspire a lifelong love for it. He was the author of a geometry textbook for grades 8-9 with advanced study of mathematics and of the special course "Beauty and Creativity in Mathematics" for participants of the Borys Grinchenko Institute for Teacher Professional Development. The article is intended for school students, teachers of general secondary education institutions, and everyone who loves mathematics.*

Keywords: *law of cosines; corollaries of the law of cosines; advanced geometry problems; mathematical olympiad geometry problems.*

Received: 20.04.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні олімпіади

УДК 51(079) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.10**

Олександр БОРИСЕЙКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА З МАТЕМАТИКИ 2026

Анотація. *Олімпіада з математики – це не просто конкурс, а справжнє випробування для розуму, де обдаровані учні можуть випробувати свої сили у розв'язуванні нестандартних і складних задач. Такі змагання чудово стимулюють інтерес до точних наук та допомагають учням розвивати математичне мислення. У представленій роботі зібрано та детально розібрано розв'язки завдань Всеукраїнської олімпіади Київського національного університету імені Тараса Шевченка за 2026 рік.*

Ключові слова: *математична олімпіада; рівняння; нерівність; розв'язок; трикутник.*

1. Вступ

Проведена у 2026 році Всеукраїнська олімпіада з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка вкотре привернула увагу випускників закладів загальної середньої освіти, які планують продовжити навчання у закладах вищої освіти. Для багатьох учнів і учениць участь в олімпіаді стала важливим етапом підготовки до національного мультипредметного тесту та можливістю об'єктивно оцінити власний рівень математичної підготовки. Олімпіадні змагання традиційно стимулюють інтерес до поглибленого вивчення математики та розвитку творчого математичного мислення.

На відміну від завдань стандартного шкільного курсу, які переважно орієнтовані на застосування відомих алгоритмів, олімпіадні задачі потребують пошуку нестандартних підходів і нових ідей. Нерідко ключ до розв'язання такої задачі полягає в одному нетривіальному спостереженні або вдало обраному методі. Водночас фундаментальні математичні принципи залишаються спільними для цілих класів задач, а головним викликом для учасника є своєчасне розпізнавання структури задачі та вибір адекватного математичного інструментарію.

Ефективна підготовка учнів до математичних змагань високого рівня потребує комплексного підходу та використання сучасних освітніх ресурсів, зокрема спеціалізованих інтернет-платформ і фахової методичної літератури. Особливе місце серед таких джерел посідають праці провідних українських фахівців з олімпіадної

математики, зокрема серія навчально-методичних посібників за редакцією Б. В. Рубльова (Рубльов, 2014), роботи О. А. Сарани (Сарана, 2005) та І.М. Конета, В. М. Радченка та Ю. В. Теплінського (Конет, Радченко, Теплінський, 2010). Основною метою цих видань є систематизація нестандартних методів аналізу та розв'язування математичних задач підвищеної складності.

Методика викладу матеріалу в зазначених працях ґрунтується переважно на індуктивному підході: теоретичні узагальнення, ключові твердження та методичні рекомендації формуються безпосередньо під час детального аналізу практичних завдань, запозичених із реальних математичних олімпіад різних рівнів. Крім того, цікаві задачі учнівських математичних змагань та оригінальні ідеї їх розв'язання висвітлено у роботах (Борисейко, Перегуда, 2024), (Борисейко, Перегуда, 2025), (Городній, 2025), (Волошина, 2025).

У цій статті розглянуто окремі задачі Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 2026 року, проаналізовано підходи до їх розв'язування та обговорено методичні аспекти, що можуть бути корисними для подальшої підготовки учнів до математичних змагань.

2. Задачі фінального туру

Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики 2026 відбувалася на базі механіко-математичного факультету і складалася з двох турів: заочного та фінального. У олімпіаді прийняли участь 46 учасників з різних регіонів України.

Наведемо умови завдань фінального туру олімпіади з відповідними розв'язуваннями або вказівками.

Задача 1. *Порівняти числа:*

а) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{51+14\sqrt{2}}$ та 9*;*

б) $\cos^2\frac{\pi}{12}$ та $\frac{2}{3}$.

Розв'язання.

а) Виділимо повні квадрати виразів під знаком кореня:

$$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=\sqrt{9-6\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=\left|3-\sqrt{2}\right|=3-\sqrt{2},$$

$$\sqrt{51+14\sqrt{2}}=\sqrt{49+14\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(7+\sqrt{2}\right)^2}=\left|7+\sqrt{2}\right|=7+\sqrt{2}.$$

Проведемо порівняння

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$3-\sqrt{2}+7+\sqrt{2}=10>9.$$

б) Згідно з тригонометричною формулою половинного аргументу

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

Відтак порівнюємо тепер

$$\frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad \text{та} \quad \frac{2}{3}.$$

Зводимо вирази до спільного знаменника і маємо для порівняння числа

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{12} \quad \text{та} \quad \frac{8}{12}.$$

Звідси отримуємо, що $3\sqrt{3}>2$, оскільки $27>4$.

Відповідь: $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{51+14\sqrt{2}}>9$, $\cos^2\frac{\pi}{12}>\frac{2}{3}$.

Задача 2. *Знайти значення* $\log_{30}8$, якщо $\log_{30}3=a$, $\log_{30}5=b$.

*Розв'язання***.** Проведемо наступні перетворення:

$$\log_{30}8=\log_{30}2^3=3\log_{30}2=3\log_{30}\frac{30}{3\cdot5}=$$

$$=3(\log_{30}30-\log_{30}3-\log_{30}5)=3(1-a-b).$$

Відповідь: $\log_{30}8=3(1-a-b)$.

Задача 3. *Нехай* x,y *– натуральні числа. Чи може число*

$$x^2+x(y+2)-2y^2+7y-3$$

бути простим натуральним числом? Відповідь обґрунтувати.

Розв'язання. Розглянемо число $x^2+x(y+2)-2y^2+7y-3$ як квадратний тричлен зі змінною x та параметром y.

Дискримінант даного тричлена:

$$D=(y+2)^2-4(-2y^2+7y-3)=9y^2-24y+16=(3y-4)^2.$$

Тоді нулями тричлена будуть:

$$x_1 = \frac{-(y+2)-(3y-4)}{2} = -2y+1, \qquad x_2 = \frac{-(y+2)+(3y-4)}{2} = y-3.$$

Тоді число $x^2 + x(y+2) - 2y^2 + 7y - 3$ можна розкласти на множники наступним чином:

$$x^2 + x(y+2) - 2y^2 + 7y - 3 = (x+2y-1)(x-y+3).$$

Для того, щоб початкове число було простим, один із цих множників повинен дорівнювати одиниці, а інший – простому числу.

Перевіримо таку можливість, врахувавши, що x, y – натуральні числа, тобто $x \geq 1$ та $y \geq 1$.

Число $x + 2y - 1 \geq 2$ не дорівнює 1.

Число $x - y + 3 = 1$ при $y = x + 2$. Тоді

$$x + 2y - 1 = x + 2(x+2) - 1 = 3x + 3 = 3(x+1)$$

не є простим, оскільки $x + 1 > 1$. Отже, даний вираз не може бути простим числом.

Відповідь: Вираз $x^2 + x(y+2) - 2y^2 + 7y - 3$ не може бути простим числом, якщо x, y – натуральні числа.

Задача 4. *Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довжина ребра куба дорівнює 4 см. Точка P належить діагоналі AC_1 і PC_1: $AP = 3$. Визначити довжину відрізка B_1P.*

Розв'язання. Розглянемо бічну грань куба – квадрат AA_1B_1B (рис. 1). За теоремою Піфагора його діагональ $AB_1 = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ см.

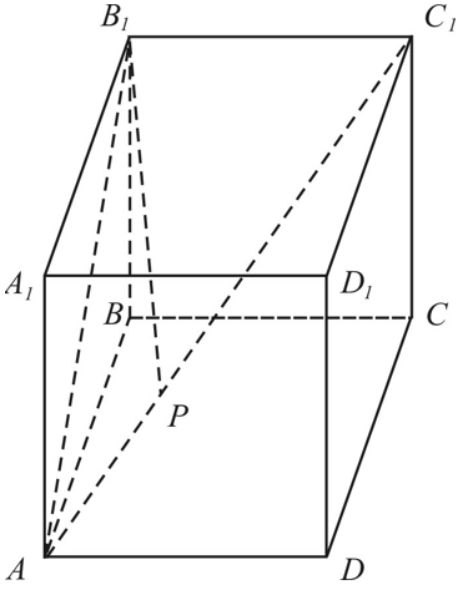


Рис. 1. Рисунок до задачі 4

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Ребро куба B_1C_1 перпендикулярне до AA_1B_1B, отже, перпендикулярне до AB_1, і $\triangle AB_1C_1$ – прямокутний.

Тому за теоремою Піфагора $AC_1 = \sqrt{32+16} = 4\sqrt{3}$ см.

Позначимо $\angle B_1AC_1 = \alpha$. З $\triangle AB_1C_1$:

$$\cos\alpha = \frac{AB_1}{AC_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Нехай $AP = x$, тоді $PC_1 = 3x$.

Далі $AP + PC_1 = x + 3x = AC_1 = 4\sqrt{3}$ см, $x = \sqrt{3}$ см.

Отже, $AP = \sqrt{3}$ см.

Для визначення довжини B_1P застосуємо теорему косинусів до $\triangle PAB_1$:

$$B_1P^2 = AB_1^2 + AP^2 - 2AB_1 \cdot AP\cos\alpha = 32 + 3 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 35 - 16 = 19.$$

Тоді $B_1P = \sqrt{19}$ см.

Відповідь: $\sqrt{19}$ см.

Задача 5. *Розв'язати рівняння:*

а) $x^2 - \cos(2\pi - x) = -1$;

б) $x^2 + y^2 + 2xy = \cos\frac{\pi(x-y)}{2} - 1$.

Розв'язання.

а) З властивостей періодичності та парності функції $\cos x$ маємо

$$\cos(2\pi - x) = \cos x.$$

Отже, рівняння набуває вигляду:

$$x^2 + 1 = \cos x.$$

Тоді з очевидних нерівностей: $x^2 + 1 \geq 1$ та $-1 \leq \cos x \leq 1$ слідує, що рівність можлива, коли обидва вирази рівні 1. Тобто при $x = 0$.

б) Перетворимо рівняння

$$(x+y)^2 + 1 = \cos\frac{\pi(x-y)}{2}.$$

З нерівностей $(x+y)^2+1 \geq 1$ та $-1 \leq \cos\frac{\pi(x-y)}{2} \leq 1$ маємо, що рівність можлива при

$$\cos\frac{\pi(x-y)}{2} = 1 \text{ та } \quad x+y=0.$$

Отже, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+y=0, \\ \dfrac{\pi(x-y)}{2} = 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+y=0, \\ x-y=4n, \end{cases} n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x=4n, \\ 2y=-4n. \end{cases}$$

Множина розв'язків даної системи $(2n, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: а) $\{0\}$; б) $(2n, -2n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Висновки

Сталий інтерес школярів до математичних змагань свідчить про високий престиж олімпіади як інтелектуального заходу. Тут майбутні лідери наукової спільноти змагаються не лише за лідерство, а й за право довести свою здатність мислити критично та нестандартно. Математика є універсальним інструментом пізнання світу, що розширює межі людських можливостей. Університетська спільнота щиро вірить у талант та невичерпну енергію молодих дослідників, які готові брати на себе відповідальність за розв'язування складних проблем сучасності. Київський національний університет імені Тараса Шевченка залишається надійним майданчиком, який плекає дух здорового суперництва, мотивує до самовдосконалення та веде молодь до нових життєвих і наукових перемог.

Список використаних джерел

Борисейко О.В & Перегуда О.В. (2024). Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики. // *У світі математики*, випуск 1. С. 23-28. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.4

Борисейко О.В & Перегуда О.В. (2025). Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики. Фінальний тур. // *У світі математики*, випуск 1. С. 33-38. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5

Волошина Т.В. (2025). Математичні олімпіади для молодших школярів. // *У світі математики*, випуск 2. С. 48-57. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.5

Городній М.Ф. (2025). Про деякі методи розв'язування нестандартних рівнянь і нерівностей. // *У світі математики*, випуск 2. С. 33-40. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.3

Конет І.М., Радченко В. М. & Теплінський Ю.В. (2010). *Математичні олімпіади школярів. Абетка. 388 с*.

Рубльов Б. В. (2014). *Математичні олімпіади обдарованої молоді. К.: ТВіМС. 144 с.*

Сарана О.А. (2005). *Математичні олімпіади: просте і складне поруч*: Навчальний посібник. *Тернопіль: Богдан. 412 с.*

References

Boryseyko O.V. & Perehuda O.V. (2024). Vseukrayins'ka olimpiada Kyyivs'koho natsional'noho universytetu imeni Tarasa Shevchenka z matematyky. // *U sviti matematyky*, vypusk 1. pp. 23-28. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.4 [in Ukrainian].

Boryseyko O.V. & Perehuda O.V. (2025). Vseukrayins'ka olimpiada Kyyivs'koho natsional'noho universytetu imeni Tarasa Shevchenka z matematyky. Final'nyy tur. // *U sviti matematyky*, vypusk 1. pp. 33-38. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5 [in Ukrainian].

Voloshyna T.V. (2025). Matematychni olimpiady dlya molodshykh shkolyariv. // *U sviti matematyky*, vypusk 2. pp. 48-57. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.5 [in Ukrainian].

Horodniy M.F. (2025). Pro deyaki metody rozv"yazuvannya nestandartnykh rivnyan' i nerivnostey. // *U sviti matematyky,* vypusk 2. pp. 33-40. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.3 [in Ukrainian].

Konet I.M., Radchenko V.M. & Teplinsky Y.V. (2010). *Mathematical Olympiads for Schoolchildren*. Abetka. 388 p. [in Ukrainian].

Rublev B.V. (2014). *Mathematical Olympiads for Gifted Youth*. Kyiv: TViMS. 144 p. [in Ukrainian].

Sarana O.A. (2005) *Mathematical Olympiads: Simple and Complex Side by Side*: Textbook. Ternopil: Bogdan. 412 p. [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 01.05.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Oleksandr BORYSEIKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ALL-UKRAINIAN MATHEMATICS OLYMPIAD OF TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV FROM MATHEMATICS 2026

Abstract. *A mathematics Olympiad is not merely a competition, but a true intellectual challenge where gifted students can test their abilities by solving non-standard and complex problems. Such competitions effectively stimulate interest in the exact sciences and help students develop mathematical thinking. This paper compiles and provides detailed analyses of the solutions to the tasks of the 2026 All-Ukrainian Mathematics Olympiad held by Taras Shevchenko National University of Kyiv.*

Keywords: *mathematical Olympiad; equation; inequality; solution; triangle.*

Received: 01.05.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

Математичний гурток

УДК 512.64:519.85:004.89 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.11**

Аліна КРУГЛЯК, Студентка
ORCID: 0009-0005-9502-5407
e-mail: krugluakalina@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИНАМІЧНОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ GEOGEBRA

Анотація. *Статтю присвячено теоретичному обґрунтуванню та практичній реалізації методики моделювання векторів у тривимірному просторі засобами динамічного математичного середовища GeoGebra. У роботі проаналізовано інструментарій середовища в контексті оперування стереометричними об'єктами, а також досліджено ефективність поєднання алгебраїчного та графічного підходів до інтерпретації математичних даних. Реалізовано алгоритми побудови просторових векторів та виконання базових лінійних операцій: додавання, віднімання та множення вектора на число. Особливу увагу приділено верифікації результатів шляхом синхронізації аналітичних обчислень із їхньою візуалізацією в тривимірному просторі, що сприяє глибшому розумінню геометричної природи векторних операцій.*

Практична значущість полягає у розробці інтерактивних моделей із використанням вбудованої мови сценаріїв (Scripting). Це дозволило автоматизувати обчислювальні процеси та створити адаптивний інтерфейс користувача для проведення експериментів із просторовими залежностями. Показано, що впровадження таких динамічних моделей в освітній процес інтенсифікує розвиток просторової уяви та підвищує рівень засвоєння тем стереометрії. Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням функціональних можливостей створеної бібліотеки моделей та інтеграцією складніших алгоритмів автоматизації для розв'язування прикладних задач геометрії.

Ключові слова: *вектори; тривимірний простір; операції з векторами; середовище GeoGebra.*

1. Вступ

Сучасна парадигма математичної освіти в умовах цифровізації суспільства вимагає пошуку нових дидактичних підходів, що забезпечують перехід від репродуктивного засвоєння знань до формування глибинних когнітивних структур. Вивчення векторної алгебри у просторі є фундаментом для розвитку просторового мислення, що має критичне значення для підготовки фахівців науково-технічного профілю. Проте практика викладання засвідчує наявність суттєвого розриву між алгоритмічними навичками обчислень та усвідомленим розумінням геометричної суті векторних операцій. Традиційні статичні ілюстрації часто не дозволяють учням повноцінно опанувати динамічну природу векторних перетворень у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$, що зумовлює необхідність впровадження інтерактивних засобів візуалізації.

Складність опанування навчального матеріалу «Вектори у просторі» при вивченні теми «Координати і вектори» зумовлена високим рівнем абстракції об'єктів, які не

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

завжди мають прямі фізичні аналоги в емпіричному досвіді учня. Операції додавання, віднімання та скалярного чи векторного множення часто сприймаються як сукупність формальних арифметичних дій з координатами. Водночас фундаментальне розуміння теми базується на візуалізації геометричних інтерпретацій, таких як правила трикутника чи паралелепіпеда, проєкції векторів та зміна їхньої орієнтації.

У сучасних умовах цифровізації освіти та активного впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у навчальний процес зростає роль динамічних математичних середовищ як ефективних засобів візуалізації, дослідження та моделювання математичних об’єктів. Одним із найбільш поширених і доступних інструментів такого типу є програмне забезпечення GeoGebra, яке поєднує можливості геометрії, алгебри, аналізу та статистики в єдиному інтерактивному середовищі. Завдяки відкритості платформи та її орієнтації на освітні потреби GeoGebra широко використовується як у шкільній, так і у вищій математичній освіті.

Питання методики викладання векторної алгебри засобами ІКТ перебуває у центрі уваги багатьох дослідників. Зокрема, (Чубей, 2023) обґрунтовує ефективність використання GeoGebra для формування цілісного уявлення про вектор, наголошуючи на важливості візуалізації при роботі з координатами. Педагогічні аспекти інтеграції цього програмного забезпечення у загальний курс математики детально розкриті у роботі (Усата, 2019), де акцентується на подоланні труднощів при експонуванні просторових об’єктів. Своєю чергою, Н. Титаренко та Е. Муртазієв (Титаренко, Муртазієв, 2019) вказують на зростання навчальної мотивації та якості знань завдяки використанню динамічних моделей, що унаочнюють абстрактні властивості геометричних фігур. Узагальнення наявних наукових доробків підтверджує, що дидактичний потенціал середовища GeoGebra є вагомим чинником модернізації навчання стереометрії.

Об’єктом дослідження є процес вивчення та засвоєння учнями основних понять і операцій векторної алгебри у шкільному курсі геометрії з використанням динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra.

Мета дослідження – підвищити ефективність вивчення векторів у просторі шляхом інтеграції динамічного математичного програмного забезпечення GeoGebra в освітній процес.

Далі в роботі буде проаналізовано та систематизовано теоретичний матеріал з теми «Вектори у просторі»; розглянуто особливості застосування програмного забезпечення GeoGebra для візуалізації векторних операцій (додавання, віднімання, множення на число); розроблено методичні рекомендації щодо використання GeoGebra на уроках геометрії; експериментально перевірено ефективність запропонованих методик.

2. Функції GeoGebra для роботи з векторами

Особливе місце у курсах алгебри, геометрії та аналітичної геометрії посідає вивчення векторів та векторних операцій. Векторний апарат є фундаментальним інструментом для опису геометричних перетворень, розв’язування задач з планіметрії

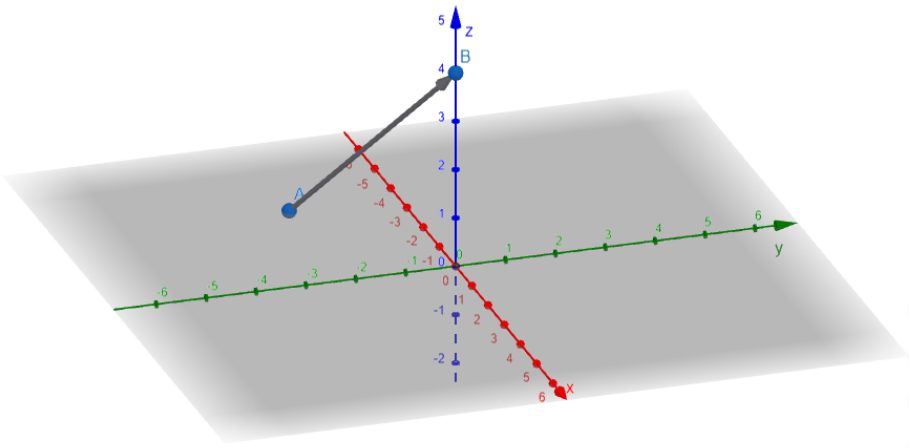
та стереометрії, а також для подальшого опанування лінійної алгебри, фізики та інженерних дисциплін. Проте абстрактність векторних понять часто ускладнює їх сприйняття студентами та учнями, особливо на початкових етапах навчання. У цьому контексті використання динамічних середовищ, зокрема GeoGebra, дозволяє значно підвищити наочність і зрозумілість відповідного навчального матеріалу.

GeoGebra надає широкий набір функцій і команд для роботи з векторами, що охоплюють їх створення, задання координат, виконання основних векторних операцій (додавання, віднімання, множення на число), обчислення довжини, скалярного добутку, а також дослідження взаємного розміщення векторів. Інтерактивний характер середовища дозволяє в режимі реального часу спостерігати за зміною властивостей векторів при варіюванні вихідних параметрів, що сприяє формуванню глибшого розуміння математичних закономірностей.



Рис. 1. Інструмент «Вектор» панелі «Лінії та Многокутники» середовища GeoGebra

У динамічному математичному середовищі GeoGebra робота з векторами реалізується за допомогою спеціалізованих інструментів та функцій, зосереджених, зокрема, у розділі «Лінії та Многокутники». У цьому розділі наявний інструмент «Вектор», який дозволяє будувати вектори як у двовимірному, так і в тривимірному просторі (рис. 1).



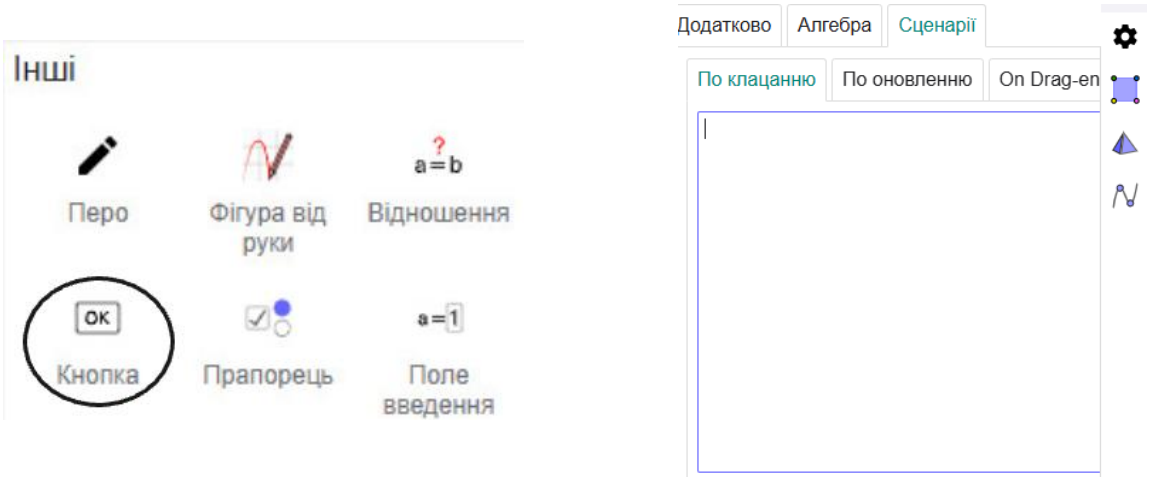
ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Рис. 2. Вектор $\overrightarrow{AB} = (3{,}55; 2{,}18; 4)$

За допомогою інструмента «Вектор» користувач може побудувати напрямлений відрізок, задавши його початкову та кінцеву точки. Наприклад, у тривимірному просторі можлива побудова вектора $\overrightarrow{AB} = (3{,}55; 2{,}18; 4)$, де точка A є початком вектора, а точка B – його кінцем. Така побудова наочно ілюструє геометричне означення вектора як напрямленого відрізка, що має довжину та напрям.

На рис. 2 проілюстровано розміщення вектора відносно координатних осей у тривимірному просторі, що дає змогу візуалізувати його координати, напрям та орієнтацію в просторі.

Окрім базових інструментів побудови, GeoGebra має *розширений інтерактивний інструментарій*, який реалізується за допомогою елементів керування. До них належать *інструмент «Кнопка»* (рис. 3 а)), який дозволяє запускати певні дії або сценарії та *поле введення* вкладки *«Сценарії»* (рис. 3 б)), де можна задавати алгоритми дій мовою скриптів GeoGebra.



а) б)

Рис. 3. Розширений інтерактивний інструментарій GeoGebra:
а) інструмент «Кнопка»; б) поле введення «Сценарії»

Завдяки використанню сценаріїв користувач отримує можливість автоматизувати операції з векторами, змінювати їх параметри в динамічному режимі, створювати навчальні моделі та демонстрації. Такий підхід значно розширює функціональні можливості середовища GeoGebra та сприяє формуванню дослідницьких навичок і глибшого розуміння векторних понять.

Для поглибленого аналізу методичних можливостей середовища GeoGebra варто виділити наступні ключові аспекти роботи з векторами.

Насамперед зазначимо, що GeoGebra реалізує принцип *подвійного представлення об'єктів*. Будь-який вектор, побудований у вікні «Полотно 3D», автоматично отримує своє алгебраїчне відображення у панелі об'єктів. Це дозволяє учням миттєво бачити зв'язок між геометричною конфігурацією вектора та його координатами x, y, z.

Програма підтримує виконання операцій над векторами безпосередньо через рядок вводу, що значно розширює стандартний інструментарій панелі малювання:

- *додавання та віднімання* – введення команди $u + v$ або $u - v$ створює результуючий вектор;
- *скалярний та векторний добутки* – використання символів множення або спеціальних команд (наприклад, $u * v$ для скалярного добутку та $\mathrm{Cross}(u, v)$ – для векторного);
- *нормування* – знаходження довжини вектора за допомогою команди $\mathrm{Length}(u)$.

Використання *повзунків* (*sliders*) дозволяє створювати моделі, де координати вектора є змінними величинами. Це дає змогу демонструвати поняття колінеарності або компланарності векторів у динаміці. Так при зміні значення коефіцієнта k у виразі $\bar{b} = k\bar{a}$ учень наочно спостерігає зміну довжини та напрямку вектора, зберігаючи його орієнтацію на прямій.

Інструментарій «GeoGebra-скрипт» відкриває шлях до створення самоперевірочних завдань. За допомогою сценаріїв можна:

- створювати кнопки для покрокової візуалізації розв'язання задачі;
- програмувати випадкову генерацію початкових координат векторів для індивідуалізації завдань;
- налаштовувати зворотний зв'язок: якщо учень ввів правильну відповідь, колір вектора або повідомлення на екрані змінюється.

3. Дослідження основних векторних операцій у середовищі GeoGebra

Розглянемо детально реалізацію базових операцій векторної алгебри – *додавання*, *віднімання* та *скалярного множення* у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ – за допомогою інструментарію GeoGebra. Власне проілюструємо як використання динамічних моделей дозволяє подолати розрив між абстрактним обчисленням координат та їхнім просторовим втіленням.

3.1. Адитивні операції: правила паралелограма та трикутника

Традиційні методи додавання векторів $a(x_1;\ y_1;\ z_1)$ та $b(x_2;\ y_2;\ z_2)$ у GeoGebra набувають інтерактивної форми. Програма автоматично обчислює результуючий вектор $c = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$, водночас візуалізуючи його як діагональ паралелограма або замикальну сторону трикутника.

Наявний арсенал інструментарію GeoGebra дозволяє динамічно працювати з векторами. Так при зміні положення кінцевої точки будь-якого вектора-доданка в режимі реального часу змінюється конфігурація всієї системи, що підтверджує інваріантність алгебраїчних законів відносно просторового розташування об'єктів.

Необхідно зазначити, що операція віднімання векторів: $a - b$ інтерпретується як додавання вектора a із протилежно спрямованим вектором $-b$, що наочно демонструє зміну орієнтації вектора в $\mathbb{R}^3$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Приклад 1. Додати вектори $\overrightarrow{AB} = (3{,}55; 2{,}18; 4)$ і $\overrightarrow{CA} = (-3{,}55; -1{,}18; 0)$.

Скористаємось правилом трикутника. Тоді відкладемо послідовно вектори так, щоб початок вектора $\overrightarrow{AB}$ розміщують у кінці вектора $\overrightarrow{CA}$. Вектор, що з'єднує початок другого вектора (точку C) з кінцем першого вектора (точкою B), є сумою відповідних векторів. Тоді з'єднаємо точки C та B, отримаємо вектор $\overrightarrow{CB}$, який є сумою векторів $\overrightarrow{CA}$ та $\overrightarrow{AB}$ (рис. 4).

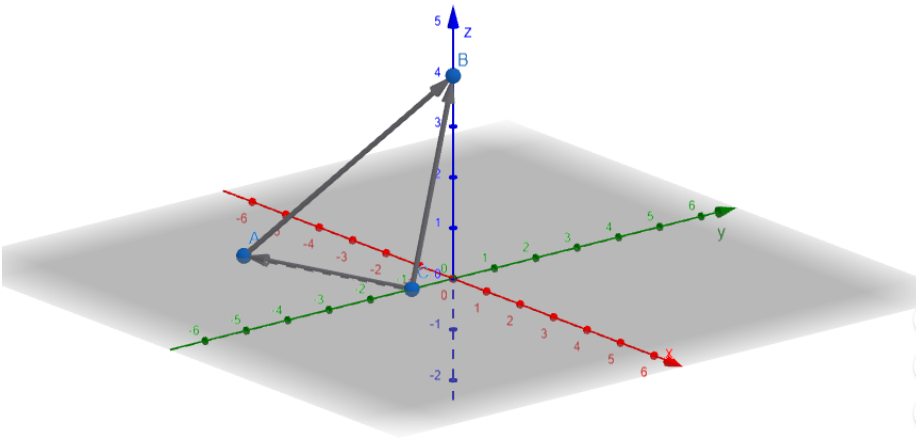
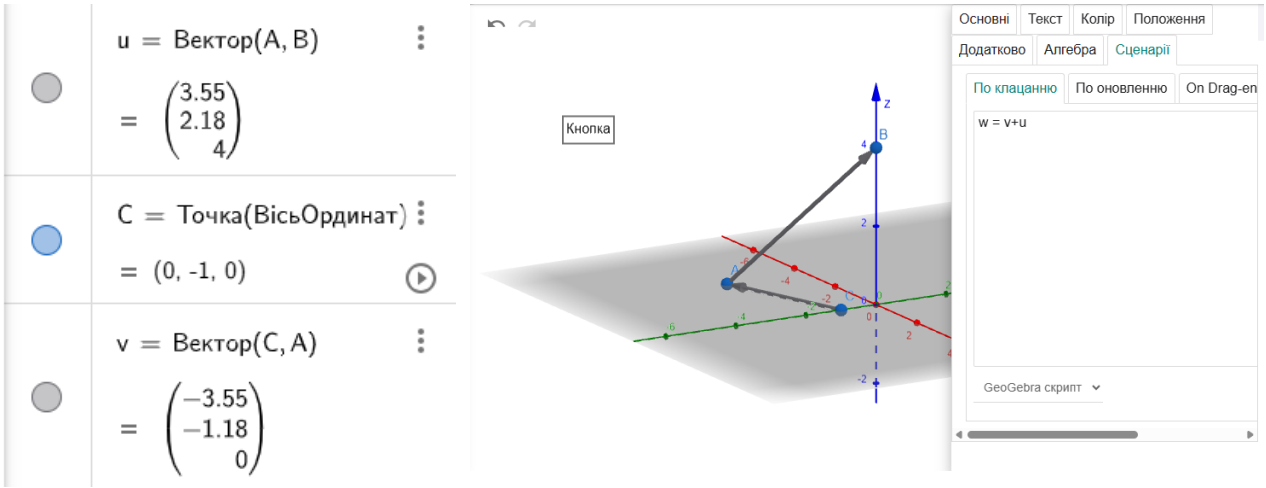


Рис. 4. Візуалізація побудови вектора $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$

Вектор $\overrightarrow{CB}$ має координати $(0; 1; 4)$. Перевіримо, чи є координати вектора $\overrightarrow{CB}$ сумою координат векторів $\overrightarrow{CA}$ та $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (-3{,}55 + 3{,}55; -1{,}18 + 2{,}18; 0 + 4) = (0; 1; 4) = \overrightarrow{CB}.$$



а) б)

Рис. 5. Розширений інтерактивний інструментарій GeoGebra:
а) визначення векторів u та v; б) поле введення «Сценарії»

Є інший спосіб знаходження суми векторів, використовуючи інструмент «Кнопка». У такому разі насамперед варто перевизначити вектори. Нехай тоді вектор $\overrightarrow{AB} = u$, а вектор $\overrightarrow{CA} = v$ (рис. 5 а)). Скористаємось тепер інструментом «Кнопка» та полем для введення «Сценарії» – використання скрипту для додавання векторів $w = u + v$ (рис. 5 б)). Натиснувши «Кнопку» отримаємо результат додавання векторів $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ – вектор $w = (0; 1; 4)$. Повернувшись до заміни отримуємо:

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (-3{,}55 + 3{,}55; -1{,}18 + 2{,}18; 0 + 4) = (0; 1; 4) = w.$$

Отже $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} = (0; 1; 4)$.

3.2. Скалярне множення (гомотетія вектора)

Множення вектора на дійсне число k розглядається як зміна його модуля (довжини) та, за умови $k < 0$, напрямку.

Використання інструменту «Повзунок» (Slider) дозволяє плавно змінювати значення коефіцієнта k, спостерігаючи за ефектом колінеарності – вектор стискається, розтягується або дзеркально відображається відносно початку координат.

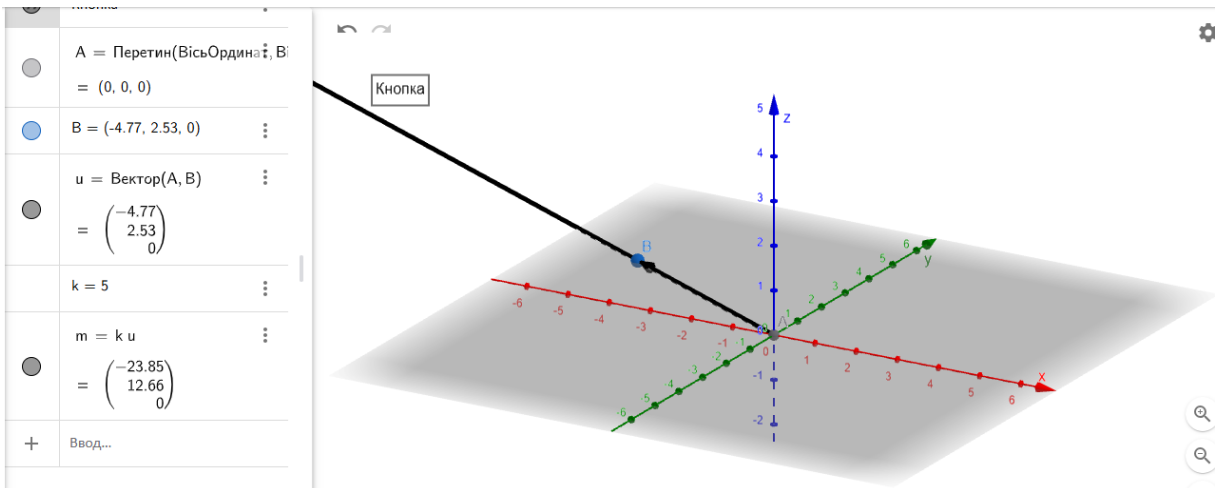
Це забезпечує розуміння вектора не лише як набору чисел, а як об'єкта, що має орієнтацію у просторі.

Приклад 2. Дано вектор $\overrightarrow{AB} = (-4{,}77; 2{,}53; 0)$. Побудувати вектор у 5 разів довший.

Покладемо $\overrightarrow{AB} = (-4{,}77; 2{,}53; 0) = u$ та за умовою $k = 5$. Скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для множення вектора на число: $m = k * u$.

Натиснувши «Кнопку» отримаємо результат множення:

$$k * u = k * (-4{,}77; 2{,}53; 0) \quad \Rightarrow \quad 5 * (-4{,}77; 2{,}53; 0) = (-23{,}85; 12{,}66; 0) = m.$$



ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Рис. 6. Розширений інтерактивний інструментарій GeoGebra:
визначення та зображення вектора m

Отже, $k * \overrightarrow{AB} = (-23{,}85; 12{,}66; 0)$.

Важливим аспектом є паралельна робота двох панелей: «Об'єкти» (алгебраїчні координати) та «Полотно 3D» (геометрична модель). Будь-яка аналітична зміна в рядку вводу миттєво синхронізується з графічним вікном. Для оптимізації процесу та уникнення рутинної побудови застосовуються «Сценарії» (скрипти). Наприклад, створення інтерактивної кнопки для автоматичної побудови суми векторів дозволяє зосередити увагу на аналізі властивостей операції, а не на технічних деталях креслення.

Застосування такого підходу перетворює вивчення векторів на активний експериментальний процес. Користувач отримує можливість не просто розв'язувати задачі, а моделювати векторні поля та складні просторові структури, що є необхідною базою для вивчення аналітичної геометрії та теоретичної механіки у закладах вищої освіти.

4. Розв'язування задач за допомогою GeoGebra

Приклад 3. Дано куб $ABCDEHGF$ (рис. 7) . Знайдіть суму векторів: $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF}$.

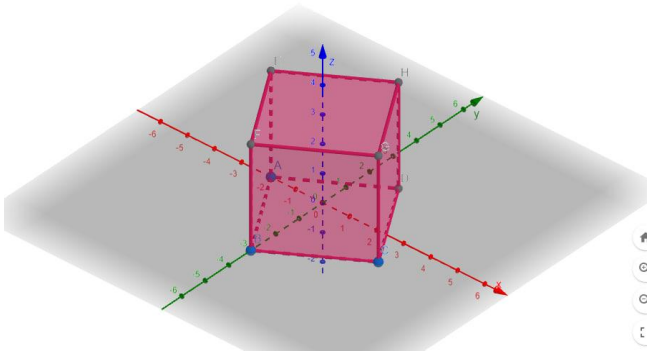


Рис. 7. Куб $ABCDEHGF$

Виділимо та перепозначимо вектори, які потрібно додати: $\overrightarrow{EH} = u,\ \overrightarrow{DF} = v$ (рис. 8).

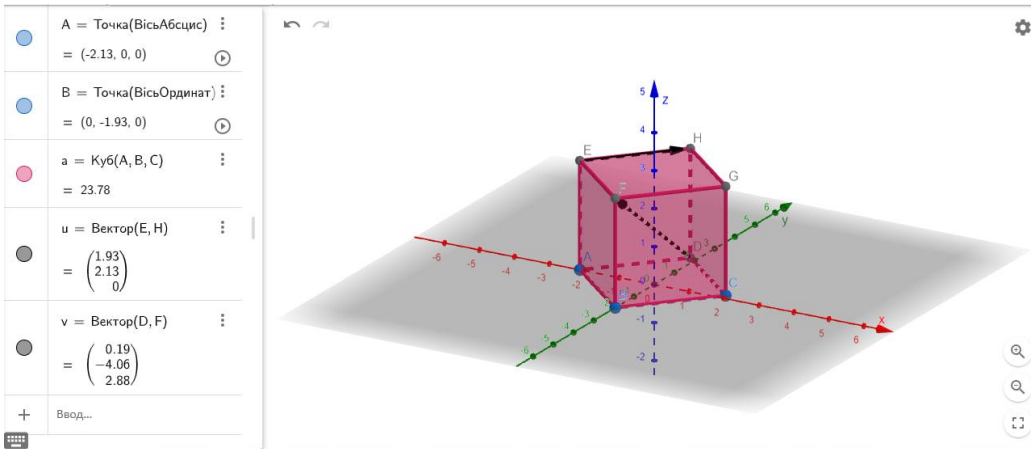


Рис. 8. Вектори $\overrightarrow{EH} = u$ та $\overrightarrow{DF} = v$

Скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для додавання векторів: $w = u + v$ (рис. 9).

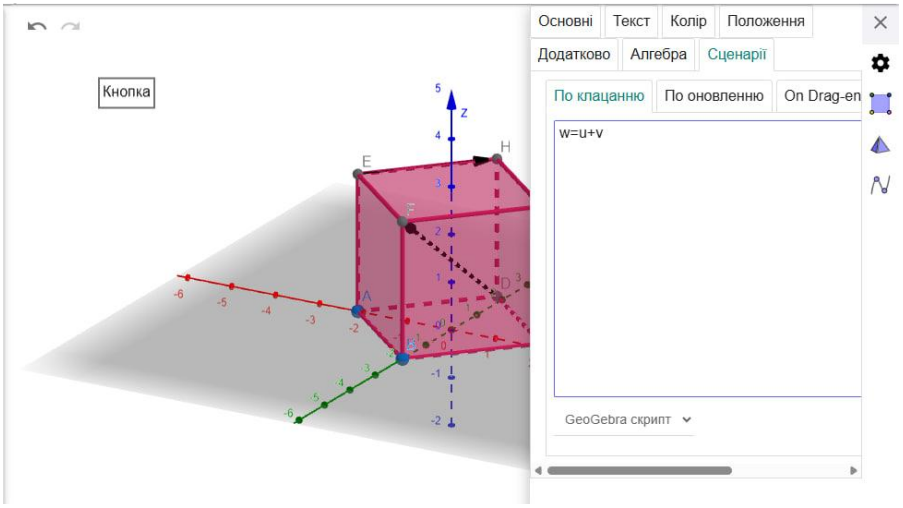


Рис. 9. Інструмент «Кнопка» та скрипт для додавання векторів: $w = u + v$

Натиснувши «Кнопку» отримаємо результат додавання векторів $w = u + v = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$ (рис. 10).

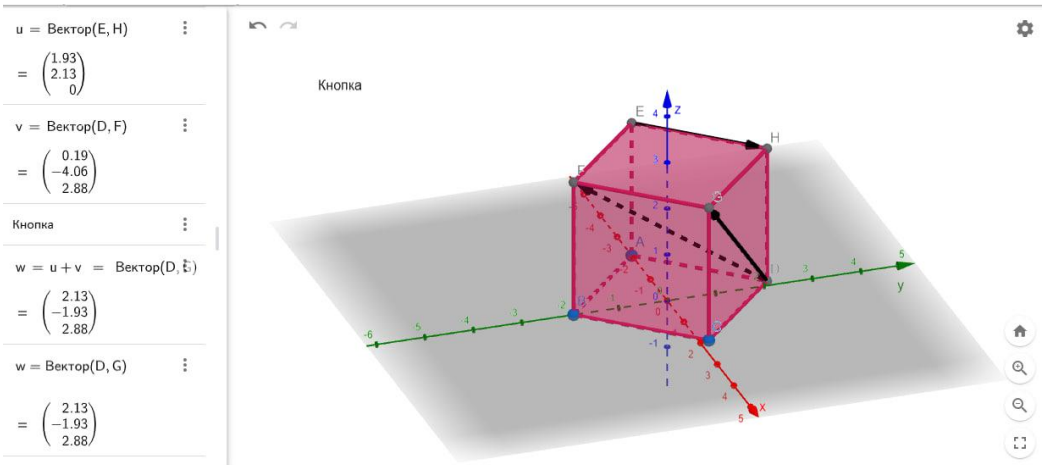


Рис. 10. Вектор $w = u + v$

Відтак $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}$.

Приклад 4. Знайдіть координати образа точки $A(5; 0; -2)$ при гомотетії із центром у початку координат і коефіцієнтом гомотетії $k = 3/5$. (Мерзляк та ін., 2018).

Щоб знайти координати образа точки A, скористаємося властивістю гомотетії через векторне представлення. Оскільки центр гомотетії збігається з початком координат $B(0; 0; 0)$, радіус-вектор точки A має вигляд $\overrightarrow{BA} = (5;\ 0;\ -2)$. За означенням гомотетії образ точки A – точка A', визначається вектором $\overrightarrow{BA'}$, що задовольняє умову:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\overrightarrow{BA'} = k \cdot \overrightarrow{BA}.$$

Підставивши задане значення коефіцієнта $k = 3/5$, отримаємо:

$$\overrightarrow{BA'} = \frac{3}{5} \cdot (5;\ 0;\ -2) = \left(5 \cdot \frac{3}{5};\ 0 \cdot \frac{3}{5};\ -2 \cdot \frac{3}{5}\right) = (3;\ 0;\ -1{,}2).$$

Отже, координати образа точки A при даній гомотетії становлять $A'(3;\ 0;\ -1{,}2)$.

У середовищі GeoGebra для розв'язання даної задачі скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для множення вектора на число: $w = 0{,}6 * u$, де $u = \overrightarrow{BA} = (5;\ 0;\ -2)$. Натиснувши інструмент «Кнопка» отримаємо шуканий результат (рис. 11).

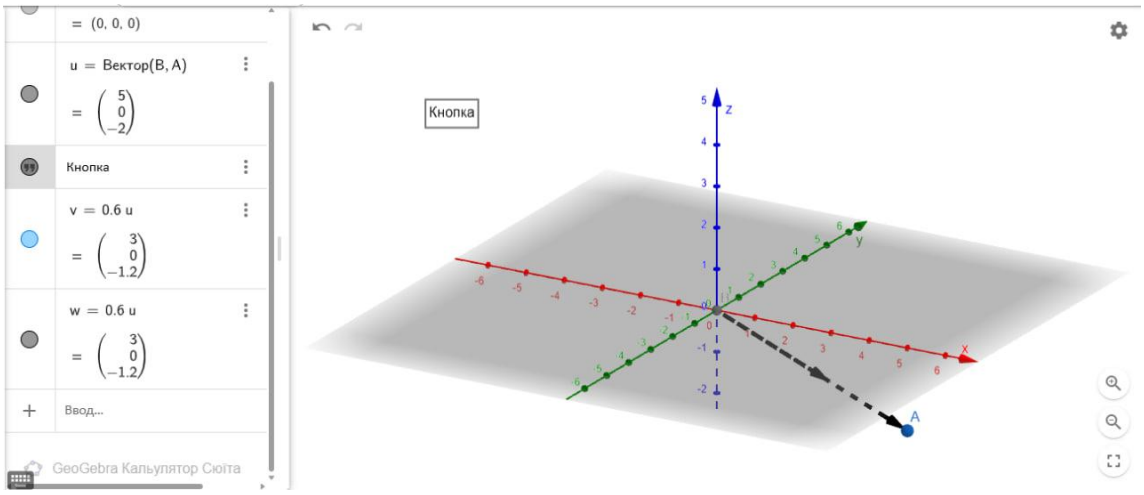


Рис. 11. Вектор $w = 0{,}6 * u = (3;\ 0;\ -1{,}2)$

Отже, координати образа точки A при даній гомотетії $A' = (3;\ 0;\ -1{,}2)$.

Для наочного підтвердження отриманого результату та розвитку просторової уяви в динамічному середовищі GeoGebra рекомендується виконати наступні кроки:

1. *побудова опорних точок* – створіть точку $B(0;0;0)$ як центр гомотетії та точку $A(5;0;-2)$;
2. *векторне представлення* – використовуйте інструмент «Вектор», щоб зобразити $\overrightarrow{BA}$. Це дозволяє розглядати гомотетію як операцію скалярного множення вектра на число;
3. *параметризація* – створіть повзунок (*Slider*) для коефіцієнта k із діапазоном значень, що включає $3/5 = 0{,}6$, що дозволить спостерігати за «стисненням» або «розтягненням» вектора в реальному часі;
4. *інструмент «Гомотетія»* – застосуйте вбудовану функцію «Homothety» до точки A відносно точки B із коефіцієнтом k. Програма автоматично згенерує точку A, координати якої на панелі об'єктів збігатимуться з розрахованими аналітично $(3;\ 0;\ -1{,}2)$.

Використання GeoGebra у цьому прикладі демонструє, як суто обчислювальна задача перетворюється на динамічне дослідження. Наочна візуалізація гомотетії як перетворення, що зберігає колінеарність точок B, A, A' та змінює лише метричні характеристики вектора, сприяє глибшому осмисленню концепції подібності у тривимірному просторі.

Приклад 5. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE}$ протилежні. (Мерзляк та ін., 2018).

Розглянемо перший вектор: $v_1 = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. За правилом віднімання векторів $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Тоді: $v_1 = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}$. За правилом додавання (правило трикутника): $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$. Отже, $v_1 = \overrightarrow{CD}$.

Розглянемо другий вектор: $v_2 = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE}$. Перегрупуємо доданки для зручності таким способом: $v_2 = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CE}$. За правилом додавання $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE}$. Тоді $v_2 = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CE}$. Оскільки $-\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EC}$, маємо: $v_2 = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}$. За правилом додавання $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DC}$. Отже, $v_2 = \overrightarrow{DC}$.

Ми отримали, що перший вектор дорівнює $\overrightarrow{CD}$, а другий – $\overrightarrow{DC}$.

Оскільки за означенням $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}$, ці вектори мають однакові модулі та протилежні напрямки.

Твердження доведено: вектори є протилежними.

У середовищі GeoGebra подібні доведення можна перевірити динамічно. Побудова точок A, B, C, D, E у просторі дозволяє побачити, що результуючі вектори завжди будуть колінеарними та протилежно спрямованими незалежно від координат точок.

Це підтверджує взаємозв'язок між абстрактними алгебраїчними операціями та їхньою геометричною суттю.

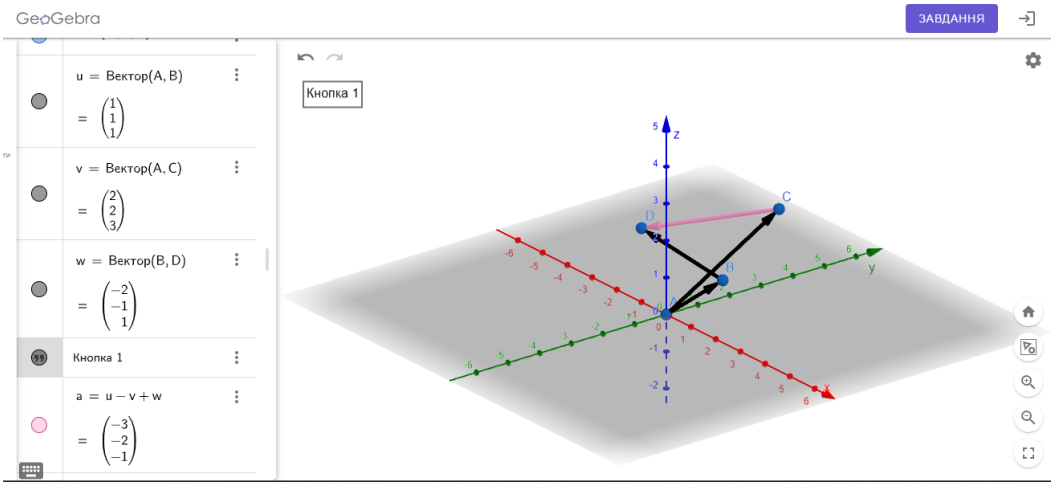


Рис. 12. Вектори $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = v$, $\overrightarrow{BD} = w$ та $\overrightarrow{CD}$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Спочатку побудуємо вектор $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Нехай $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AC} = v$, $\overrightarrow{BD} = w$. Після чого скористаємось інструментом «Кнопка» та скриптом для дій з векторами: $a = u - v + w$. Отримуємо $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$ (рис. 12).

Для побудови $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE}$ позначимо точку $E(-2; -3; 0)$. Нехай вектори $\overrightarrow{DA} = b$, $\overrightarrow{CE} = c$, $\overrightarrow{AE} = d$. Скориставшись інструментом «Кнопка» та скриптом для дій з векторами $q = b - c + d$, отримуємо: $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$ (рис. 13).

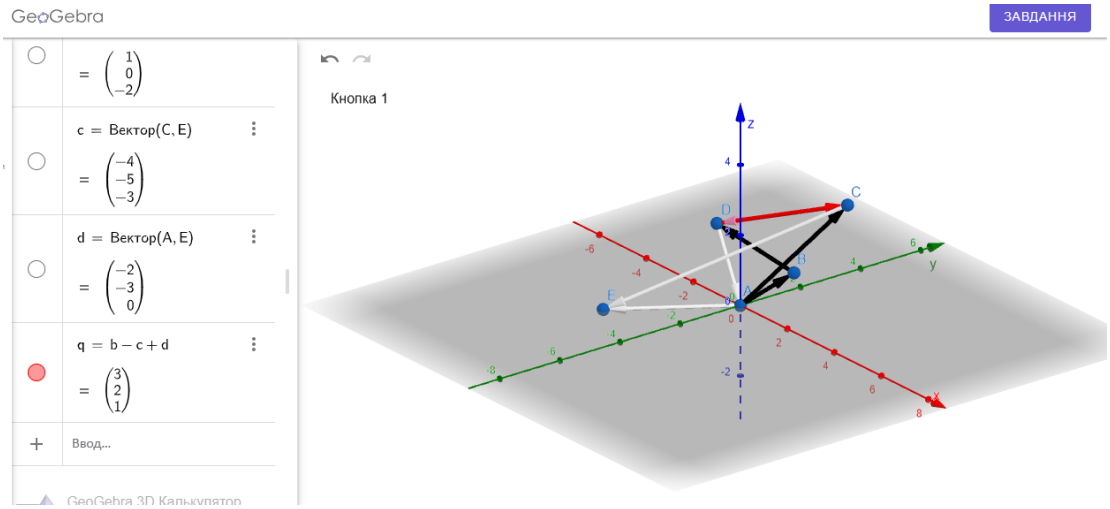


Рис. 13. Вектор $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC}$

Залишилось довести, що вектори $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{CD}$ – протилежні. За означенням протилежних векторів, сума протилежних векторів має дорівнювати нулю. Скорставшись інструментом «Кнопка» та скриптом для дій з векторами: $q + a = f$, отримаємо шуканий результат (рис. 14).

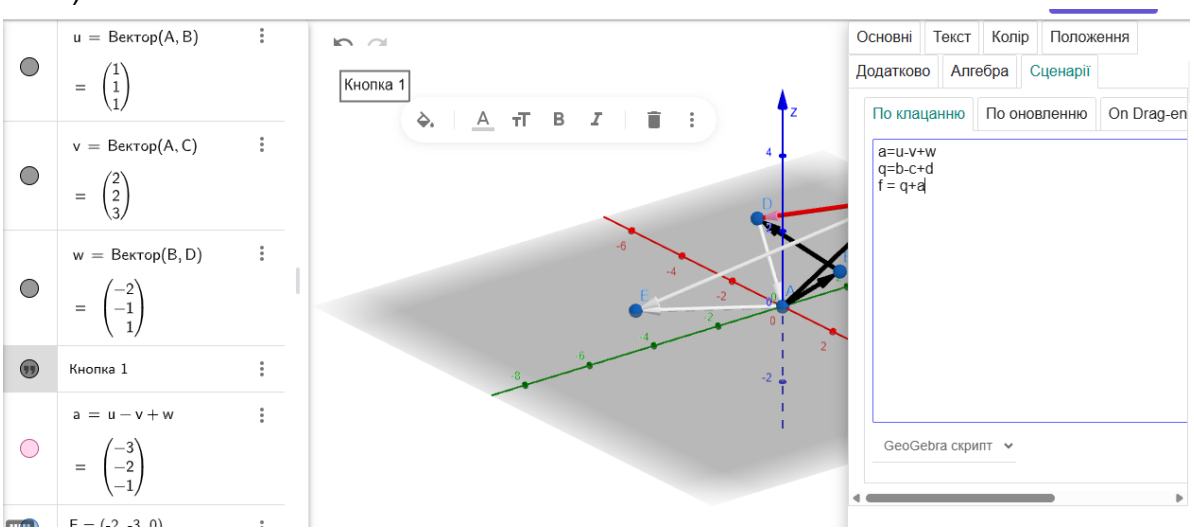


Рис. 14. Вектор $q + a = f$

Цей приклад у GeoGebra ілюструє практичне застосування алгебраїчних методів векторної геометрії та їхню візуальну верифікацію в динамічному середовищі. Власне ілюстрація підкреслює, що будь-яка аналітична операція (спрощення виразу) має прямий геометричний відповідник. Це сприяє розвитку просторової уяви, дозволяючи

«бачити» результат додавання ламаної векторів як єдиний вектор, що з'єднує початкову та кінцеву точки.

5. Методичні засади вивчення векторів у середовищі GeoGebra

Сучасна методика використання середовища GeoGebra у курсі стереометрії базується на концептуальному переході від репродуктивного відтворення алгебраїчних алгоритмів до активного візуально-інформаційного моделювання. Такий підхід дозволяє нівелювати одну з ключових проблем традиційної дидактики – формалізм у засвоєнні знань, коли учні оперують формулами без розуміння їхньої просторової природи. У межах чинної навчальної програми для 10-х класів інтеграція даного середовища є найбільш релевантною під час вивчення фундаментальних операцій над векторами та дослідження їхніх властивостей. Заміна статичних графічних конструкцій динамічними об'єктами, де варіація координат детермінує миттєву трансформацію моделі у просторі $\mathbb{R}^3$, забезпечує інтенсивний розвиток просторової уяви та підвищує рівень когнітивного засвоєння матеріалу.

Практична реалізація методики передбачає залучення спеціалізованих інструментів автоматизації, зокрема «Сценаріїв» (Scripts) та інтерактивних «Кнопок». Це дозволяє перетворити процес доведення теорем на інтерактивне дослідження, що передбачає певний рівень автоматизації при розв'язуванні задач.

Зокрема, при вивченні суми векторів за правилом трикутника програма не лише обчислює координати результату, а й візуалізує конкатенацію (поєднання) векторів у динаміці. Учні отримують можливість верифікації закономірностей коли самостійно модифікувати вхідні параметри, спостерігаючи за інваріантністю геометричних властивостей при будь-яких просторових трансформаціях. Система забезпечує чудовий зворотний зв'язок, оскільки в ній реалізовано автоматичну перевірку правильності отриманих результатів, що сприяє формуванню навичок самоконтролю.

Запропонована методика охоплює широкий клас геометричних завдань, а саме: лінійні комбінації векторів (додавання, віднімання, скалярне множення); стереометричне моделювання – робота з елементами просторових фігур (зокрема, вектори в кубі та інших багатогранниках); геометричні перетворення – використання векторного апарату для моделювання гомотетії та інших видів переносу, що дозволяє інтерпретувати вектор як оператор трансформації простору, а не лише як статичну впорядковану сукупність чисел.

Впровадження GeoGebra у навчальний процес оптимізує часові витрати на перевірку результатів та стимулює експериментальну діяльність учнів. Можливість варіювати комбінації векторів та спостерігати цілісну структуру просторових залежностей є критично важливим чинником у підготовці здобувачів освіти до опанування складних технічних та інженерних дисциплін.

6. Висновки

Проведене дослідження засвідчило, що динамічне математичне середовище GeoGebra є ефективним дидактичним інструментом для вивчення векторної алгебри у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$. Поєднання аналітичних обчислень із засобами графічного

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

моделювання забезпечує трансформацію абстрактних математичних понять у наочні образи, доступні для ґрунтовного когнітивного осмислення.

Використання візуалізації базових векторних операцій – додавання, віднімання та множення на скаляр – сприяє не лише перевірці правильності обчислень, а й усвідомленню геометричного змісту відповідних алгебраїчних перетворень. Динамічне відображення змін довжини, напряму та взаємного розташування векторів створює умови для розвитку просторового мислення та формування цілісного уявлення про метричні й топологічні властивості векторних об’єктів.

Інтерактивний потенціал GeoGebra, зокрема можливість застосування сценаріїв та елементів керування, дозволяє оптимізувати навчальний процес шляхом автоматизації рутинних обчислювальних дій. Це забезпечує перенесення акценту з механічного виконання операцій на аналітичне дослідження результатів, підвищує пізнавальну активність здобувачів освіти та інтелектуальну насиченість навчальної діяльності.

Практична значущість отриманих результатів полягає в можливості їх безпосереднього використання у професійній діяльності вчителів математики. Запропонований інструментарій і методичні підходи сприяють модернізації викладання стереометрії та підвищенню якості засвоєння складних теоретичних положень.

Список використаних джерел

Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2018). Геометрія: профільний рівень: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Гімназія. https://pidruchnyk.com.ua/1140-geometriya-10-klas-merzlyak-prof.html

Титаренко, Н., & Муртазієв, Е. (2019). Застосування GeoGebra на уроках геометрії. Електронний науковий журнал «Освітологічний дискурс», (1-2), 116–126. https://osvita.eeipsy.org/index.php/eeip/article/view/556/533

Усата, О. Ю. (2019). Використання GeoGebra у вивченні математики [Матеріали конференції]. Державній університет «Житомирська політехніка». https://conf.ztu.edu.ua/wp-content/uploads/2019/06/97-1.pdf

Чубей, О. О. (2023). Вивчення теми «Вектори та їх координати» з допомогою інтерактивного середовища GeoGebra. В Збірник матеріалів науково-практичної конференції (с. 141–143). ІЦО НАПН України. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/735000/1/%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D1%96%D0%BB%D1%8C_2023.pdf#page=141

GeoGebra. (n.d.*). GeoGebra Classic*. https://www.geogebra.org/calculator

GeoGebra. (n.d.). *GeoGebra Scripts*. https://www.geogebra.org/m/dq4449tr

References

Chubei, O. O. (2023). Vyvchennia temy “Vektory ta yikh koordynaty” z dopomohoiu interaktyvnoho seredovyshcha GeoGebra [Studying the topic "Vectors and their coordinates" using the interactive environment GeoGebra]. In *Zbirnyk materialiv naukovo-praktychnoi konferentsii* (pp. 141–143). ITSO NAPN Ukrainy. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/735000/1/%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%A2%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%BE%D0%BF%D1%96%D0%BB%D1%8C_2023.pdf#page=141 [in Ukrainian].

GeoGebra. (n.d.*). GeoGebra Classic*. https://www.geogebra.org/calculator

GeoGebra. (n.d.). *GeoGebra Scripts*. https://www.geogebra.org/m/dq4449tr

Merzliak, A. H., Nomirovskyi, D. A., Polonskyi, V. B., & Yakir, M. S. (2018). *Heometriia: profilnyi riven: pidruchnyk dlia 10 klasu zakladiv zahalnoi serednoi osvity* [Geometry: profile level: textbook for the 10th grade of general

secondary education institutions]. Himnaziia. https://pidruchnyk.com.ua/1140-geometriya-10-klas-merzlyak-prof.html [in Ukrainian].

Tytarenko, N., & Murtaziiev, E. (2019). Zastosuvannia GeoGebra na urokakh heometrii [Application of GeoGebra in geometry lessons]. *Osvitolohichnyi Dyskurs* [Osvitological Discourse], (1-2), 116–126. https://osvita.eeipsy.org/index.php/eeip/article/view/556/533 [in Ukrainian].

Usata, O. Yu. (2019). *Vykorystannia GeoGebra u vyvchenni matematyky* [Using GeoGebra in learning mathematics] [Conference presentation]. Zhytomyr Polytechnic State University. https://conf.ztu.edu.ua/wp-content/uploads/2019/06/97-1.pdf [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 28.12.2025
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

Alina KRUHLIAK, Student
ORCID: 0009-0005-9502-5407
e-mail: krugluakalina@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

VECTORS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE USING THE DYNAMIC MATHEMATICS SOFTWARE GEOGEBRA

Abstract. *The article is devoted to the theoretical substantiation and practical implementation of a methodology for modeling vectors in three-dimensional space using the dynamic mathematics environment GeoGebra. The paper analyzes the toolset of the environment in the context of operating with stereometric objects and investigates the effectiveness of combining algebraic and graphical approaches to the interpretation of mathematical data. Algorithms for constructing spatial vectors and performing basic linear operations–addition, subtraction, and scalar multiplication – are implemented. Particular attention is paid to the verification of results through the synchronization of analytical computations with their visualization in three-dimensional space, which contributes to a deeper understanding of the geometric nature of vector operations.*

The practical significance of the study lies in the development of interactive models using the built-in scripting language. This approach enables the automation of computational processes and the creation of an adaptive user interface for conducting experiments with spatial relationships. It is demonstrated that the integration of such dynamic models into the educational process intensifies the development of spatial reasoning and increases the level of mastery of stereometry topics. Prospects for further research are associated with expanding the functional capabilities of the developed model library and integrating more advanced automation algorithms for solving applied problems in geometry.

Keywords: *vectors; three-dimensional space; vector operations; GeoGebra environment.*

Received: 28.12.2025
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 517.442:532.518: 004.923 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2026/1.12**

Євгеній ТУДОВШІ, Студент
ORCID: 0000-0002-1234-5678
e-mail: tudovshi.yevhenii@chnu.edu.ua
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

ХВИЛЬОВІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ВІЗУАЛІЗАЦІЯ

Анотація. *У статті досліджено математичну модель двовимірних хвильових процесів. Розглянуто основні властивості хвильових функцій як функцій багатьох змінних, здійснено аналіз їх диференціальних характеристик, зокрема частинних похідних та оператора Лапласа. Показано, що задані гармонічні хвильові функції є частковими розв'язками рівняння Гельмгольца, а також продемонстровано можливість подання двовимірної хвилі у вигляді суперпозиції одновимірних гармонічних складових. Особливу увагу приділено комп'ютерній візуалізації хвильових процесів у середовищі GeoGebra, що дозволяє наочно інтерпретувати аналітичні результати та сприяє формуванню інтуїтивного розуміння просторової структури хвильових полів. Отримані результати мають навчально-методичне значення та можуть бути використані у шкільних і університетських курсах математики та математичної фізики.*

Ключові слова: *хвильові процеси; гармонічна хвиля; оператор Лапласа; хвильова функція; суперпозиція хвиль; комп'ютерна візуалізація; GeoGebra.*

1. Вступ

Щодня ми маємо справу з процесами, що повторюються: дзенькіт будильника, коливання струни гітари, світло від лампи чи сигнал мобільного телефона. Усі ці явища, на перший погляд різні, об'єднує спільна ідея – коливання, а отже, й хвилі.

Якщо коливання – це зміна стану в одному місці, то хвиля – це поширення цієї зміни в просторі з плином часу. Саме завдяки хвилям ми чуємо звук, бачимо світло, передаємо інформацію та навіть досліджуємо будову Всесвіту. Не дивно, що хвильові процеси займають центральне місце як у фізиці, так і в математиці (Віктор, 2022).

Ще зі школи ми знаємо, що синус і косинус добре описують періодичні процеси. Але що станеться, якщо «розтягнути» ці функції в просторі? Як виглядатиме хвиля не на прямій, а на площині? І як перевірити, що отримана формула справді описує хвильовий процес?

Математика дозволяє описати хвилі за допомогою функцій, які залежать одразу від кількох змінних: просторових координат x, y, z та часу t. Рівняння на зразок рівняння Гельмгольца, яке описує стаціонарні хвильові поля, виникають як наслідок загального хвильового рівняння та відіграють важливу роль в акустиці, оптиці, електродинаміці й квантовій механіці.

Мета цієї статті – показати, як проста гармонічна хвиля приводить до рівняння Гельмгольца, а також продемонструвати хвильові процеси наочно за допомогою комп'ютерної візуалізації в середовищі GeoGebra. Такий підхід дозволяє не лише

виконати аналітичні обчислення, а й побачити хвилю, її структуру та поведінку при зміні параметрів.

Матеріал статті побудовано так, щоб бути зрозумілим та корисним математикам-початківцям і зручним для використання під час вивчення хвильових процесів.

2. Основні поняття хвильової теорії

Повсякденний досвід людини нерозривно пов'язаний із циклічними процесами: від механічних коливань струни до поширення електромагнітних сигналів мобільного зв'язку. Попри різну фізичну природу, ці явища підпорядковуються єдиній концепції – *теорії коливань* та *хвиль*. Якщо коливання визначаються як часова зміна стану системи в локалізованій точці, то хвиля є процесом трансляції цього збурення в просторі з плином часу (Зражевський, Зражевська, 2023). Саме хвильова природа фундаментальних взаємодій дозволяє нам сприймати світло, звук, досліджувати космологічну структуру Всесвіту тощо.

Математичний опис хвиль базується на функціях декількох змінних, де стан системи u залежить від просторових координат $r = (x, y, z)$ та часового параметра t. Традиційний шкільний курс знайомить нас із гармонічними функціями $\sin x$ та $\cos x$ як базовим інструментом опису періодичності. Однак перехід від одновимірних коливань до багатовимірного простору потребує залучення апарату диференціальних рівнянь у частинних похідних.

2.1. Що таке хвиля?

У класичній фізиці та математичному аналізі *хвиля* визначається як процес поширення часових змін певного стану (збурення) у просторі. Ключовою ознакою хвильового процесу є трансляція енергії та імпульсу без супутнього макроскопічного перенесення речовини.

Для глибшого розуміння розглянемо цей феномен через призму низки аспектів. Насамперед важливо розрізняти рух самого середовища та рух хвилі. Кожна точка простору, через яку проходить хвиля, здійснює локальні коливання навколо положення рівноваги.

Наприклад, коли ми бачимо хвилю на поверхні озера, нам здається, що маса води рухається вперед. Проте поплавок на воді демонструє зворотне: він здійснює рух по замкненій траєкторії (еліптичній або вертикальній), повертаючись у вихідну точку. Хвиля – це лише «форма», що переміщується середовищем, переносячи кінетичну енергію від однієї молекули води до іншої.

Фізична величина, що зазнає змін, визначає тип хвилі. Математично нам байдуже, що саме змінюється, але для моделювання це принципово:

- *Механічні хвилі (звук, сейсмічні коливання)*. Об'єктом коливань є пружне середовище. У звуковій хвилі відбувається циклічна зміна густини та тиску повітря.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

- *Електромагнітні хвилі (світло, радіосигнали).* На відміну від звуку, вони не потребують матеріального середовища і можуть поширюватися у вакуумі. Тут коливаються вектори напруженості електричного (E) та індукції магнітного (B) полів.
- *Квантові хвилі.* У квантовій механіці хвильова функція Ψ описує амплітуду ймовірності знаходження частинки в певній точці простору.

З точки зору математики, хвиля – це не об'єкт, а динамічний стан поля. Якщо позначити стан системи через функцію u, то у найпростішому одновимірному випадку поширення збурення зі швидкістю v описується функцією (розв'язок д'Аламбера):

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt).$$

Цей вираз показує, що профіль хвилі f, який був у точці $x = 0$ у момент часу $t = 0$, через час t просто «переміститься» у точку vt, зберігаючи свою форму (у середовищі без дисперсії).

Відтак, хвиля є фундаментальною формою існування матерії, що характеризується динамічною зміною параметрів поля. Вона дозволяє передавати інформацію на величезні відстані (від радіосигналів до світла далеких галактик), залишаючись при цьому нематеріальним процесом, що зв'язує окремі точки простору в єдину динамічну систему.

2.2. Гармонічна хвиля і її параметри

Фундаментальною моделлю в теорії хвильових процесів є *гармонічна хвиля*. Її особлива роль зумовлена тим, що згідно з принципом Фур'є будь-яке складне хвильове збурення можна представити як суперпозицію (суму) простих гармонічних складників (Томусяк, Трохименко, 1999).

Математично одновимірна гармонічна хвиля описується функцією:

$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega\, t\, +\, \phi_0),$$

де кожен параметр має чітке фізико-математичне значення. Зокрема, *амплітуда* A визначає максимальне відхилення системи від стану рівноваги (квадрат амплітуди пропорційний енергії, яку несе хвиля); *циклічна частота* ω – швидкість зміни фази у часі $(\omega = 2\pi f)$; *хвильове число* k – просторовий аналог частоти $(k = 2\pi/\lambda)$, що визначає щільність хвильових фронтів на одиницю довжини; *фаза* $(\Phi = kx - \omega t + \phi_0)$ – аргумент функції, що визначає стан хвилі в даній точці простору в конкретний момент часу; ϕ_0 – *початковий зсув* (*початкова фаза*).

Для систематизації складних процесів, що виникають у природі та техніці, хвилі класифікують за декількома фундаментальними ознаками:

- *за кінематикою поширення;*
- *за топологією хвильового фронту (геометрична форма);*
- *за вектором збурення (поляризація);*

- *за лінійністю середовища;*
- *за періодичністю.*

За кінематикою поширення розрізняють *біжучі* та *стоячі хвилі*. Біжучі хвилі характеризуються безперервним перенесенням енергії в напрямку поширення фази. Тоді як стоячі хвилі виникають як результат інтерференції двох біжучих хвиль з однаковими амплітудами, що рухаються назустріч одна одній. У таких хвилях існують стаціонарні точки – вузли (де амплітуда нульова) та опуклості (де амплітуда максимальна). Це явище є базовим для акустики музичних інструментів та лазерних резонаторів.

Геометрія хвилі визначається формою поверхні постійної фази. Розрізняють *плоскі хвилі,* фронтом поширення яких є площина – це ідеалізована модель для хвиль на великій відстані від джерела. Тоді як *сферичні та циліндричні хвилі* виникають від точкових або лінійних джерел. Їхня амплітуда зазвичай згасає з відстанню через закон збереження енергії (розподіл енергії на більшу площу).

За вектором збурення існують *поперечні* та *поздовжні* хвилі. Поперечні хвилі – вектор коливань перпендикулярний до вектора поширення (наприклад, світло або коливання струни). Поздовжні хвилі – коливання відбуваються вздовж напрямку поширення (звук у газах та рідинах).

Лінійні хвилі підпорядковуються принципу суперпозиції – хвилі проходять одна крізь одну, не змінюючи своїх характеристик. Математично описуються лінійними диференціальними рівняннями.

Нелінійні хвилі виникають у середовищах, властивості яких змінюються під дією самої хвилі. Прикладом є *солітони* – структурно стійкі поодинокі хвилі, що зберігають свою форму при поширенні та навіть при зіткненні з іншими солітонами.

Врешті хвилі поділяють на періодичні та неперіодичні.

Періодична хвиля – це хвильовий процес, при якому збурення середовища (механічні коливання) або електромагнітного поля повторюються через однакові проміжки часу (T) та на однаковій відстані (λ). Такі хвилі переносять енергію без переносу речовини, характеризуються постійною амплітудою, частотою та довжиною, найчастіше описуючись синусоїдальним законом.

Неперіодична хвиля – це хвильовий процес, профіль або інтенсивність якого змінюються з часом і не повторюються через рівні проміжки часу. Прикладом є так звані хвильові пакети – локалізовані у часі та просторі збурення, що мають важливе значення для передачі дискретних інформаційних сигналів.

2.3. Математичний формалізм: від хвильового рівняння до оператора Гельмгольца

Для системного опису хвильових процесів у математичній фізиці застосовують апарат функцій багатьох змінних, які прийнято називати *хвильовими функціями*. Вони відображають залежність стану системи від просторових координат $r = (x, y, z)$ та часового параметра t.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Для запису основних законів через функції багатьох змінних використовується поняття частинної похідної: *частинною похідною функції* $u(x,y,z,t)$ *за змінною* t *називається похідна цієї функції за змінною* t *за умови, що інші змінні виступають як числа/сталі. Запис:* $\frac{\partial u}{\partial t}$*. Аналогічно визначаються частинні похідні* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ *та* $\frac{\partial u}{\partial z}$. Оскільки похідна виражає швидкість зростання функції, то частинна похідна за певною змінною визначає вклад даної змінної в це зростання.

Другою частинною похідною $u(x,y,z,t)$ за змінною t називається частинна похідна від частинної похідної за t від даної функції. Запис: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Сенс аналогічний до прискорення.

Хвильове рівняння є математичною моделлю, виведеною на основі фундаментальних фізичних закономірностей шляхом введення ряду припущень. Даний підхід дозволяє ігнорувати другорядні чинники, зосереджуючись на домінуючих механізмах процесу в заданих умовах.

З математичного погляду рівняння встановлює пряму пропорційну залежність між другою похідною стану хвилі за часом (часовим прискоренням) та оператором Лапласа від її амплітуди (просторовою кривизною). У загальному вигляді для тривимірного простору це описується формулою:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \Delta u,$$

де $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (оператор Лапласа, *лапласіан*), v – швидкість поширення.

Яскравим прикладом такого рівняння є *рівняння Гельмгольца* – одне з найважливіших рівнянь математичної фізики, яке має вигляд:

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

де:

u (або ψ) – *амплітудна хвильова функція*, що описує просторову конфігурацію поля;

Δ (*оператор Лапласа*) – диференціальний оператор, який характеризує швидкість зміни градієнта функції. В декартових координатах він виражається як сума других частинних похідних:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (1)$$

k – *хвильове число*, яке визначає просторову періодичність хвилі. Воно безпосередньо пов'язане з частотою ω та швидкістю поширення v співвідношенням $k = \omega/v$.

Рівняння Гельмгольца описує просторову конфігурацію хвильового поля. Воно є наріжним каменем в акустиці, теоретичній оптиці, класичній електродинаміці та виступає аналогом стаціонарного рівняння Шредінгера у квантовій механіці.

З геометричної точки зору, рівняння Гельмгольца стверджує, що просторова кривизна хвильового поля в кожній точці пропорційна значенню самого поля в цій точці, але з протилежним знаком. Це означає, що форма хвилі в просторі є самовідтворюваною та стабільною.

Якщо ж хвиля є суперпозицією скінченної або зліченної кількості хвиль з різними частотами, то рівняння Гельмгольца вже не може описати процес.

Дане рівняння дозволяє аналізувати складні явища без необхідності відстежувати кожну мить часу. Воно описує резонансні стани у замкнених об'ємах, дифракцію та розсіювання хвиль на перешкодах, власні моди коливань у фізичних системах складної геометрії. Саме це рівняння стане основою для наших подальших комп'ютерних експериментів у GeoGebra, де ми зможемо побачити, як зміна хвильового числа k трансформує складну геометрію хвильових фронтів (Пришляк, 2004).

2.4. Дидактична цінність та прикладне значення: чому це важливо для сучасної освіти?

Вивчення хвильових процесів у межах поглибленого курсу математики або фізики може розглядатися як стратегічний етап у формуванні наукового світогляду, який дозволяє учням та викладачам вийти за межі абстрактних формул і перейти до глибокого розуміння реальних фізичних явищ через їхню візуалізацію.

Насамперед, хвильові процеси стають природним «містком» між елементарною тригонометрією та математичною фізикою. Шкільна програма традиційно розглядає функції $\sin x$ та $\cos x$ як статичні графіки або найпростіші гармонічні коливання. Вивчення хвильових процесів демонструє «наступний рівень» цих ідей: знайомі періодичні функції перетворюються на фундаментальні розв'язки диференціальних рівнянь, що описують реальний світ – від звукових хвиль у концертному залі до електромагнітних хвиль в оптоволокні. Завдяки візуалізації учні наочно бачать, як абстрактні синусоїди «оживають» у формі хвильових фронтів, інтерференційних картин чи стоячих хвиль, усвідомлюючи тяглість математичної освіти – від малювання графіків у зошиті до моделювання складних фізичних полів.

Крім того, візуалізація хвильових процесів перетворює математичний апарат на «працюючий» інструмент розуміння природи та збагачує шкільний матеріал при вивченні фізики. Учні можуть також спостерігати, як оператор Лапласа «вимірює» кривизну хвильового фронту, а похідні за часом і простором пояснюють поширення, відбиття чи дифракцію. Це формує інтуїтивне розуміння, що значно ефективніше, ніж чисто аналітичні розрахунки.

Зрештою, вивчення хвильових процесів є ідеальною базою для міждисциплінарних проєктів і комп'ютерного моделювання в епоху STEM-освіти. Сучасні інструменти (GeoGebra, Python з бібліотеками Matplotlib чи навіть прості симулятори в PhET)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

дозволяють перетворити теоретичні рівняння на інтерактивні візуалізації. Учні можуть у реальному часі змінювати частоту, амплітуду, довжину хвилі чи параметри середовища і миттєво бачити, як змінюється вся хвильова картина. Такий підхід відкриває широкі можливості для дослідницької діяльності:

- експериментування з параметрами хвиль і негайне спостереження за наслідками (інтерференція, дифракція, резонанс, стоячі хвилі);
- розвиток критичного мислення через порівняння «теорія vs візуалізація»;
- формування навичок, необхідних для сучасних інженерних, фізичних та IT-спеціальностей.

Таким чином, візуалізація хвильових процесів не лише значно підвищує мотивацію та якість засвоєння матеріалу, але й готує учнів до університетських стандартів, розвиваючи в них уміння працювати з динамічними моделями реального світу.

3. Математичне моделювання двовимірних хвиль та їх візуалізація

Для переходу від загальних фізичних принципів до комп'ютерного моделювання необхідно визначити аналітичний вигляд хвильової функції. У загальному випадку, для опису хвильових процесів у математиці застосовують функції декількох змінних, параметрами яких є координати простору та час. Такі залежності отримали назву *хвильових функцій*.

3.1. Аналітичне представлення двовимірної монохроматичної хвилі

Розглянемо випадок двовимірного простору $X, Y \subset \mathbb{R}$. Нехай задано набір дійсних параметрів $A,\ a,\ b,\ \varphi,\ \omega \in \mathbb{R}$. Тоді хвильова функція $f(x, y, t)$ набуває наступного вигляду:

$$f(x, y, t) = A\cos(ax + by + \omega t + \varphi).$$

У даній моделі кожен параметр відіграє критичну роль у формуванні структури хвилі: A – амплітуда, що визначає максимальне відхилення збурення від нульового рівня; x, y – просторові координати, що задають положення точки на площині, t – часова координата, яка дозволяє спостерігати динаміку процесу; ω – кутова частота, що регулює швидкість коливань у часі; φ – фаза, яка визначає початковий стан зсуву хвилі; параметри a та b – хвильові коефіцієнти, що відповідають за просторову орієнтацію та частоту гребенів хвилі вздовж відповідних осей координат.

Функцію такої структури називають *двовимірною монохроматичною хвилею*. Подібні математичні моделі мають фундаментальне значення у сучасній науці та високих технологіях – від квантової теорії струн та оптики до архітектури нейронних мереж. Ба більше, вони є базовими для опису квантових станів частинок, що критично важливо для розвитку галузі квантових обчислень.

Якщо відповідним чином вибрати систему координат, то можна обійтися однією просторовою координатою, що значно спростить записи, але задля наглядного представлення, без втрати важливих компонентів, розглядаємо її як двовимірну.

3.2. Практична реалізація в середовищі GeoGebra

Для наочного представлення отриманої формули скористаємося інструментами динамічної математики (Чемерис, Прус, Фонарюк, 2024).

Приклад 1. Розглянемо візуалізацію хвильової функції за одиничних значень параметрів у статичний момент часу $t = 0$. У середовищі GeoGebra графічна інтерпретація функції $f(x, y, t) = \cos(x + y + 1)$ дозволяє побачити складну рельєфну структуру хвильового фронту (див. рис. 1).

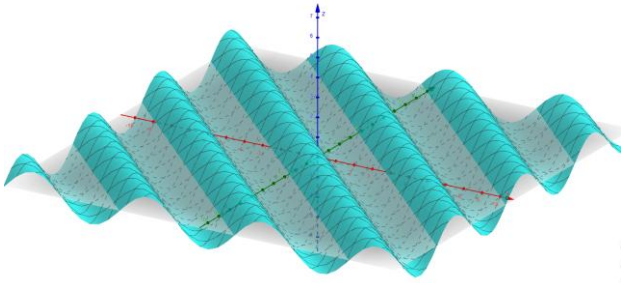


Рис.1. Хвильова функція $f(x, y, t) = \cos(x + y + 1)$

Використання подібних моделей дає змогу досліднику не лише проводити теоретичні розрахунки, а й інтерактивно змінювати параметри a, b або ω, миттєво спостерігаючи за трансформацією хвильового поля.

Приклад 2. (Зміна інтенсивності та фазовий зсув). Розглянемо випадок, коли параметри функції задано наступним чином: $A = 2,\ a = -1,\ b = -1,\ \omega = 2,\ \varphi = 1$. Станом на момент часу $t = 0{,}5$ хвильова функція набуває вигляду

$$f(x, y, t) = 2\cos(-x - y + 2).$$

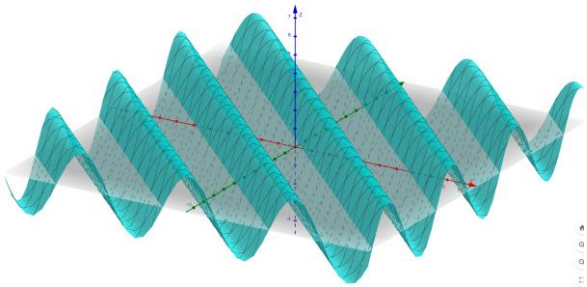


Рис. 2. Хвильова функція $f(x, y, t) = 2\cos(-x - y + 2)$

Збільшення коефіцієнта A до 2 приводить до зростання «висоти» гребенів та «глибини» западин хвилі (рис. 2). У фізичному сенсі це означає збільшення енергії

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

хвильового процесу. Від'ємні значення параметрів a та b змінюють напрямок поширення хвильового фронту на площині. Значення аргументу $+2$ є результатом накладання початкової фази та часового зсуву ($\omega \cdot t = 2 \cdot 0{,}5 = 1$; загальний зсув $\phi + \omega t = 1 + 1 = 2$). Це демонструє положення хвилі в просторі в конкретний момент часу $t = 0{,}5$.

Приклад 3. (Високочастотні коливання та складна інтерференція). Нехай параметри задано так: $A = -2$, $a = -2$, $b = 2$, $\omega = 1$, $\varphi = 1$ при $t = 2$.

Робоча формула:

$$f(x, y, t) = -2\cos(-2x + 2y + 3).$$

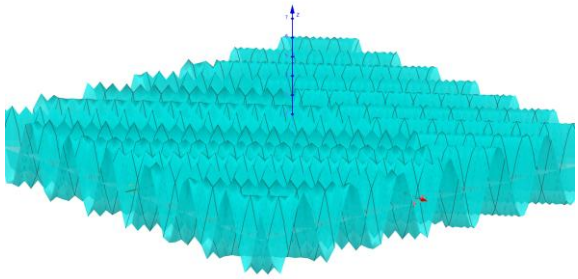


Рис. 3. Хвильова функція $f(x, y, t) = -2\cos(-2x + 2y + 3)$

Збільшення модулів просторових коефіцієнтів a та b (до $|2|$) приводить до «стиснення» хвилі (рис. 3). Хвильове число k зростає, що візуально відображається як збільшення кількості гребенів на одиницю площі. Це пряма ілюстрація того, як рівняння Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ реагує на зростання параметра k.

Комбінація різних знаків при x та y ($-2x + 2y$) розгортає хвильові фронти під кутом 45° відносно осей координат. Це демонструє, як за допомогою простих коефіцієнтів можна моделювати напрямок руху енергії.

Від'ємна амплітуда $A = -2$ спричиняє дзеркальне відображення хвилі (гребені стають западинами), що критично важливо при вивченні явищ інтерференції та гасіння хвиль.

Ці приклади демонструють, що двовимірна монохроматична хвиля є гнучким інструментом моделювання. Зміна лише кількох чисел дозволяє описувати як низькочастотні коливання океану, так і високочастотні електромагнітні поля або квантові стани частинок у сучасних обчислювальних системах.

3.3. Декомпозиція двовимірних хвиль та аналіз суперпозиції компонент

Для глибшого розуміння структури двовимірної монохроматичної хвилі доцільно розглянути її не як цілісний об'єкт, а як композицію простіших одновимірних коливань. Такий підхід базується на застосуванні тригонометричних тотожностей, що дозволяє розкласти складне просторове збурення на мультиплікативні компоненти.

$$f(x,y,t) = A\cos(ax + by + \omega t + \phi).$$

Для спрощення аналізу введемо допоміжні функції, що описують стан хвилі вздовж просторових осей: $u(x,t) = ax + \omega t$ – лінійна комбінація координати x та часу; $q(y) = by + \phi$ – просторова фаза вздовж осі y.

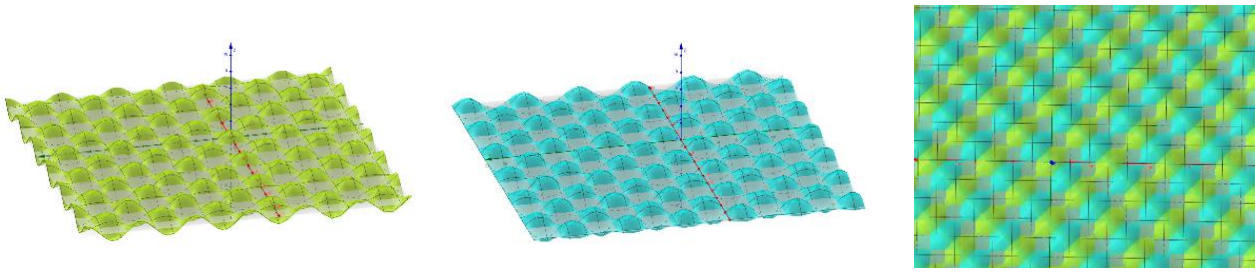
Тоді вихідна функція набуває вигляду $f(x,y,t) = \cos(u+q)$. Використовуючи фундаментальну формулу косинуса суми, ми отримуємо аналітичний розклад:

$$f(x,y,t) = \cos u \cos q - \sin u \sin q. \quad (2)$$

Цей результат демонструє, що двовимірна хвиля може бути представлена як *різниця мультиплікацій одновимірних хвиль*. Хоча вибір функцій u та q не є строго детермінованим, саме така інтерпретація є найбільш наочною для візуального моделювання.

Приклад 4. (Візуалізація компонент інтерференції). Розглянемо випадок статичного поля ($t = 0$) при одиничних коефіцієнтах $a = b = 1$ та нульовій фазі. Тоді $u(x,t) = x$ та $q(y) = y$, що приводить до рівняння:

$$f(x,y,t) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$



а) б) в)

$\cos x \cos y$ $\sin x \sin y$ $\cos x \cos y - \sin x \sin y$

Рис. 4. Візуалізація компонент функції $f(x,y,t) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

За допомогою GeoGebra можемо візуалізувати кожен доданок окремо, щоб побачити їхній внесок у фінальну хвильову картину (рис. 4 а) – 4 в)).

Аналітичний розклад двовимірної хвилі на окремі гармонічні складники є не лише математичною маніпуляцією – він відображає фундаментальний *принцип суперпозиції*. Згідно з цим принципом, у лінійних середовищах хвилі поширюються незалежно одна від одної, а результуюче збурення в будь-якій точці простору є простою алгебраїчною сумою амплітуд усіх наявних хвиль.

Це відкриває шлях до вивчення складніших явищ, таких як *інтерференція* та *дифракція*, де декілька хвиль накладаються одна на одну, створюючи унікальні

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

енергетичні візерунки. Інтерференція виникає при накладанні двох або більше когерентних хвиль, що приводить до перерозподілу енергії в просторі.

Розуміння того, що складне поле складається з базових гармонік, дозволяє математично описати дифракцію – огинання хвилями перешкод. Рівняння Гельмгольца дозволяє розрахувати, як змінюється структура «базових гармонік» при зустрічі з апертурою або екраном. При цьому кожна точка хвильового фронту стає джерелом вторинних гармонік. Суперпозиція цих вторинних хвиль формує унікальні дифракційні картини, які можна бачити у вигляді складних геометричних структур (кілець, смуг або складних фрактальних візерунків).

Таким чином, перехід від простої формули $A\cos(ax+by+\omega t+\phi)$ до аналізу її складників дозволяє досліднику «розчленувати» складну фізичну реальність на елементарні структури. Візуалізація цього процесу в GeoGebra перетворює суху теорію на живий інструмент пізнання, роблячи невидимі енергетичні візерунки Всесвіту доступними для вивчення та розуміння.

3.4. Диференціальний аналіз хвильового поля: градієнт та лапласіан

Для повноцінного математичного опису хвилі недостатньо знати лише її амплітуду в конкретній точці. Необхідно розуміти динаміку її зміни у просторі та часі. Це досягається шляхом обчислення *частинних похідних* та застосування диференціальних операторів вищого порядку.

Математично *градієнт функції* ∇f визначається як вектор, компонентами якого є частинні похідні за просторовими координатами, тобто $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$. Він вказує напрямок найшвидшого зростання значення хвильової функції в конкретній точці простору. У контексті хвилі градієнт дозволяє визначити крутизну хвильового фронту та напрямок поширення збурення.

Ключовим інструментом у рівнянні Гельмгольца є *оператор Лапласа* Δ. Він визначається як сума других частинних похідних функції за просторовими змінними (1).

Для нашої базової монохроматичної хвилі $f=A\cos\theta$, де $\theta=ax+by+\omega t+\phi$, лапласіан набуває вигляду:

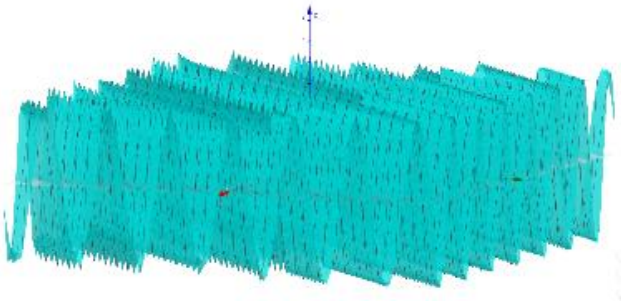
$$\Delta f=-Aa^2\cos\theta-Ab^2\cos\theta=-A(a^2+b^2)\cos\theta.$$

Це перетворення демонструє фундаментальну властивість гармонічних хвиль: *друга похідна функції пропорційна самій функції з від'ємним коефіцієнтом*. Саме ця властивість дозволяє хвилі зберігати свою форму при поширенні, що інтуїтивно й описує рівняння Гельмгольца.

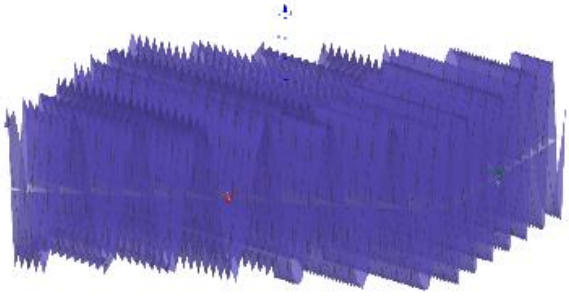
Приклад 5. Розглянемо хвилю $f(x,y,t)=2\cos(-x-y+2t)$ у момент часу $t=0$. Розрахунок її компонент дає наступні результати:

- частинні похідні: $\frac{\partial f}{\partial x}=-4\sin\theta$, $\frac{\partial f}{\partial y}=4\sin\theta$, $\frac{\partial f}{\partial t}=6\sin\theta$;

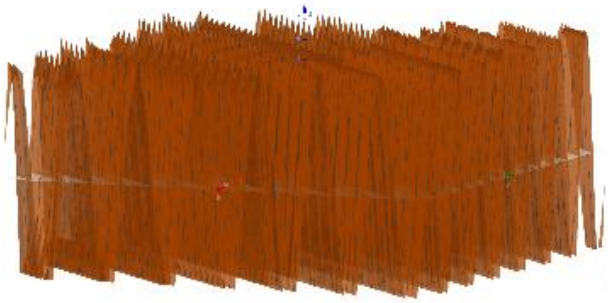
- диференціал: $df = -4\sin\theta\, dx + 4\sin\theta\, dy + 6\sin\theta\, dt$;
- градієнт: $\nabla f = 2\sin\theta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- лапласіан: $\Delta f = 16\cos\theta$.



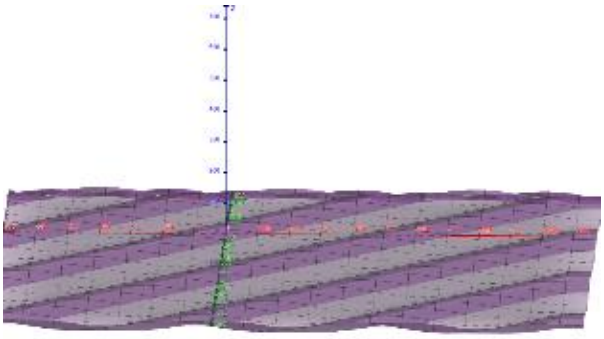
а) $-4\sin\theta$



б) $4\sin\theta$



в) $6\sin\theta$



г) $16\cos\theta$

Рис. 5. Візуалізація частинних похідних та лапласіана хвильової функції $f(x, y, t) = 2\cos(-x - y + 2t)$

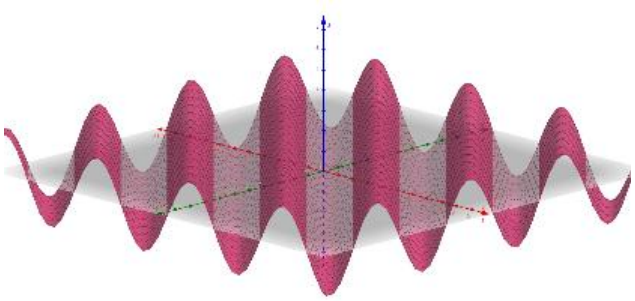
Візуалізація лапласіана в GeoGebra (рис. 5 г)) наочно показує, що оператор Лапласа фактично «підсилює» рельєф хвилі, зберігаючи її періодичну структуру. Це дозволяє учням зрозуміти, чому складні диференціальні рівняння є природною мовою для опису гармонії навколишнього світу.

Приклад 6. Розглянемо хвилю $f(x, y, t) = -2\cos(-x - y + 2t)$ в моментнт часу $t = 1$. Розрахунок її компонент дає наступні результати:

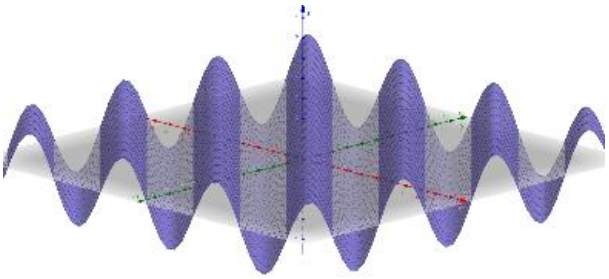
- частинні похідні: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2\sin\theta$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2\sin\theta$;
- диференціал: $df = -2\sin\theta\, dx + 2\sin\theta\, dy + 4\sin\theta\, dt$;
- градієнт: $\nabla f = \sin\theta \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- лапласіан: $\Delta f = -2\sqrt{2}\cos\theta$.

Візуалізація компонент в GeoGebra – див. рис. 6.

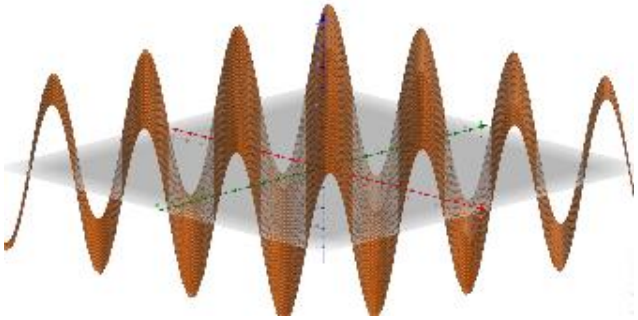
ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)



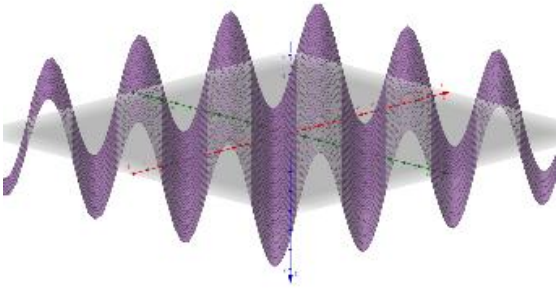
а) $-2\sin\theta$



б) $2\sin\theta$



в) $4\sin\theta$



г) $-2\sqrt{2}\cos\theta$

Рис. 6. Візуалізація компонент в GeoGebra

Як можна побачити в даному випадку, хвиля дійсно одновимірна, і без другої просторової координати можна обійтися. Загалом при моделюванні це може бути неочевидно, що свідчить про важливість застосування інструментарію візуалізації.

4. Висновки

У роботі наведено аналіз математичного опису хвильових процесів на основі двовимірної монохроматичної хвилі та рівняння Гельмгольца, що дозволяє сформулювати низку узагальнень, що мають як теоретичне, так і навчально-методичне значення.

По-перше, показано, що рівняння Гельмгольца є універсальним математичним інструментом для опису стаціонарних хвильових полів. Воно встановлює чіткий зв'язок між просторовою структурою хвилі та її параметрами, зокрема хвильовим числом і оператором Лапласа, що забезпечує узгоджений опис хвильових явищ у різних розділах фізики – акустиці, оптиці та квантовій механіці.

По-друге, розгляд двовимірної монохроматичної хвилі як композиції або різниці добутків одновимірних гармонічних функцій продемонстрував ефективність методу декомпозиції. Такий підхід дозволяє звести аналіз складних просторових хвильових структур до дослідження простіших тригонометричних складових, що є корисним для вивчення явищ суперпозиції та інтерференції хвиль.

По-третє, обчислення частинних похідних і застосування оператора Лапласа виявили фундаментальну диференціальну природу хвильових процесів. Встановлено, що друга похідна гармонічної хвильової функції є пропорційною самій функції, що

математично пояснює здатність хвиль зберігати форму під час поширення та задовольняти рівняння Гельмгольца.

Окрему увагу приділено ролі комп'ютерної візуалізації у процесі вивчення хвильових явищ. Використання середовища GeoGebra дозволило подати абстрактні аналітичні результати у вигляді наочних графічних образів, що значно полегшує інтерпретацію математичних моделей і сприяє глибшому розумінню зв'язку між формулами та геометричною структурою хвильових полів. Також візуалізація дозволяє виявити важливі моменти спрощення моделі, тоді як аналітично це може бути неочевидно (зменшення розмірності з другої до першої, як у прикладі).

Отже, поєднання аналітичних методів математичного аналізу з комп'ютерним моделюванням є ефективним підходом до дослідження хвильових процесів. Запропонований у роботі матеріал може бути використаний як навчально-методична основа для поглибленого вивчення теми хвиль у шкільному та університетському курсах математики і математичної фізики, а також як вступ до подальших досліджень складніших хвильових моделей.

Список використаних джерел

Віктор П. (2025). *Фізика. Коливання і Хвилі*. Харків: Вид-во Букшеф, 416 с. https://bookchef.ua/fizyka-kolyvannia-i-khvyli

Зражевський Г. М. & Зражевська В. Ф. (2023). *Прикладний векторний аналіз*. Навчальний посібник, КНУ імені Тараса Шевченка, 140 с. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/applied_vector_analysis.pdf

Пришляк О. (2004). *Диференціальна геометрія*: Курс лекцій., Київ: Видавничо-поліграфічний центр Київський університет, 66 с. URL: https://www.imath.kiev.ua/~prish/stud/Prish-DG.pdf

Томусяк А. А & Трохименко В. С. (1999). *Математичний аналіз*. Вінниця, 1999. 488 с. https://library.vspu.edu.ua/repozitarij/repozit/texti/navchalni/Matanaliz.pdf

Чемерис О., Прус. А. & Фонарюк О. (2024). *Майстерня GeoGebra: підхід до візуалізації математики*. Житомир: Вид-во ЖДУ імені Івана Франка, 2024. 47 с. URL: https://eprints.zu.edu.ua/41691/1/1.pdf

References

Chemerys O., Prus. A. & Fonaryuk O. (2024). *GeoGebra Workshop*: *An Approach to Visualizing Mathematics*. Zhytomyr: Ivan Franko ZhDU Publishing House, 2024. 47 p. URL: https://eprints.zu.edu.ua/41691/1/1.pdf [in Ukrainian].

Pryshlyak O. (2004). *Differential geometry*: Course of lectures., Kyiv: Publishing and printing center Kyiv University, 66 p. URL: https://www.imath.kiev.ua/~prish/stud/Prish-DG.pdf [in Ukrainian].

Tomusyak A. A. & Trokhymenko V. S. (1999). *Mathematical analysis*. Vinnytsia, 1999. 488 p. https://library.vspu.edu.ua/repozitarij/repozit/texti/navchalni/Matanaliz.pdf [in Ukrainian].

Victor P. (2025) *Physics. Oscillations and Waves*., Kharkiv: Bukshef Publishing House, 416 p. https://bookchef.ua/fizyka-kolyvannia-i-khvyli [in Ukrainian].

Zrazhevsky G.M. & Zrazhevsky V.F. (2023). *Applied vector analysis*. Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2023, 140 p. URL: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/applied_vector_analysis.pdf [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу: 05.01.2026
Прийнято до публікації: 19.06.2026
Опубліковано: 30.07.2026

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Yevhenii TUDOVSHI, Student
ORCID ID: 0000-0002-1234-5678
e-mail: tudovshi.yevhenii@chnu.edu.ua
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

WAVE PROCESSES AND THEIR VISUALIZATION

Abstract. *The article investigates a mathematical model of two-dimensional wave processes based. The main properties of wave functions as functions of several variables are considered, and their differential characteristics, including partial derivatives and the Laplace operator, are analyzed. It is shown that the given harmonic wave functions are particular solutions of the Helmholtz equation, and the possibility of representing a two-dimensional wave as a superposition of one-dimensional harmonic components is demonstrated. Special attention is paid to the computer visualization of wave processes using the GeoGebra environment, which provides a clear interpretation of analytical results and contributes to the development of an intuitive understanding of the spatial structure of wave fields. The obtained results have educational and methodological value and can be used in secondary school and university courses in mathematics and mathematical physics.*

Keywords: *wave processes; harmonic wave; Laplace operator; wave function; wave superposition; computer visualization; GeoGebra.*

Received: 05.01.2026
Accepted for publication: 19.06.2026
Published: 30.07.2026