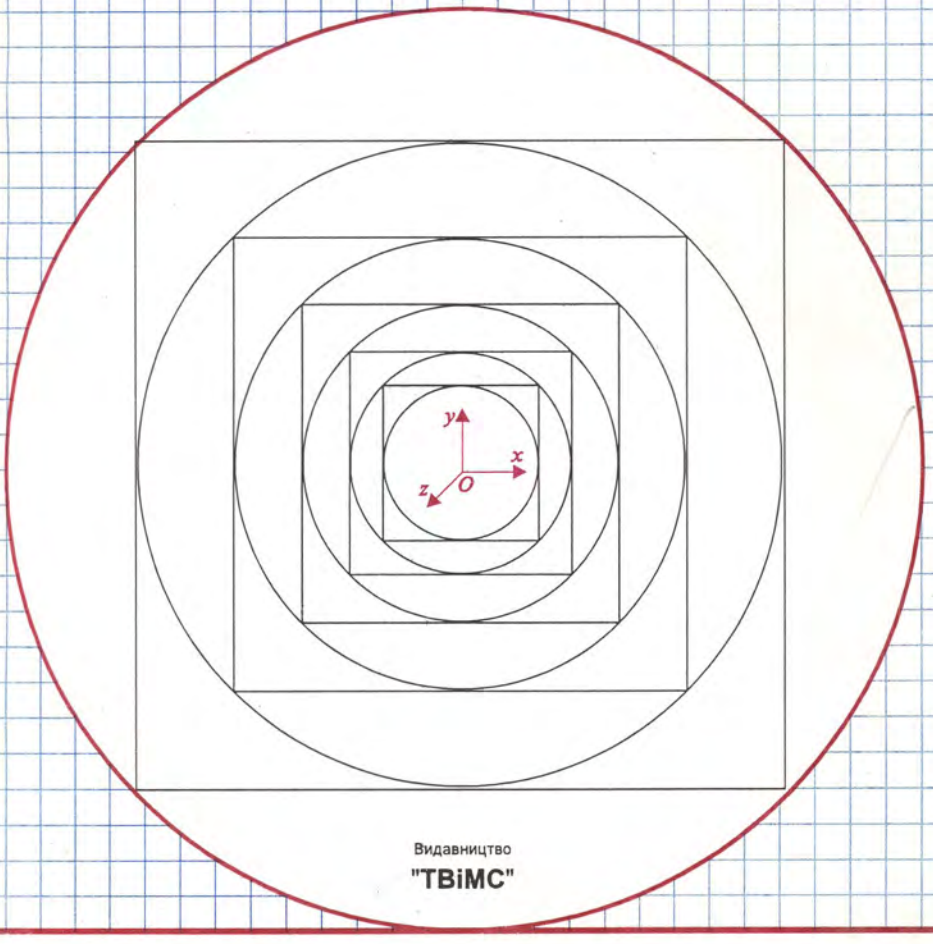
ISSN 1029-4171

2005

том 11
випуск 2

# У світі математики




Видавництво
"ТВіМС"

*Український математичний журнал для школярів*

том 11 **У світі математики** випуск 2

2005

Видається: з 1995 року Видавець: видавництво "ТВіМС"
Засновник: видавництво "ТВіМС" та Національний університет ім. Т. Шевченка
Свідоцтво: КВ № 1564

© ТВіМС, 2005

Журнал виходить 4 рази на рік: березень, червень, вересень, грудень.

Редакційна Рада

| | | |
|---|---|---|
| В. С. Королюк (голова) | В. В. Анісімов | Ю. М. Березанський |
| М. Л. Горбачук | І. Й. Гуран | Ю. А. Дрозд |
| О. К. Закусило | В. М. Лейфура | Г. М. Литвиненко |
| Ю. О. Митропольский | В. П. Моторний | В. М. Петечук |
| В. В. Петришин | В. Г. Покотило | М. І. Портенко |
| А. М. Самойленко | Є. Сенета | З. І. Слєпкань |
| М. С. Собко | В. О. Тадєєв | Ю. Ю. Трохимчук |
| І. В. Федак | П. К. Хобзей | М. І. Шкіль |

Редакційна колегія

В. І. Сущанський (головний редактор)
М. В. Карташов (заступник головного редактора)
О. І. Василик (секретар)

| | | |
|---|---|---|
| В. Б. Брайман | В. В. Булдигін | Я. Ф. Виннишин |
| В. А. Вишенський | С. О. Горовий | О. І. Клесов |
| А. В. Князюк | О. В. Кужель | О. Г. Кукуш |
| В. С. Мазорчук | І. М. Мітельман | В. І. Михайловський |
| В. В. Некрашевич | А. Я. Оленко | М. О. Перестюк |
| В. М. Радченко | А. Сойфер | О. К. Толпиго |
| Р. П. Ушаков | Ю. Б. Чураченко | В. О. Швець |
| О. М. Ядренко | В. А. Ясінський | |

Адреса редакційної колегії

252033, Київ–33,
Національний університет ім. Т. Шевченка,
кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики
"У світі математики"
тел. 259-03-92
e-mail: vasylyk@univ.kiev.ua

Журнал друкується за постановою Вченої ради механіко-математичного факультету Національного університету ім. Т. Шевченка.

Передплата на журнал приймається в усіх поштових відділеннях України. Індекс видання 74581.

# Піфагорові трикутники і Велика теорема Ферма*

*М. Й. Ядренко*

Стаття є фрагментом Соросівської лекції "Геометрія допомагає арифметиці", яку автор прочитав 6 січня 1995 року учасникам Соросівської олімпіади, і підготовлена при сприянні Міжнародної Соросівської Програми підтримки освіти в галузі точних наук (грант 082).

## Піфагорові трикутники

Піфагоровим трикутником називається прямокутний трикутник, сторони якого вимірюються натуральними числами.

Ще чотири тисячі років тому єгиптяни знали, що трикутник із сторонами 3, 4, 5 є прямокутним. Прикладами піфагорових трикутників є трикутники з сторонами 15, 8, 17 і 7, 24, 25, бо, як неважко перевірити, $15^2 + 8^2 = 17^2$, $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Чи задумувались Ви над тим, як описати *всі* піфагорові трикутники?

Для цього треба знайти *всі* натуральні числа $a$, $b$, $c$, які задовольняють рівняння

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Якщо $a$, $b$, $c$ — натуральні числа, які задовольняють рівняння (1), то при будь-якому натуральному $l$ числа $la$, $lb$, $lc$ також задовольняють (1). Трикутник Піфагора із сторонами $a$, $b$, $c$ будемо називати *основним*, якщо числа $a$, $b$, $c$ є взаємно простими, тобто такими, що найбільший спільний дільник $a$, $b$, $c$ дорівнює 1. Спробуємо знайти всі основні піфагорові трикутники.

Відомі різні методи знаходження натуральних розв'язків рівняння (1), які використовують теоретико-числові міркування (див., наприклад, [1, 2, 5]). Ці методи досить складні і не є наочними. Ми ж розглянемо надзвичайно красивий геометричний метод. Він корисний ще й тим, що дає певне уявлення про задачі, які розглядають в *алгебраїчній геометрії*.

Оберемо в площині прямокутну декартову систему координат $xOy$ і побудуємо коло з радіусом 1 і центром в точці $O$. Якщо $(x, y)$ — точка, яка лежить на цьому колі, то виконується рівність

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

і, навпаки, якщо для точки $(x, y)$ виконується рівність (2), то ця точка лежить на одиничному колі з центром у початку координат.

Нагадаємо, що раціональні числа — це числа виду $\frac{m}{n}$, де $m$ — ціле, а $n$ — натуральне число. Точку, обидві координати якої є раціональними числами, будемо коротко називати *раціональною точкою*.

*Вперше була опублікована в "У світі математики", т. 1, вип. 1, с. 4–11.

Якщо $a$, $b$, $c$ — натуральні числа, які задовольняють рівняння (1), то, поділивши обидві частини цього рівняння на $c^2$, матимемо

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1. \tag{3}$$

Покладемо

$$x = \frac{a}{c}, \qquad y = \frac{b}{c} \tag{4}$$

Рівність (3) означає, що $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ — раціональна точка, яка лежить на одиничному колі з центром в точці $O$. Отже, кожному розв'язку в натуральних числах рівняння (1) відповідає раціональна точка на одиничному колі (2). Навпаки, якщо $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ — раціональна точка, яка лежить на колі (2), то

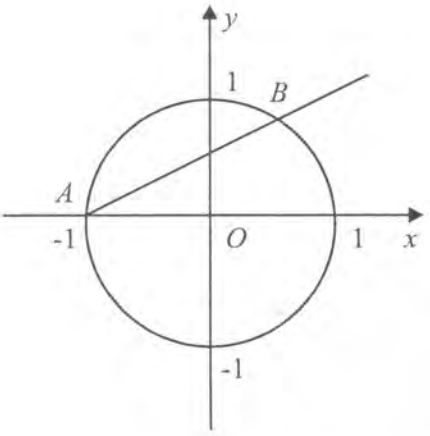
$$\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^2 = 1. \tag{5}$$

Помноживши обидві частини (5) на $(q_1q_2)^2$, матимемо

$$(p_1q_2)^2 + (p_2q_1)^2 = (q_1q_2)^2.$$

Числа $p_1q_2, p_2q_1, q_1q_2$ — цілі числа, які є розв'язками рівняння (1).

Таким чином, питання знаходження *всіх* цілих чисел, які задовольняють рівняння (1), може бути зведене до знаходження *всіх* раціональних точок на колі (2).




Малюнок

Розглянемо на колі (1) (малюнок) точку і проведемо через неї пряму з кутовим коефіцієнтом $k$. Її рівняння має вигляд

$$y = k(x + 1).$$

Нехай $B$ — точка перетину цієї прямої з колом (1). Знайдемо її координати. Для цього треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = k(x+1) \end{cases}$$

Задача зводиться до розв'язання квадратного рівняння

$$x^2 + k^2(x+1)^2 = 1$$

або

$$(k^2+1)x^2 + 2k^2x + (k^2-1) = 0,$$

$$x^2 + \frac{2k^2}{k^2+1} + \frac{k^2-1}{k^2+1} = 0.$$

Один корінь цього рівняння $x_1 = -1$ (абсциса точки $A$). За теоремою Вієта

$$x_1 \cdot x_2 = (-1)x_2 = \frac{k^2-1}{k^2+1},$$

звідки

$$x_2 = \frac{1-k^2}{1+k^2}.$$

Ордината точки $B$ дорівнює

$$y_2 = k(x_2 - 1) = k\left(\frac{1-k^2}{1+k^2} + 1\right) = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Таким чином, точка $B$ має координати

$$B = \left(\frac{1-k^2}{1+k^2}, \frac{2k}{1+k^2}\right). \tag{7}$$

З (7) випливає таке: якщо кутовий коефіцієнт $k$ прямої $AB$ є раціональним числом, то точка $B$ є раціональною точкою. Навпаки, якщо $B = (x_2, y_2)$ — раціональна точка, то з рівності

$$k = \frac{y}{x+1} = \frac{y_2}{x_2+1}$$

випливає, що коефіцієнт $k$ — раціональне число. Таким чином, координати будь-якої раціональної точки на колі (2) (крім точки $A = (-1, 0)$) виражаються формулами (7), де $k$ — деяке раціональне число. Покладаючи

$$k = \frac{m}{n},$$

де $m$ і $n$ — взаємно прості натуральні числа ($n > m$), маємо

$$x = \frac{a}{c} = \frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}, \qquad y = \frac{b}{c} = \frac{2mn}{n^2+m^2}.$$

Звідси випливає, якщо прийняти до уваги (4), що всі натуральні числа $a$, $b$, $c$, які задовольняють (1), мають вигляд

$$a = n^2 - m^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = n^2 + m^2, \tag{8}$$

де $n$ і $m$ — взаємно прості числа, $n > m$. Надаючи $n$ і $m$ різних значень, будемо одержувати піфагорові трикутники. Залишається лише вияснити, при яких значеннях $m$ і $n$ ці трикутники будуть основними, тобто числа (8) є взаємно простими. Нехай кожне з чисел (8), де $n$ і $m$ — взаємно прості числа, ділиться на просте число $p$ і $p \neq 2$. Тоді одне з чисел $m$ або $n$ ділиться на $p$ (лише одне, бо $m$ і $n$ — взаємно прості числа), але тоді $n^2 + m^2$ і $n^2 - m^2$ не діляться на $p$. Таким чином, числа (8) при взаємно простих $m$ і $n$ можуть мати лише один спільний множник $p = 2$. Якщо $m$ і $n$ одинакової парності, то $n^2 - m^2$ і $n^2 + m^2$ діляться на 2 (числа (8) мають спільний дільник 2). Таким чином, $n$ і $m$ повинні бути числами різної парності. Одержані результати можна сформулювати у вигляді такої теореми.

**Теорема.** *Всі основні піфагорові трикутники з катетами $a$ і $b$, гіпотенузою $c$, у яких $b$ є парним числом, одержуються з формул*

$$a = n^2 - m^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = n^2 + m^2, \tag{9}$$

*де $n$ і $m$ — різні пари взаємно простих чисел, з яких одне є парним, а інше непарним ($n > m$).*

З кожного основного піфагорового трикутника (9) можна одержати нескінченну множину подібних піфагорових трикутників із сторонами

$$a = l(n^2 - m^2), \qquad 2lmn, \qquad l(n^2 + m^2), \tag{10}$$

надаючи $l$ різних натуральних значень.

Надаючи $n$ і $m$ деяких значень ($n > m$, $n$ і $m$ взаємно прості), наведемо декілька прикладів основних піфагорових трикутників. Результати подамо у вигляді таблиці

| $n \backslash m$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | 3, 4, 5 | | | |
| 3 | | 5, 12, 13 | | |
| 4 | 15, 8, 17 | | 7, 24, 25 | |
| 5 | | 21, 20, 29 | | 9, 40, 41 |
| 6 | 35, 12, 37 | | | |

## Деякі властивості піфагорових трикутників

Наведемо декілька тверджень про піфагорові трикутники, які рекомендуємо читачам довести самостійно.

1. В основному піфагоровому трикутнику $a$, $b$, $c$ число $c$ завжди непарне, а одне з чисел $a$ чи $b$ ділиться на 4.

2. У кожному піфагоровому трикутнику принаймні один з катетів ділиться на 3.
3. У кожному піфагоровому трикутнику принаймні одна з сторін ділиться на 5.
4. Єдиним піфагоровим трикутником, сторони якого є послідовними цілими числами, є трикутник із сторонами 3, 4, 5.
5. Якщо сторони піфагорового трикутника утворюють арифметичну прогресію, то це трикутник виду $(3k, 4k, 5k)$, де $k$ — натуральне число.

## Проблема Серпинського

Існують піфагорові трикутники, у яких гіпотенуза і один з катетів — прості числа, наприклад (3, 4, 5), (11, 60, 61), (19, 180, 181). Польський математик Вацлав Серпинський поставив питання: скінченною чи нескінченною є множина таких трикутників [1]? Відповіді на це питання поки що немає.

## Піфагорові тетраедри

Тетраедр називається *піфагоровим*, якщо всі сторони є натуральними числами, а всі плоскі кути при одній з вершин є прямими.

Приклади піфагорових тетраедрів наведено в [3]. Залишається відкритим питання опису *всіх* піфагорових тетраедрів.

Якщо доповнити піфагорів тетраедр до прямокутного паралелепіпеда, то одержимо паралелепіпед, у якого довжини всіх ребер і всіх діагоналей граней є натуральними числами.

До цього часу залишається відкритим питання:

чи існує прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра, всі діагоналі граней і діагональ паралелепіпеда є натуральними числами [1, 3]?

Радимо читачам, використовуючи міркування, подібні до тих, які використовувались при знаходженні піфагорових трикутників, описати *всі* прямокутні паралелепіпеди, у яких ребра $a$, $b$, $c$ і діагональ $d$ є натуральними числами. Очевидно, питання зводиться до відшукання розв'язків у натуральних числах рівняння

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \tag{11}$$

## Діофантові рівняння

Рівняння з цілими коефіцієнтами і числом невідомих, більших від числа рівнянь, для яких знаходять цілочислові або раціональні розв'язки, називають *діофантовими*. Назва походить від прізвища видатного грецького математика Діофанта Александрійського, який жив у третьому сторіччі нашої ери. До нас дійшли тільки частини його математичного трактату "Арифметика" [4] (6 книг з 13). В "Арифметиці" дано початок алгебри, а також розглянуто велику кількість задач, які зводяться до невизначених рівнянь, і вказано ряд методів знаходження раціональних розв'язків таких рівнянь. Зокрема, в "Арифметиці" розглядались і піфагорові трикутники.

Задачу знаходження піфагорових трикутників за декілька сторіч до Діофанта розглядав Евклід (біля 300 років до нашої ери) в своїй знаменитій книзі "Начала". Але найбільш видатним відкриттям в археології XX сторіччя є розшифрування вавілонських клинописних таблиць, датованих приблизно 1500 роком до нашої ери, причому на одній з них міститься таблиця піфагорових трикутників, серед яких є і трикутники з великими сторонами (наприклад, 4961, 6480, 8161). Це означає, що вавілоняни володіли і теоремою Піфагора, і якимсь методом знаходження піфагорових трикутників.

## Велика теорема Ферма

Француз П'єр Ферма (1601–1665) — найвидатніший математик свого часу, один з засновників аналітичної геометрії, диференціального числення, теорії ймовірностей. За професією і освітою Ферма був юристом. Він займав високі юридичні посади в Тулузі, а математиці присвячував вільний час. На дозвіллі вивчав математичні трактати давніх вчених, займався дослідженнями з алгебри, геометрії, теорії чисел, теорії ймовірностей, геометричної оптики. За все своє життя Ферма не опублікував жодної математичної праці. Більшість відкриттів Ферма відома нам з його листів до визначних математиків того часу — Блеза Паскаля, Рене Декарта, Джона Валліса, рукописних трактатів. Деякі результати з теорії чисел дійшли до нас у формі зауважень на полях Діофантової "Арифметики" [4].

Твердження, яке тепер називають Великою теоремою Ферма, було сформульовано на полях "Арифметики" Діофанта в тому місці, де Діофант описував піфагорові трикутники. Ферма написав буквально так: "... Неможливо розкласти ні куб на два куби, ні біквадрат на два біквадрати, і взагалі, ніякий степінь, більший квадрату, на два степені з тим же показником". І далі зауважив: "... я знайшов воістину чудове доведення, але ці поля для нього занадто малі".

Сучасною мовою твердження Великої теореми Ферма формулюється так: при кожному натуральному ($n > 2$) не існують натуральні числа такі, що

$$a^n + b^n = c^n. \tag{12}$$

Якщо доведення Ферма існувало, то воно дійсно було чудовим, бо до цього часу математики не можуть довести цю теорему!

Серед паперів Ферма вдалось знайти доведення для $n = 4$. Для $n = 3$ теорему Ферма довів Леонард Ейлер (1770 р.), для $n = 5$ — Діріхле (1828 р.), для $n = 7$ — Ламе (1840 р.). Потужний метод дослідження проблеми Ферма розробив у середині XIX сторіччя німецький математик Кумер.

Увага до Великої теореми Ферма посилилась після того, як в 1908 році німецький інженер і любитель математики Вольфскель заснував премію в 100 000 марок за доведення цієї теореми. Положення про премію вимагає, щоб доведення було опубліковане, схвалене Гетінгенською Академією наук, і після публікації повинно пройти не менше двох років.

Після публікації в пресі про премію Вольфскеля на Гетінгенську Академію наук обрушився потік безглуздих доведень і приватних публікацій. Були

серед них, наприклад, такі: "Довів теорему Ферма! Основна ідея — перенести $c^n$ в ліву частину. Подробиці листом". Як правило, в таких доведеннях легко знаходити помилки, бо "доведення" іноді зберігали силу і при $n = 2$.

Інфляція і розруха в Німеччині після першої світової війни знецінили премію Вольфскеля. Проте економічне відродження змінило ситуацію. Тепер премія Вольфскеля становить десь біля 10 000 німецьких марок.

І теперь існує потік "доведень" теореми Ферма, які надходять до Інституту математики Академії наук України та Національного університету ім. Т. Шевченка. Ми не радимо нашим читачам витрачати сили на пошуки доведення Великої теореми Ферма, бо вже давно стало зрозуміло, що вона вимагає могутнього арсеналу сучасної математики (див. з цього приводу [5, 7]). Пропонуємо лише декілька задач, пов'язаних з теоремою Ферма.

Задача 1. Використовуючи свої знання про піфагорові трикутники, доведіть теорему Ферма при $n = 4$.

Задача 2. Доведіть теорему Ферма для $n = 4m$, де $m$ — натуральне число $m \geq 1$.

Задача 3. Доведіть, що для доведення теореми Ферма досить довести її при $n = p$, де $p$ — просте число, $p \neq 2$.

## Теорема Ферма, проблема Морделла і останні досягнення Анрі Вайля

Теорема Ферма може бути сформульована і в геометричних термінах. Поділимо обидві частини рівняння (12) на $c^n$ і позначимо

$$x = \frac{a}{c}, \qquad y = \frac{b}{c}.$$

Тоді матимемо

$$x^n + y^n = 1.$$

Криву (13) будемо називати кривою Ферма. Твердження Великої теореми Ферма можна сформулювати так: при натуральному $n > 2$ на кривій Ферма немає інших раціональних точок, крім тривіальних $(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$.

Раціональні точки досліджуються методами *алгебраїчної геометрії*. В 1983 році з'явилась сенсаційна робота молодого німецького математика Г. Фалтингса, який розв'язав проблему Морделла.

Англійський математик Л. Морделл (1888–1972) висловив гіпотезу про те, що на алгебраїчних кривих певних класів може бути лише скінченне число раціональних точок. До цих кривих належить і крива Ферма. Таким чином, із результатів Фалтингса випливає, що якщо рівняння (12) має розв'язок в натуральних числах, то основних трійок (таких, що $a$, $b$, $c$ — взаємно прості числа) є лише скінченне число. Це вже означало величезний крок у розв'язанні проблеми Ферма. (Досить лише встановити, що це скінченне число є нулем!).

В 1993 році на конференції в Кембріджі видатний французький математик, один з засновників знаменитої математичної групи Бурбакі, нині професор Інституту перспективних досліджень в Прінстоні (США) Анрі Вайль

представив великий трактат, що містить доведення Великої теореми Ферма, який зараз інтенсивно вивчається багатьма спеціалістами. Анрі Вайль виступав 11 серпня 1994 року на останньому Міжнародному математичному конгресі в Цюріху із заключною доповіддю "Модулярні форми та еліптичні криві", в якій теж йшла мова про проблему Ферма.

На 9–18 серпня 1995 р. в Бостонському університеті планується проведення спеціальної конференції з Великої теореми Ферма. Провідні спеціалісти з алгебраїчної геометрії будуть аналізувати трактат Анрі Вайля. Більш детально про роботи Анрі Вайля та його колег можна дізнатись з статті [9].

Ми також наполегливо радимо нашим читачам надзвичайно цікавий роман О. Казанцева [8], одним з героєм якого є П'єр Ферма.

* * * * * * *

## Додаток

### Останні штрихи до теореми Ферма

*Ольга Ядренко*

Останній прорив у доведенні Великої теореми Ферма здійснив англійський математик Ендрю Уайлс. Цей молодий математик, професор Прінстонського університету (США), працював над проблемою майже десять років. Доведення було опубліковане влітку 1995 року в одному з провідних математичних журналів "Аннали математики". Воно зайняло весь номер — загальною кількістю більше 100 сторінок. Це доведення було попередньо викладене 23 червня 1993 року в циклі лекцій, які він прочитав в Інституті математичних наук імені Ісаака Ньютона в Кембриджі, а потім в серпні 1994 року на Міжнародному математичному конгресі в Цюріху. І в першому, і в другому викладі, в роботах існували прогалини, проте ідеї, як визнав математичний світ, були красиві і сучасні. Ідеї Уайлса спирались на чудовий зв'язок між рівнянням Ферма $x^n + y^n = z^n$ та еліптичними кривими, що задаються рівнянням

$$y^2 = x\,(x - a^n)\,(x - c^n)\,.$$

Прогалини в своїй роботі Уайлс усунув у вересні 1994 року, всього через місяць після конгресу. На цей раз доведення витримало всі самі скрупульозні перевірки. Оскільки ніхто не чекав такої сміливості від мало відомого на той час математика, спеціалісти провели ретельну перевірку доведення. Так завершилась 350-річна історія доведення цієї великої теореми.

Очевидно, що доведення Ферма, якщо воно існувало, не могло бути аналогічним доведенню Уайлса, бо доведення Уайлса використовувало математичний апарат, розроблений в XX сторіччі. Воно спиралось на той зв'язок, який існував між великою теоремою та алгебраїчною геометрією — гілкою математики, що швидко розвивалась в XX сторіччі. Доведення Уайлса надзвичайно складне.

## Література

1. В. Серпинский, *Пифагоровы треугольники*, "Учпедгиз", Москва, 1959.

2. Г. Радемахер, О. Теплиц, *Числа и фигуры*, "Физматгиз", Москва, 1962.
3. В. Г. Болтянский, *Пифагоровы тетраэдры*, Квант (1986), № 8, 29–31.
4. Диофант, *Арифметика и книга о многоугольных числах*, "Наука", Москва, 1974.
5. Г. Эдвардс, *Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел*, "Мир", Москва, 1980.
6. Ю. А. Дрозд, *Піфагорові трикутники і алгебраїчні криві*, "У світі математики", т. 6, "Радянська школа", 1975, стор. 17–26.
7. М. М. Постников, *Теорема Ферма*, "Наука", Москва, 1978.
8. А. А. Казанцев, *Острие шпаги*, "Молодая гвардия", Москва, 1984.
9. Fernando Q. Jouvea, *A Marvelous Proof*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), № 3, 203–222.

# Чи легко впевнитись, що число просте?

*Б. Кликавка, А. Оленко*

> В арифметиці, цій найдавнішій, але завжди юній галузі математики, час від часу постають прекрасні своєрідні задачі: за своїм змістом вони такі елементарні, що їх може зрозуміти кожний школяр; ідеться звичайно про доведення деякого дуже простого закону, що панує у світі чисел; закону, який в усіх перевірених окремих випадках виявляється правильним, і треба встановити, що він справді правильний завжди. І от, незважаючи на всю гадану простоту задачі, розв'язання її роками, а іноді й століттями, не піддається зусиллям найвидатніших учених епохи. Погодьтесь, що це захоплююче. *О. Хінчин*

## 1. Вступ

У математиці існувало не багато більш простих за формулюванням нерозв'язаних проблем, ніж питання швидкого визначення чи є дане ціле число простим і розклад його на прості множники (факторизація). Ще молодий Гаусс в його першій книзі "Disquisitiones Arithmeticae" розцінює цю проблему як таку, що потребує бути розв'язаною заради "гордості" математики. З часів Гаусса в області факторизації чисел відбувся значний прогрес. По-перше це було повязано з розвитком комп'ютерів і теорії алгоритмів, що дало змогу формалізувати поняття "швидкості" алгоритму, доведення, тобто часу який витрачають на одержання результату. По-друге математичні методи теорії чисел були значно вдосконалені. На сьогоднішній день ми спроможні досить швидко визначити чи є велике число простим. Наприклад, сучасні алгоритми дають змогу за місяць перевірити ціле число з декількаами тисячами знаків на простоту на комп'ютері. Проте проблема швидкої факторизації і досі залишається нерозв'язаною. Знаходження все більших і більших простих чисел (див. [1]) — це не лише своєрідний спорт чи хобі, але й важлива прикладна проблема, вирішення якої дозволяє з легкістю створювати криптографічні схеми як показано у § 6.

У питанні визначення простоти числа вирішальний прорив був здійснений зовсім недавно — у серпні 2002 року три індійські науковці Minandra Agrawal, Neeraj Kayal і Nitin Saxena (AKS) сконструювали тест на визначення простоти цілого числа з поліноміальною оцінкою часових затрат.

До появи цієї роботи математики вже припускали, що "швидкий" алгоритм для визначення простоти цілого числа існує. На цю думку наштовхували декілька існуючих тестів, які працювали досить швидко, але досі вдалось

лише показати, що доведення того, що вони мають потрібну швидкість, еквівалентне відомим нерозв'язаними проблемам (див., наприклад, §2.4). Також існували "швидкі" ймовірнісні алгоритми, але результат їх роботи випадковий (див., наприклад, §2.5). Заслуга індійських вчених полягала у створенні нового детерміністичного алгоритму з строгим математичним доведенням того, що він дає відповідь за поліноміальний час. Відомі раніше алгоритми або працювали повільніше, або не було строгого обгрунтування їх поліноміальної швидкодії. Несподіваним виявилось те, що доведення досить просте (його легко може зрозуміти студент-першокурсник) і коротке (у статті AKS лише 9 сторінок). Цікаво і те, що Agrawal — викладач, а Kayal і Saxena — студенти-бакалаври. Мабуть небагато знайдеться бакалаврських робіт у яких було дано розв'язок такої визначної проблеми, над якою працювали найвідоміші математики з часів Гаусса.

## 2. Тестування чисел на простоту

**2.1. Ділення з перебором.** Ціль полягала у відшуканні "швидкого" алгоритма, який би визначав чи є дане ціле число простим. Прикладом одного з таких найелементарніших методів є тривіальне ділення, в якому ми намагаємося поділити $n$ на кожне ціле число $m$ ($2 \le m \le \sqrt{n}$). В найгіршому випадку число кроків буде близьке до $\sqrt{n}$ (якщо $n$ просте). Помітимо, що $\sqrt{n}$ приблизно дорівнює $2^{d/2}$, де $d$ — число знаків $n$.

Ми хотіли б отримати швидший алгоритм, який працює не більше ніж за $cd^A$ кроків, де $c$ і $A$ деякі фіксовані додатні сталі. Тобто, це алгоритм, який працює з поліноміальною оцінкою часових затрат (абревіатура P). Для великих $n$ число $cd^A$ значно менше ніж $2^{d/2}$, що дає змогу набагато швидше проводити перевірку.

Щоб знайти тест на розпізнавання простих чисел, що працює швидше, ніж просте ділення підбором, ми розглянемо як деякі характеристики простих чисел можуть бути використані в більш ефективних алгоритмах.

**2.2. Критерій Уілсона.** Один з найпростіших відомих критеріїв простоти цілого числа є

**Теорема Уілсона.** *Ціле число $n \ge 2$ просте тоді і тільки тоді, коли $n$ ділить $(n-1)! + 1$.*

Намагаючись використати цю характеристику як досить швидкий алгоритм ми отримуємо складну проблему явного швидкого підрахунку $(n-1)!$ (або навіть $(n-1)! \pmod n$).

**2.3. Мала теорема Ферма та дитяча біноміальна теорема.** Біноміальна теорема дає формулу для розкладу $(x+y)^n$ на суму доданків вигляду $\text{const} \cdot x^i y^{n-i}$ :

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i},$$

де

$$C_n^i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}.$$

Іноді школярі записують її неправильно у вигляді:

$$(x+y)^n = x^n + y^n. \tag{1}$$

Одна з найбільш важливих властивостей простих чисел, виявлених Ферма у 1637, полягає в тому, що якщо $n$ просте, то $n$ ділить $a^n - a$ для всіх цілих чисел $a$. Це можна записати так:

$$a^n \equiv a \pmod{n}.$$

Таким чином

$$(x+y)^n \equiv x+y \equiv x^n + y^n \pmod{n} \tag{2}$$

для всіх цілих чисел $x, y$ і простих $n$. Отже, коректним записом (1) буде (2). Його іноді називають дитячою біноміальною теоремою.

Здавалось, що мала теорема Ферма дає змогу створити нескладний тест перевірки числа на простоту. Але виявилось, що обернене твердження (якщо $n$ не ділить $a^n - a$ для деякого цілого $a$, то $n$ — складене) хибне. Прикладами є числа Carmichael: 561, 1105, 1729. Зовсім недавно було доведено, що таких чисел нескінченно багато.

**2.4. Квадратний корінь з 1.** Розглянемо рівність за $\bmod p$. Для найменшого непарного складеного числа $n$ з більш ніж одним простим множником, тобто $n = 15$, ми маємо

$$1^2 \equiv 4^2 \equiv 11^2 \equiv 14^2 \pmod{15}.$$

Отже існує чотири квадратні корені з 1 $(\bmod 15)$. І у загальному випадку, існує щонайменше чотири різні корені з 1 $(\bmod n)$ для довільного непарного $n$, яке ділиться на два різних простих числа. Таким чином, ми можемо довести що $n$ складене, знайшовши квадратний корінь з 1 $(\bmod n)$, який не є ні 1 ні $-1$. Отже швидкість алгоритму залежатиме від швидкості знаходження квадратних коренів за $(\bmod p)$. Якщо $p > 2$ просте, то $p-1$ парне і $a^{p-1}$ є квадрат. Оскільки

$$\left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

то $a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$ — квадратний корінь з 1 $(\bmod p)$ і має бути або 1, або $-1$. Отже, якщо $a^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n}$ не є $\pm 1$, то $n$ складене.

Якщо $n$ складене, то іноді потрібно повторити попередню процедуру кілька разів, щоб довести це. Наприклад,

$$64^{948} = 1 \pmod{949}, \qquad 64^{474} = 1 \pmod{949}, \qquad 64^{237} = 220 \pmod{949},$$

а отже 949 — складене.

Тому щоб довести, що $n$ складене нам потрібно знайти таке ціле $a$, що у процесі знаходження

$$a^{n-1} \pmod{n}, \qquad a^{\frac{n-1}{2}} \pmod{n}, \qquad \ldots, \qquad a^{\frac{n-1}{2^k}} \pmod{n},$$
$$\frac{n-1}{2^k} \in \mathbb{N},$$

з'явиться число відмінне від 1 або $-1$.

Не зрозуміло чи багато чисел $a = 2, 3, 4, \ldots$ потрібно перевіряти доки не знайдемо потрібне. Було доведено, що якщо справджується гіпотеза Рімана (проблема за розв'язок якої Математичний Інститут Клея встановив нагороду у 1 млн. доларів, див. [2]), то кількість перевірок не більша ніж $2(\ln n)^2$.

Таким чином один з підходів до розв'язання проблеми полягає в знаходженні квадратних коренів за mod.

**2.5. Тест з випадковим поліноміальним часом.** Доведено, що не менше ніж половина тих $a$, які не перевищують складене $n$, дають доведення того, що $n$ не є простим за методом § 2.5. Отже вибираючи навмання без повторення числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ і застосовуючи попередній алгоритм ми з ймовірністю помилки меншою за $\frac{1}{2^k}$ встановимо, що число є складеним.

## 3. NP і P

У 1903 році на з'їзді Американського Математичного Товариства F.N.Cole вийшов до дошки і написав

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927 = 193707721 \times 761838257287$$

і щоб довести істинність правої частини перемножив два останні числа. Після цього він пояснив, що розклад на два множники даного числа займав в нього кожну неділю на протязі трьох років. Мораль цієї історії полягає в тому, що він витратив багато зусиль щоб знайти ці множники, а перевірка результату зайняла лічені хвилини.

Взагалі кажучи можна знайти множники даного цілого числа $n$ щоб подати "коротке" доведення того, що воно складене. Слово "коротке" означає, що доведення може бути перевірене за поліноміальний час (здійснивши таку кількість елементарних операцій, наприклад множення двох цифр, яка є поліномом від кількості знаків у запису $n$), і в цьому випадку кажуть, що задача з класу NP (*невизначений поліноміальний час*). При цьому не стверджують, що доведення може бути знайдене за поліноміальний час, а лише те, що воно може бути перевірене за такий час. Насправді, ми досі не знаємо, чи можливо знайти таке доведення — факторизувати ціле число за поліноміальний час. На сьогодні це одна з найбільш важливих нерозв'язаних проблем в даній області.

Якщо хтось запропонує вам ціле число і стверджуватиме, що воно просте, чи зможете ви перевірити це за поліноміальний час? За такої постановки проблеми не обов'язково розкладати число на прості множники, а досить упевнитися у виконанні деякого критерія на простоту.

Суть проблем що належать класу P полягає в знаходженні розв'язку з доведенням за поліноміальний час, а суть проблем з класу NP — в перевірці доведення розв'язку за поліноміальний час. У загальній постановці питання невідомо і досі чи збігаються ці класи два класи (P = NP). Це ще одна з найвідоміших нерозв'язаних проблем, за вирішення якої також встановлено нагороду у 1 млн. доларів, див. [2].

## 4. Результат Agrawal, Kayal і Saxena

**4.1. Теоретичні основи.** Позначимо $\mathbb{Z}[x]$ множину всіх многочленів змінної $x$ з цілими коефіцієнтами. Тоді

$$f(x) \equiv g(x) \pmod{(n, h(x))}$$

для $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ тоді і тільки тоді, коли існують многочлени

$$u(x), v(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

для яких $f(x) - g(x) = nu(x) + h(x)v(x)$.

Ідея AKS грунтується на такому твердженні:

**Терема 1.** *Ціле число $n$ просте тоді і тільки тоді, коли*

$$(x+1)^n \equiv x^n + 1 \pmod{n}$$

*на $\mathbb{Z}[x]$.*

*Доведення.* Оскільки

$$(x+1)^n - (x^n+1) = \sum_{1 \le j \le n-1} C_n^j x^j,$$

то $x^n + 1 \equiv (x+1)^n \pmod{n}$ тоді і тільки тоді, коли $n$ ділить $C_n^j$ для всіх $1 \le j \le n-1$.

Якщо $n = p$ просте, то $p$ з'являється в чисельнику $C_n^j$, але воно більше ніж (а значить і не ділить) будь-який елемент в знаменнику, і як наслідок $p$ ділить $C_n^j$ для $1 \le j \le p-1$.

Якщо ж $n$ складене, нехай $p$ просте і ділить $n$. За допомогою розкладу

$$C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(p-1))}{p(p-1)\dots 1}$$

ми бачимо, що якщо $p^k$ — найбільша степінь $p$, що ділить $n$, то $p^{k-1}$ — найбільша степінь $p$, що ділить $C_n^p$, а отже $n$ не ділить $C_n^p$. □

Ця проста теорема є основою для нового тесту на простоту цілих чисел. Потрібно підрахувати

$$(x+1)^n - (x^n+1) \pmod{n}$$

і визначити ділить чи ні $n$ кожен коефіцієнт розкладу? Це ефективний тест на простоту цілих чисел, але підрахунок $(x+1)^n \pmod{n}$ є очевидно повільним, оскільки він вимагає збереження $n$ коефіцієнтів. Нова ідея перебороння цих труднощів полягає в підрахунку за mod не тільки для $n$ але і для деякого многочлена невисокої степені. Одним з найпростіших многочленів степені $r$ є $x^r - 1$. Чи істинне твердження

$$(x+1)^n \equiv x^n + 1 \pmod{(n, x^r-1)}? \tag{3}$$

Виявилось, що перевірити (3) можна досить швидко, а за Теоремою 1 твердження (3) істинне для довільного простого $n$. Проте не зрозуміло чи буде виконуватись (3) для всіх складених $n$.

Основна теорема AKS забезпечує модифікацію цієї структури і доводить істинність (3) для простих $n$ і хибність для складених:

**Терема 2.** *Для даного цілого числа $n \geq 2$, нехай $r < n$ таке ціле додатне число, що $n$ має порядок $> (\log n)^2 \pmod r$. Тоді $n$ просте тоді і тільки тоді, коли*

- *$n$ не абсолютна степінь,*
- *$n$ не має жодного простого множника $\leq r$,*
- *$(x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{(n, x^r - 1)}$ для всіх цілих $a$: $1 \leq a \leq \sqrt{r} \log n$.*

**4.2. AKS алгоритм.** Кажуть, що час алгоритму $O(k)$, якщо для знаходження результату йому потрібно витратити не більше ніж $c_1 k$ одиниць часу (зробити не більше ніж $c_1 k$ елементарних операцій), і $\tilde{O}(k)$, якщо для знаходження результату йому потрібно не більше $c_1 k (\ln k)^{c_2}$ елементарних операцій, де $c_1$, $c_2$ — деякі додатні числа. $g(k) = o(1)$ означає, що із ростом $k$ вираз $g(k)$ прямує до нуля.

Нехай $\gcd(k, m)$ — найбільший спільний дільник цілих чисел $k$ та $m$.

Щоб перетворити терему Agrawal, Kayal і Saxena в алгоритм, діють так:

• Визначають чи є $n$ вигляду $a^b$, $b > 1$, $a, b \in \mathbb{N}$. На виконання цього потрібно не більше $\tilde{O}((\log n)^3)$ часу.

Якщо ні, то

• Знаходять ціле число $r$ таке, що порядок $n \pmod r > (\log n)^2$.

Щоб це зробити, підраховують $n^j \pmod q$ для $j = 1, \ldots, [(\log n)^2]$ і кожного цілого $q > [(\log n)^2]$, де $[k]$ означає цілу частину числа $k$, доки не знайдуть перше значення $q$, для якого жоден з цих залишків не є $1 \pmod q$. Тоді вважають $r = q$. Цей рівень алгоритму потребує $\tilde{O}(r(\log n)^2)$ часу.

• За алгоритмом Евкліда з $r < n$ визначають, чи $\gcd(a, n) > 1$ для деякого $a \leq r$, що потребує $\tilde{O}(r(\log n)^2)$ часу.

Нарешті перевіряють дитячу біноміальну теорему:

• Визначають, чи виконується

$$(x + a)^n \equiv x^n + a \pmod{(n, x^r - 1)}$$

для $a = 1, 2, \ldots, [\sqrt{r} \log n]$.

Кожна така перевірка займає $\tilde{O}(r(\log n)^2)$ часу, а отже загальний час буде $\tilde{O}(r^{3/2}(\log n)^3)$.

Оскільки $r$ більше ніж порядок $n \pmod r$, то $r > (\ln n)^2$. Отже, швидкість AKS алгоритму не менша ніж $\tilde{O}((\log n)^6)$. Було доведено, що існують $r$, які не перевищують $(\ln n)^3$, що дало змогу знайти верхню межу для швидкості AKS алгоритму. Подальші уточнення покращували верхню оцінку і нарешті на основі результату Baker та Harman досягли $\tilde{O}((\log n)^{7.49})$. Постало питання про можливість зменшення кількості кроків до $\tilde{O}((\log n)^6)$.

**4.3. Швидкість $(\log n)^6$.** Lenstra і Pomerance отримали бажану швидкодію алгоритму, значно модифікувавши AKS алгоритм. Більш того, тепер можливо знайти верхню границю часу прогону для всіх $n$.

Ключова ідея полягає в заміні многочлена з алгоритму AKS на многочлен $f(x)$ з певними властивостями.

**Означення.** Для даного нормованого многочлена $f(x)$ степені $d$ з цілими коефіцієнтами будемо казати, що $\mathbb{Z}[x]/(n, f(x))$ є *псевдополе*, якщо:

(a) $f(x^n) \equiv 0 \pmod{(n, f(x))}$,

(b) $x^{n^d} - x \equiv 0 \pmod{(n, f(x))}$,

(c) $x^{n^{d/q}} - x$ це одиниця в $\mathbb{Z}[x]/(n, f(x))$ для всіх простих $q$, що ділять $d$.

Lenstra і Pomerance отримали таке узагальнення Теореми 2:

**Терема 3.** *Нехай $n \geq 2$ і $d$ — ціле число з проміжку $((\log n)^2, n)$ для якого існує нормований многочлен $f(x)$ степені $d$ з цілими коефіцієнтами такий, що $\mathbb{Z}[x]/(n, f(x))$ — псевдополе. Тоді $n$ просте тоді і тільки тоді, коли*

- *$n$ не є абсолютним степенем,*
- *$n$ не має жодного простого множника $\leq d$,*
- *$(x + a)^n \equiv x^n + a \pmod{(n, f(x))}$ для всіх цілих $a$: $1 \leq a \leq \sqrt{d} \log n$.*

**4.4. Випадковий алгоритм з часом підрахунку $(\log n)^4$.** Бернштейн запропонував модифікований AKS алгоритм, який визначає прості числа і доводить їх простоту приблизно за $O((\log n)^{4+o(1)})$ кроків. Алгоритм є випадковим і не гарантовано дає відповідь. Проте кожного разу, запускаючи алгоритм, ймовірність того, що отримаємо відповідь не менша $\frac{1}{2}$. Запуски алгоритму є незалежними подіями, отже після 100 запусків ймовірність не визначити чи є число простим не перевищує $1/2^{100}$.

## 5. Хроніка покращення швидкості

У цьому параграфі ми наведемо одну з таблиць із [5], яка демонструє як відбувався прогрес у покращенні швидкості алгоритмів перевірки чисел на простоту.

| | 2+o(1) | 3+o(1) | 4+o(1) | 5+o(1) | 6+o(1) | O(1) | $O(\ln\ln\ln n)$ | велика |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| o(1) | | | | | 2004 | 2002 | 1983 | дуже давно |
| 2+o(1) | | | 2003 | 2003 | 2003 | 2002 | 1983 | дуже давно |
| O(1) | | 1992 | 1992 | 1992 | 1992 | 1992 | 1983 | дуже давно |
| велика | 1987 | 1914 | 1914 | 1914 | 1914 | 1914 | 1914 | дуже давно |

Рядки таблиці o(1), 2+o(1), ... відповідають значенням верхньої межі параметра $\gamma$ в оцінці швидкості $O((\ln n)^\gamma)$ знаходження відповіді за детермінованим або випадковим алгоритмом, стовпці таблиці 2+o(1), 3+o(1), ... відповідають значенням верхньої межі параметра $\gamma$ в оцінці швидкості перевірки відповіді за детермінованим алгоритмом, а відповідна клітинка таблиці дає рік у якому було запропоновано такий алгоритм.

Обговорення інших алгоритмів, оцінок їхньої швидкодії, строгі доведення та детальну бібліографію читач може знайти в [3, 4, 5].

## 6. Застосування тесту на простоту в криптографії

В криптографії ми прагнемо таємно передати інформацію від "А" до "Б" таким чином, щоб "С" (той хто перехоплює повідомлення) не міг прочитати лист.

Довільне повідомлення $m$, що складається з літер, можна перетворити в число замінюючи "а" на "01", "б" на "02", ... , а потім в декілька цілих чисел фіксованої довжини розрізавши довгий запис числа на шматки. Тому вважатимемо, що повідомлення $m$ - ціле число з $[1, n-1]$.

Ідея кодування полягає в застосуванні ключа $\Phi$(деякої простої математичної функції), який перетворює $m$ в $r := \Phi(m)$ для передачі. Число $r$ на вигляд має бути випадковим набором символів щоб "С" не міг розшифрувати повідомлення, а "Б" міг розкодувати, підрахувавши $\Psi(r)$, де $\Psi = \Phi^{-1}$. Отже зрозуміло, що потрібно зберігати в таємниці кодуючий ключ $\Phi$.

Здавалось, що якщо "С" має кодуючий ключ, то для нього має бути легким визначення декодуючого ключа за допомогою операції знаходження оберненої функції. Виявляється, що це не зовсім так, як демонструють наступні приклади криптосистем основані на складності факторизації великих чисел.

**6.1. RSA криптосистема.** У 1982, Ron Rivest, Adi Shamir і Len Adleman запропонували загальновідому криптосистему яка на сьогоднішній день є основою комп'ютерної безпеки і водночас досить проста для розуміння. Ідея полягає в тому, що обираються два великих простих числа $p < q$, і знаходять їх добуток $n = pq$. Визначають два цілих числа $d$ і $e$ так, що

$$de \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

(що досить просто). Ключ, який використовує "А", складається з числа $n$ і кодуючого ключа $e$, в той час як "Б" має таємний декодуючий ключ $d$, $p$ і $q$.

Щоб закодувати $m$, "А" підраховує $r := \Phi(m) \equiv m^e \pmod{n}$ (очевидно, що $\Phi(m) \in [1, n-1]$), що можна зробити досить швидко. Щоб розшифрувати повідомлення, "Б" обчислює

$$\Psi(r) := r^d \pmod{n},$$

де $\Psi(r) \in [1, n-1]$. Використовуючи малу теорему Ферма для $p$ і $q$ легко перевірити, що $m^{de} \equiv m \pmod{n}$, а отже $\Psi = \Phi^{-1}$.

Нехай "С" знає $n$. Якби він міг розкласти на множники $n$, то з легкістю визначив би $\Psi$. Отже безпека RSA криптосистем залежить від складності операції розкладу числа на множники. Як було зазначено раніше, на сьогоднішній день це досить довготривала операція, наприклад, якщо взяти $p$ і $q$ простими з більше ніж 200 знаками у запису. Однак знаходити такі великі прості числа досить легко, використовуючи метод AKS.

**6.2. Знаходження квадратного кореня за** $\bmod n$. В розділі 2.5 ми помітили, що якщо ми зможемо знайти квадратний корінь $b$ з $1 \bmod n$ який відмінний від $\pm 1$, то це доводить складеність числа $n$. В дійсності $b$ приводить до часткового розкладу непарного $n$:

$$\gcd(b-1, n)\ \gcd(b+1, n) = \gcd(b^2 - 1, n) = n. \tag{4}$$

Дійсно, $b^2 \equiv 1 \pmod{n}$, тоді як $\gcd(b-1, n)$, $\gcd(b+1, n) < n$ (оскільки $b \not\equiv 1$ або $-1 \pmod{n}$), що дає $1 < \gcd(b-1, n)$, $\gcd(b+1, n) < n$. А отже (4) забезпечує нетривіальний розклад на множники $n$.

Припустимо, що для даного непарного цілого складеного числа $n$, яке має хоча б два різних простих множника, "С" має функцію $f_n$ таку, що якщо $a$ — квадрат за mod $n$, то $f_n(a)^2 \equiv a \pmod{n}$. Використовуючи $f_n$, "С" може легко розкласти $n$ (за випадковий поліноміальний час). Для цього він випадково обирає ціле число $b$ з $[1, n-1]$, тоді $\gcd(f_n(b^2) - b, n)$ є нетривіальним множником $n$, якщо $b \not\equiv \pm f_n(b^2) \pmod{n}$. Оскільки є хоча б чотири квадратних корені з $b^2 \pmod{n}$, то ймовірність отримати частковий розклад $n$ не менша $\frac{1}{2}$.

Використовуючи цей підхід, Rabin побудував відому криптосистему, яку так само важко зламати, як і розкласти на множники $n$.

## Література


1. Оленко А., *Найбільше просте число*, У світі математики **3** (1997), № 1, 1–8.
2. Некрашевич В.В., Сущанський В.І., *Математичні проблеми XXI століття*, У світі математики **7** (2001), № 1, 6–11.
3. Agrawal M., Kayal N., Saxena N., *PRIMES is in* P, `http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.html` (2002).
4. Granville A., *It is easy to determine whether a given integer is prime*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), № 1, 3–38.
5. Bernstein D.J., *Distinguishing prime numbers from composite numbers: the state of the art in 2004*, `http://cr.yp.to/primetests.html`.

# Що можна отримати з опуклості синуса?

*Д. Мавло*

Я займаюсь геометрією спокійно і в тиші. А оскільки мене ніхто і ніщо не квапить, то я працюю більше для свого задоволення, аніж за посадою: я схожий на вельмож, охочих будуватися — я будую, ламаю, перебудовую аж доти, поки не вийде ... *Ж. Лагранж*

## 1. Про що йде мова

Загально відомо, яку визначну роль відіграє поняття опуклості в сучасній математиці та її застосуваннях. Будучи тісно пов'язаним з деякими іншими базовими поняттями математичного аналізу, такими як неперервність, диференційованість і монотонність, опуклість в тій чи іншій формі присутня в будь-якому курсі математичного аналізу. Ще декілька десятиліть тому (див. [1] і [2]) теорема Йєнсена, яка стверджує ([2], ст. 16), що для довільної функції $f(x)$, визначеної та диференційованої на інтервалі $[a, b]$, і такої, що $f'(x) < 0$, при будь-якому виборі точок $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ справджується нерівність

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right), \qquad \forall x_i \in [a; b], \tag{1}$$

була предметом серйозних монографій про нерівності. Нині не знайдеш жодної сучасної книги з математичного аналізу, в якій не розглядалася б нерівність (1) або її наслідки (нерівність Юнга, нерівність Гьольдера, нерівність Мінковського і т.д.), серед яких чудова нерівність про середнє арифметичне та середнє геометричне відіграє почесну, якщо не першу роль. Більше того, зараз опуклість через нерівність Йєнсена з деякими безпосередніми геометричними (в основному тригонометричними) застосуваннями стає однією з популярних тем лекційних курсів.[1] Будучи добре розробленою теоретично, ця тема не достатньо добре супроводжується відповідними задачами, більшість з яких подорожують з однієї книги до іншої (що можна легко побачити звертаючись до різних популярних книжок з математичного аналізу), стаючи безнадійно стандартними.

Мета цієї статті дуже скромна. Серед багатьох функцій $f(x)$ в (1) оберемо тільки одну функцію, але надзвичайно важливу, а саме $y = \sin x$, яка

[1]Багато цікавих нерівностей, пов'язаних з опуклістю, можна знайти в книзі нашого постійного автора Р.П.Ушакова та Б.І.Хацета [8]. Тема застосування нерівності Йєнсена до доведення інших нерівностей не нова для журналу "У світі математики". Вона розроблялась зокрема в роботі Є.І.Мурзака [9]. (Прим. перекладача)

перетворює (1) в нерівність

$$\sin\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\geq\frac{\sin x_1+\cdots+\sin x_n}{n},\qquad x_i\in[0;\pi],\ i=1,\ldots,n,\quad(2)$$

рівність в якій має місце тоді і лише тоді, коли всі $x_i$ рівні між собою. Ми подамо застосування нерівності Йєнсена (2), але тільки одного типу, скажімо в геометрії площини. Інакше кажучи, предметом цієї статті є геометричні нерівності (далі коротко ГН), які були об'єктом пильної уваги широкого загалу тих, хто вчиться і навчає математиці на протязі більше, ніж двох тисяч років, починаючи з часів Евкліда до наших днів. Ця тема є дуже цікавою з багатьох точок зору. Це невичерпне джерело першокласного "освітнього матеріалу" (див., наприклад, шедевр Казарінова [3]). Воно представляє собою унікальну комбінацію простоти і нетривіальності, яка задовольняє як смаки досвідчених професіоналів, так і ще недосвідчених аматорів (див. класичний набір [4]). Багато з добрих представників цієї процвітаючої області дослідження (див. обов'язковий сучасний набір [5]) є настільки провокуючими, привабливими і такими, доведення яких "не легко побачити, але є простими, коли побачиш", що тільки надзвичайна некомпетентність і титанічні зусилля можуть зробити цей предмет нудним. Автор скромно сподівається, що він не здатен на це.

Позначимо через $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — кути, $a$, $b$, $c$ — сторони, $m_a$, $m_b$, $m_c$ — медіани, $l_a$, $l_b$, $l_c$ — бісектриси кутів, $R$ — радіус описаного навколо довільного $\triangle ABC$ кола, див. також мал. 1–4. Далі представлені доведення наступних трьох базових нерівностей

$$S\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{abc}{a+b+c}\right),\qquad\text{(I)}$$

$$S\leq 3\left[\frac{1}{m_a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{m_b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{m_c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^{-1},\qquad\text{(II)}$$

$$S\leq\frac{3\sqrt{3}}{4\,(a+b+c)\left[\frac{a}{(a+b)(a+c)l_bl_c}+\frac{b}{(b+c)(b+a)l_cl_a}+\frac{c}{(c+a)(c+b)l_al_b}\right]}\qquad\text{(III)}$$

і дані без доведення ще чотирнадцять ГН, тісно пов'язаних з (I)–(III), що дозволить зацікавленому читачу перевірити свою майстерність і силу логічних міркувань.

Представлені доведення дуже подібні. Вони базуються на наступному простому підході, який містить два кроки: 1) вивчити уважно конфігурацію трикутника і знайти множину кутів $\delta_i$, сума яких $\sum_{i=1}^{k}\delta_i$ дорівнює одній і тій же константі $\Delta$, яка не перевищує $\pi$; якщо $\sum_{i=1}^{k}\delta_i$ залишається постійною незалежно від вигляду $\triangle ABC$ — це ваша удача; в доведенні (I) і (III), наприклад, $k=3$, $\Delta=\pi$; в доведенні (II) $k=6$, $\Delta=\pi$; в доведенні (IV) $k=3$, $\Delta=\frac{\pi}{2}$ і т.д.; 2) застосувати нерівність Йєнсена (2), використовуючи той факт, що "інтервал опуклості" функції $y=\sin x\in[0;\pi]$.

Ця проста ідея використовувалась тричі, що у відповідності з Поліа–Сеге [6] є достатнім для того, щоб вважатись "методом". Цей підхід принаймні

настільки старий як сама нерівність (I) і дуже наочний і простий у застосуванні. Але незважаючи на свою простоту, цей підхід виявляється дуже плідним і далеким від того, щоб бути повністю розробленим. Більшість нетривіальних ГН, представлених нижче і відсутніх як у класичному наборі [4], так і в сучасному наборі [5], підтверджують цю точку зору. Будь-який читач серед них може знайти декілька дорогоцінностей на свій смак, справжніх дорогоцінностей, які були просто пропущені міжнародною командою "мисливців за геометричними нерівностями" під час їх безпрецедентного полювання на протязі трьох століть, від часів Ейлера до наших днів.

## 2. Площа — сторони

Розпочнемо з ГН (I) — найпростішої з трьох. У вигляді (I) вона вперше була опублікована Каррі в 1966 році (див. [4], ст. 45), хоча в інших еквівалентних формах вона була відома значно раніше: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (Падоа (1925), [4], ст. 18), $a + b + c \le 3R\sqrt{3}$ (Накаяма (1925), Падоа (1925), [4], ст. 49).

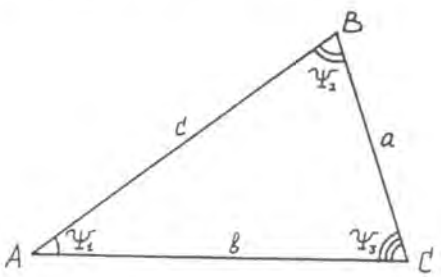
Нерівність чудова, тому що дає найбільш сильну верхню межу для $S$ в термінах $a$, $b$, $c$ з усіх нерівностей, представлених в [4] і опублікованих там без доведення. Її можна довести, звичайно, багатьма способами, але ми використаємо найпростіший підхід, описаний в попередньому розділі.

**Теорема 1.** *В позначеннях попереднього розділу для площі $S$ довільного трикутника має місце така нерівність*

$$S \le \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{abc}{a+b+c}\right), \tag{I}$$

*рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.*

*Доведення.* В нашому випадку (мал. 1) маємо




Мал. 1

$$\left.\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}bc\sin\psi_1 \Rightarrow \sin\psi_1 = \tfrac{2S}{bc} \\ S &= \tfrac{1}{2}ca\sin\psi_2 \Rightarrow \sin\psi_2 = \tfrac{2S}{ca} \\ S &= \tfrac{1}{2}ab\sin\psi_3 \Rightarrow \sin\psi_3 = \tfrac{2S}{ab} \end{aligned}\right] \Rightarrow \sum_{i=1}^{3}\sin\psi_i = 2S\left(\frac{a+b+c}{abc}\right). \tag{3}$$

Беручи до уваги, що $\sum_{i=1}^{3} \psi_i = \pi$, використовуючи частковий випадок (2) ($n = 3$), і підставляючи (3), отримаємо нерівність

$$\sin\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\psi_i\right) \geq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sin\psi_i \Leftrightarrow (I).$$

**Задача 1 (Карліц (1961), [4], ст. 46).** Використовуючи нерівність про середнє арифметичне і середнє геометричне, отримаємо з (I) такий наслідок

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3}, \tag{4}$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.

**Задача 2.** Доведіть, що ГН

$$l_a l_b l_c \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}abc$$

випливає з нерівності Каррі (I).

**Задача 3 (Мавло (2000), [7], ст. 44).** Доведіть таку ГН

$$S \leq \frac{2m_a m_b m_c}{a+b+c}, \tag{5}$$

рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.

**Задача 4 (Мавло (2000), [7], ст. 44).** Використовуючи ГН (I) і (5), доведіть, що

$$S \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt[3]{m_a m_b m_c l_a l_b l_c}, \tag{6}$$

рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.

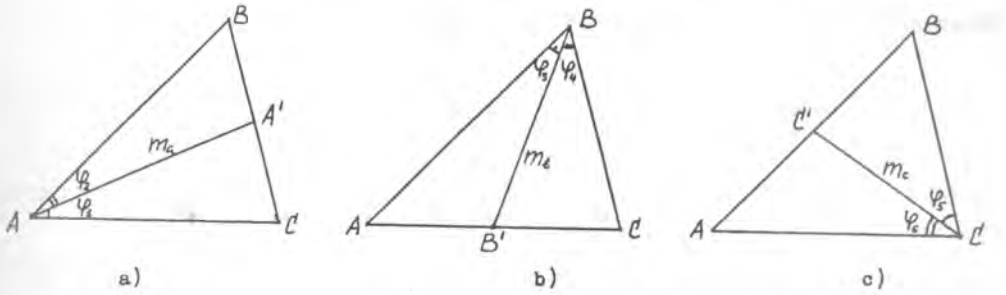
**Задача 5 (Мавло (2000), [7], ст. 44).** Використовуючи ГН (4) і (6), доведіть, що

$$S^3 \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(abcm_a m_b m_c l_a l_b l_c)^{2/3}, \tag{7}$$

рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.

## 3. Площа — медіани і сторони

Нашою наступною ризиковою справою є ГН (II) — інший потужний наслідок опуклості синуса, доведення якої такого ж типу, але трошки більш громіздке.




Мал. 2

**Теорема 2.** *В позначеннях розділу 1 має місце така нерівність для площі $S$ довільного трикутника*

$$S \leq \frac{3abcm_am_bm_c}{a(b+c)m_bm_c + b(c+a)m_cm_a + c(a+b)m_am_b} \tag{II}$$

*рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.*

*Доведення.* Розглянемо трикутники $AA'C$ і $AA'B$ на мал. 2a:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta AA'C : \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}m_a b \sin\varphi_1 \\ \Delta AA'B : \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}m_a c \sin\varphi_2 \end{array}\right] \Rightarrow \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 = \frac{S}{m_a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \tag{8}$$

Абсолютно аналогічно, розглядаючи мал. 2b і мал. 2c, робимо висновок, що

$$\sin\varphi_3 + \sin\varphi_4 = \frac{S}{m_c}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right), \tag{9}$$

$$\sin\varphi_5 + \sin\varphi_6 = \frac{S}{m_c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right). \tag{10}$$

Сумуючи почленно рівності (8)-(10), отримаємо тотожність:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{6} \sin\varphi_i &= \left[\frac{1}{m_a}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{m_b}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{m_c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] S \\ &= \left[\frac{a(b+c)m_bm_c + b(c+a)m_cm_a + c(a+b)m_am_b}{abcm_am_bm_c}\right] S. \end{aligned} \tag{11}$$

Завершальним кроком в доведенні є використання нерівності Йєнсена (2) для $n = 6$:

$$\sum_{i=1}^{6} \sin\varphi_i \leq 6\sin\left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\varphi_i\right) = 3. \tag{12}$$

Підставляючи (11) в (12), отримаємо нарешті бажану нерівність (II).

Наступні три задачі дають читачу можливість досягти більш глибокого розуміння предмету, по-перше, проясняючи взаємозв'язок між ГН (I) і (II), по-друге, перевіряючи (I) і (II) на застосуваннях.

**Задача 6.** Доведіть, що жодна з нерівностей (I) або (II) не є більш загальною, ніж інша.

**Задача 7.** Доведіть таку ГН

$$m_a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)+m_b\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c+a}\right)+m_c\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}\right)\geq\frac{9\sqrt{3}}{4}, \tag{13}$$

рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній. Використовуючи (13) і (II), доведіть ГН (6).

**Задача 8.** Використовуючи (I) і (II), доведіть ГН (7).

## 4. Площа — бісектриси кутів і сторони

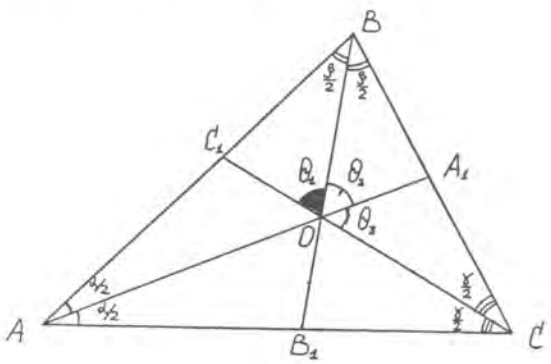
Нашим наступним пунктом виклику є ГН (III) — найбільш потужна з трьох (див. кінець цього розділу).

**Теорема 3.** *В позначеннях розділу 1 має місце наступна нерівність для площі $S$ довільного трикутника*

$$S\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)\,l_al_bl_c}{(a+b+c)\left[al_a(b+c)+bl_b(c+a)+cl_c(a+b)\right]}\right\}, \tag{III}$$

*рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.*

*Доведення.* Розглянемо $\Delta BC_1O$ (мал. 3) і виразимо його площу двома різ-




Мал. 3

ними способами:

$$S_{BC_1O}=\left(\frac{c}{a+b+c}\right)S_{BC_1C}=\left(\frac{c}{a+b+c}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)S, \tag{14}$$

$$S_{BC_1O}=\frac{1}{2}\,|OC_1|\cdot|OB|\sin\theta_1=\frac{c\,(a+c)}{2\,(a+b+c)^2}l_bl_c\sin\theta_1. \tag{15}$$

Співставляючи праві частини (14) і (15), зробимо висновок, що

$$\sin\theta_1=\frac{2a\,(a+b+c)\,S}{(a+b)\,(a+c)\,l_bl_c}. \tag{16}$$

Абсолютно аналогічно, розглядаючи трикутники $BA_1O$ і $CA_1O$, отримаємо

$$\sin\theta_2 = \frac{2c\,(a+b+c)\,S}{(c+a)\,(c+b)\,l_a l_b}, \tag{17}$$

$$\sin\theta_3 = \frac{2b\,(a+b+c)\,S}{(b+c)\,(b+a)\,l_c l_a}. \tag{18}$$

Сумуючи рівності (16)–(18) почленно, отримаємо рівність

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i = 2\,(a+b+c)\,S\left[\frac{a}{(a+b)\,(a+c)\,l_b l_c} + \frac{b}{(b+c)\,(b+a)\,l_c l_a} + \frac{c}{(c+a)\,(c+b)\,l_a l_b}\right]. \tag{19}$$

Завершальним кроком доведення є, як і раніше, є використання нерівності Йєнсена (2) для $n = 3$:

$$\sum_{i=1}^{3}\sin\theta_i \le 3\sin\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\theta_i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{20}$$

Підставляючи (19) в (20), отримаємо нарешті бажану нерівність (III).

Довівши всі основні три ГН, мабуть, настав час з'ясувати взаємозв'язок між ними. Доведемо, що з ГН (III) випливає ГН (I), що разом з відповіддю на задачі 6 і 9, повністю опише ситуацію. Якщо використати рівність, що може бути легко перевірена:

$$S = \frac{(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}{4abc\,(a+b+c)}\,l_a l_b l_c,$$

то без зусиль можна перетворити ГН (III) до такої елегантної еквівалентної форми:

$$3\sqrt{3}abc \ge a l_a\,(b+c) + b l_b\,(c+a) + c l_c\,(a+b). \tag{21}$$

Найпростіший спосіб показати, що (21) є дійсно узагальненням нерівності Каррі (I) — це використати очевидні ГН:

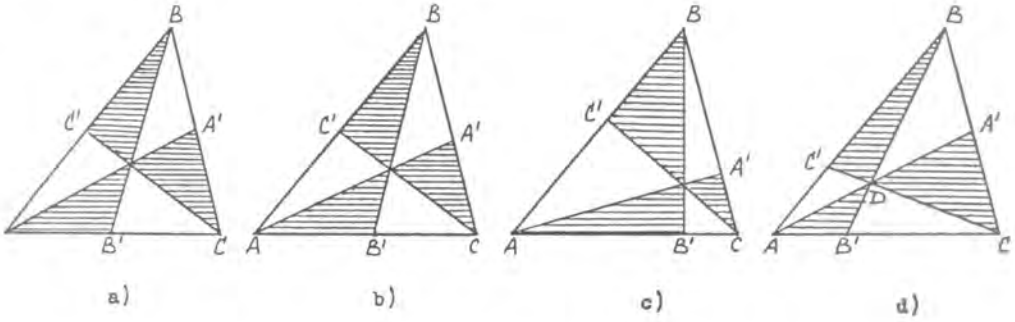
$$l_a \ge h_a, l_b \ge h_b, l_c \ge h_c.$$

Закінчити доведення просто, дійсно:

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3}abc &\ge a l_a(b+c) + b l_b(c+a) + c l_c(a+b) \\ &\ge a h_a(b+c) + b h_b(c+a) + c h_c(a+b) = 4S(a+b+c) \Leftrightarrow (I). \end{aligned}$$

Автор сподівається, що читач сприйме наступні задачі як свіжі і цікаві.

**Задача 9.** Доведіть, що ГН (III) є більш загальною, ніж ГН (II).




Мал. 4

**Задача 10.** Використовуючи результат задачі 9, доведіть таку ГН

$$(a+b+c)\left[\frac{\sqrt{a}}{l_b l_c}+\frac{\sqrt{b}}{l_c l_a}+\frac{\sqrt{c}}{l_a l_b}\right] \geq 2\sqrt{3}\left[\frac{\sqrt{a}}{m_a}+\frac{\sqrt{b}}{m_b}+\frac{\sqrt{c}}{m_c}\right],$$

рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній.

**Задача 11.** Нехай $AA'$, $BB'$, $CC'$ а) медіани довільного $\triangle ABC$ (мал. 4a); б) бісектриси кутів довільного $\triangle ABC$ (мал. 4b); в) висоти гострокутного $\triangle ABC$ (мал. 4c); г) прямі, що проходять через точки $A$, $B$, $C$ і довільну точку $D$ всередині довільного $\triangle ABC$ (мал. 4d). Доведіть, що добуток площ заштрихованих трикутників на мал. 4 дорівнює добутку площ незаштрихованих трикутників.

**Задача 12.** Наслідуючи лінію доведення, накреслену вище, отримайте таку ГН

$$S \leq \frac{3}{4}\left[\frac{1}{l_a\,(b+c)}+\frac{1}{l_b\,(c+a)}+\frac{1}{l_c\,(a+b)}\right]^{-1}, \qquad \text{(IV)}$$

рівність в якій має місце тоді і тільки тоді, коли трикутник рівносторонній. Визначте ієрархію загальності між ГН (I), (II), (III) та (IV).

**Задача 13.** Визначте, яка з ГН (I)–(IV) може стати в нагоді при доведенні таких ГН:

$$A)\quad \sqrt{a\,(b+c-a)}+\sqrt{b\,(c+a-b)}+\sqrt{c(a+b-c)} \leq \sqrt{\frac{27abc}{a+b+c}};$$

$$B)\quad \frac{\sqrt{b+c-a}}{a}+\frac{\sqrt{c+a-b}}{b}+\frac{\sqrt{a+b-c}}{c} \leq \frac{(a+b+c)^{3/2}}{4S};$$

$$C)\quad \sqrt{\left(\frac{b+c}{a}-1\right)\left(\frac{c+a}{b}-1\right)}+\sqrt{\left(\frac{c+a}{b}-1\right)\left(\frac{a+b}{c}-1\right)}$$
$$+\sqrt{\left(\frac{a+b}{c}-1\right)\left(\frac{b+c}{a}-1\right)} \leq 3;$$

$$D)\quad \sqrt{\frac{a}{b+c-a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a-b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{3abc}}$$

і доведіть їх, як можете.

## 5. Чи довго це триватиме, нарешті?

Наша подорож закінчилась і ми можемо кинути побіжний погляд на зроблене і згадати, що ми вивчили, що ми відкрили. Дві речі є досить дивними: 1) як багато можна досягти за допомогою лише однієї гарної ідеї (в нашому випадку — опуклості синуса та нерівності Йєнсена) і 2) скільки різних форм (часто віддалено схожих) може приймати один і той же математичний факт. Справді, більшість з поданих вище ГН є просто видозміною однієї і тієї ж нерівності (2) або наслідків з неї або наслідків її наслідків, які з'являються під різними покровами (в класичному геометричному стилі). Наведені вище задачі 1–13 мають різну складність, і розв'язання їх може дати читачу справжнє розуміння предмета. Автор скромно сподівається, що представлена стаття познайомить читача зі старою істиною: математика є грою розуміння, і вона дійсно представляє мій улюблений предмет — геометричні нерівності, чимось на кшталт витвору ювеліра, витвору мистецтва філігранної роботи, якими вони є і завжди будуть.

## Література

1. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд и Г. Полиа, *Неравенства*, Государственное издательство иностранной литературы, Москва, 1948.
2. Э. Беккенбах и Р. Беллман, *Неравенства*, "Мир", Москва, 1965.
3. N. D. Kazarinoff, *Geometric Inequalities*, Mathematical Association of America, 1961.
4. O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, Mitrinović, P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.
5. D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić, V. Volenec, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1989.
6. Г. Полиа и Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа*, т. 1, 2, "Наука", Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1978.
7. Д. П. Мавло, *Краса є істина: геометричні нерівності*, Математика в школі (2003), № 4, 44–48.

## Література, додана при перекладі

1. Р. П. Ушаков, Б. І. Хацет, *Опуклі функції та нерівності*, "Вища школа", Київ, 1986.
2. Є. І. Мурзак, *Доведення нерівностей за допомогою опуклих функцій*, "У світі математики" **9** (2003), № 2, 14–18.

Переклад з англійської Ольги Ядренко

# Про комбінаторні задачі з геометрії

*В. В. Вишенський*

Значний дидактичний потенціал комбінаторних задач не викликає тепер, здається, жодних сумнівів. Якщо не виходити за рамки шкільних реальностей, то його можна порівняти хіба що з потенціалом масиву геометричних задач на побудову. Ті й ті найліпше надаються до розвитку розумових здібностей та самостійної математичної творчості учнів, бо переважна більшість із них (задач) дистанційована від теоретичних засад якраз такою мірою, щоб спонукати розв'язувача до серйозного аналізу та пошуків індивідуальних шляхів. Проте є істотна різниця між долею цих двох масивів задач у сучасній школі. Задачі на побудову органічно вмонтовано в багаторічний теоретичний курс геометрії. Протягом кількох років вони природно постають час від часу перед учнем, стимулюючи його до конструктивної розумової діяльності та до щоразу нового осмислення фундаментальних математичних фактів. Натомість незначну кількість комбінаторних задач, до того ж переважно рецептурних, "під готову формулу", зібрано в окремому невеликому розділі, розрахованому всього на кілька годин. Комбінаторну "теорію" зведено до трьох формул для так званих сполук. Ці формули застосовуються до невеликої обойми штучно підібраних ілюстративних вправ, не об'єднаних жодною ідеєю. Тут не місце для полеміки з авторами програм та підручників. Слід сказати лишень, що реалізований ними метод впровадження комбінаторики в школі дискредитує цей предмет і зводить нанівець його потенціальні пізнавальні, дидактичні та виховні можливості.

Справжнього успіху досягти можна на зовсім іншій дорозі. Передусім слід прагнути до того, щоб комбінаторні задачі були якомога тісніше пов'язані з повсякденною практикою учня. А це переважно навчальна практика, особливо практика вивчення математики. Протягом кількох років перед ним розгортається панорама чітко формульованих фундаментальних ідей і фактів, зцементованих непохитною логікою. Проте по-справжньому осягнути цей створений генієм людини світ можна тільки одним способом: занурюватися в нього через задачі. Мистецтво навчати математики є передусім мистецтво добору задач. Добре, коли задача з'являється природно, невимушено, коли вона тісно пов'язана саме з нинішньою діяльністю учня. У цьому сенсі немає щасливіших типів задач над комбінаторні. Вони просяться на авансцену при вивченні будь-якого розділу традиційного шкільного курсу математики (а також біології, фізики тощо). Вони готові прислужитися до глибшого розкриття провідної теми відповідних фактів. Проте ці чудові можливості нехтують, збіднюючи масив задач, а отже математичні курси загалом.

Тож вкраплення комбінаторних задач у всі без винятку розділи шкільного курсу математики вигідне щонайменше з двох причин: по-перше, воно зба-

гатить задачний фонд відповідних розділів; по-друге, це єдиний розумний шлях ознайомити учнів з комбінаторним мисленням. Підкреслимо, що це ніяка не пропедевтика курсу комбінаторики. Це є сам цей курс, розосереджений "в часі і просторі", бо тільки так він зможе виправдати сподівання, що покладаються на нього. Турбуватися слід тільки про одне: вкраплення не повинне бути штучним; кожна задача має бути органічно пов'язана з головною темою розділу, а в ідеалі — висвітлювати тему в додатковому ракурсі.

Чи ж справді для першої-ліпшої теми можна знайти вартісну комбінаторну задачу? Та ще таку, щоб вона була породжена темою, а не штучно притягнута до неї. Сподіваємося в короткому часі опублікувати такі задачі для переважної більшості розділів арифметики, геометрії та початків аналізу. А в цій короткій замітці наведемо тільки окремі приклади.

Візьмемо розділ "Логарифми", найбільше, здавалося б дистанційований від комбінаторних проблем.

**Задача.** Хай відомий десятковий логарифм числа 2: $\lg 2 = c$. Скільки є цілих чисел в межах першої тисячі, десяткові логарифми яких можна обчислити, спираючись тільки на цю інформацію (без використання таблиць, калькуляторів і т.п.)?

Задача, безсумнівно, йде в ключі основної теми: передусім, ґрунтуючись на властивостях логарифмів, слід з'ясувати, логарифми яких цілих чисел можна визначити, спираючись на обмежені умовою задачі засоби та інформацію. Другий етап передбачає опрацювати методику підрахунку кількості таких чисел у межах першої тисячі, котрі не мають жодних інших простих дільників, окрім 2 і 5. А це суто комбінаторна проблематика.

Невичерпним джерелом високоякісних комбінаторних задач є шкільний курс геометрії. Ми зупинимося лише на кількох із них, пов'язаних з нерівністю трикутника.

**Задача 1.** Скільки є різних трикутників з цілими сторонами $a$ і $b$, у яких третя сторона також вимірюється цілим числом?

Відмінна задача, котра яскраво ілюструє вагу нерівності трикутника. В ній міцно переплетені геометричні, комбінаторні та арифметичні мотиви.

Хай $x$ — третя сторона. Трикутник зі сторонами $x$, $a$, $b$ існує в тому і тільки тому разі, коли водночас $x + a > b$, $x + b > a$ та $a + b > x$. Перші дві нерівності можна замінити однією: $x > |a - b|$ (добра, до речі, вправа на використання модуля). Остаточно необхідна і достатня умова існування трикутника набуває форми: $|a-b| < x < a+b$. Заключне запитання: скільки цілих точок містить відкритий проміжок, обмежений даними цілими точками? Відповідь: $x = a + b - |a - b| - 1$.

Залежно від рівня розв'язувача, задачу можна пропонувати також у полегшеному варіанті з конкретними значеннями $a$ і $b$.

**Задача 2.** Скільки є різних трикутників з цілими сторонами. У яких сума двох менших сторін становить $n$?

Задача добре надається до колективного її аналізу в класі або ж як невелика тема для самостійної дослідницької роботи. Вона передбачає широкий спектр підходів до свого розв'язання, а тому не нав'язує вчителеві якогось одного методичного вирішення, залишає йому значний вибір засобів. Ця варіативність у засобах — додаткова позитивна характеристика задачі. Віддавна ж бо відома істина: краще розв'язати одну задачу кількома способами. Ніж кілька задач одним способом.

Щоб уникнути повторень при перелікові шуканих трикутників, упорядкуємо від початку їхні сторони. Хай $x$ — найменша сторона трикутника, $n-x$ — його середня сторона, а $y$ — найбільша. Тож $x \le n-x \le y$. За цих умов для існування трикутника досить, щоб виконувалася тільки одна ще нерівність, а саме: $x+(n-x)>y$, цебто $y<n$. Далі можна рухатися різними шляхами. Можна дотримуватися суто арифметичних конструкцій, маніпулюючи нерівностями. Матимемо: $x \le \frac{n}{2}$, $n-x \le y < n$. Зважившись на те, що сторони трикутників вимірюються цілими числами, останню систему нерівностей тлумачимо так: $x$ може набувати довільних цілих значень від 1 до $\left[\frac{n}{2}\right]$, а $y$ при кожному значенні $x$ може змінюватися в проміжку $[n-x, n)$ (залишаючись цілим). Для кожного можливого значення $x$ для $y$ маємо $n-(n-x)=x$ значень, з чого робимо висновок, що шуканих трикутників є $1+2+3+\cdots+\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$.

Дуже корисним і повчальним є геометричне трактування задачі. Кожний шуканий трикутник визначають, як ми бачимо, двоє натуральних чисел $x$ та $y$, котрі поєднуються одне з одним за правилами, вираженими системою нерівностей

$$\begin{cases} 1 \le x \le \left[\frac{n}{2}\right], \\ n-x \le y \le n-1. \end{cases} \qquad (*)$$

З другого боку, кожні два числа $(x;y)$ можна тлумачити, як певну точку координатної площини. Виходить, що нерівності $(*)$ встановлюють однозначну в обидва боки відповідність (бієкцію) між трикутниками, що про них йдеться в нашій задачі, та певними точками координатної площини. Це дає підстави, зокрема, переформулювати саму задачу. Замість шукати трикутники, що мають певні властивості, можна шукати ті точки координатної площини, які їм відповідають за встановленою бієкцією, цебто ті точки, котрі мають натуральні координати $x$ та $y$, що підлягають нерівностям $(*)$. Побудувавши геометричний образ системи нерівностей $(*)$ дістанемо фігуру (в даному разі трикутник), цілі точки якої розв'язують задачу. Лишається лишень полічити їхню кількість. Ця методика особливо приваблює в тому разі, коли задача ставиться для конкретного $n$. Загалом же, вона має цілком очевидні позитивні якості, з-поміж яких найважливіші дві. По-перше, вона є доброю ілюстрацією дієвості комбінаторного принципу тотожності: скінченні множини, між якими можна встановити бієктивну відповідність, мають однакову кількість елементів. По-друге, цей підхід дає приклад справді ефективного (і досить ефектного) використання геометричного трактування системи нерівностей.

Третій підхід до розв'язання задачі можна назвати суто комбінаторним. Він складний як психологічно, так і логічно. Він може з'явитися, як віне-

ць детального і всебічного аналізу задачі, включно з аналізом інших (наприклад, наведених вище) її розв'язків та відповіді. Ось сутність цього розв'язку. Середня за розміром сторона трикутника $t$ може набувати значень $\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]+1, \ldots, n-1$ (всього $\left[\frac{n}{2}\right]$ різних значень). Найменша його сторона $x$ щоразу однозначно визначається з рівності $x+t=n$. Що ж стосується найбільшої сторони $y$, то вона також може дорівнювати тільки одному з чисел $\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]+1, \ldots, n-1$, але не може бути меншою від $t$. Утворимо множину $M=\left\{\left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \ldots, n-1, n\right\}$. Її двоелементні підмножини $\{a,b\}$, $a<b$ поділимо на дві групи: ті, у яких $b<n$, та ті, у яких $b=n$. З першими зіставимо трикутники, у яких $t=a$, $y=b$, а з другими — трикутники, у яких $t=y=a$. Дістанемо бієкцію між шуканими трикутниками та двохелементними підмножинами множини $M$. Тому всього трикутників є $C^2_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$.

Пропонуємо ще кілька задач цього циклу.

**Задача 3.** Скільки є різних рівнобедрених цілочислових трикутників, у яких найбільша сторона дорівнює $n$?

**Задача 4.** Скільки є всього різних цілочислових трикутників з найбільшою стороною $n$?

**Задача 5.** Скільки існує цілочислових трикутників у яких сума двох сторін дорівнює $n$?

**Задача 6.** Скільки існує цілочислових трикутників із середньою стороною $c$?

**Задача 7.** Скільки є цілочислових трикутників з найменшою стороною $p$ і найбільшою $q$?

**Задача 8.** Скільки є цілочислових трикутників, сторони яких утворюють арифметичну прогресію, а найменша з них дорівнює $a$?

**Задача 9.** Скільки є цілочислових трикутників, у яких сума найменшої і найбільшої сторін дорівнює $m$?

**Задача 10.** Скільки є цілочислових трикутників з даною сумою $m$ двох більших сторін?

# Про деякі цікаві залежності між коефіцієнтами і коренями рівняння третього степеня

*В. В. Крючковський, А. Н. Хомченко**

Проблемою відшукання коренів рівняння третього степеня

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{1}$$

всі коефіцієнти якого відмінні від нуля, займалися ще вавілонські, єгипетські, давньогрецькі, індуські, середньоазіатські математики [1].

Не зважаючи на те, що в XVI ст. італієць Джіроламо Кардано у праці "Велике мистецтво, або про правила алгебри" (1545 р.) виклав повну теорію розв'язання кубічного рівняння [2], проблема ця хвилює математиків (і не тільки математиків) по теперішній час. Одержана Кардано формула

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}},$$

де $q = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_1 \cdot a_2}{3} + a_0$; $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$; $p = -\frac{a_2}{3} + a_1$; дуже громіздка і майже не застосовна, особливо у випадку коли дискримінант рівняння $\Delta < 0$ [2].

Складність відшукання коренів рівняння (1) не дозволяє різноманітити шкільні і вузівські задачі — майже всі вони зводяться до рівнянь другого степеня. Потреба в знанні коренів рівняння (1) виникає в різних технічних розрахунках, як то, наприклад, для дослідження стійкості перехідних процесів у радіотехнічному обладнанні [3].

Розроблені методи відшукання наближених значень коренів рівняння (1) теж є громіздкими і забирають дуже багато часу [4].

Систематизація деяких цікавих залежностей між коефіцієнтами рівняння (1) і його коренями дозволить в окремих випадках легко знаходити ці корені.

Спочатку розглянемо найпростіші залежності.

1. Перш за все відмітимо, що загальні співвідношення між коефіцієнтами многочлена і його коренями установив ще у 1646 році Ф. Вієт [5]. Для рівняння (1) ці залежності будуть наступні:

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = a_2, \tag{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1, \tag{3}$$

$$-x_1x_2x_3 = a_0. \tag{4}$$

Тотожність (4) стверджує, що має місце наступний, відомий кожному школяреві, висновок.

* *Крючковський Віктор Володимирович* — к.ф.-м.н., професор кафедри прикладної математики і математичного моделювання Херсонського державного технічного університету; *Хомченко Анатолій Никифорович* — д.ф.-м.н., завідувач кафедри прикладної математики і математичного моделювання Херсонського державного технічного університету.

**Висновок.** Коренями $x_1, x_2, x_3$ можуть бути дільники вільного члена $a_0$ [2].

**Приклад.** Розв'язати кубічне рівняння

$$x^3 - 1.5x^2 - 5.5x + 3 = 0. \tag{5}$$

*Розв'язок.* Коренями цього рівняння можуть бути числа $\pm 1$, $\pm 3$. Легко перевірити, що $x = 3$ є коренем рівняння (5). Інші корені знаходимо за схемою: ділимо многочлен, що стоїть в лівій частині рівняння (5) на $(x - 3)$, а потім знаходимо корені одержаного квадратного рівняння

$$x^2 + 1.5x - 1 = 0.$$

*Відповідь*: $x_1 = -2$; $x_2 = 0.5$; $x_3 = 3$.

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння

$$x^3 - 50x^2 + 769x - 3600 = 0. \tag{6}$$

*Розв'язок.* Корені цього рівняння можуть бути серед дільників числа 3600. Перевірка показує, що числа 9, 16 і 25 задовольняють рівняння (6).

*Відповідь*: $x_1 = 9$; $x_2 = 16$; $x_3 = 25$.

*Зауваження 1.* В прикладі 1 серед чотирьох дільників числа 3 знайшовся один корінь — це $x_3 = 3$. Два інших кореня не являються дільниками числа 3. В прикладі 2 серед 80 дільників числа 3600 знайшлись всі три корені рівняння. Але може бути і таке рівняння, що серед дільників його вільного члена не знайдеться жодного кореня цього рівняння. Наприклад, ліва частина рівняння

$$x^3 - x^2 - 3x - 3 = 0$$

розкладається на множники

$$\left(x - \frac{\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{10} + 1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{10} - 2}{3}x + \sqrt[3]{10} - 1\right) = 0. \tag{7}$$

Дискримінант квадратного тричлена рівняння (7) від'ємний. Тобто два корені цього рівняння комплексно-спряжені. А дійсний корінь є ірраціональне число:

$$x = \frac{\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{10} + 1}{3}.$$

Хоча дільниками числа $a_0 = -3$ є числа $\pm 1$, $\pm 3$.

**2–3.** З (2)–(4) легко отримати такі залежності:

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = 1 + a_2 + a_1 + a_0; \tag{8}$$

$$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = (1 + a_1) - (a_2 + a_0). \tag{9}$$

З (8) і (9) робимо теж відомі висновки.

**Висновок 2.** Якщо сума коефіцієнтів рівняння (1) дорівнює нулю, то один із коренів цього рівняння $x_i = 1$ [6].

**Висновок 3.** Якщо в рівнянні (1) сума коефіцієнтів, що стоять при невідомих в непарних степенях дорівнює сумі коефіцієнтів, що стоять при невідомих в парних степенях, то один із коренів цього рівняння дорівнює $x_i = -1$.

**4.** Підставимо в рівняння (1) значення $x = -a_2$. Отримаємо:

$$-a_2^3 + a_2^3 - a_1 \cdot a_2 + a_0 = 0. \tag{10}$$

Звідки робимо наступний

**Висновок 4.** Якщо для коефіцієнтів рівняння (1) має місце співвідношення $a_2 \cdot a_1 = a_0$, то один із коренів цього рівняння $x_i = -a_2$.

Ліва частина рівняння (1) при $x_i = -a_2$ розкладається на множники

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x + a_2)(x^2 + a_1).$$

**5.** Зокрема, якщо коефіцієнти рівняння складають геометричну прогресію, то ліва частина рівняння (1) розкладається на множники

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x + a_2)(x^2 + a_2^2). \tag{11}$$

**Висновок 5 (наслідок висновку 4).** Якщо коефіцієнти рівняння (1) складають геометричну прогресію $\frac{a_2}{1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0}{a_1}$, то один із коренів цього рівняння $x_i = -a_2$.

**6.** Згрупуємо в рівнянні (1) перший доданок з останнім і другий з третім, одержимо:

$$(x^3 + a_0) + a_2x\left(x + \frac{a_1}{a_2}\right) = 0. \tag{12}$$

Легко бачити, що при $\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{a_0}$ з (12) маємо:

$$(x + \sqrt[3]{a_0})\left(x^2 + (a_2 - \sqrt[3]{a_0}) \cdot x + \sqrt[3]{a_0^2}\right) = 0. \tag{13}$$

З (13) робимо наступний

**Висновок 6.** Якщо для коефіцієнтів рівняння (1) має місце співвідношення

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{a_0}, \tag{14}$$

то один із коренів цього рівняння $x_i = -\sqrt[3]{a_0}$.

**Приклад 3.** Розв'язати рівняння

$$x^3 - 4x^2 + 32x - 512 = 0. \tag{15}$$

*Розв'язок.* Переконуємось, що мають місце такі співвідношення $\frac{a_1}{a_2} = -8$ і $\sqrt[3]{a_0} = -8$. Тому коренем рівняння (15) буде число $x = 8$, а ліва частина розкладається на множники $(x-8)(x^2+4x+64)$. Дискримінант квадратного тричлена $x^2 + 4x + 64$ від'ємний, тому із трьох коренів рівняння (15) буде дійсний тільки один.

*Відповідь*: $x = 8$.

*Зауваження 2.* Якщо коефіцієнти рівняння (1) зв'язані співвідношенням (14), то таке рівняння називається зворотним, а формула (14) називається характеристичною ознакою зворотного рівняння третього степеня. Зокрема, частковим випадком зворотних рівнянь є симетричні рівняння, для яких $\frac{a_1}{a_2} = \sqrt[3]{a_0} = 1$ [7].

Далі розглянемо нетривіальні залежності.

7. Порівняємо, наприклад, ліві частини рівняння (1) і тотожності

$$x^3 + 3bx^2 + 3b^2x + b^3 = (x + b)^3.$$

Приходимо до такої системи:

$$\begin{cases} a_1 = 3b^2; \\ a_2 = 3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{a_2} = b; \\ \frac{a_2}{3} = b; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{3}. \tag{16}$$

З (16) маємо:

$$a_1 = 3\left(\frac{a_2}{3}\right)^2. \tag{17}$$

Якщо для коефіцієнтів рівняння (1) має місце співвідношення (17), то рівняння (1) можна подати у вигляді (при $a_2 > 0$):

$$x^3 + 3\frac{a_2}{3}x^2 + 3\left(\frac{a_2}{3}\right)^2 x + \left(\frac{a_2}{3}\right)^3 - \left(\frac{a_2}{3}\right)^3 + a_0 = 0,$$

або $\left(x + \frac{a_2}{3}\right)^3 = \left(\frac{a_2}{3}\right)^3 - a_0$, звідки $x = \sqrt[3]{\left(\frac{a_2}{3}\right)^3 - a_0} - \frac{a_2}{3}$.

Пропонуємо читачеві перевірити, що до такого ж висновку ми прийдемо і при $a_2 < 0$.

**Висновок 7.** Якщо для коефіцієнтів рівняння (1) має місце співвідношення $a_2^2 = 3a_1$ $(a_0 \in R)$, то один із коренів цього рівняння $x_i = \sqrt[3]{\left(\frac{a_2}{3}\right)^3 - a_0} - \frac{a_2}{3}$.

**Приклад 4.** Розв'язати рівняння

$$x^3 - 4.8x^2 + 7.68x - 2.368 = 0. \tag{18}$$

*Розв'язок.* Переконаємось у виконанні умови $a_2^2 = 3a_1$: $(-4.8)^2 = 3 \cdot 7.68$. Тому коренем рівняння (18) буде число:

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{4.8}{3}\right)^3 + 2.368} + \frac{4.8}{3} = -1.2 + 1.6 = 0.4.$$

Поділивши многочлен, що стоїть в лівій частині рівняння (18) на двочлен $(x - 0.4)$ одержимо

$$(x - 0,4)(x^2 - 4.4x + 5.92) = 0. \tag{19}$$

Дискримінант квадратного тричлена рівняння (19) від'ємний, тому рівняння (19) має один дійсний корінь.

*Відповідь:* $x = 0.4$.

**8.** Нехай коефіцієнти рівняння (1) $1, a_2, a_1, a_0$ складають арифметичну прогресію з різницею $d$. Рівняння (1) в цьому випадку набуває вигляду:

$$P_3(x) = x^3 + (1 + d)x^2 + (1 + 2d)x + 1 + 3d = 0. \tag{20}$$

При довільному значенні $d$ маємо:

$$P_3(-d - 1) = -2d < 0, \quad P_3(-d + 1) = 4 > 0. \tag{21}$$

На основі (21) можна стверджувати (за теоремою Больцано–Коші [8]), що інтервалу $(-d - 1;\ -d + 1)$ належить корінь рівняння (20), або оскільки $d = a_2 - 1$, то $x \in (-a_2;\ -a_2 + 2)$.

**Висновок 8.** Якщо коефіцієнти рівняння (1) складають арифметичну прогресію, то один із коренів цього рівняння $x_i \in (-a_2; -a_2 + 2)$.

**Приклад 5.** Розв'язати рівняння

$$x^3 + (2 - \sqrt{2})x^2 + (3 - 2\sqrt{2})x + 4 - 3\sqrt{2} = 0. \tag{22}$$

*Розв'язок.* Для даного рівняння маємо:

$$a_2 - 1 = a_1 - a_2 = a_0 - a_1 = 1 - \sqrt{2} = d.$$

Робимо висновок, що коефіцієнти рівняння (22) складають арифметичну прогресію. Тому корінь цього рівняння знаходиться на інтервалі

$$x \in (-2 + \sqrt{2};\ \sqrt{2}).$$

Легко перевірити, що $x = -d = -a_2 + 1 = -1 + \sqrt{2}$ задовольняє рівняння (22).

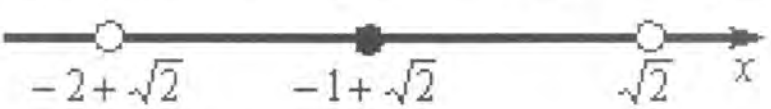



Рис. 1

*Відповідь*: $x = -1 + \sqrt{2}$.

**Приклад 6.** Розв'язати рівняння

$$x^3 + (2 + \sqrt{2})x^2 + (3 + 2\sqrt{2})x + 4 + 3\sqrt{2} = 0. \tag{23}$$

*Розв'язок.* Коефіцієнти рівняння (23) складають арифметичну прогресію з різницею $d = 1 + \sqrt{2}$. Тому корінь цього рівняння знаходиться на інтервалі $(-2 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$. Легко перевірити, що $x = -d = -a_2 + 1 = -1 - \sqrt{2}$ задовольняє рівняння (23).

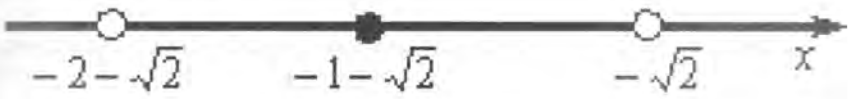



Рис. 2

*Відповідь*: $x = -1 - \sqrt{2}$.

**9.** За висновком 8 довжина інтервалу $(-a_2; -a_2 + 2)$, на якому знаходиться корінь рівняння (1) дорівнює 2. Але з прикладів 5 і 6 бачимо, що середина цього інтервалу $x = -a_2 + 1$ при окремих значеннях $a_2$ може бути коренем рівняння (1). Цей факт дозволяє звузити довжину інтервалу, на якому знаходиться корінь, до одиниці.

Дійсно, ліва частина рівняння (20) при $x = -d$ приймає вигляд:

$$P_3(-d) = 2 - (-d + 1)^2. \tag{24}$$

Графік функції (24) показано на рис.3. Як бачимо значення $x = -d$ буде коренем рівняння тільки у двох випадках: при $d = 1+\sqrt{2}$, або при $a_2 = 2+\sqrt{2}$ і при $d = 1 - \sqrt{2}$, або при $a_2 = 2 - \sqrt{2}$. В цих випадках значення $x = -1 - \sqrt{2}$ і $x = -1 + \sqrt{2}$ задовольняють рівняння (1), що ми і отримали в прикладах 5 і 6.

Керуючись рис. 3, робимо висновки:

$$P_3(-d) < 0 \quad \text{при} \quad -d \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}; \infty);$$

$$P_3(-d) = 0 \quad \text{при} \quad -d = -1 - \sqrt{2} \quad \text{і} \quad -d = -1 + \sqrt{2};$$

$$P_3(-d) > 0 \quad \text{при} \quad -d \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}).$$

Або з урахуванням рівності $-d = -a_2 + 1$ маємо:

$$P_3(-a_2 + 1) < 0 \quad \text{при} \quad a_2 \in (-\infty; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}; \infty);$$

$$P_3(-a_2 + 1) = 0 \quad \text{при} \quad a_2 = 2 - \sqrt{2} \quad \text{і} \quad a_2 = 2 + \sqrt{2};$$

$$P_3(-a_2 + 1) > 0 \quad \text{при} \quad a_2 \in (2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}),$$

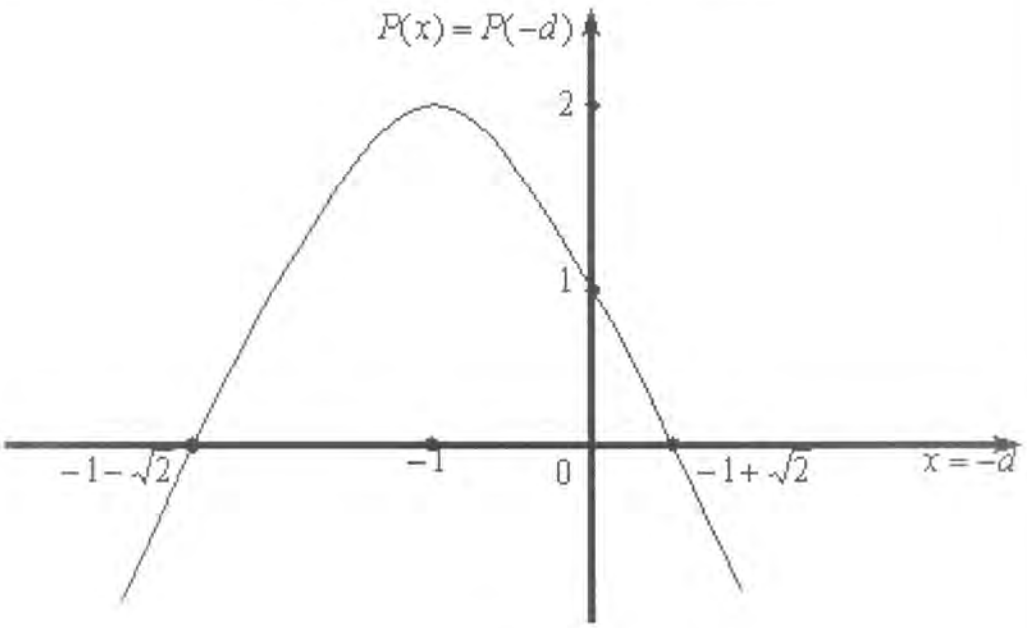



Рис. 3

Оскільки за висновком 8 корінь рівняння (1) обов'язково знаходиться на інтервалі $x \in (-a_2; -a_2+2)$, то тепер цей інтервал точкою $-d = -a_2+1$ розбивається на два інтервали:

$$x \in (-a_2; -a_2+1] \quad \text{при} \quad a_2 \in [2-\sqrt{2};\, 2+\sqrt{2}] \quad \text{і}$$

$$x \in (-a_2+1; -a_2+2) \quad \text{при} \quad a_2 \in (-\infty;\, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}; \infty).$$

**Висновок 9.** Якщо коефіцієнти рівняння (1) складають арифметичну прогресію, то один із коренів цього рівняння

$$x_i \in (-a_2; -a_2+1], \quad \text{коли} \quad a_2 \in [2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}] \quad \text{і}$$

$$x_i \in (-a_2+1; -a_2+2), \quad \text{коли} \quad a_2 \in (-\infty; 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}; \infty).$$

**Приклад 7.** Розв'язати рівняння

$$x^3 + \frac{13}{18}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{3}{18} = 0. \tag{25}$$

*Розв'язок.* Легко перевірити, що коефіцієнти даного рівняння складають арифметичну прогресію з різницею $d = -\frac{5}{18}$. Оскільки

$$a_2 = -\frac{13}{18} \in (2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}),$$

то за висновком 9 невідоме $x$, що задовольняє рівняння (25), належить інтервалу $(-a_2; -a_2+1) = \left(-\frac{13}{18}; \frac{5}{18}\right)$. Можна показати, що $x = -\frac{9}{18}$ є коренем рівняння (25).

*Відповідь*: $x = -0.5$.

Пропонуємо читачеві розв'язати самостійно такі рівняння:

1. $x^3 - 11x^2 + 34.99x - 24.99 = 0$. $\{1; 4.9; 5.1\}$.
2. $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$. $\{1\}$.
3. $x^3 - 4x^2 + 1,25x + 6,25 = 0$. $\{-1; 2.5; 2.5\}$.
4. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$. $\{-1; 2; 3\}$.
5. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. $\{-1\}$.
6. $x^3 + 2.75x^2 - 14.12x - 38.83 = 0$. $\{-\sqrt{14.12}; -2.75; \sqrt{14.12}\}$.
7. $x^3 + 5x^2 + 25x + 125 = 0$. $\{-5\}$.
8. $x^3 - 1.3x^2 + 1.69x - 2.197 = 0$. $\{1.3\}$.
9. $27x^3 + 54x^2 + 36x - 19 = 0$. $\{1/3\}$.
10. $x^3 + 3x^2 + 4.5x + 3.375 = 0$. $\{-1.5\}$.
11. $x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^-1 = 0$. $\{1\}$.
12. $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$. $\{-1\}$.

## Література


1. Коба В.І., Чуб О.Т., Нікулін М.А., *Бесіди про рівняння*, "Рад. шк.", Київ, 1986, стор. 5–7.
2. Ядренко О.М., *Пристрасті навколо алгебраїчних рівнянь*, У світі математики **9** (2003), № 2, 29–38.
3. Гаврилов Г.К., *Приближенные методы анализа переходных процессов*, "Советское радио", Москва, стор. 14–77.
4. Исаков В.Н., *Элементы численных методов*, Изд. центр "Академия", Москва, 2003, стор. 41–74.
5. *Математическая энциклопедия*, т. 1, "Советская энциклопедия", Москва, 1977, стор. 694.
6. Тригг Ч., *Задачи с изюминкой*, "Мир", Москва, 2000.
7. Саушкін О.Ф., *Рівняння вищих степенів, методи їх розв'язань та контрольні індивідуальні завдання*, КНЕУ, Київ, 1999.
8. Шкіль М.І., *Математичний аналіз*, т. 1, "Вища школа", Київ, 1978.

# Підсумки дев'ятої заочної математичної олімпіади журналу "У світі математики"

*В. Брайман, С. Горовий, М. Пупашенко*

Заочна математична олімпіада журналу "У світі математики" є вже традиційною подією і щороку стає все більш популярною. Все більше учнів з усіх регіонів України надсилають свої розв'язки до запропонованих задач і, треба зауважити, справляються з цим дуже непогано. Цікаво, що цього року рівно дев'ять учнів спромоглися розв'язати всі задачі (проти п'яти у минулому), адже цього року олімпіада проводиться вже вдев'яте. Сподіваємося, що і надалі спостерігатиметься тенденція росту якості запропонованих розв'язків і зацікавленості учнів. А зараз ми з радістю вітаємо переможців і призерів IX Заочної математичної олімпіади журналу "У світі математики":

11 клас

**I місце.**
Горова Юлія (м. Київ)
Кузнєцов В. (м. Київ)
Лівінський Іван (м. Київ)
Лужевська К. (м. Київ)
Хоменко Л. (м. Київ)

**II місце.**
Андрашко Юрій (м. Ужгород)
Литвин А. (м. Саки)
Чепляка Роман (м. Одеса)

**III місце.**
Карбовнича К. (м. Черкаси)
Плахотний А. (м. Черкаси)

10 клас

**I місце.**
Гончарук Н. (м. Харків)
Петров Олег (м. Одеса)
Рагель Ярослав (м. Ужгород)

**II місце.**
Деркач Володимир (м. Ніжин)
Коваль Олександра (м. Вінниця)
Петренко В. (Вінницька обл.)

**III місце.**
Іванов Ілья (м. Дніпропетровськ)
Коваль Ірина (м. Жовті Води)
Чорі Наталія (Закарпатська обл.)
Материнський Ол. (Вінницька обл.)
Андрієнко Ігор (Вінницька обл.)

9 КЛАС

**І місце.**
Садовий М. (м. Ужгород) Скорик М. (м. Харків)

**ІІ місце.**
Медвідь В. (м. Львів)

**ІІІ місце.**
Реу Олена (Одеська обл.)

8 КЛАС

**ІІ місце.**
Пилипась Ганна (м. Жовті Води)

**ІІІ місце.**
Шпинковський О. (м. Одеса)

7 КЛАС

**І місце.**
Нємцева Тетяна (Луганська обл.)

6 КЛАС

**І місце.**
Дудкін Олександр (м. Харків)

**ІІ місце.**
Голіцин Володимир (м. Харків)

5 КЛАС

**ІІ місце.**
Баган Ол. (м. Київ)

За результатами олімпіади всі призери, які є учнями 11 класів, були запрошені на очний тур вступної олімпіади механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Учні 5 -10 класів, що вибороли І та ІІ місця в олімпіаді, були нагороджені книжками.

Вітаємо усіх переможців та призерів олімпіади з їх досягненнями, які для когось були першими, і, сподіваємось, не останніми.

Тепер нагадаємо умови та наведемо розв'язки задач олімпіади.

1. У садку росте 6 яблунь. Чи може виявитись, що серед будь-яких трьох яблунь одна знаходиться на рівних відстанях від двох інших?

*Розв'язок.* Може. Яблуні слід посадити у вершинах та центрі правильного п'ятикутника.

**2.** Після завершення футбольного чемпіонату, в якому кожна команда зустрілася з кожною іншою, виявилось, що рівно чверть команд не зазнала жодної поразки та жодна гра не закінчилась внічию. Скільки команд брали участь у чемпіонаті?

*Розв'язок.* Не програти жодного разу могла лише одна команда, бо якби таких команд було принаймні дві, то в грі між ними одна з цих команд зазнала б поразки. Тому команд було чотири.

**3.** На столі лежать картки, на яких по одному разу виписано всі пари різних чисел $(m,n)$, $1 \le m < n \le 2005$. Двоє гравців по черзі беруть зі столу одну з карток, пишуть на дошці добуток чисел, що написані на цій картці та викидають її. Гравець, після ходу якого найбільший спільний дільник записаних на дошці чисел дорівнює одиниці, програє. Хто з гравців має виграшну стратегію?

*Розв'язок.* Нехай перший гравець спочатку візьме картку $(1,2)$. Тоді подальша гра зведеться до використання в довільному порядку усіх карток, на яких принаймні одне число парне. Таких карток $\frac{2005\cdot 2004}{2} - \frac{1002\cdot 1003}{2}$ — непарна кількість, а отже останній непрограшний хід зробить перший гравець, тобто він виграє.

**4.** Розв'язати рівняння $x^4 + x^2 - 4x = 3$.

*Розв'язок.* Маємо

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 4x - 4 = 0, \qquad (x^2+1)^2 - (x+2)^2 = 0,$$

$$(x^2 - x - 1)(x^2 + x + 3) = 0, \qquad x^2 - x - 1 = 0, \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

**5.** На вечірці зібралося $N$ хлопчиків та $N$ дівчат. Кожному хлопчику подобається $r$ дівчат, а кожній дівчинці — $s$ хлопчиків. При яких $r$ та $s$ обов'язково знайдуться хлопчик та дівчинка, що подобаються один одному?

*Розв'язок.* При $r+s \le N$ занумеруємо окремо хлопчиків і дівчаток числами від 1 до $N$. Нехай $k$-ому хлопчику подобається $l$-та дівчинка, якщо остача від ділення $k-l$ на $N$ набуває значень від 0 до $r-1$, а $l$-ій дівчинці подобається $k$-ий хлопчик, якщо ця остача набуває значень від $r$ до $r+s-1$. Тоді жодні дівчинка та хлопчик не подобаються один одному.

При $r+s \ge N+1$ підрахуємо пари (хлопчик, дівчинка), в яких хоча б одна особа подобається іншій. Отримаємо $Nr + Ns = (r+s)N > N^2$ пар, отже хоча б одну (насправді принаймні $N$) пару пораховано двічі, тобто хлопчик та дівчинка подобаються один одному.

*Відповідь:* $r + s \ge N + 1$.

**6.** На площині намальовано коло. Як за допомогою лише лінійки опустити перпендикуляр з даної точки поза колом на дану пряму, що проходить через центр цього кола?

*Розв'язок.* Нехай $A$ та $BC$ — дані точка та діаметр кола. Проведемо прямі $AB$ та $AC$ до перетину з колом у деяких інших точках $C_1$ та $B_1$ відповідно

(якщо $AB$ або $AC$ — дотична до кола, то це і є шуканий перпендикуляр). Тоді $\angle BB_1C = \angle BC_1C = 90°$, тобто $B_1B$ та $CC_1$ — висоти $\triangle ABC$. Тоді третя висота з вершини $A$ проходить через точку перетину $B_1B$ та $CC_1$.

7. Для довільних $x, y, z \geq 0$ довести нерівність

$$x(y-z)^2 + y(x-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z).$$

*Розв'язок.* Після розкриття дужок та зведення подібних членів нерівність зводиться до вигляду $z(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0$, або

$$\frac{z}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2) \geq 0.$$

8. Продовження бічних сторін $AB$ та $CD$ трапеції $ABCD$ перетинаються в точці $E$. Позначимо $H$ та $G$ середини $BD$ та $AC$. Знайти відношення площі $\triangle EGH$ до площі $ABCD$.

*Розв'язок.* Нехай $AD = a > BC = b$, висота трапеції дорівнює $h$, а $H$ — висота трикутника $\triangle AED$, опущена на $AD$. Тоді з подібності трикутників $\triangle AED$ та $\triangle BEC$ маємо $\frac{H-h}{b} = \frac{H}{a}$, звідки $H = \frac{ah}{a-b}$. Звідси висота трикутника $\triangle EHG$ дорівнює $\frac{1}{2}h + (H-h) = \frac{(a+b)h}{2(a-b)}$, бо $H, G$ належать середній лінії трапеції $ABCD$. Оскільки $GH = \frac{a-b}{2}$ як різниця довжин середніх ліній трикутників $\triangle ABD$ та $\triangle ABC$, то площа трикутника $\triangle EGH$ дорівнює $\frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{(a+b)h}{2(a-b)} = \frac{(a+b)h}{8}$. Але площа трапеції $ABCD$ дорівнює $\frac{(a+b)h}{2}$, звідки шукане відношення площ $\frac{1}{4}$.

9. Довести, що для будь-яких натуральних чисел $A < B$ серед довільних $B$ послідовних натуральних чисел знайдуться два різні числа, добуток яких ділиться на $AB$.

*Розв'язок.* Нехай $A = ad$, $B = bd$, де $d$ — найбільший спільний дільник чисел $A$ та $B$. Серед $B$ послідовних натуральних чисел деякі $b$ діляться на $d$, причому після ділення отримуються $b$ послідовних натуральних чисел. Принаймні по одному з цих $b$ чисел діляться на $b$ та на $a$. Ці числа знову помножені на $d$ — шукані (якщо серед $b$ чисел деяке одночасно ділиться на $a$ та $b$, то друге число візьмемо довільне). Тоді добуток обраних чисел ділиться на $d^2$, бо кожне з них ділиться на $d$, та на $ab$, бо $a$ та $b$ — взаємно прості. Тому добуток ділиться на $d^2ab = AB$.

10. У рівнобедреному трикутнику $ABC$ ($AB = AC$) бісектриса кута $\angle B$ перетинає $AC$ в точці $D$, причому $BC = BD + AD$. Знайти кут $\angle A$.

*Розв'язок.* Нехай $\angle ABC = \angle ACB = 2\alpha$. Тоді $\angle DBC = \alpha$, $\angle BAC = 180° - 4\alpha$, $\angle BDC = 180° - 3\alpha$. Виразимо $AD$ та $BC$ через $BD$ за допомогою синусів. Маємо $\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\sin(180°-4\alpha)}$, $AD = BD \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}$ та $\frac{BC}{\sin(180°-3\alpha)} = \frac{BD}{\sin 2\alpha}$, $BC = BD \cdot \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$. Отримали рівняння для визначення кута $\alpha$:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 1 + \frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha}, \qquad \sin 3\alpha \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \sin 4\alpha + \sin\alpha \sin 2\alpha,$$

$$2(\cos\alpha - \cos 7\alpha) = 2(\cos 2\alpha - \cos 6\alpha + \cos\alpha - \cos 3\alpha),$$

$$2(\cos 6\alpha - \cos 7\alpha) = 2(\cos 2\alpha - \cos 3\alpha), \quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{13\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha}{2},$$

$$\sin\frac{13\alpha}{2} = \sin\frac{5\alpha}{2}.$$

Але $2\alpha < 90°$, тому $0 < \frac{5\alpha}{2} < \frac{13\alpha}{2} < 360°$, а отже рівність $\sin\frac{13\alpha}{2} = \sin\frac{5\alpha}{2}$ рівносильна тому, що $\frac{5\alpha}{2} + \frac{13\alpha}{2} = 180°$, звідки $\alpha = 20°$, $\angle A = 180° - 4\alpha = 100°$.

**11.** Знайти кількість впорядкованих трійок невід'ємних цілих чисел, про які відомо, що в кожному числі цифри не повторюються та йдуть у порядку зростання, а кожна цифра від 1 до 9 зустрічається у записі або одного, або двох чисел трійки.

*Розв'язок.* Кожна цифра від 1 до 9 є в записі або 1-го, або 2-го, або 3-го, або 1-го та 2-го, або 1-го та 3-го, або 2-го та 3-го чисел трійки. Як тільки ми розподілили ці цифри, впорядкована трійка утворюється так: в кожному з чисел розставляємо цифри від 1 до 9, які є в записі цього числа, в порядку зростання, а якщо жодна з цих цифр не зустрічається в записі числа, то це число — нуль (в умові йшлося саме про невід'ємні цілі, а не натуральні числа!). Отже маємо $6^9$ способів утворити трійку, бо для кожної цифри від 1 до 9 незалежно обирається одна з 6 можливостей.

**12.** Нехай $\alpha, \beta, \gamma$ — корені рівняння $x^3 - x - 1 = 0$. Обчислити

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

*Розв'язок.* Зауважимо, що якщо розглядати лише дійсні корені рівняння, то умова задачі не має сенсу, бо існує лише один дійсний корінь рівняння $x^3 - x - 1 = 0$. Це можна обґрунтувати, наприклад, досліджуючи функцію $f(x) = x^3 - x - 1$ за допомогою похідної, та учасникам олімпіади, які навели таке обґрунтування, задачу також було зараховано. З іншого боку, кубічне рівняння $x^3 - x - 1 = 0$ має три корені $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ в множині комплексних чисел і тоді можна шукати значення виразу

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = -1 - \frac{2}{\alpha-1} - 1 - \frac{2}{\beta-1} - 1 - \frac{2}{\gamma-1}.$$

Помітимо, що числа $\alpha - 1$, $\beta - 1$ та $\gamma - 1$ є коренями рівняння

$$(x+1)^3 - (x+1) - 1 = 0,$$

тобто $x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$, а числа $\frac{1}{\alpha-1}$, $\frac{1}{\beta-1}$ та $\frac{1}{\gamma-1}$ — коренями рівняння $\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 1 = 0$, тобто $x^3 - 2x^2 - 3x - 1 = 0$. Це означає, що

$$\left(x - \frac{1}{\alpha-1}\right)\left(x - \frac{1}{\beta-1}\right)\left(x - \frac{1}{\gamma-1}\right) = x^3 - 2x^2 - 3x - 1,$$

звідки

$$\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} + \frac{1}{\gamma-1} = 2$$

Отже,

$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma} = -3 - 2\left(\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} + \frac{1}{\gamma-1}\right) = -7.$$

# LX Київська міська олімпіада юних математиків

*В. Б. Брайман, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов*

16 січня в місті Києві була проведена чергова Міська олімпіада з математики серед учнів 7–11 класів. В ній взяли участь понад 800 школярів міста Києва. В цьому номері ми наводимо умови та розв'язки задач олімпіади.

## Умови задач

**7 клас.**

**1.** На телеграфному дроті на відстані 1м один від одного сиділи $2N$ горобців. Потім вони злетіли у повітря та знову розсілися на дроті на відстані 1м один від одного, але вже в іншому порядку. Чи можна розбити горобців на пари таким чином, щоб відстань між горобцями кожної пари після перельоту не збільшилася?

**2.** Про цілі числа $a$, $p$, $q$, $r$ та $s$ відомо, що $s$ не ділиться на 5, а число $pa^3+qa^2+ra+s$ ділиться на 5. Довести, що число $ra^3+sa^2+pa+q$ також ділиться на 5.

**3.** Песик Гав може з'їсти палку докторської ковбаси за 2 хвилини, а палку любительської ковбаси за 3 хвилини, а кицька Мяу може з'їсти палку докторської ковбаси за 5 хвилин, а палку любительської ковбаси за 4 хвилини. Будь-яку палку ковбаси вони можуть їсти одночасно з різних боків. За який найменший час вони разом можуть з'їсти 2 палки ковбаси, одна з яких докторська, а інша — любительська?

**4.** Знайти найменшу можливу сторону квадрата, всередині якого можна розмістити п'ять однакових квадратів зі стороною 1 так, щоб вони не мали спільних внутрішніх точок та сторони цих квадратів були паралельні сторонам великого квадрата.

**8 клас.**

**1.** Знайти всі пари простих чисел $p$, $q$, при яких рівняння $x^5-px^2+q=0$ має цілий корінь.

**2.** На телеграфному дроті на відстані 1 м один від одного сиділи $2N$ горобців. Потім вони злетіли у повітря та знову розсілися на дроті на відстані 1 м один від одного, але вже в іншому порядку. Чи завжди знайдуться такі три горобці, що жодна з відстаней між ними після перелітання не збільшилася?

**3.** Двоє гравців по черзі записують у вільні клітинки квадратної таблиці $n\times n$ числа $1,2,3,\ldots$ (саме в такому порядку) так, щоб числа, що відрізняються на одиницю, завжди потрапляли у клітинки, що мають спільну сторону. Гра закінчується, коли хтось з гравців не може зробити хід (тоді оголошується нічия) або коли після чергового ходу одного з гравців в деяких клітинках,

що мають спільну сторону, опиняються числа, що відрізняються не менше, ніж на 3, і тоді гравець, що зробив цей хід, програє. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто?

**4.** Песик Гав може з'їсти палку докторської ковбаси за 1 хвилину, а палку любительської ковбаси за 2 хвилини, а кицька Мяу може з'їсти палку докторської ковбаси за 2 хвилини, а палку любительської ковбаси за 3 хвилини. Будь-яку палку ковбаси вони можуть їсти одночасно з різних боків. За який найменший час вони разом можуть з'їсти 2 палки ковбаси, одна з яких — докторська, а інша — любительська?

**5.** Нехай $ABCDEF$ — правильний шестикутник. На прямій $AF$ відмітили точку $X$ так, що $\angle DCX = 45^\circ$. Знайти величину кута $\angle FXE$.

**9 клас.**

**1.** Спростити вираз $\sqrt[4]{(x - 2\sqrt{xy} + y)^2}$.

**2.** Розв'язати рівняння в цілих числах:

$$xyz\left(x^3 - y^3\right)\left(y^3 - z^3\right)\left(z^3 - x^3\right) + 200420052006 = 0.$$

**3.** Двоє гравців грають у таку гру. У крайніх клітинах дошки $1 \times 2005$ стоять дві фішки. За один хід можна пересунути будь-яку з двох фішок на одну клітинку в довільному напрямку, якщо ця клітинка не зайнята іншою фішкою. Програє той гравець, після ходу якого деяке розташування фішок повторюється. Хто виграє при правильній грі?

**4.** Позначимо $\sigma(n)$ суму усіх натуральних дільників числа $n$, які менші за саме число $n$. Довести, що існує нескінченно багато натуральних чисел $n$, для яких $\sigma(\sigma(n)) > \sigma(n) > n$.

**5.** Див. задачу 8.5.

**10 клас.**

**1.** Див. задачу 9.1.

**2.** Про додатні числа $a, b, c$ відомо, що $a + b + c = 3$. Довести нерівність

$$(a+b)\cdot\frac{c-1}{c+1} + (b+c)\cdot\frac{a-1}{a+1} + (c+a)\cdot\frac{b-1}{b+1} \le 0.$$

**3.** Див. задачу 9.4.

**4.** В прямокутному трикутнику $\triangle ABC$ з прямим кутом $C$ на сторонах $AC$ і $AB$ обрано точки $M$ і $N$ відповідно так, що $CM = MN$ і $\angle MNB = \angle CBM$. Нехай точка $K$ — проекція точки $C$ на відрізок $MB$. Довести, що пряма $NK$ проходить через середину відрізка $BC$.

**5.** Знайти усі функції $f$, які визначені на множині цілих чисел, набувають цілих значень та задовольняють умову

$$f(m + f(n)) = f(m + n) + 2n + 1 \quad \text{при всіх цілих } m, n.$$

**11 клас.**

**1.** Нехай $S_k$ — сума перших $k$ членів арифметичної прогресії, яка складається з цілих чисел. Відомо, що при деяких різних натуральних $n, m$ виконується рівність $S_n = S_m$. Довести, що $S_{m+n}$ завжди є квадратом цілого числа.

**2.** Коло дотикається до сторін $AC$ і $AB$ трикутника $\triangle ABC$ в точках $B_1$ і $C_1$ відповідно. Відрізки $BB_1$ та $CC_1$ рівні. Довести, що трикутник $\triangle ABC$ рівнобедрений.

**3.** Довести, що існують набори більших за 1 натуральних чисел

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{2005}) \quad \text{та} \quad (y_1, y_2, \ldots, y_{2005}),$$

які одночасно задовольняють умови:

1) усі добутки $x_i y_i$ рівні між собою;
2) усі добутки $S(x_i)S(y_i)$ рівні між собою, де $S(n)$ — сума цифр натурального числа $n$;
3) при $i \neq j$ числа $x_i$ та $x_j$ взаємно прості.

**4.** Для усіх дійсних чисел $x$ довести нерівність

$$[x^8] + [x^2] \geq 2[x^5],$$

де $[x]$ — ціла частина числа $x$.

**5.** Довести, що кожна точка опуклого многогранника з $n$ вершинами належить принаймні

а) $[\frac{n}{4}]$ трикутним пірамідам;
б) $(n-3)$ трикутним пірамідам, усі вершини яких є вершинами цього многогранника.

Многогранник називається *опуклим*, якщо разом з будь-якими двома своїми точками він містить також весь відрізок).

**Задачі запропонували:** В. Брайман (7.1, 7.2, 8.2, 10.2), О. Клурман (10.4, 10.5), Є. Луценко (7.4), Д. Номіровський (8.1, 9.1=10.1, 11.1), Д. Петровський (9.4=10.3, 11.3, 11.4), О. Рибак (11.5), Б. Рубльов (7.3, 8.3, 8.4), Т. Тимошкевич (9.3, 11.2), В. Ясінський (8.5=9.5, 9.2).

## Розв'язки задач

**7 клас.**

**7.1.** Так. Достатньо об'єднати в пари тих горобців, що сіли поруч після перельоту. Тоді зрозуміло, що до перельоту відстань не могла бути меншою, бо наприкінці відстань в кожній парі складає 1 м.

**7.2.** Очевидно, що $a$ не ділиться на 5. Сума та різниця наведених в умові чисел дорівнюють відповідно

$$((p+r)a + (s+q))\left(a^2+1\right) \quad \text{та} \quad ((p-r)a + (q-s))\left(a^2-1\right).$$

Якщо $a$ не ділиться на 5, то або $(a^2+1)$, або $(a^2-1)$ ділиться на 5, а тому вказані в умові числа одночасно діляться на 5.

**7.3.** Зрозуміло, що для зменшення потрібного на поїдання часу треба, щоб кожна тварина спочатку їла ту палку, яку вона з'їдає швидше, а потім вони доїли палку, що залишилась, разом. Таким чином, Гав з'їдає докторську ковбасу за 2 хв., одночасно Мяу їсть любительську ковбасу і встигає з'їсти півпалки. Тому останні півпалки цієї ковбаси вони будуть їсти удвох зі "швидкістю поїдання", що дорівнює сумарній швидкості обох тварин. Позначимо довжину цієї палки $L$, тоді швидкість Гава є $L/3$, швидкість Мяу — $L/4$, тому час доїдання

$$\frac{L/2}{L/3+L/4}=\frac{6}{7}\text{ хв.},$$

а загальний мінімальний час $2\frac{6}{7}$ хв.

**7.4.** Доведемо, що найменша можлива сторона квадрата дорівнює 3.

Припустимо, що існує квадрат зі стороною, меншою за 3, який містить потрібні п'ять одиничних квадратів. Розділимо його на три однакові смуги вертикальними відрізками. Ширина кожної такої смуги менше 1, а тому кожен одиничний квадрат, що розташований всередині цього більшого квадрата, перетинає хоча б один з двох вертикальних відрізків. За принципом Діріхле один з відрізків перетинає щонайменше три таких квадрата, але тоді довжина цього відрізка не може бути меншою за 3, суперечність.

З іншого боку, квадрат зі стороною 3 можна поділити на дев'ять одиничних та взяти деякі п'ять з них.

**8 клас.**

**8.1.** Внаслідок простоти числа $q$ цілий корінь цього рівняння може буди одним з чотирьох чисел: $\pm1$, $\pm q$. Підставимо в це рівняння одне з чисел $\pm q$. Послідовно одержимо такі рівності:

$$\pm q^5-pq^2+q=0;\qquad \pm q^4-pq+1=0;\qquad 1=q\left(p\mp q^3\right),$$

а тому просте число $q$ є дільником 1, що неможливо. Підставимо тепер $x=1$. Тоді $1-p+q=0$; $p=q+1$, тобто два прості числа відрізняються на 1, а це тільки числа 2 і 3, оскільки парне просте число єдине. Аналогічно при $x=-1$ маємо $-1-p+q=0$; $q=p+1$; $p=2$, $q=3$.

Відповідь: $(2,3)$, $(3,2)$.

**8.2.** Ні. Занумеруємо горобців зліва направо. Нехай горобці з номерами $k$, де $1\le k\le N$, перелітають на місця горобців з номерами $2k$, а горобці з номерами $k$, де $N+1\le k\le 2N$, перелітають на місця горобців з номерами $2k-2N-1$. Тоді відстань між будь-якими двома горобцями однієї половини збільшується в 2 рази. З трьох горобців принаймні 2 були в одній половині, а тому відстань між ними збільшиться.

**8.3.** Виграшну стратегію має перший гравець. Перший хід він робить в нижню ліву клітинку таблиці. Тоді другий гравець займає клітинку згори або справа від клітинки першого гравця. Перший гравець займе наступну

клітинку на діагоналі справа та вгору від своєї попередньої клітинки. Другий гравець змушений і надалі робити ходи лише справа або згори, бо інакше, як легко бачити, одразу утвориться програшна позиція. Тому перший гравець після будь-якого ходу другого гравця буде повертатися на діагональ все правіше та вище доти, доки не зробить свій хід в кут таблиці. Після попадання в кут другий гравець вимушений зробити хід вниз або вліво та програє.

**8.4.** Зрозуміло, що тварини повинні закінчити їсти одночасно і не мають робити перерв. Позначимо довжину палки докторської ковбаси $S$, любительської — $L$. Тоді "швидкість поїдання" ковбас Гавом — $S/1$ та $L/2$, Мяу — $S/2$ та $L/3$. Нехай Гав з'їв частину довжини $S_1$ докторської та $L_1$ — любительської, тоді Мяу відповідно з'їла $S - S_1$ та $L - L_1$. Тоді час поїдання (як було зазначено вище, однаковий для обох тварин) становить

$$t = \frac{S_1}{S/1} + \frac{L_1}{L/2} = \frac{S - S_1}{S/2} + \frac{L - L_1}{L/3}.$$

Позначимо $\frac{S_1}{S} = x$, $\frac{L_1}{L} = y$, де $x$, $y$ належать проміжку $[0, 1]$. Тоді

$$x + 2y = 2 - 2x + 3 - 3y; \qquad 3x + 5y = 5; \qquad y = 1 - \frac{3}{5}x,$$

час поїдання $x + 2y = x + 2 - \frac{6}{5}x = 2 - \frac{x}{5}$ буде найменшим при $x = 1$ (тут слід зазначити, що відповідне $y = \frac{2}{5}$ справді належить проміжку $[0, 1]$), а відповідний час $t = \frac{9}{5}$ хв.

**8.5.** З того, що шестикутник $ABCDEF$ — правильний, випливає, що

$$\angle ACD = 90^\circ = \angle CAX.$$

За умовою $\angle DCX = 45^\circ$, тому $\angle ACX = 45^\circ$, а звідси й $\angle AXC = 45^\circ$. Ми одержали, що $\triangle CAX$ — рівнобедрений, тому $AX = AC = AE$, $\triangle AEX$ також рівнобедрений з кутом при вершині $30^\circ$, а тоді кут при основі

$$\angle FXE = \angle AXE = 75^\circ.$$

**9 клас.**

**9.1.** Маємо $xy \geq 0$ При $x \geq 0$, $y \geq 0$

$$\sqrt[4]{(x - 2\sqrt{xy} + y)^2} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^4} = \left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right|.$$

При $x \leq 0$, $y \leq 0$

$$\sqrt[4]{(x - 2\sqrt{xy} + y)^2} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{-x} + \sqrt{-y}\right)^4} = \sqrt{-x} + \sqrt{-y}.$$

**9.2.** Легко перевірити, що куб будь-якого числа при діленні на 9 дає остачі 0, 1 або 8. Крім того число 200420052006 не ділиться на 9, а тому якщо хоч

одне з чисел $x$, $y$, $z$ ділиться на 9, то рівняння розв'язку не має. Нехай тепер жодне з цих чисел на кратне 9. Тоді за принципом Діріхле принаймні два з чисел $x$, $y$, $z$ при піднесенні до кубу дають однакові остачі при діленні на 9 та вираз $xyz(x^3-y^3)(y^3-z^3)(z^3-x^3)$ знову ділиться на 9. Отже, рівняння розв'язків не має.

**9.3.** Нехай перший гравець постійно ходить лівою фішкою вправо. Він завжди може це робити, бо після хода другого гравця між ними завжди непарна кількість клітинок та другий гравець ніколи не зможе походити лівою фішкою вліво, бо повторилося б попереднє розташування. Тоді після ходів першого гравця завжди створюються нові розташування фішок (з найправішим положенням лівої фішки з початку гри). Але деяке розташування фішок рано чи пізно повториться, бо існує скінченна кількість різних розташувань. Тому повтор відбудеться після ходу другого гравця та той програє.

**9.4.** Помітимо, що число вигляду $6m$, де $m>1$, має властивість $\sigma(n)>n$, бо має дільниками числа 1, $m$, $2m$, $3m$, звідки

$$\sigma(6m)\geq 1+m+2m+3m>6m.$$

Залишилося знайти нескінченну кількість чисел, для яких $n$ та $\sigma(n)$ одночасно кратні 6. Для цього достатньо взяти прості числа $m>3$. Тоді $\sigma(6m)=1+2+3+6+m+2m+3m=6(m+2)$ кратне 6.

**10 клас.**

**10.2.** Маємо

$$\frac{(a+b)(c-1)}{c+1}=\frac{(3-c)(c-1)}{c+1}=-c+5-\frac{8}{c+1}.$$

Ліва частина нерівності дорівнює

$$-c+5-\frac{8}{c+1}-a+5-\frac{8}{a+1}-b+5-\frac{8}{b+1}=12-8\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right).$$

Отже, слід перевірити, що

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{3}{2},$$

а це виконується, бо $a+1+b+1+c+1=6$ та за нерівністю Коші

$$(a+1+b+1+c+1)\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\geq 9.$$

**10.4.** Нехай $L$ — середина $BC$. Трикутники $\triangle CMK$ та $\triangle BMC$ подібні як прямокутні зі спільним кутом $\angle BMC$. Тоді $\frac{CM}{MB}=\frac{MK}{CM}$, або $\frac{NM}{MB}=\frac{MK}{NM}$ (бо $CM=MN$). Оскільки у трикутників $\triangle NMB$ та $\triangle KMN$ кут $\angle NMB$ спільний, то з останньої рівності випливає їх подібність, отже

$$\angle NKM=\angle MNB=\angle CBK;\qquad \angle CKN=90^\circ+\angle MKN=90^\circ+\angle CBK.$$

Але у прямокутному $\triangle CBK$ маємо $CL = LK$, а тому

$$\angle CKL = \angle KCL = 90^\circ - \angle CBK.$$

Отже, $\angle CKN + \angle CKL = 180^\circ$, звідки і випливає, що точки $N$, $K$, $L$ розташовані на одній прямій.

**10.5.** Припустимо, що для деяких $n_1, n_2$ виконується рівність $f(n_1) = f(n_2)$. Тоді при $m = 0$

$$f(f(n_1)) = f(n_1) + 2n_1 + 1 = f(f(n_2)) = f(n_2) + 2n_2 + 1$$

та $n_1 = n_2$, тобто це відображення ін'єктивне. Маємо

$$f(f(m) + f(n)) = f(f(m) + n) + 2n + 1 = f(m + n) + 2m + 2n + 2,$$

а тому $f(f(m) + f(n)) = f(f(m + n) + f(0))$ та $f(m) + f(n) = f(m+n) + f(0)$. Покладемо $g(m) = f(m) - f(0)$. Тоді $g(m) + g(n) = g(m + n)$ та індукцією по $n$ легко одержати, що $g(n) = ng(1)$. Тому $f(n) = an + b$. Якщо тепер підставити цей вираз в основне рівняння, то одержимо рівність

$$a(m + an + b) + b = a(m + n) + 2n + 1 + b,$$

або $an^2 - an - 2n = 1 - ab$, яка повинна справджуватися при усіх цілих $m$ і $n$. Звідси $\begin{cases} a^2 = a + 2, \\ ab = 1. \end{cases}$ Розв'язком останньої системи в цілих числах є

$$a = b = -1.$$

Перевіркою переконуємось, що $f(n) = -n - 1$ справді є розв'язком.

**11 клас.**

**11.1.** Нехай $a_1$ та $d$ — перший член та різниця арифметичної прогресії. Запишемо умову задачі:

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m;$$

$$2a_1 n + n(n-1)d = 2a_1 m + m(m-1)d;$$

$$2a_1(n - m) = d(m^2 - m - n^2 + n) = d(m - n)(m + n - 1);$$

$$2a_1 = d(1 - m - n);$$

$$S_{m+n} = \frac{2a_1 + (m + n - 1)d}{2} \cdot (m + n) = 0$$

— квадрат цілого числа.

**11.2.** В $\triangle ABB_1$ та $\triangle ACC_1$ є спільний кут та $AB_1 = AC_1$, $BB_1 = CC_1$, а це означає, що $\angle AB_1B = \angle AC_1C$ або $\angle AB_1B + \angle AC_1C = 180^\circ$. В будь-якому з цих випадків синуси кутів $\angle AB_1B$, $\angle AC_1C$ рівні, а тому й площі трикутників $\triangle ABB_1$ та $\triangle ACC_1$ рівні. Якщо розглянути рівні основи цих

трикутників $AB_1$ та $AC_1$, то висоти до цих основ також рівні, а це означає, що у трикутника рівні дві висоти та за відомою властивістю $\triangle ABC$ рівнобедрений.

**11.3.** Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_{2005}$ — перші 2005 простих чисел. Покладемо

$$P = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_{2005}, \qquad q_j = \frac{P}{p_j}, \quad 1 \le j \le 2005.$$

Задамо числа таким чином: $x_j = \underbrace{11\ldots1}_{p_j}$, $y_j = 100\ldots0100\ldots010\ldots1$, де усього $q_j$ одиниць та між сусідніми одиницями $p_j - 1$ нулів. Тоді за побудовою

$$x_j y_j = \underbrace{11\ldots1}_{P}, \qquad S(x_j) \cdot S(y_j) = P$$

при всіх $j$, умови 1), 2) виконуються. Те, що числа $x_i$ та $x_j$ взаємно прості, легко перевірити за допомогою алгоритма Евкліда.

**11.4.** Для від'ємних чисел все очевидно. Для $x \in [0, 1]$ має місце рівність.

Нехай тепер $x > 1$. Нехай $[x^5] = p$. Розглянемо різні випадки для $p$:

1) $p \ge 4$. Тоді $x^3 \ge p^{3/5} = 4^{3/5} = 2^{6/5} > 2$, $[x^8] = [x^3 \cdot x^5] \ge [2x^5] \ge 2[x^5]$, нерівність справджується.

2) $p = 3$. Тоді $[x^2] = 1$, $x^8 \ge p^{8/5} = 3^{8/5} > 5$, а тому $[x^2] + [x^8] \ge 6 = 2[x^5]$.

3) $p = 2$. Тоді $[x^2] = 1$, $x^8 \ge p^{8/5} = 2^{8/5} > 3$, а тому $[x^2] + [x^8] \ge 4 = 2[x^5]$.

4) при $p = 1$ все очевидно.

**11.5.** а) Нехай $C$ — довільна точка опуклого многогранника, $A$ — його довільна вершина. Проведемо через точки $C$ та $A$ пряму, що перетинає поверхню многогранника в деякій точці $B$, яка належить деякій грані многогранника, що не містить точку $A$. Розіб'ємо цю грань діагоналями на трикутники та знайдемо трикутник $PQR$ з вершинами в вершинах многогранника, що містить точку $B$. Тоді за побудовою точка $C$ належить відрізку $AB$, а отже і трикутній піраміді $APQR$. Обираючи в якості вершини $A$ усі вершини многогранника, ми одержимо $n$ трикутних пірамід, що містять точку $C$. Оскільки кожну піраміду ми порахуємо не більше як чотири рази, то знайдено принаймні $\left[\frac{n}{4}\right]$ різних трикутних пірамід.

б) Нехай ми знайшли трикутну піраміду $APQR$, що містить точку $C$. Покажемо, як знайти ще $n-4$ такі піраміди. Нехай $E$ — довільна вершина многогранника, що не співпадає з точками $A$, $P$, $Q$, $R$. Розглянемо опукле тіло $APQRE$. Це може бути або чотирикутна піраміда, або об'єднання двох трикутних пірамід. Зрозуміло, що в кожному з цих випадків піраміда $APQR$ міститься в об'єднанні трикутних пірамід $EPQR$, $AEQR$, $APER$, $APQE$, а отже точка $C$ попаде принаймні в одну з цих трикутних пірамід. Кожна з них містить серед вершин нову вершину $E$. Послідовно обираючи в якості $E$ усі вершини многогранника, відмінні від $A$, $P$, $Q$, $R$, ми одержимо ще $n-4$ різні трикутні піраміди. Таким чином знайдено $n-3$ трикутні піраміди.

# XLV Всеукраїнська олімпіада юних математиків

*О. О. Курченко, В. М. Лейфура, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський*

*Присвячується світлій пам'яті фундатора*
*олімпіадного руху юних математиків України*
*Заслуженого діяча науки і техніки України,*
*лауреата Державної премії України,*
*члена-кореспондента НАН України, доктора фізико-математичних наук,*
*професора Київського національного університету імені Тараса Шевченка*
**М. Й. Ядренка** (1932–2004)

## Умови задач

**8 клас.**

1. Знайдіть усі пари дійсних чисел $x$ і $y$, для яких виконується рівність

$$\frac{x-2}{y}+\frac{5}{xy}=\frac{4-y}{x}-\frac{|y-2x|}{xy}.$$

2. Нехай $AD$ — медіана трикутника $ABC$, причому

$$\angle ADB=45^\circ \quad \text{і} \quad \angle ACB=30^\circ.$$

Знайдіть величину кута $BAD$ (у градусах).

3. Клітчасту дошку розміром $6\times 6$ заповнено натуральними числами (у кожній клітинці міститься одне число). За один крок дозволяється обрати будь-який квадрат розміром більшим за $1\times 1$, сторони котрого йдуть по сторонах клітинок, і збільшити всі числа, що знаходяться в цьому квадраті, на 1. Чи завжди за декілька таких кроків можна досягти того, щоб усі числа на дошці ділилися без остачі на 3? Відповідь обґрунтуйте.

4. Для яких дійсних чисел $x>1$ існує трикутник з довжинами сторін $x^4+x^3+2x^2+x+1$, $2x^3+x^2+2x+1$ та $x^4-1$?

5. Чи існують такі цілі числа $a$, $b$, $c$, $d$, $t$, $x$, $y$, $z$, що кожен з шести виразів

$$|ay-bx|,\quad |az-cx|,\quad |at-dx|,\quad |bz-cy|,\quad |bt-dy|,\quad |ct-dz|$$

набуває значення 1 або 2005? Відповідь обґрунтуйте.

6. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $BC=CD$ і $\angle CBA+\angle DAB>180^\circ$. Відмінні від вершин чотирикутника точки $W$ і $Q$ лежать на сторонах $BC$ і $DC$ відповідно, причому $AD=QD$, і прямі $WQ$ та $AD$ є паралельними. Відомо, що точка $M$ перетину відрізків $AQ$ і $BD$ є рівновіддаленою від прямих $AD$ і $BC$. Доведіть, що $\angle BWD=\angle ADW$.

**9 клас.**

**1.** Зобразіть на координатній площині $xOy$ множину всіх точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють нерівність

$$\left(x^2-1\right)\left(|y|-1\right)\geq 0.$$

**2.** Знайдіть усі пари натуральних чисел $m$ і $n$, які задовольняють рівність

$$\sqrt{m}+\frac{2005}{\sqrt{n}}=2006.$$

**3.** На площині відмічено $n\geq 3$ точок, які не лежать усі на одній прямій. Для кожної точки $M$ площини через $f(M)$ позначимо суму відстаней від цих $n$ точок до $M$. Відомо, що існує така точка $M_1$, що для кожної точки $M$ справджується нерівність $f(M_1)\leq f(M)$. Нехай $M_2$ — така точка, що $f(M_1)=f(M_2)$. Доведіть, що точки $M_1$ і $M_2$ співпадають.

**4.** У нумізмата Миколки є 241 монета загальною вартістю 360 тугриків (вартість кожної монети виражається цілим додатним числом тугриків). Чи можна з упевненістю стверджувати, що ці монети можна розділити на три купки з однаковими сумами тугриків у купках? Відповідь обґрунтуйте.

**5.** Чи можна число 1 подати як суму 2005 доданків, кожен з яких має вигляд

$$\frac{1}{3n-1},$$

де $n$ — деяке натуральне число? Відповідь обґрунтуйте.

**6.** Доведіть, що для всіх натуральних чисел $n$ виконується нерівність

$$\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}<\frac{1}{2},$$

де $1!=1$, $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k$, $k\geq 2$.

**7.** Чи можна на клітчастій дошці розміром $10\times 10$ розташувати за правилами гри в "Морський бій" наступні комплекти кораблів:

а) 2 кораблі $1\times 4$, 4 кораблі $1\times 3$, 6 кораблів $1\times 2$ та 8 кораблів $1\times 1$;

б) 2 кораблі $1\times 4$, 4 кораблі $1\times 3$, 6 кораблів $1\times 2$, 6 кораблів $1\times 1$ та 1 корабель $2\times 2$;

в) 2 кораблі $1\times 4$, 4 кораблі $1\times 3$, 6 кораблів $1\times 2$, 4 кораблі $1\times 1$ та 2 кораблі $2\times 2$?

Відповідь обґрунтуйте. (Усі кораблі розташовуються по лініях сітки в довільній орієнтації і не можуть дотикатися один одного навіть кутами.)

**8.** У колі проведено хорди $AB$ і $CD$, які не перетинаються. На хорді $AB$ обрано відмінну від її кінців точку $E$. Розглянемо дугу з кінцями $A$ і $B$, яка не містить точок $C$ і $D$. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте таку точку $F$ на цій дузі, що

$$\frac{PE}{EQ}=\frac{1}{2},$$

де $P$ і $Q$ — точки перетину хорди $AB$ з відрізками $FC$ і $FD$ відповідно.

**10 клас.**

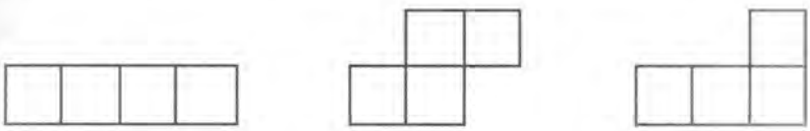
**1.** Нехай $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ задовольняють рівності

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1, \qquad \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\beta\cos 2\beta + \sin\gamma\cos 2\gamma = -1.$$

Знайдіть усі можливі значення виразу $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$.

**2.** а) Чи можна клітчастий квадрат розміром $10 \times 10$ розрізати по лініях сітки на 4 фігурки вигляду **1** і 21 фігурку вигляду **2**? (Фігурки можуть розташовуватися в довільній орієнтації.)

б) Чи можна клітчастий квадрат розміром $10 \times 10$ розрізати по лініях сітки на 4 фігурки вигляду **1**, 19 фігурок вигляду **2** і 2 фігурки вигляду **3**? (Фігурки можуть розташовуватися в довільній орієнтації.)



**1** **2** **3**

**3.** Натуральне число $n > 101$ ділиться без остачі на 101, причому відомо, що кожен його натуральний дільник $d$, $1 < d < n$, є різницею двох натуральних дільників числа $n$. Доведіть, що $n$ ділиться без остачі й на 100.

**4.** Усередині паралелограма $ABCD$ відмітили такі дві різні точки $P$ і $Q$, що $\angle ABP = \angle ADP$ і $\angle CBQ = \angle CDQ$, причому ці точки не лежать на діагоналі $AC$. Доведіть, що $\angle PAQ = \angle PCQ$.

**5.** Знайдіть усі такі функції $f\colon (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, що для будь-яких додатних дійсних чисел $x$ і $y$ виконується рівність

$$f(x)f(y) = f(xy) + 2005\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 2004\right).$$

**6.** Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел $a$, $b$ і $c$ справджується нерівність

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^4}{a^3} \geq -a + 2b + 2c.$$

**7.** На серединному перпендикулярі до сторони $AC$ гострокутного трикутника $ABC$ відмітили таку точку $M$, що $\angle BAC = \angle MCB$ і

$$\angle ABC + \angle MBC = 180^\circ,$$

причому точка $M$ лежить по один бік з вершиною $B$ відносно прямої $AC$. Знайдіть величину кута $BAC$ (у градусах).

**8.** На площині відмітили 2005 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і через усі пари відмічених точок провели прямі. Доведіть, що відмічені точки можна розфарбувати в два кольори таким чином, що для довільних двох однокольорових точок кількість проведених прямих, які розділяють ці дві точки, є парною. (Кажуть, що пряма розділяє дві точки площини, якщо жодна з цих точок їй не належить, і ці точки лежать у різних півплощинах відносно неї.)

**11 клас.**

**1.** Розв'яжіть (у дійсних числах) рівняння

$$\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\left|x+\frac{\pi}{3}\right|=\arcsin\frac{x^3-x+2}{2}.$$

**2.** Нехай $a$, $b$, $c$ — такі додатні дійсні числа, що $a+b+c=1$. Доведіть, що виконується нерівність

$$\sqrt{\frac{1}{a}-1}\sqrt{\frac{1}{b}-1}+\sqrt{\frac{1}{b}-1}\sqrt{\frac{1}{c}-1}+\sqrt{\frac{1}{c}-1}\sqrt{\frac{1}{a}-1}\geq 6.$$

**3.** Навколо гострокутного трикутника $ABC$ описали коло $\omega$ з центром у точці $O$, а потім навколо трикутника $AOC$ описали коло $\omega_1$ і провели в ньому діаметр $OQ$. На прямих $AQ$ і $AC$ відмітили точки $M$ і $N$ відповідно таким чином, що отриманий чотирикутник $AMBN$ є паралелограмом. Доведіть, що точка перетину прямих $MN$ і $BQ$ лежить на колі $\omega_1$.

**4.** Знайдіть усі неспадні й усі незростаючі функції $f\colon[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, для яких при всіх $x\geq 0$ і $y\geq 0$ виконується рівність

$$f(x+y)-f(x)-f(y)=f(xy+1)-f(xy)-f(1),$$

і, до того ж, має місце співвідношення $f(3)+3f(1)=3f(2)+f(0)$.

**5.** Знайдіть усі такі натуральні числа $n$, що

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\geq 0.$$

**6.** Яку найменшу кількість сторін парної довжини може мати многокутник на клітчастій дошці, складений з 2005 плиточок доміно розміром $1\times 2$? (Мається на увазі, що кожна з цих плиточок без зсувів покриває якісь дві суміжні клітинки дошки, і що межа многокутника є цілісною замкненою ламаною без самодотиків та самоперетинів.)

**7.** Доведіть, що для кожного натурального числа $n\geq 2$ існує такий набір $A_n$ з $n$ попарно різних натуральних чисел, що для будь-яких двох нерівних чисел $i,j\in A_n$ сума їхніх квадратів $i^2+j^2$ ділиться без остачі на різницю $(i-j)$ цих чисел.

**8.** У просторі відмітили 2005 точок, жодні чотири з яких не лежать в одній площині, і через усі трійки відмічених точок провели площини. Доведіть, що відмічені точки можна розфарбувати в два кольори таким чином, що для довільних двох однокольорових точок кількість проведених площин, які розділяють ці дві точки, є непарною. (Кажуть, що площина розділяє дві точки простору, якщо жодна з цих точок їй не належить, і ці точки лежать у різних півпросторах відносно неї.)

* * * *

**Задачі запропонували:** О. Г. Кукуш (9.3), О. Г. Кукуш та О. О. Курченко (9.8), О. О. Курченко (9.1), В. М. Лейфура (8.1, 10.1, 10.3, 10.5, 11.6), І. М. Мітельман (8.6), В. І. Михайловський (11.1), Л. Л. Оридорога (8.3, 9.7), А. В. Примак та О. Ю. Теплінський (11.4), Б. В. Рубльов (10.2), О. Ю. Теплінський (11.2), М. В. Ткач (10.6), В. А. Ясінський (8.2, 8.4, 8.5, 9.2, 9.4, 9.5, 9.6, 10.4, 10.7, 10.8, 11.3, 11.5, 11.7, 11.8).

## Вказівки до розв'язань задач

**8 клас.**

**8.1.** *Відповідь*: $x = 1$, $y = 2$. Зауважимо, що при *допустимих* значеннях $x$ і $y$ вихідна рівність рівносильна рівності

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + |y-2x| = 0.$$

**8.2.** *Відповідь*: $\angle BAD = 30^\circ$.

Нехай $BK$ — висота трикутника $ABC$. Оскільки точка $D$ є серединою гіпотенузи $BC$ прямокутного трикутника $KBC$, то трикутник $BKD$ є рівностороннім. Отже, як нескладно бачити, $\angle ADK = \angle DAK = 15^\circ$, $AK = DK = BK$. А тому $\angle BAK = 45^\circ$, $\angle BAD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$.

**8.3.** *Відповідь*: ні, не завжди.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | + | + | − | − | |
| − | | + | − | | + |
| − | − | | | + | + |
| + | + | | | − | − |
| + | | − | + | | − |
| | − | − | + | + | |

Будемо позначати через $S$ суму чисел, які містяться в клітинках зі знаком "+", а через $Q$ — суму чисел, які містяться в клітинках зі знаком "−". Нескладно перевірити, що на кожному кроці різниця $S-Q$ або не змінюється, або збільшується на 3, або ж — зменшується на 3. А тому, якщо спочатку

$$S - Q \not\equiv 0 \pmod 3,$$

то ми не зможемо досягти того, щоб усі числа ділилися без остачі на 3.

**8.4.** *Відповідь*: для всіх $x > 1$.

Дійсно, при всіх $x > 1$, як нескладно переконатися, мають місце нерівності

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > 2x^3 + x^2 + 2x + 1,$$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 > x^4 - 1,$$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 < \left(x^4 - 1\right) + \left(2x^3 + x^2 + 2x + 1\right).$$

**8.5.** *Відповідь*: ні, не існують.

Помітимо, що серед чисел $x$, $y$, $z$, $t$ принаймні три є непарними. Аналогічно, непарними будуть щонайменше три з чотирьох чисел $a$, $b$, $c$, $d$. Отже, у принаймні двох з чотирьох пар $(a;x)$, $(b;y)$, $(c;z)$, $(d;t)$ обидві компоненти є непарними числами. Але ж тоді один із заданих шести виразів має набувати парне значення. Отримали суперечність.

*Зауваження.* Твердження задачі справджується навіть якщо $a$, $b$, $c$, $d$, $t$, $x$, $y$, $z$ дійсні числа. Це випливає з тотожності

$$(ay-bx)(dz-ct)+(az-cx)(bt-dy)+(at-dx)(cy-bz)=0,$$

оскільки кожен з трьох доданків її лівої частини є числом непарним.

**8.6.** Нехай $F$ — точка перетину прямих $BC$ і $AD$ (точки $F$ і $S$ лежать по різні боки від прямої $AB$). Проведемо через точку $D$ пряму $\ell \parallel BC$. Позначимо через $S$ точку перетину прямих $WQ$ та $\ell$. Легко бачити, що $QM$ і $DM$ є бісектрисами зовнішніх кутів трикутника $SDQ$. Звідси випливає, що $SM$ — бісектриса кута $WSD$. Із умови задачі випливає, що $FM$ — бісектриса кута $WFD$. Оскільки чотирикутник $FWSD$ є паралелограмом і бісектриси його протилежних кутів $F$ і $S$ мають спільну точку $M$, то прямі $FM$ і $SM$ збігаються. Отже, $FWSD$ — ромб. Звідси й отримуємо твердження задачі.

**9 клас.**

**9.1.** Потрібну множину нескладно зобразити, враховуючи, що

$$(x^2-1)(|y|-1)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x^2-1\ge 0,\\ |y|-1\ge 0;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x^2-1\le 0,\\ |y|-1\le 0;\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}|x|\ge 1,\\ |y|\ge 1;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}|x|\le 1,\\ |y|\le 1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

**9.2.** *Відповідь:* $m=1$, $n=1$; $m=1605^2$, $n=5^2$; $m=2001^2$, $n=401^2$;

$$m=2005^2, \qquad n=2005^2.$$

Оскільки число

$$\sqrt{n}=\frac{2006^2 n+2005^2-mn}{2\cdot 2005\cdot 2006}$$

раціональне, то, як відомо, число $n$ є квадратом натурального числа. Звідси випливає і те, що $m=k^2$, $k\in N$, причому $k$ — дільник 2005. Перебираючи всі натуральні дільники числа 2005, одержуємо відповідь.

**9.3.** Нескладно довести, що якщо точка $M$ є серединою відрізка $BC$, то для будь-якої точки $A$ має місце нерівність

$$AM\le \frac{1}{2}(AB+AC).$$

Припустимо, що точки $M_1$ і $M_2$ не співпадають. Нехай точка $M_3$ — середина відрізка $M_1M_2$. Тоді

$$A_kM_3\le \frac{1}{2}(A_kM_1+A_kM_2),$$

$1\le k\le n$, причому принаймні одна з цих нерівностей є строгою (бо точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не всі лежать на одній прямій). Додаємо такі $n$ нерівностей і отримуємо, що

$$f(M_3)<\frac{1}{2}(f(M_1)+f(M_2))=f(M_1).$$

Дістали суперечність.

**9.4.** *Відповідь*: так, можна стверджувати.

Розіб'ємо коло на 360 рівних частин, і 241 з 360 точок поділу відмітимо червоним кольором так, щоб 241 дуга з червоними кінцями відповідала за довжиною вартостям монет. Усі 360 точок поділу на колі позначимо по порядку $A_1, A_2, \ldots, A_{120}, B_1, B_2, \ldots, B_{120}, C_1, C_2, \ldots, C_{120}$. За принципом Діріхле знайдеться такий номер $k$, що всі три точки $A_k$, $B_k$, $C_k$ будуть пофарбованими червоним кольором. Вони і будуть визначати розбиття монет на три однакові за вартістю купки.

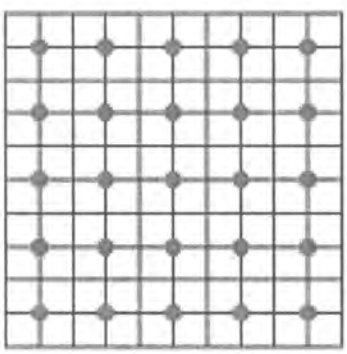
**9.5.** *Відповідь*: ні, не можна.

Якщо доданки даної суми звести до спільного знаменника, то за mod 3 чисельник матиме остачу 1, а знаменник — остачу 2. Таким чином, така сума не може дорівнювати 1.

**9.6.** Маємо:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\cdots+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\\
&\quad=\left(\frac{1}{(1+1)!}-\frac{1}{(1+2)!}\right)+\left(\frac{1}{(2+1)!}-\frac{1}{(2+2)!}\right)+\cdots\\
&\qquad+\left(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\right)\\
&\quad=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!}<\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**9.7.** а) *Відповідь*: ні, неможливо.

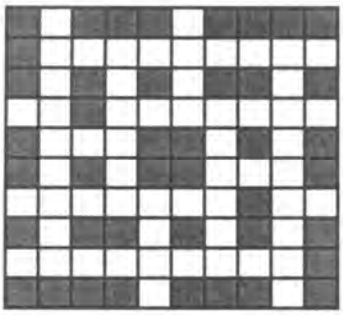


Мал. 1

Відмітимо 25 вузлів так, як показано на мал. 1. Тоді кожен корабель $1\times 4$ та $1\times 3$ містить щонайменше два відмічені вузли, а кожен корабель $1\times 2$ та $1\times 1$ містить принаймні один відмічений вузол. Оскільки кораблі не можуть дотикатися один одного навіть кутами, то, як легко підрахувати, усі вони разом мають містити не менше за 26 таких вузлів. Одержали суперечність.

б) *Відповідь*: так, можливо (див. мал. 2).

в) *Відповідь*: ні, неможливо.



Мал. 2

Розглянемо 121 вузол сітки на дошці розміром $10 \times 10$. Як нескладно підрахувати, 2 кораблі $1 \times 4$, 4 кораблі $1 \times 3$, 6 кораблів $1 \times 2$, 4 кораблі $1 \times 1$ та 2 кораблі $2 \times 2$ мають задіяти 122 вузла. Маємо суперечність.

**9.8.** Побудова і подальше доведення очевидним чином ґрунтуються на наступному аналізі.

*Перший випадок.* Нехай точка $E$ ділитиме відрізок $PQ$ внутрішнім чином. На промені $CE$ оберемо таку точку $K$, що $EK = 2CE$. Тоді, як легко довести, $CF \parallel QK$, і, крім того, з точки $Q$ хорди $AB$ відрізок $KD$ видно під кутом

$$180^\circ - \angle CFD = 180^\circ - \angle CAD.$$

*Другий випадок.* Нехай точка $E$ ділитиме відрізок $PQ$ зовнішнім чином. Візьмемо середину відрізка $DE$ — точку $M$. Тоді $PM \parallel FD$, і з точки $P$ відрізок $CK$ видно під кутом $\angle CPK = \angle CFD = \angle CBD$.

**10 клас.**

**10.1.** *Відповідь*: 1.

З умови задачі випливають рівності

$$\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\beta - 2\sin^3\beta + \sin\gamma - 2\sin^3\gamma = -1,$$

$$\sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma = 1.$$

Оскільки для $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ виконуються нерівності $\sin^3\varphi \le \sin^2\varphi \le \sin\varphi$, то

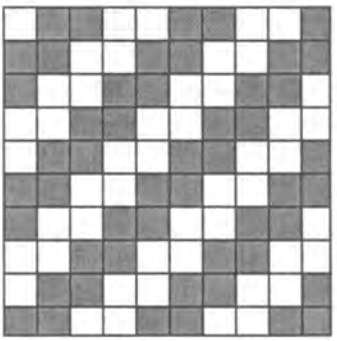
$$1 = \sin^3\alpha + \sin^3\beta + \sin^3\gamma \le \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1.$$

Залишається зауважити, що, наприклад, при $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ маємо рівність

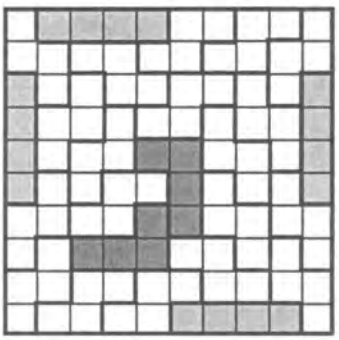
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

**10.2.** а) Відповідь: ні, неможливо.

Пофарбуємо клітинки нашого квадрата в два кольори так, як це показано на мал. 3. Чорних клітинок при цьому є 51, а білих — 49. У будь-якій орієнтації фігурки перших двох типів покривають парну кількість чорних клітинок і парну кількість білих клітинок. Отже, якщо припустити, що



Мал. 3



Мал. 4

можна вирізати потрібну кількість вказаних фігурок, то тоді буде вирізано парну кількість чорних і парну кількість білих клітинок, що неможливо.

б) *Відповідь*: так, можливо (див. мал. 4).

**10.3.** Зауважимо спочатку, що 101 — просте число. Нехай

$$n = 101^k m, \qquad k, m \in \mathbb{N},\ \text{НСД}(101; m) = 1.$$

Тоді, за умовою, існує таке $\ell$ ділить $n$, що $m + \ell$ ділить $n$. Очевидно, що $\ell \neq m$. Далі, оскільки $m + \ell > m$, то, зрозуміло, $m + \ell$ ділиться на 101. Тоді НСД$(101; \ell) = 1$ (позаяк НСД$(101; m) = 1$), а тому $\ell$ ділить $m$. Нехай $t = \frac{m}{\ell}$, $t \neq 1$. Маємо: $n$ ділиться на $m + \ell$, $101^k m$ ділиться на $m + \frac{m}{t}$, $101^k mt$ ділиться на $tm+m$, $101^k mt$ ділиться на $m(t+1)$. Таким чином, $101^k t$ ділиться на $t + 1$, $101^k$ ділиться на $t + 1$ (бо НСД$(t; t + 1) = 1$). Звідси випливає, що $t+1 = 101^v$, $1 \leq v \leq k$. Оскільки $t$ ділить $m$, $m$ ділить $n$, то $t$ ділить $n$. Крім того, $t = 101^v - 1$ ділиться на 100. А тому $n$ ділиться на 100.

Наведемо й інший спосіб міркувань. Оскільки $1 < \frac{n}{101} < n$, і $\frac{n}{101}$ — дільник числа $n$, то

$$\frac{n}{101} = \frac{n}{d_1} - \frac{n}{d_2},$$

де $d_1$ і $d_2$ — дільники числа $n$. Отже,

$$\frac{1}{101} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}.$$

Звідки $d_1 d_2 = 101(d_2 - d_1)$, тобто, $(d_1 - 101)(d_2 + 101) = -101^2$. Оскільки 101 — просте число, і

$$d_2 + 101 > 101,$$

то із останньої рівності випливає, що $101^2$ ділиться на $(d_2 + 101)$, тобто, $d_2 + 101 = 101^2$. Звідси $d_1 - 101 = -1$, $d_1 = 100$, що й треба було довести.

*Зауваження.* Числа $n$, що задовольняють умову задачі, існують. Наприклад, $n = 100 \cdot 101$.

**10.4.**

**Лема.** *Якщо всередині паралелограма $ABCD$ відмічено таку точку $M$, що $\angle ABM = \angle ADM$, то $\angle MAD = \angle MCD$.*

Дійсно, нехай $N$ — така точка, що відрізок $MN$ паралельний і рівний відрізку $BC$. Тоді чотирикутники $AMND$ і $MBCN$ є паралелограмами. Звідси встановлюємо, що $\angle ABM = \angle DCN, \angle ADM = \angle NMD$. З умови задачі випливає, що $\angle DCN = \angle DMN$. Отже, навколо чотирикутника $DMCN$ можна описати коло. Таким чином, $\angle MCD = \angle MND = \angle MAD$, що й треба було довести.

А тепер перейдемо до розв'язування задачі. Оскільки $\angle QBC = \angle QDC$, то маємо, що $\angle ABQ = \angle ADQ$. Далі, оскільки

$$\angle ABP = \angle ADP \quad \text{і} \quad \angle ABQ = \angle ADQ,$$

то за допомогою попереднього твердження одержуємо, що

$$\angle PAD = \angle PCD \quad \text{і} \quad \angle QAD = \angle QCD.$$

Якщо $\angle PAD > \angle QAD$, то $\angle PCD > \angle QCD$, тобто точка $Q$ лежить усередині чотирикутника $APCD$, і

$$\angle PAQ = \angle PAD - \angle QAD = \angle PCD - \angle QCD = \angle PCQ.$$

Якщо $\angle QAD > \angle PAD$, то $\angle QCD > \angle PCD$, а тому точка $P$ лежить усередині чотирикутника $AQCD$, і

$$\angle PAQ = \angle QAD - \angle PAD = \angle QCD - \angle PCD = \angle PCQ.$$

Випадок $\angle QAD = \angle PAD$ є неможливим, оскільки при цьому

$$\angle QCD = \angle PCD,$$

і точки $P$ і $Q$ співпадають, що суперечить умові.

**10.5.** *Відповідь:* $f(x) = \frac{1}{x} + 2005$, $x > 0$.

При $y = 1$ із вихідного співвідношення одержимо, що для всіх $x > 0$

$$f(x) \cdot f(1) = f(x) + 2005 \left( \frac{1}{x} + 2005 \right).$$

Звідси $f(1)^2 = f(1) + 2005 \cdot 2006$. Тому $f(1) = -2005$ або $f(1) = 2006$.

Якщо $f(1) = -2005$, то при всіх $x > 0$

$$f(x) = -\frac{2005}{2006}\left(\frac{1}{x} + 2005\right),$$

а якщо $f(1) = 2006$, то при всіх $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2005.$$

Нескладно переконатися, що з цих двох функцій тільки друга задовольняє умову задачі.

**10.6.** З нерівності Коші випливають такі нерівності:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \qquad \frac{b^3}{c^2} + c + c \geq 3b, \qquad \frac{c^4}{a^3} + a + a + a \geq 4c.$$

Потрібна нерівність є їх очевидним наслідком.

**10.7.** *Відповідь*: $\angle BAC = 30°$.

З умови задачі випливає, що вершина $B$ не лежить на серединному перпендикулярі відрізка $AC$. Тому залишилося розглянути такі два випадки.

*Перший випадок.* Припустимо, що $AB < BC$. Нехай точка $M$ лежить усередині трикутника $ABC$. Тоді $\angle MCB < \angle ACB < \angle BAC$, що суперечить умові. Нехай тепер точка $M$ лежить зовні трикутника $ABC$. Оскільки за умовою $\angle ABC + \angle MBC = 180°$, то точки $A$, $B$, $M$ колінеарні, і

$$\angle BAC = \angle MCA > \angle MCB,$$

що суперечить умові задачі.

*Другий випадок.* Припустимо, що $AB > AC$. Нехай точка $M$ лежить усередині трикутника $ABC$. Тоді $\angle MCB < \angle ACB < 90°$,

$$\angle ABC + \angle MBC < 90° + 90° = 180°,$$

що суперечить умові. Нехай тепер точка $M$ лежить зовні трикутника $ABC$. Розглянемо точку $N$, симетричну точці $M$ відносно прямої $BC$, і нехай

$$\varphi = \angle BAC.$$

Тоді $\angle MBC = \varphi = \angle NBC$. Оскільки $\angle MBC = 180° - \angle ABC$, то точки $A$, $B$, $N$ є колінеарними. Далі, оберемо на продовженні сторони $CB$ за точку $B$ таку точку $K$, що $\angle MKC = \varphi$. Тоді $\angle CKN = \varphi$, і, позаяк $\angle CKN = \angle CAN$, робимо висновок про те, що точки $C$, $A$, $K$, $N$ лежать на одному колі.

Отже, $\angle KAN = \angle KCN = \varphi$. Зауважимо, що $MA = MC$, і, крім того, $MC = MK$ (бо $\angle MCK = \varphi = \angle MKC$). Таким чином, точка $M$ — центр описаного кола трикутника $AKC$. Маємо $\angle KMC = 2 \cdot \angle KAC = 2 \cdot 2\varphi = 4\varphi$. Розглядаючи трикутник $CMK$, знаходимо, що виконується рівність

$$4\varphi + \varphi + \varphi = 180°.$$

**10.8.** Нехай $n_{PQ}$ позначає кількість проведених прямих, які розділяють точки $P$ і $Q$. Покладемо $\delta(a,P,Q)=0$, якщо пряма $a$ не розділяє точки $P$ і $Q$, і $\delta(a,P,Q)=1$, якщо розділяє. Крім того, покладемо

$$\delta(a,P,Q,R)=\delta(a,P,Q)+\delta(a,Q,R)+\delta(a,P,R).$$

Розглянемо довільні три відмічені точки $P$, $Q$, $R$. Очевидно, що

$$n_{PQ}+n_{QR}+n_{PR}=\sum_a \delta(a,P,Q,R),$$

де сума береться по всіх проведених прямих.

Легко бачити, що якщо пряма $a$ проходить через дві з точок $P$, $Q$, $R$, то маємо рівність $\delta(a,P,Q,R)=0$. Якщо пряма $a$ проходить рівно через одну з них, то $\delta(a,P,Q,R)\in\{0;1\}$. А якщо пряма $a$ не проходить через жодну, то маємо, що $\delta(a,P,Q,R)\in\{0;2\}$. Розглянувши всі сім можливих випадків взаємного розташування чотирьох точок на площині, одержуємо, що для будь-якої точки $X$ з решти 2002 відмічених точок або серед трьох прямих $XP$, $XQ$, $XR$ тільки одна розділяє дві точки з числа точок $P$, $Q$, $R$, або ж кожна з прямих $XP$, $XQ$, $XR$ має таку властивість. Отже, парність числа $n_{PQ}+n_{QR}+n_{PR}$ визначається кількістю зазначених вище точок $X$, а їх 2002. Таким чином, ми довели, що число $n_{PQ}+n_{QR}+n_{PR}$ є парним для будь-яких трьох відмічених точок $P$, $Q$, $R$. А тому серед чисел $n_{PQ}$, $n_{QR}$, $n_{PR}$ парними є або всі три, або ж — тільки одне. З цього випливає, що якщо для якоїсь точки $P$ пофарбувати всі ті точки $Q$, для яких $n_{PQ}$ парне, у той самий колір, що й точку $P$, а решту точок — у другий колір, то таке розфарбування буде задовольняти умову.

**11 клас.**

**11.1.** *Відповідь*: $x=-1$, $x=0$.

Маємо

$$\frac{\pi}{2}\le\left|x-\frac{\pi}{6}\right|+\left|x+\frac{\pi}{3}\right|=\arcsin\frac{x^3-x+2}{2}\le\frac{\pi}{2}.$$

Звідси випливає, що

$$\arcsin\frac{x^3-x+2}{2}=\frac{\pi}{2}$$

тобто

$$\frac{x^3-x+2}{2}=1.$$

Серед трьох коренів останнього рівняння тільки два зазначені вище задовольняють умову.

**11.2.** За умови $a+b+c=1$ дана нерівність еквівалентна нерівності

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{(b+c)(c+a)}{ab}}+\sqrt{\frac{(c+a)(a+b)}{bc}}+\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{ca}}\right)\ge 2.$$

За нерівністю Коші ліва частина не менша за

$$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}}.$$

Тепер потрібна нам нерівність є наслідком нерівності

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc,$$

яка, у свою чергу, випливає з нерівностей

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}.$$

**11.3.** Нехай пряма $BQ$ вдруге перетинає коло $\omega_1$ у точці $T$. Покажемо, що точки $M$, $T$, $N$ колінеарні. Оскільки $OQ$ — діаметр кола $\omega_1$, то $MQ$ і $CQ$ — дотичні до кола $\omega$. Нехай $\angle ABC = \beta$. Тоді $\angle CAQ = \angle ACQ = \beta$ (як кути між дотичними та хордою), $\angle ATQ = \angle ACQ = \beta$ і

$$\angle CTQ = \angle CAQ = \beta$$

(як вписані в коло $\omega_1$), $\angle BNA = \angle AMB = \angle CAQ = \beta$ (як кути при паралельних прямих). Звідси $\angle AMB + \angle ATB = \beta + (180^\circ - \beta) = 180^\circ$, а тому чотирикутник $AMBT$ вписаний і $\angle BTM = \angle MAB = \angle ACB$. Далі, у залежності від порядку розташування точок $A$, $C$ і $N$ на прямій, маємо розглянути наступні випадки. Якщо точка $C$ лежить між точками $A$ і $N$, то $\angle BNC + \angle BTC = \beta + (180^\circ - \beta) = 180^\circ$. Отже, чотирикутник $BNCT$ є вписаним, і $\angle BTN = \angle BCN = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle BTM$. Якщо ж точка $N$ лежить між точками $A$ і $C$, то $\angle BNC = 180^\circ - \beta = \angle BTC$. Тоді вписаним буде чотирикутник $BCNT$, і

$$\angle BTN = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle BTM.$$

Бачимо, що в обох випадках має місце рівність

$$\angle BTM + \angle BTN = 180^\circ,$$

яка доводить, що $T$ є точкою перетину прямих $MN$ і $BQ$.

Наведемо й інший спосіб розв'язання, який запропонував учень 11 класу Роман Чепляка (м. Одеса). Цей спосіб ґрунтується на додатковій побудові. А саме, побудуємо коло $\omega_2$ на відрізку $OB$ як на діаметрі. Нехай $T$ — точка перетину відмінна від $O$ точка перетину $BQ$ з колом $\omega_1$. При $T \neq O$ маємо $\angle OTQ = 90^\circ$ як вписаний кут, що спираються на діаметр. Тоді

$$\angle OTB = 180^\circ - \angle OTQ = 90^\circ.$$

Отже, точка $T$ завжди належить колу $\omega_2$. Нехай $R$ — середина сторони $AB$ (і точка перетину діагоналей паралелограма $AMBN$). Тоді пряма $OR$ є серединним перпендикуляром до $AB$. Отже, $\angle ORB = 90^\circ$, і точка $R$ також

лежить на $\omega_2$. Оскільки вписані в коло $\omega_2$ кути $RTB$ і $BOR$ є рівними, а $\angle BOR = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$, то $\angle BTR = \angle ACB$. Крім цього,

$$\angle AQT = \angle ACT$$

як кути, вписані в $\omega_1$. Нехай $P$ — точка перетину прямих $AC$ і $RT$. Оскільки кут $CAR$ гострий, а кут $ART$ — прямий, то ці прямі дійсно перетинаються, причому має місце один з двох випадків: або точка $P$ лежить між точками $A$ і $C$, або ж точка $C$ лежить між точками $A$ і $P$.

У першому з них маємо рівності

$$\angle BTP = 180^\circ - \angle BTR = 180^\circ - \angle BCP,$$

а тому чотирикутник $BTPC$ вписаний і $\angle ACT = \angle PCT = \angle PBT$. У другому випадку

$$\angle BTP = 180^\circ - \angle BTR = 180^\circ - \angle ACB = \angle BCP,$$

тому чотирикутник $BTCP$ вписаний і $\angle ACT = 180^\circ - \angle PCT = \angle PBT$. Бачимо, що в обох випадках справджується рівність $\angle PBT = \angle ACT = \angle AQT$, з якої випливає, що $BP \parallel AQ$. Таким чином, точка $P$ співпадає з точкою $N$, а пряма $PR$ — з прямою $MN$ (що містить діагональ паралелограма $AMBN$). Отже, точка $T$ належить водночас колу $\omega_1$ і прямим $BQ$ та $MN$.

**11.4.** *Відповідь:* $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, де $A$, $B$, $C$ — такі дійсні числа, що $AB \geq 0$.

**Лема.** *Якщо функція* $F\colon (0;+\infty) \to \mathbb{R}$ *задовольняє на проміжку* $(0;+\infty)$ *функціональне рівняння Коші*

$$F(u+v) = F(u) + F(v)$$

*і є обмеженою на інтервалі* $(0;1)$ *(тобто існує така стала* $M$*, що*

$$|F(u)| \leq M$$

*для всіх* $u \in (0;1)$*), то* $F(u) = F(1)u$ *для всіх* $u \in (0;+\infty)$.

*Доведення леми.* Розглянемо функцію $G(u) = F(u) - F(1)u$. Легко переконатися, що $G(1) = 0$ і що функція $G$ так само як і $F$ задовольняє на $(0;+\infty)$ функціональне рівняння Коші: для всіх $u, v \in (0;+\infty)$

$$G(u+v) = F(u+v) - (u+v)F(1) = F(u) + F(v) - uF(1) - vF(1) = G(u) + G(v).$$

Крім того, для всіх $u \in (0;+\infty)$

$$G(u+1) = F(u+1) - (u+1)F(1) = F(u) + F(1) - uF(1) - F(1) = G(u).$$

Функція $G$ є обмеженою на всьому проміжку $(0;+\infty)$. Дійсно, будь-яке дійсне число $u > 0$ можна подати у вигляді $k+\alpha$, де $k$ є цілим невід'ємним числом, $0 < \alpha \leq 1$, причому

$$|G(u)| = |G(k+\alpha)| = |G(\alpha)| \leq |F(\alpha)| + \alpha|F(1)| \leq M + |F(1)|$$

для довільного дійсного $u > 0$. Але за індукцією легко довести, що

$$G(nu) = nG(u)$$

для довільного дійсного $u > 0$ і довільного натурального числа $n$. Отже, нерівність

$$|G(u)| = \frac{1}{n}|G(nu)| \le \frac{1}{n}(M + |F(1)|)$$

виконується для довільного натурального $n$ і довільного дійсного $u > 0$. З цього випливає, що $G(u) \equiv 0$ на $(0; +\infty)$.

Перейдемо до розв'язання задачі.

З умови виводимо, що

$$\begin{aligned} &f(x+y+z) - f(x) - f(y) - f(z) \\ &\quad = f(x+y+z) - f(x+y) - f(z) + f(x+y) - f(x) - f(y) \\ &\quad = f(xz+yz+1) - f(xz+yz) - f(1) + f(xy+1) - f(xy) - f(1) \end{aligned}$$

для будь-яких $x, y, z > 0$.

Звідси

$$\begin{aligned} &f(xz+xy+1) - f(xz+xy) - f(1) + f(yz+1) - f(yz) - f(1) \\ &\quad = f(xz+yz+1) - f(xz+yz) - f(1) + f(xy+1) - f(xy) - f(1). \end{aligned}$$

Отже, для довільних $a, b, c > 0$ якщо покласти

$$x = \sqrt{\frac{ab}{c}}, \qquad y = \sqrt{\frac{bc}{a}}, \qquad z = \sqrt{\frac{ca}{b}}$$

одержуємо рівність

$$f(a+b+1) - f(a+b) - f(b+1) + f(b) = f(a+c+1) - f(a+c) - f(c+1) + f(c).$$

Розглянемо *першу різницю* функції $f$ як функцію $\Delta f$, що визначається на $[0; +\infty)$ співвідношенням

$$\Delta f(u) = f(u+1) - f(u).$$

Тоді, як нескладно отримати, для всіх $a, b, c > 0$ виконується рівність

$$\Delta f(b+a) - \Delta f(b) = \Delta f(c+a) - \Delta f(c).$$

Права частина цієї тотожності не залежить від $b$, тому й ліва її частина від $b$ не залежить. Отже,

$$\Delta f(b+a) - \Delta f(b) = \varphi(a)$$

для певної дійсної функції $\varphi$, визначеної на проміжку $(0;+\infty)$. Поміняв-ши місцями $a$ та $b$, отримаємо, що

$$\Delta f(a+b) - \Delta f(a) = \varphi(b),$$

звідки випливає, що

$$\Delta f(a) - \varphi(a) = \Delta f(b) - \varphi(b) \quad \text{для всіх } a, b > 0.$$

Знову ж таки, права частина останньої рівності не залежить від $a$, отже, ліва також не залежить, тому є сталою: $\Delta f(a) - \varphi(a) \equiv C_1$ для якогось дійсного $C_1$. Таким чином,

$$\Delta f(a+b) = \Delta f(b) + \Delta f(a) - C_1$$

для всіх $a, b > 0$. Легко переконатися, що функція $g(u) = \Delta f(u) - C_1$ задовольняє умови леми (обмеженість $g$ на $(0;1]$ випливає з монотонності $f$), тому

$$g(u) \equiv g(1)u,$$

і функція $\Delta f$ є лінійною на $(0;+\infty)$: $\Delta f(u) = C_2 u + C_1$, де $C_2 = g(1)$. Тепер з вихідної рівності для довільних $x, y > 0$ виводимо, що

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = C_2 xy + C_3,$$

де $C_3 = C_1 - f(1)$. Функція

$$h(u) = f(u) - \frac{1}{2}C_2 u^2 + C_3,$$

як нескладно довести, задовольняє умови леми. Тому $h(u) \equiv h(1)u$, і на проміжку $(0;+\infty)$ функція $f$ має вигляд

$$f(u) = Au^2 + Bu + C,$$

де $A = \frac{1}{2}C_2$, $B = h(1)$, $C = -C_4$. Згідно з умовою задачі маємо також, що

$$f(0) = f(3) - 3f(2) + 3f(1) = (9A+3B+C) - 3(4A+2B+C) + 3\cdot(A+B+C) = C.$$

Отже,

$$f(u) = Au^2 + Bu + C$$

для всіх $u \geq 0$. Підстановка такого тричлена в вихідну нерівність дає тотожність для будь-яких дійсних $A$, $B$ і $C$. Залишається відкинути випадок $AB < 0$, коли $f$ не є монотонною функцією на $[0;+\infty)$.

**11.5.** *Відповідь*: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Легко довести, що

$$n < \sqrt{n^2+n} < n + \frac{1}{2}$$

для всіх натуральних $n$. Отже, маємо, що

$$\pi\sqrt{n^2+n} \in \left(\pi n; \pi n + \frac{\pi}{2}\right).$$

Залишається тільки зауважити, що для $k \in \mathbb{N}$ на проміжках $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ косинус набуває додатні значення, а на проміжках $\left(2\pi k + \pi; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ — від'ємні.

**11.6.** *Відповідь*: дві сторони.

Розфарбуємо дошку як шахівницю, а разом з нею і многокутник. Проведемо в усіх клітинках дошки, які входять до складу многокутника, діагоналі, тим самим розбивши кожну з цих клітинок на чотири рівнобедрених прямокутних трикутнички з одиничною гіпотенузою. Оскільки многокутник утворено з доміно, то кількість чорних клітинок в його складі дорівнює кількості білих, а тому кількість чорних трикутничків дорівнює кількості білих. Усі трикутнички, гіпотенуза яких не входить до складу межі многокутника, розбиваються на пари тих, що мають спільну гіпотенузу. Очевидно, що кожна така пара складається з чорного та білого трикутничка, отже, кількість чорних трикутничків у парах дорівнює кількості білих трикутничків у парах. Тому серед трикутничків, які не мають пари, тобто прилягають до межі многокутника, кількість чорних дорівнює кількості білих. Легко бачити, що уздовж кожної сторони многокутника білі й чорні трикутнички, що прилягають до неї, чергуються. Якщо така сторона має непарну довжину, то прилеглих до неї трикутничків одного кольору на 1 більше, ніж другого. Якщо дві сторони непарної довжини є суміжними, то внаслідок шахового розфарбування крайні трикутнички, прилеглі до них, будуть одного кольору. Якщо припустити, що в многокутника є не більше однієї сторони парної довжини, то всі його $N$ сторін непарної довжини виявляться послідовно суміжними, отже, трикутничків одного кольору буде рівно на $N$ більше, аніж іншого (при цьому, зрозуміло, $N \geq 1$). Ця суперечність доводить, що серед сторін нашого многокутника знайдуться дві такі, що мають парну довжину. Приклад прямокутника розміром $1 \times 4010$ показує, що їх може бути рівно дві.

**11.7.** Покажемо, що для будь-якого натурального $n \geq 2$ набір

$$A_n = \{1 \cdot n!; 2 \cdot n!; \ldots; n \cdot n!\}$$

задовольняє умову задачі. Дійсно, візьмемо два довільних різних числа з набору $A_n$: $k \cdot n!$ і $m \cdot n!$, де $1 \leq k < m \leq n$. Оскільки $m - k \leq n$, то $m - k$ є дільником $n!$. Тому, очевидно, $\left(k^2 + m^2\right) \cdot (n!)^2$ ділиться без остачі на їхню різницю $(m - k) \cdot n!$.

**11.8.**

**Лема.** *Нехай $P$, $Q$, $R$, $X$, $Y$ — якісь п'ять з відмічених точок. Тоді серед трьох площин — $XYP$, $XYQ$ та $XYR$ — або тільки одна розділяє ті дві точки серед $P$, $Q$, $R$, які їй не належать, або кожна з цих площин має таку властивість.*

*Доведення леми.* Розглянемо три можливі випадки взаємного розташування п'яти точок.

1. Пряма $XY$ паралельна площині $PQR$. Тоді серед трьох прямих, що проходять через точки $P$, $Q$, $R$ паралельно $XY$, тільки одна лежить між двома іншими. Відповідна площина розділяє точки, а дві інші площини цього не роблять.
2. Пряма $XY$ перетинає площину $PQR$ в точці $O$, що лежить зовні трикутника $PQR$. Тоді три промені $OP$, $OQ$, $OR$ лежать усередині певного розгорнутого кута з вершиною в точці $O$, отже рівно один з них проходить між двома іншими. Відповідна площина розділяє точки, а дві інші площини цього не роблять.
3. Пряма $XY$ перетинає площину $PQR$ в точці $O$, що лежить усередині трикутника $PQR$. Тоді кожна з прямих $OP$, $OQ$, $OR$ перетинає одну зі сторін трикутника, тому кожна з трьох площин розділяє точки.

Жоден з вироджених випадків розташування не є можливим, оскільки за умовою жодні чотири відмічені точки не лежать в одній площині. Отже, має місце один з випадків 1–3.

*Розв'язання задачі.* Нехай $n_{PQ}$ позначає кількість проведених площин, які розділяють точки $P$ і $Q$. Покладемо $\delta(\alpha, P, Q) = 0$, якщо площина $\alpha$ не розділяє точки $P$ і $Q$, і $\delta(\alpha, P, Q) = 1$, якщо розділяє.

Нехай

$$\delta(\alpha, P, Q, R) = \delta(\alpha, P, Q) + \delta(\alpha, Q, R) + \delta(\alpha, P, R).$$

Розглянемо довільні три відмічені точки $P$, $Q$, $R$. Очевидно, що

$$n_{PQ} + n_{QR} + n_{PR} = \sum_{\alpha} \delta(\alpha, P, Q, R),$$

де сума береться по всіх проведених площинах. Легко бачити, що якщо площина $\alpha$ проходить через три або дві з точок $P$, $Q$, $R$, то

$$\delta(\alpha, P, Q, R) = 0,$$

а якщо не проходить через жодну, то $\delta(\alpha, P, Q, R) \in \{0; 2\}$.

Розглядаючи площини, які проходять рівно через одну з точок $P$, $Q$, $R$, застосуємо лему і одержимо, що для кожної пари точок $X$, $Y$, відмінних від $P$, $Q$, $R$,

$$\delta(XYP, P, Q, R) + \delta(XYQ, P, Q, R) + \delta(XYR, P, Q, R) \in \{1; 3\}.$$

Звідси робимо висновок, що парність числа

$$n_{PQ} + n_{QR} + n_{PR}$$

визначається кількістю зазначених вище пар $X$, $Y$, а таких пар буде $C^2_{2002}$. Це число є непарним. Таким чином ми довели, що число $n_{PQ} + n_{QR} + n_{PR}$ є непарним для будь-яких трьох відмічених точок $P$, $Q$, $R$. Інакше кажучи,

серед чисел $n_{PQ}$, $n_{QR}$ і $n_{PR}$ непарними є або всі три, або тільки одне. Звідси випливає, що якщо для якоїсь точки $P$ пофарбувати всі ті точки $Q$, для яких $n_{PQ}$ непарне, у той самий колір, що й точку $P$, а решту точок — у другий колір, то таке розфарбування буде задовольняти умову.

*Зауваження.* Можна сформулювати й таку задачу.

> На площині відмітили 2005 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій і жодні чотири не лежать на одному колі, і через усі трійки відмічених точок провели кола. Доведіть, що відмічені точки можна розфарбувати в два кольори таким чином, що для довільних двох однокольорових точок кількість проведених кіл, які розділяють ці дві точки, є непарною. (Кажуть, що коло розділяє дві точки площини, якщо одна з цих точок лежить усередині, а інша — зовні цього кола.)

Для зведення задачі в такому формулюванні до задачі 11.8 розглянемо в просторі сферу, що дотикається до нашої площини, і спроектуємо на неї всю побудовану конструкцію, взявши за центр проектування точку на сфері, протилежну точці дотику (йдеться про стереографічну проекцію). Коло на площині розділяє дві відмічені точки тоді й тільки тоді, коли площина проекції цього кола на побудовану сферу розділяє проекції цих точок.

# Про заочний та очний тури олімпіади з математики на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2005 році

*О. Перегуда*

Олімпіада механіко–математичного факультету користується великою популярністю серед школярів, їх батьків, вчителів та шанувальників математики. Починаючи з 1995 року, щорічно відбувається олімпіада з математики, яка дає можливість вступити на наш факультет без вступних випробувань, за результатами співбесіди. Олімпіада проходить у два тури — заочний і очний.

В заочному турі "Олімпіади 2005" взяли участь 292 випускники поточного року середніх навчальних закладів України. Журі олімпіади запропонувало 15 задач з різних розділів елементарної математики. Умови задач були надруковані в газеті "Київський університет", в журналі "У світі математики", на сайті факультету та університету. За результатами перевірки отриманих робіт, журі олімпіади визначило 268 переможців заочного туру, які отримали запрошення взяти участь у очному турі олімпіади.

Очний тур олімпіади відбувся 23 квітня 2005 року. З усієї України на механіко-математичний факультет з'їхалися 220 учасників. Журі олімпіади запропонувало учасникам очного туру розв'язати п'ять задач. Батьки школярів, які писали олімпіадну роботу, мали можливість в цей час ознайомитись із факультетом, поспілкуватися з деканом факультету, отримати відповіді на свої запитання. За результатами очного туру журі олімпіади визначило 93 переможців, які отримали запрошення до вступу на факультет без вступних іспитів за результатами співбесіди.

Далі наведено приклади олімпіадних завдань у 2005 році, пропонуються також розв'язки задач або вказівки до них.

## Завдання олімпіади у 2005 році

**1.** Знайти суму $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$, якщо $x_1 = 1$, а при $n \geq 1$ виконується рекурентне співвідношення $x_{n+1} = 3x_n - 4$.

**2.** Розв'язати нерівність $\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \geq 0$.

**3.** Знайти всі натуральні числа $p$, для кожного із яких будуть простими всі числа $p$, $p+12$, $p+24$, $p+36$, $p+48$.

**4.** З'ясувати, чи можна розмістити коло радіусу 2 см всередині трикутника зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см так, щоб вони не мали жодної спільної точки.

**5.** Знайти усі натуральні числа $n$, для яких дріб $\frac{11n+8}{7n+3}$ можна скоротити.

**6.** Чи є раціональним число $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$?

**7.** Задано $n$ додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таких, що $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Довести, що

$$(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1) \le 2^n.$$

## Розв'язки задач олімпіади

**1.** Запишемо задане рекурентне співвідношення у вигляді

$$x_{n+1}-2 = 3(x_n-2).$$

Звідси видно, що послідовність $x_n-2$ є геометричною прогресією, знаменник якої дорівнює 3, а першим членом її є $x_1-2$. Тому за формулою $n$-го члена геометричної прогресії $x_n-2 = 3^{n-1}(x_1-2) = -3^{n-1}$. Звідси $x_n = 2-3^{n-1}$. Отже, $x_1+x_2+\cdots+x_m = 2m-(1+3+3^2+\cdots+3^{m-1}) = 2m+\frac{1}{2}(1-3^m)$.

**2.** Область допустимих значень даної нерівності є об'єднання трьох проміжків: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $2+\sqrt{15} < x < +\infty$. Оскільки в цій області $\log_{11}(x^2-4x-11)^3 = \frac{3\log_5(x^2-4x-11)}{\log_5 11}$, то початкова нерівність рівносильна на ОДЗ наступній: $\left(2-\frac{3}{\log_5 11}\right)\frac{\log_5(x^2-4x-11)}{3x^2+5x-2} \le 0$.

Оскільки $2-\frac{3}{\log_5 11} < 0$, то отримаємо нерівність: $\frac{\log_5(x^2-4x-11)}{3x^2+5x-2} \ge 0$. Дана нерівність рівносильна на ОДЗ сукупності двох систем нерівностей:

$$\begin{cases} 3x^2+5x-2>0, \\ x^2-4x-11 \ge 1 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x^2+5x-2<0, \\ x^2-4x-11 \le 1. \end{cases}$$

Об'єднавши розв'язки систем, отримаємо відповідь: $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $6 \le x < +\infty$.

**3.** Безпосередньою підстановкою простих чисел, отримаємо, що $p=5$ задовольняє вказаній умові. Покажемо, що інших чисел не існує. Для цього розглянемо числа, які не діляться на 5: $p=5k+1$, $p=5k+2$, $p=5k+3$, $p=5k+4$ (де $k=1,2,\ldots$). Зрозуміло, що прості числа (окрім 5) є підмножиною вказаної множини.

Якщо $p=5k+1$, то число $p+24 = 5k+25 = 5(k+1)$ є складеним. Аналогічним чином перевіряється решта чисел, що не діляться на 5. Отже, для множини $\{5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4\}$ одне з чисел обов'язково є складеним. Тоді це твердження справедливе й для її підмножини, тобто простих чисел.

**4.** Для обчислення площі трикутника використаємо формули: $S = p\cdot r$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = 30/2 = 15$(см). Тоді $S = \sqrt{15\cdot 10\cdot 3\cdot 2} = \sqrt{900} = 30$(см$^2$), а отже $r = \frac{S}{p} = \frac{30}{15} = 2$(см). Це означає, що коло радіусу 2 см можна вписати в даний трикутник, тобто воно буде мати спільні точки з цим трикутником.

Розмістити коло з таким радіусом так, щоб воно не мало спільних точок з заданим трикутником неможливо, бо якщо його не вписувати в трикутник, а

розміщувати інакше, то воно обов'язково перетне сторони трикутника, тобто буде мати спільні точки.

**5.** Знайдемо за алгоритмом Евкліда НСД$(11n+8, 7n+3)$, $n \in \mathbb{N}$. Маємо:

$$\begin{aligned} 11n+8 &= (7n+3)\cdot 1 + (4n+5),\\ 7n+3 &= (4n+5)\cdot 1 + (3n-2),\\ 4n+5 &= (3n-2)\cdot 1 + (n+7),\\ 3n-2 &= (n+7)\cdot 3 - 23. \end{aligned}$$

Оскільки число 23 — просте, то можливі два варіанти:

а) НСД$(n+7; -23) = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді вихідний дріб нескоротний.

б) НСД$(n+7; -23) = 23$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді дріб є скоротним.

Звідси маємо, що $n+7 = 23\cdot k$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді шукані $n = 23\cdot k - 7$, $k \in \mathbb{N}$.

**6.** Позначимо $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = a$.

Тоді $a^3 = (A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ і $A = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $B = \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$. Отже $a^3 + 3a - 4 = 0$ і $a = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$ — раціональне число.

**7.** Використаємо нерівність Коші: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, для всіх $a \geq 0, b \geq 0$. Тоді отримаємо: $1+a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$, $1+a_2 \geq 2\sqrt{a_2}$, $\ldots$, $1+a_n \geq 2\sqrt{a_n}$.

Перемножимо почленно отримані нерівності:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \quad 2\sqrt{a_1}2\sqrt{a_2}\cdots 2\sqrt{a_n},$$

або

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1\cdot a_2\cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Оскільки $a_1\cdot a_2\cdots a_n = 1$ (за умовою), то $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n$, що й треба було довести.

# Граничні прямокутники

*О. Рибак**

У 2003 році на Київській міській олімпіаді з математики автором статті була запропонована наступна задача про граничні прямокутники.

Розглядається клітчаста дошка, деякі клітинки якої можуть бути зафарбованими. *Граничним* називається прямокутник зі сторонами, що проходять по сторонах клітинок, який задовольняє наступні дві умови. По-перше, граничний прямокутник не повинен містити зафарбованих клітинок. По-друге, потрібно, щоб не існувало іншого прямокутника зі сторонами по краях клітинок, який би містив даний, не співпадаючи з ним, та не містив би зафарбованих клітинок. Треба довести, що різних граничних прямокутників є не більше, ніж незафарбованих клітинок.

Авторська ідея розв'язання спиралася на те, що завжди існує незафарбована клітинка, яка належить тільки одному граничному прямокутнику. Якщо цю клітинку зафарбувати, то різниця між кількістю незафарбованих клітинок та кількістю граничних прямокутників не збільшиться ...

Умову задачі можна інтерпретувати наступним чином. Нехай є територія, розділена на квадратні ділянки. Деякі ділянки є придатними для обробки комбайном, а інші — непридатні для цього, бо, наприклад, на них знаходяться озера. Нам потрібно знайти зону найбільшої площі, яку буде зручно обробляти комбайном. Це означає, що зона має бути прямокутної форми та не повинна містити непридатних ділянок, які потрібно було б об'їжджати. Граничні прямокутники тоді були б варіантами розв'язку проблеми, адже шуканий прямокутник обов'язково є граничним. Якщо цих прямокутників було б не дуже багато (що й потрібно довести в задачі), то проблему можна було б розв'язати перебором граничних прямокутників. Щоправда, для цього потрібно ще й розробити ефективний алгоритм знаходження таких прямокутників. Любителі інформатики можуть спробувати придумати такий алгоритм.

Алгоритм — це, звісно, добре. Але нас цікавить ще й інше питання. Деякі перешкоди можуть знаходитися *на лініях*, які розділяють територію на ділянки, або *у вершинах ділянок* і при цьому бути настільки малими, щоб не псувати жодної ділянки. (Можна вважати, що це паркани між ділянками та дерева, які ростуть у точках перетину розмежовуючих територію ліній.) Та наявність цих перешкод всередині вибраної зони також небажана, тобто такі об'єкти є припустимими лише на стороні або у вершині граничного прямокутника.

В останній ситуації клітинка, що належить лише одному граничному прямокутнику, може вже не знайтись. Щоправда, ситуацію можна звести до попередньої, розглядаючи замість прямокутника розміру $k \times n$ прямокутник

*Студент 3-го курсу НТУУ "КПІ".

розміру $(2k+1) \times (2n+1)$, кожна клітинка якого відповідає клітинці, стороні, що розділяє клітинки, або спільній вершині чотирьох клітинок старого прямокутника. При такому перетворенні оцінка кількості граничних прямокутників збільшиться лише майже в чотири рази. Але можливий інший підхід, який доводить *таку само* оцінку, яка була і до узагальнення. Перед доведенням сформулюємо узагальнену задачу більш точно.

**Узагальнена задача про граничні прямокутники.** На клітчастій дошці пофарбовані деякі клітинки, сторони клітинок або їх вершини. Граничний прямокутник не може містити *внутрішніх* пофарбованих точок. Як і в попередній задачі, сторони граничного прямокутника мають проходити по межах клітинок та граничний прямокутник не міститься всередині ніякого іншого прямокутника, що задовольняє попередні дві умови. Довести, що різних граничних прямокутників може бути не більше, ніж незафарбованих клітинок.

*Розв'язання.* Для доведення розділимо граничні прямокутники на *великі* (у яких всі сторони довші, ніж сторона клітинки), *вузенькі* (у яких тільки горизонтальні сторони довші, ніж сторона клітинки), *низенькі* (у яких тільки вертикальні сторони довші, ніж сторона клітинки) та *маленькі* (у яких всі сторони рівні стороні клітинки). Нехай граничних прямокутників кожного типу — $a$, $b$, $c$ та $d$ штук відповідно.

*Стрічкою* назвемо прямокутник (не обов'язково граничний), сторони якого проходять по межах клітинок і висота якого дорівнює висоті однієї клітинки. При цьому стрічка не повинна містити внутрішніх зафарбованих точок. Будемо казати, що прямокутник зі сторонами по межах клітинок *спирається* на дану стрічку, якщо всі його найнижчі клітини належать даній стрічці. Доведемо індукцією за $l$ — кількістю клітинок стрічки, що різних великих або вузеньких граничних прямокутників, які спираються на дану стрічку, не більше, ніж $l-1$.

*База індукції.* Найнижчих клітинок будь-якого великого або вузенького прямокутника, за визначенням, буде не менше двох. Тому якщо $l=1$, то всі найнижчі клітинки великого або вузенького прямокутника не можуть належати даній стрічці. Отже, потрібних прямокутників буде $0 \le l-1$, що й треба було довести. (Зауважимо, що оскільки стрічка є *прямокутником*, вона не може складатися з 0 клітинок, тому $l$ має бути натуральним числом.)

*Крок індукції.* Нехай для всіх $l \le k$ твердження вірне ($k$ — натуральне). Доведемо його для стрічки $S$, довжина якої дорівнює $l = k+1$. Розглянемо прямокутник з найбільшою висотою, нижня сторона якого *співпадає* з нижньою стороною нашої стрічки і який не містить внутрішніх зафарбованих точок. Позначимо цей прямокутник через $P$.

Прямокутник $P$ може як бути граничним, так і не бути. Але будь-який інший прямокутник, який спирається на дану стрічку і не є вищим за $P$, — точно *не є граничним*, адже він міститься всередині прямокутника $P$. Отже, всі граничні прямокутники, які спираються на дану стрічку, крім щонайбільше одного, є вищими за $P$.

Точки, які є зафарбованими або належать межі дошки, будемо називати *критичними*. За вибором прямокутника $P$, на його верхній стороні є

критична точка, яка не співпадає з вершинами $P$. (В іншому випадку прямокутник, *на одну клітинку вищий* за $P$, нижня сторона якого співпадає з нижньою стороною $S$, належав би дошці і не містив би внутрішніх пофарбованих точок.) Якщо вищезгадана критична точка не є вершиною деякої клітинки, то сторона клітинки, що містить дану точку, є зафарбованою або ж належить межі дошки. А оскільки $l = k + 1 \geq 2$, то один з кінців цієї сторони клітинки не співпадає ні з якою вершиною P. Цей кінець також є критичною точкою, а він вже точно є вершиною клітинки. Отже, на верхній стороні прямокутника P є критична точка, яка *є вершиною деякої клітинки* і не співпадає з вершинами прямокутника $P$. Позначимо цю точку через $X$.

Клітинки стрічки S розділимо на дві множини — $S_1$ і $S_2$, відповідно до знаходження центра клітинки лівіше чи правіше від точки $X$. За вибором клітинки $X$, $S_1$ і $S_2$ — непорожні. Отже, вони є *стрічками*. Великий або вузенький граничний прямокутник, який спирається на $S$ і є вищим за $P$, знаходиться повністю не правіше або ж повністю не лівіше від точки $X$ — інакше він би містив $X$ у якості внутрішньої точки. Отже, такий прямокутник має *спиратися* на $S_1$ або на $S_2$. Нехай довжини $S_1$ і $S_2$ — $l_1$ і $l_2$, відповідно. Оскільки$l_1 + l_2 = l$, а також $l_1 \geq 1$ і $l_2 \geq 1$, то $l_1 \leq l - 1 = k$ і $l_2 \leq l - 1 = k$. Тому, за припущенням індукції, великих або вузеньких граничних прямокутників, що спираються на на $S_1$ або на $S_2$ — не більше за $(l_1 - 1) + (l_2 - 1)$. А крім цих прямокутників може бути *щонайбільше один* великий або вузенький граничний прямокутник, який спирається на $S$ — прямокутник $P$. Отже усього шуканих прямокутників — не більше, ніж $(l_1 - 1) + (l_2 - 1) + 1 = l - 1$, що й треба було довести.

Розглянемо *граничні стрічки*, тобто ті, що не належать деякій іншій стрічці, не співпадаючи з нею. Легко переконатися у наступних фактах. По-перше, граничні стрічки не мають спільних клітинок. По-друге, кожний граничний прямокутник спирається рівно на одну граничну стрічку. І потретє, будь-які два граничних прямокутника, кожен з яких є маленьким або вузеньким, спираються на різні граничні стрічки.

Нехай $n$ — загальне число незафарбованих клітинок, $q_1$ — кількість граничних стрічок, а $n_1$ — загальна кількість клітинок у всіх граничних стрічках. Оскільки кожний граничний прямокутник спирається на деяку граничну стрічку, то з доведеного за індукцією твердження слідує, що загальна кількість великих або вузеньких прямокутників — $a + b$ — не перевищує $n_1 - q_1$. Оскільки граничні стрічки не мають спільних клітинок, то $n_1 \leq n$, а отже $a + b \leq n_1 - q_1 \leq n - q_1$. З того, що різні маленькі або вузенькі прямокутники спираються на різні граничні стрічки, слідує, що кількість перших не перевищує кількості останніх. Тобто $d + b \leq q_1$. Склавши останню нерівність з раніше отриманою $a + b \leq n - q_1$, маємо $a + 2b + d \leq n$.

Залишився останній крок. Поміняємо вертикальний і горизонтальний напрямки між собою. Тоді низенькі прямокутники стануть вузенькими, а вузенькі — низенькими. Тобто вузеньких прямокутників буде вже $c$, і по аналогії з попереднім ми можемо отримати $a + 2c + d \leq n$. Складаючи останні дві нерівності, отримуємо $2a + 2b + 2c + 2d \leq 2n$, або ж $a + b + c + d \leq n$. Але ж $a + b + c + d$ — це загальна кількість граничних прямокутників! Тому, за-

гальна кількість граничних прямокутників не перевищує загальної кількості незафарбованих клітинок, що й треба було довести.

До речі, один з найефективніших алгоритмів знаходження всіх граничних прямокутників заснований саме на пошуку граничних прямокутників, що спираються на дану граничну стрічку.

Наступні задачі дозволяють вивчити різні *асимптотичні* властивості кількості граничних прямокутників, тобто властивості, які проявляються при необмеженому зростанні кількості клітинок дошки.

**Задача 1.** Неузагальнену задачу можна було розв'язати, вказуючи незафарбовану клітинку, при зафарбовуванні якої різниця між кількістю незафарбованих клітинок та кількістю граничних прямокутників не збільшиться. Може здатися, що таку властивість має будь-яка незафарбована клітинка. Але це не так. А в задачі потрібно довести навіть більш сильне твердження: для будь-якого $z$ знайдеться таке розфарбування деякої дошки, що при зафарбовуванні однієї з клітин вищезгадана різниця збільшиться не менше, ніж на $z$.

*Розв'язання.* Розглянемо квадратну дошку зі стороною в $2n-1$ клітинок ($n$ — натуральне). Введемо прямокутні координати з центром у центрі дошки з осями, паралельними до сторін дошки, та з одиничним відрізком, що дорівнює стороні клітинки. Зафарбуємо ті і тільки ті клітинки, у яких сума координат центра за модулем не менша за $n$. (На малюнку зображено дошку для $n=3$.) Тепер, якщо зафарбувати центральну клітинку, вищезгадана різниця збільшиться на $n^2-4n+3$. А це число може бути як завгодно великим.

| | | | × | × |
|---|---|---|---|---|
| | | | | × |
| | | × | | |
| × | | | | |
| × | × | | | |

**Задача 2.** Припустимо, що зафарбовувати можна лише клітинки, а не їх сторони або вершини. Доведіть, що для будь-якого $p<1$ існує таке розфарбування деякої дошки, що кількість граничних прямокутників не менша, ніж $pn$. Тут $n$ — це кількість *усіх*, а не тільки зафарбованих клітинок дошки.

*Вказівка до розв'язання.* Зафарбувати можна паралельні діагоналі таким чином, щоб відстань між сусідніми з них складала $m$, а сторони дошки дорівнювали б, наприклад, $m^2$.

**Задача 3.** По аналогії з граничними прямокутниками можна розглядати граничні паралелепіпеди. Але оцінки кількості граничних паралелепіпедів вже мають бути іншими. В цій задачі потрібно довести, що для будь-якого $M$ можна пофарбувати деяку тривимірну дошку з $n$ кубиків таким чином, що граничних паралелепіпедів буде не менше, ніж $Mn$.

# Полюси і поляри в просторі

*С. В. Слободянюк**

Добре відомі поняття полюса і поляри відносно кола на площині. Нагадаємо їх означення. Нехай на площині дане коло з центром $O$ і радіусом $r$. Для кожної точки $P$ площини, відмінної від $O$, візьмемо на промені $OP$ точку $P^*$ таку, що

$$OP^* \cdot OP = r^2$$

(тобто $P^*$ — образ точки $P$ при інверсії відносно даного кола). Пряму $p$, що проходить через точку $P^*$ і перпендикулярна до прямої $OP$, називають *полярою* точки $P$, а точку $P$ називають *полюсом* прямої $p$. Полюс та поляра мають багато цікавих властивостей, що можуть бути використані при розв'язанні різних планіметричних задач (див., наприклад [1], [3]). Наприклад, неважко перевірити, що довільна точка площини $Q$ належить прямій $p$ тоді і тільки тоді, коли її поляра $q$ містить $P$. Виявляється, що просторові аналоги полюса та поляри також мають деякі цікаві властивості і можуть допомагати в розв'язанні задач.

Зафіксуємо в просторі сферу $\omega$ з центром в точці $O$ і радіусом $r$. Цілком аналогічно випадку кола на площині будемо розглядати інверсію відносно сфери $\omega$ в просторі (тобто для кожної точки $P$простору, відмінної від $O$, візьмемо на промені $OP$ точку $P^*$ таку, що $OP^* \cdot OP = r^2$). Легко бачити, що при інверсії точка $P^*$ переходить в свій прообраз $P$. Властивості просторової інверсії можна знайти, наприклад, в розділі 16 в [2]. Далі в статті зірочка біля позначення точки буде означати, що ми беремо образ відповідної точки при інверсії відносно $\omega$.

Нехай $A$ — це множина всіх площин простору, що не проходять через точку $O$, $L$ — множина всіх прямих простору, що не проходять через $O$, а $X$— множина всіх точок простору, відмінних від $O$. Встановимо взаємно однозначну відповідність між елементами множин $A$ та $X$, а також між елементами множини $L$ наступним чином.

1) Нехай точка $K \in X$. Тоді у відповідність точці $K$ставимо площину, що проходить через $K^*$ перпендикулярно до $OK$ (очевидно, що ця площина належить множині $A$, оскільки вона не проходить через $O$).

2) Нехай площина $\alpha \in A$, $F$ — проекція точки $O$ на площину $\alpha$. Тоді у відповідність $\alpha$ ставимо точку $F^*$.

3) Нехай пряма $a \in L$, $H$ — проекція точки $O$ на пряму $a$. Тоді у відповідність до $a$ ставимо пряму, що проходить через $H^*$ перпендикулярно прямим $a$ та $OH$ (тобто перпендикулярно до площини, що проходить через $a$ та $O$).

Кожну точку з множини $X$ назвемо *полюсом*, а відповідну їй площину — її *полярою*. Пряма що відповідає даній — її *спряжена*. Легко перевірити взаємну однозначність встановлених відповідностей.

*Учень 11 класу Українського фізико-математичного ліцею КНУ ім. Т. Шевченка.

Тепер відмітимо наступні властивості.

1) Якщо точка лежить на $\omega$, то її поляра — це площина, що проходить через цю точку і дотикається до сфери, і навпаки — точка дотику площини до сфери є полюсом цієї площини.

2) Нехай точка $B$ лежить всередині $\omega$, $T$ — коло, яке є перетином $\omega$ та площини, що проходить через $B$ перпендикулярно до $OB$, а $C$ — це точка перетину будь-яких трьох площин, що дотикаються до $T$ та $\omega$. Тоді поляра точки $B$ — це площина, яка проходить через $C$ перпендикулярно до $OC$. Це випливає з того факту, що визначена таким чином точка $C$ переходить в $B$ при інверсії відносно $\omega$ (перевірте це самостійно!). Аналогічно для точки $C$, що лежить зовні $\omega$, полярою буде площина, що містить $T$.

3) Пряма $d \in L$ проходить через точку $M$ тоді і лише тоді, коли її спряжена пряма належить полярі точки $M$.

*Доведення.* Нехай $M \in d$, $p$ — площина, що проходить через $O$ та $d$, $H$ – проекція $O$ на $d$. Тоді $p$ перетинає $\omega$ по колу, яке позначимо через $s$. Точка $H^*$ буде планіметричним полюсом прямої $d$відносно $s$. Оскільки $H, M \in d$, з відміченої вище властивості планіметричних полюса та поляри випливає, що планіметрична поляра точки $M$ (пряма $m$) проходить через $H^*$ та $M^*$ і перпендикулярна до $OM$. Просторова поляра точки $M$ (це вже площина) також проходить через $M*$ перпендикулярно до $OM$. Отже ця площина проходить через пряму $m$, а тому і через $H^*$, і перпендикулярна до $p$. Пряма, спряжена до $d$, також проходить через $H^*$ і перпендикулярна до $p$. Тому вона належить полярі точки $M$. Доведення оберненого твердження проводимо аналогічно, розглядаючи площину, що проходить через $O$ перпендикулярно до спряженої прямої.

4) Якщо пряма $d \in L$ перетинає сферу в точках $D_1$ і $D_2$, то її спряжена — це пряма, по якій перетинаються площини, що дотикаються до $\omega$ у точках $D_1$ та $D_2$.

*Доведення.* Нехай $k_1$, $k_2$ — вказані дотичні площини, вони є полярами точок $D_1$ та $D_2$ і так як $d$проходить через ці точки, то за властивістю 3 її спряжена пряма належить площинам $k_1$, $k_2$, що і треба було довести.

5) Точка $M$ належить площині $\alpha$ тоді і лише тоді, коли її поляра проходить через полюс площини $\alpha$.

*Доведення.* Нехай $M \in \alpha$. Візьмемо будь-яку пряму в цій площині, що проходить через $M$, і тоді спряжена до неї пряма буде належати полярі $M$ (за властивістю 3) та проходитиме через полюс площини $\alpha$. Обернене твердження можна довести аналогічно, взявши пряму, що проходить через полюс $\alpha$ і належить полярі $M$.

Тепер розглянемо різні стереометричні задачі, що розв'язуються за допомогою цих властивостей.

**Задача 1 (Болгарська олімпіада, 1981 р.).** Площини $a$, $b$, $c$, $d$ дотикаються до описаної навколо тетраедра $ABCD$ сфери в точках $A$, $B$, $C$, $D$

відповідно. Довести, що якщо лінія перетину площин $a$ і $b$ лежить в одній площині з прямою $CD$, то лінія перетину площин $c$ і $d$ лежить в одній площині з прямою $AB$.

*Розв'язання.* Будемо брати полюси, поляри та спряжені прямі відносно сфери, описаної навколо тетраедра $ABCD$. Нехай $x_1$ – пряма перетину $a$ і $b$, $x_2$ — пряма перетину $c$ і $d$, $O$ – центр сфери. Оскільки площини $a$ та $b$, $c$ та $d$ перетинаються, то $AB$ та $CD$ не є діаметрами сфери. Якщо прямі $x_1$ і $CD$ перетинаються в точці $P$, то за властивістю 3 поляра $P$ містить прямі $x_2$ та $AB$ (оскільки за властивістю 4 $x_1$ та $x_2$ спряжені до прямих $AB$ і $CD$ відповідно). Якщо $x_1$ і $CD$ паралельні і лежать в площині, що не проходить через $O$, то прямі $x_2$ та $AB$ проходять через полюс цієї площини. Коли ж ця площина проходить через $O$, тоді прямі $x_2$ та $AB$ перпендикулярні їй, і отже паралельні. В усіх випадках ці прямі належать одній площині, що й треба було довести.

**Задача 2.** Нехай $O$ — центр вписаної в тетраедр $ABCD$ сфери, що дотикається до граней $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ у точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ відповідно, $l$ — пряма перетину площин $ABC$ і $A_1B_1C_1$. Довести що пряма $DD_1$ перпендикулярна до площини яка проходить через пряму $l$ і точку $O$.

*Розв'язання.* Відносно вписаної сфери маємо, що точка $D$ — полюс площини $A_1B_1C_1$, а $D_1$ — полюс площини $ABC$. Оскільки пряма $l$ належить цим площинам, то спряжена до неї пряма проходить через відповідні полюси, звідки і маємо твердження задачі.

**Задача 3.** В тетраедр $ABCD$ вписано сферу з центром в точці $O$, що дотикається до граней $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ відповідно. Нехай $S$ — це центр кола, описаного навколо трикутника $A_1B_1C_1$, а $n$ — пряма перетину площини трикутника $B_1C_1D_1$ з площиною, що проходить через точку $D$ паралельно площині трикутника $A_1B_1C_1$. Довести, що пряма $AS$ перпендикулярна до площини, що проходить через точку $O$ та пряму $n$.

*Розв'язання.* Пряма $OS$ перпендикулярна до площини $h$ трикутника $A_1B_1C_1$, а отже і до площини $t$, що паралельна їй і проходить через $D$. В якості фіксованої сфери $\omega$ візьмемо вказану вписану сферу. Оскільки $D$ — полюс $h$, то $S$ — полюс $t$. Але $A$ — полюс площини $B_1C_1D_1$, пряма $n$ належить площинам $B_1C_1D_1$ і $t$, тому спряжена до $n$ пряма проходить через $S$ і $A$. Звідси і випливає твердження задачі.

**Задача 4.** Нехай всередині сфери є точка $P$, що є спільною для трикутників $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ (вершини трикутників лежать на сфері). Трійки площин, що дотикаються вершин першого, другого і третього трикутників, перетинаються в точках $T_1$, $T_2$, $T_3$ відповідно. Довести, що площина $z$, яка проходить через точки $T_1$, $T_2$ та $T_3$, паралельна будь-якій хорді сфери для якої точка $P$ є серединою.

*Розв'язання.* Так як точки $T_1$, $T_2$ та $T_3$ належать $z$, то полюс площини $z$ за властивістю 5 належить полярам цих точок, тобто площинам трикутників.

Отже $P$ — полюс $z$ і з того, що будь-яка хорда з серединою в точці $P$ перпендикулярна до $OP$, де $O$ — центр сфери, випливає, що вона паралельна площині $z$, яка також перпендикулярна до $OP$.

**Задача 5 (Українська математична олімпіада, 1995 р.).** Вписана в тетраедр $ABCD$ сфера дотикається до граней $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ у точках $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ відповідно. Відомо, що прямі $AB_1$ і $BA_1$ перетинаються. Довести, що прямі $CD_1$ та $DC_1$ також перетинаються.

*Вказівка.* Див. розв'язання задачі 1.

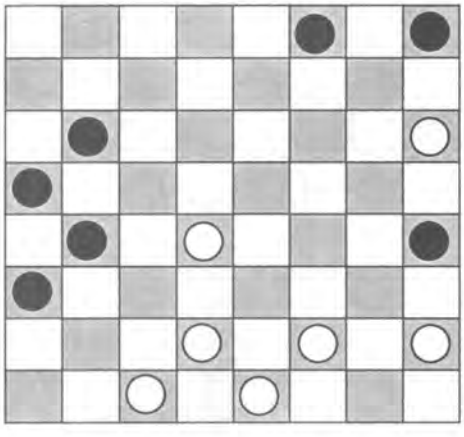
## Література

1. Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер, *Новые встречи с геометрией*, "Наука", Москва, 1978.
2. В. Ф. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, "Наука", Москва, 1989.
3. С. Ц. Харалампиев, *Полюс и поляра относительно окружности*, Квант **7** (1986).

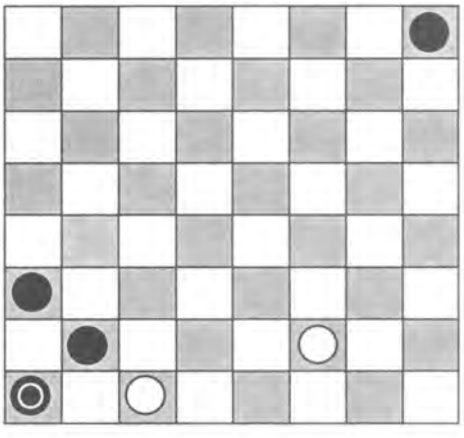
# Замикання у шашках

*І. Антоненко**

Як відомо, метою гри у шашки є створення позиції, в якій супротивник не має жодного ходу. Цього можна досягти двома способами : а) знищивши усі бойові одиниці партнера, або б) шляхом замикання. Про цей другий спосіб і піде мова у статті. Спробуємо розібратися в характерних особливостях замикання на наступних прикладах (див. діаг. 1).



Діаграма 1



Діаграма 2

Положення чорних набагато гірше: адже їх шашки розпорошені по флангах і позбавлені взаємодії. Остання надія чорних пов'язана із заготовленою пасткою.

**1.** h2g3 білі охоче "потрапляють" у пастку.

**1.** ... b4c3 чорні проводять комбінацію, не відчуваючи небезпеки.

**2.** d4:b2 f8g7

**3.** h6:f8 b6c5

**4.** f8:b4 a5:a1

У відповідь білі віддали, здавалося б, останні свої шашки, але ... перемогли!

**5.** f2e3 h4:d4

**6.** d2c3 d4:b2

**7.** e1f2 Див. діаг. 2

Чорні здалися, оскільки опозиція не на їх користь:

**7.** ... h8g7

**8.** f2g3 g7f8

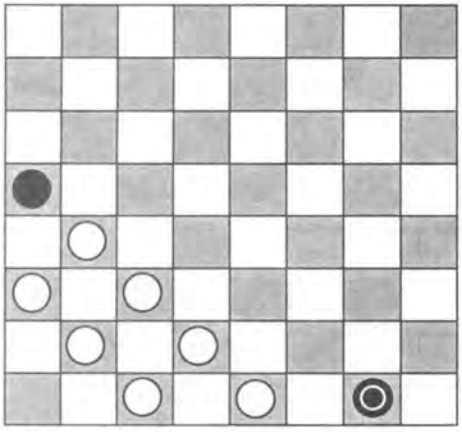
*Міжнародний майстер спорту з шашок.

**9.** g3f4

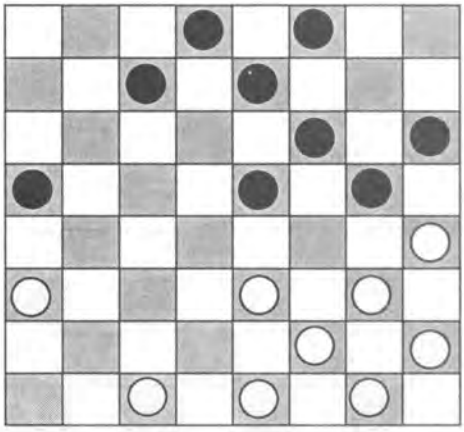
Як бачимо, замикання дозволяє перемогти меншими силами.

* * * *

За легендою позиція, показана на діаг. 3, трапилась в одній з партій На-



Діаграма 3



Діаграма 4

полеона, який був аматором шашок та непереможним гравцем. Поразка імператора означала б великі неприємності у майбутній битві, і у даній партії (Наполеон грав білими) поразка здавалася неминучою. Серед спостерігачів поширювалися хвилювання і тривога ... Проте після тривалих роздумів великому полководцю вдалося з честю вийти із скрутного становища:

**1.** b4c5! g1:a7
**2.** c3d4! a7:g1
**3.** d2e3! g1:a1
**4.** a3b4! a5:c3
**5.** c1b2!! і після вимушеного
**5.** ... c3d2
**6.** e1:c3 дамку чорних замкнено.

* * * *

Білі зважилися на складну й красиву комбінацію (див. діаг. 4):

**1.** e3d4 e5:c3
**2.** c1b2 c3:a1
**3.** g3f4 g5:e3
**4.** f2:d4 a1:e5
**5.** a3b4 a5:c3
**6.** e1d2 c3:e1
**7.** g1f2 e1:g3
**8.** h2:b8

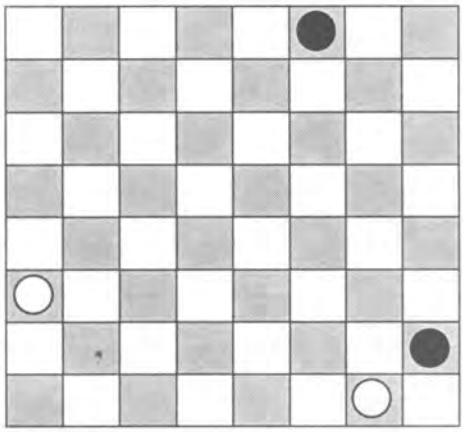
Проте чорні усе це передбачили!

**8.** ... e7d6!
**9.** b8:h8 на 9. b8:g7 вирішує 9. ... h6g5
**9.** ... h6g5

**10.** h4:f6 f8g7
**11.** f6e7 d8:f6 ×

* * * *

Значну роль відіграє замикання і у закінченнях. Важлива практична ідея міститься і у наступному етюді (діаг. 5).

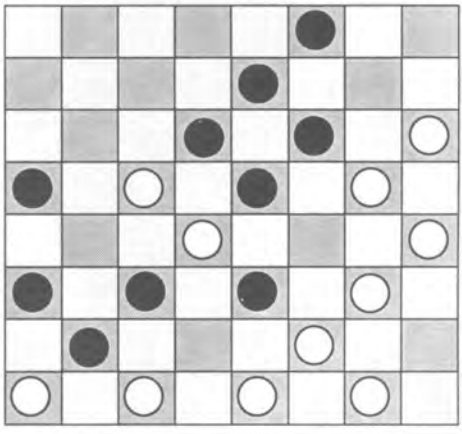


Діаграма 5

**1.** a3b4 f8e7
**2.** b4c5 e7f6
**3.** c5d6 f6g5
**4.** d6c7 g5f4
**5.** c7b8! f4e3 після 5. ... f4g3 виграє 6. b8a7
**6.** g1f2!! e3:g1
**7.** b8a7 і на будь-який хід чорної дамки білі відповідають 8. a7:g1 з виграшем.

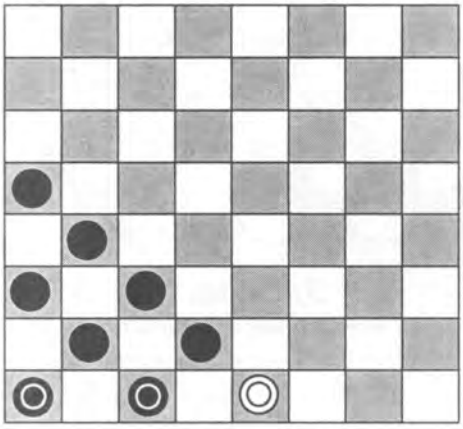
* * * *

На закінчення розглянемо цю неймовірну позицію (див. діаг. 6).



Діаграма 6

**1.** h6g7 f8:h2 усе інше також програє
**2.** c1d2!! e3:c1 не рятує і 2. ... d6:b4 3. d2:f8
**3.** f2g3! h2:f4 3. ... d6:b4 4. g1f2 і позиція зводиться до головного варіанту
**4.** g1f2 d6:b4
**5.** f2e3 f4:d2
**6.** h4g5 f6:h4
**7.** d4:d8 h4g3 єдине
**8.** e1f2!! g3:e1
**9.** d8h4 e1g3
**10.** h4:e1 ×

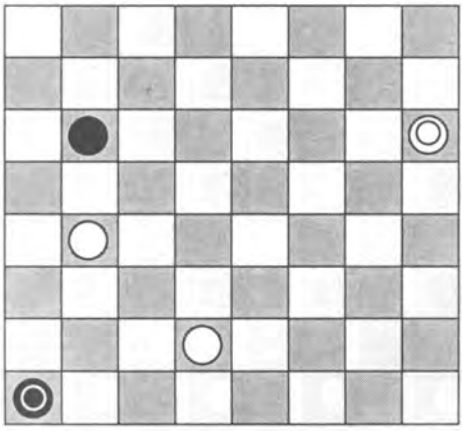


Діаграма 7

Фантастичний фінал! Самотня біла дамка виграє проти двох дамок та шести (!) шашок суперника.

* * * *

А тепер завдання для самостійного розв'язання: білі починають та виграють.



Діаграма 8

# Видатний український математик Ростислав Іванович Григорчук

*О. Ганюшкін, Р. Заторський, О. Безущак*

Український, бо Україна — його колиска. Тут він зростав і мужнів у батьківському мудрому слові. Гірськими плаями сходив на вершини, які додавали йому снаги і сили і повели у широкий та таємничий світ математики. А тепер, коли приїжджає на батьківщину, сходить зі своїм батьком на Говерлу, щоб з висоти поглянути на рідні краї. Таке сходження, зокрема, вони здійснили влітку 2003 року. Можливо в честь 50-річчя Ростислава ... Бо тут можна осягнути безмежні простори, осмислити пройдене і пережи-



те, вивищитись і очистити душу від суєти суєт. А скільки разів приходили до Ростислава Івановича плідні математичні ідеї під час вудіння риби на Пруті чи Дністрі! Тут, у рідних краях, найкращий відпочинок. Бо що є краще за прозорі води Прута та Дністровські каньйони, розкішні зелені гаї та чебрецеві зарінки? Цього вистачає на довгий час творчої праці.

Доктор математики Григорчук Ростислав Іванович є професором Московського університету імені Ломоносова, де разом з академіками Аносовим Д. В. та Болібрухом А. А. створили кафедру "Динамічні системи", а з 2002 року — і Техаського університету (США).

Проте добре відомий у світі український математик, як не дивно, не дуже знаний на своїй Батьківщині. Лише нещодавно в журналі "Математичні Студії", що видається у Львівському національному університеті ім. І. Франка, з'явилася стаття відомого російського математика, вчителя Ростислава Івановича, А. М. Стьопіна "Р. И. Григорчуку — 50 лет" (див. Математичні Студії. т. 20, № 2, с 115–118.). У тій статті розповідається математична біографія Ростислава Івановича. Ми ж зупинимося на його зростанні як людини.

Ростислав Іванович Григорчук народився 23 лютого 1953 року в селі Вишнівці, неподалік замку князя Вишневецького, що на Тернопільщині.

Батько математика — Іван Федорович Григорчук — також за фахом математик. У школі навчався у важкі воєнні та повоєнні роки. Діяльна та ідейна натура Івана Федоровича привела його в ряди українських повстанців. У сімнадцятирічному віці, сказавши командиру, що йому 18 років, він стає воїном УПА. Однак незабаром важко захворів і був залишений у надійних людей на лікування. Залишився живим, бо зрадників не виявилося ні серед його бойових побратимів, ні серед селян.

Не закінчивши середньої школи, вступив до Чернівецького учительського інституту, в якому навчався з 1946 по 1948 роки. А закінчуючи інститут, був змушений одночасно екстерном закінчувати і середню школу, бо диплом не видавали без атестата про середню освіту. З 1950 по 1956 роки Іван Федорович заочно навчався в Чернівецькому університеті на фізико-математичному факультеті, а з 1956 по 1959 роки — в аспірантурі цього ж університету. Коло інтересів Івана Федоровича — теорія функцій і функціональний аналіз. Темою його кандидатської дисертації є: "$L$-базиси та їх застосування". Стрімке батькове зростання як математика пізніше повторить Ростислав. Та діти зобов'язані перевершувати своїх батьків.

Мати Ростислава Івановича — Мурмилюк Катерина Василівна — за фахом лікар. Закінчила у 1952 році Чернівецький медичний інститут і все своє життя присвятила лікуванню людей.

Недавно другий з авторів цієї статті розмовляв із Катериною Василівною та Іваном Федоровичем. На прохання розповісти кілька цікавих характерних історій із дитинства Ростика мати неохоче ("Ростик не любить, коли про нього ведуть розмову") розповіла, що Ростик перші чотири роки майже не говорив. А почавши розмовляти, говорив здебільшого про числа і фігури. Мав добру і м'яку вдачу. Матері пригадалася така цікава історія. Одного разу вона відправила ще маленького Ростика на ринок по моркву. Довгенько

ходив Ростик по ринку, бо вибирав не моркву, а її продавця. А коли нарешті приніс дрібненьку моркву, то пояснив здивованій матері, що цю моркву продавав старенький, немічний дідусь.

Був ще й такий випадок в його дитинстві, який добре запам'ятався його батькам. Одного разу Ростик прийшов додому дуже сумний. "Що трапилося?" — запитав батько. "Дівчата побили". "А ти що, не міг їм здачі дати?" "У мене здачі немає," — тільки й відповів той.

Доброта та м'яка вдача дісталися Ростиславові від його матері. А від батька він успадкував здібність до математики, терплячість та наполегливість у досягненні поставленої мети.

У перший клас, без відома батьків, Ростик вступив, коли йому було 6 років. У цей час він проживав у своїх дідуся й бабусі по матері в с. Видинів Снятинського району, що на Івано-Франківщині. Іван Федорович тоді очолив кафедру математики Донецького політехнічного інституту (1959–1964 рр.). Тому після першого класу батьки перевели Ростика в російську Донецьку школу 1, де він вдруге навчався в першому класі.

Цікаво, що в той же час на кафедрі графіки Донецького політехнічного інституту працював Анатолій Солов'яненко, з яким батько Ростика був у дружніх стосунках.

Коли Ростику було 7 років, приятель батька подарував йому книжку "Математична скринька". Ця збірка цікавих задач і ломиголовок надовго стала його улюбленою книгою. Пізніше він не раз відзначав, що ця книжка дуже стимулювала його інтелектуальний розвиток у молодших класах.

Одного разу в домі Івана Федоровича зібралися друзі з кафедри математики. У сусідній кімнаті, бавлячись, Ростик малював стільця. Подивившись на малюнок, один із приятелів батька взяв олівець і легенько продовжив відповідні лінії. Всі вони зійшлися в одній точці! Здивований гість покликав решту друзів, сказавши: "Дивина, хлопець вже відчуває "перспективу". А Ростикові було лише 7 років!

А у восьмирічному віці Ростик розпитує батька про функцію. Після довгих пояснень батька Ростик на самоті ще раз "прокручує" його слова і приходить до висновку, що формально він вже розуміє поняття функції, але фактично — ще ні.

Р. Заторському запам'ятався такий епізод із дитинства: "Одного разу, десь після третього чи четвертого класу, Ростик приїхав на літні канікули до бабусі й дідуся в с. Видинів. Гуляючи в сільському парку, ми, як однокласники (вчилися разом у першому класі Видинівської восьмирічної школи), почали боротися. Боролися довго, понад півгодини, — ніхто не хотів визнавати себе переможеним. Зрештою, я таки переміг. Коли Ростик встав, то, обтрушуючись, сказав: "Зате я знаю логарифми". Мені тоді було відомо, що мова йде про математичне поняття, яке складне навіть для старшокласників, бо часто чув, як мій батько вечорами допомагав старшому братові розв'язувати задачі з логарифмами. Я був вражений цією новиною настільки, що не міг промовити й слова. Після цього випадку я завжди ставився до Ростика з повагою та шанобливістю."

У 1964 році батьки Ростислава переїхали до Івано-Франківська. Тут, в

Івано-Франківському інституті нафти і газу, Іван Федорович протягом двох років очолює кафедру математики. А Ростик у цей час вчиться в школі № 13, де потрапляє до рук досвідченого вчителя Габрид Віри Федотівни. Віра Федотівна відразу розпізнала математичний талант Ростика і призначила його "Директором математичного гуртка". Усе це морально підносило, додавало наснаги, та й заняття гуртка були дуже корисними й цікавими. На жаль, Ростик змушений був розлучитися з улюбленим вчителем. Ректорові інституту не сподобалося, що завідувач кафедри читає лекції українською мовою, і сім'я знову міняє місце проживання, переїжджаючи в 1966 році в м. Чернівці.

З 1966 по 1999 роки Іван Федорович працював у Чернівецькому державному університеті, а Ростислав у 1970 закінчує чернівецьку середню школу № 23. І в цій школі йому усміхнулася доля. Він потрапляє в клас видатного педагога Володимира Давидовича Аксельрода. Не другорядним для інтелектуального розвитку Ростислава був і той факт, що в цей період він зустрів свого "математичного суперника" — Крилюка Ярослава.

З 8 класу Ростислав навчався і в заочній фізико-математичній школі при Московському державному університеті, яку закінчив з відзнакою. А в 9-му та 10-му класах бере активну участь у математичних олімпіадах, причому із чудовими результатами: третя премія на Всесоюзній олімпіаді в Києві (1969 р.), друга премія у Харкові (1969 р.), друга премія на Всесоюзній олімпіаді в Сімферополі (1970 р.), де він знову зустрівся з Вірою Федотівною, яка була керівником команди учнів Івано-Франківської області.

У 1970 році Ростислав був на тренувальних зборах, де готувалися до міжнародної олімпіади, яка мала відбутися в Будапешті. Участь в міжнародній олімпіаді давала право вступу без вступних іспитів у будь-який вуз країни. Проте за тиждень до від'їзду команди в Будапешт йому повідомили, що він не включений до складу команди.

Вступні іспити у Московський державний університет імені Ломоносова забрали у Ростислава 10 кг його ваги! Не останню роль при вступі відіграла рекомендація академіка Колмогорова. Пізніше Андрій Миколайович ще не раз допомагатиме Ростиславові.

У 1978 році в Московському державному університеті ім. Ломоносова Ростислав Іванович захистив кандидатську дисертацію на тему "Банахові середні в однорідних просторах і випадкові блукання". Науковим керівником Ростислава був доц. Стьопін А. М., якого ми вже згадували на початку статті.

Кандидатська дисертація стосувалася теорії ймовірностей, але незабаром наукові інтереси Ростислава змінюються. Він переключається на складні задачі алгебри. Пройшло лише 7 років, і в 1985 році Григорчук Р.І. захищає докторську дисертацію на тему "Функції росту скінченно-породжених груп та їх застосування".

Вже в своїх ранніх роботах він запропонував елегантні розв'язання кількох відомих проблем, сформульованих видатними математиками XX століття — Мілнором, Бернсайдом, Деєм, які залишалися відкритими впродовж десятиліть. Після такого блискучого вступу до світу математики Ростислав

Григорчук не перестає вражати колег своїми глибокими дослідженнями у різних галузях математики.

Його наукові інтереси дуже різноманітні: теорія груп, теорія динамічних систем, топологія малих розмірностей, теорія автоматів, статистична фізика, теорія когомологій, фрактальна геометрія, теорія формальних мов, теорія випадкових блукань, тощо. В усіх цих галузях математики йому належать плідні і глибокі ідеї, які на довгі роки визначили ефективні напрямки розвитку багатьох їх розділів.

Вміння виділити головне, чудова інтуїція, потужний творчий компонент, вміння зацікавити, талант педагога і вчителя, широта і різносторонність інтересів — все це допомогло Ростиславу Івановичу згуртувати навколо себе обдарованих учнів з різних країн світу: України, Росії, Швейцарії, Італії, Ірану, США, тощо.

Григорчуку Р. І. належить багато чудових результатів. Відзначимо лише найвидатніші досягнення: розв'язання проблеми одного з найвідоміших топологів 20 століття — Мілнора — про групи проміжного росту, проблеми М. Дея про неелементарні аменабельні групи. Спільно із швейцарським математиком Бартольді він розв'язав проблему Зельманова, разом із Лінделом, Шиком і Жуком — проблему про $L^2$-числа Бетті. Ростиславу належить значний вклад у розв'язання знаменитої проблеми Бернсайда, зокрема, розвиваючи пов'язані з цією проблемою свої ідеї, він створив теорію гіллястих груп.

Висвітлити більш-менш докладно всі результати, отримані Ростиславом Григорчуком, у цій невеликій статті важко. Але вже сьогодні можна сказати, що ці результати відкрили нові горизонти в багатьох областях математики і ввійшли до золотої її скарбниці.

Американський математик Джон Мікін так відзначив творчий доробок Григорчука Р. І.: "Будь-яке з досягнень Григорчука зробило б його визначним математиком, а взяті усі разом, вони роблять його одним з найвидатніших математиків сучасності".

У липні 2003 року з нагоди 50-річчя видатного українського математика — Григорчука Ростислава Івановича — в Італії було проведено міжнародну математичну конференцію. Її організаторами стала група вчених Чиказького університету, Королівського технологічного інституту Швеції та Каліфорнійського університету Берклі (матеріали цієї конференції легко знайти в Інтернеті: `http://www.math.kth.se/ gaeta`). Головами пленарних засідань на цій конференції були такі визначні математики сучасності як директор математичного інституту в Цюріху (Швейцарія) — Марк Берже, член-кореспондент Французької академії Еть'єн Гіз та академік цієї ж академії М. Громов, лауреат премії Філдса — математичного аналога Нобелівської премії — Ю. Зельманов, відомі російські математики О. Ольшанський та А. Вершик, Саїд Сідкі із Бразилії, Александр Люботський з Ізраїлю, швейцарський математик П'єр де ля Арп, німецький — Фріц Грюневальд. Чисельною була група українських математиків, серед яких були і два члени редколегії журналу "У світі математики" — професор Сущанський В. І. та кандидат фізико–математичних наук Некрашевич В.В. Великий інтерес на

конференції викликала і доповідь професора Київського університету Кириченко В. В. Всього на цій конференції було зроблено понад сто доповідей, присвячених питанням, що пов'язані з роботами Р. Григорчука.

Ростислав Іванович є бажаним гостем на міжнародних математичних конференціях: Женева і Цюріх, Париж і Лондон, Кіото і Ліон, Марсель і Нью-Йорк, Берклі і Лос-Анджелес, Сан-Дієго і Рим, Відень і Бонн, Тегеран і Едінбург, Тулуза і Страсбург, Лозанна і Гренобль — десятки і десятки доповідей ... Однак особливо слід виділити виступ на Міжнародному конгресі математиків у 1990 році в Токіо. Такі конгреси відбуваються раз в 4 роки. Кількість "запрошених" доповідей дуже невелика. Тому бути запрошеним на цей конгрес доповідачем є для кожного математика великою честю.

Дуже почесними вважаються доповіді на засіданнях Лондонського математичного товариства, де Григорчук виступав неодноразово. Його запрошували і на престижні Передові читання в Техаському університеті (читання складаються із трьох лекцій спеціаліста, який вважається найбільш компетентним у даній галузі).

У 1999 і 2001 роках роботи Григорчука Р. І. визнаються кращими роботами Російської академії наук.

Наведемо деякі відгуки відомих сучасних математиків про наукову роботу Григорчука Р. І.

Алан Богес: "Глибоке розуміння теорії груп, комбінаторних та динамічних систем роблять його одним з найвидатніших математиків Сполучених Штатів".

Алесандро Фіга-Таламанка: "Його результати в теорії груп є найважливішими за останні 20 років".

Роджер Сміт: "Його нові відкриття дозволили йому розв'язати кілька проблем, які ми вважали нерозв'язними".

П'єр де ла Арп: "Він вніс до спільноти теоретико-груповиків нові приклади, концепції та результати, що змінили предмет".

Пітер Кухмен: "Він володіє величезним обсягом знань, неймовірною продуктивністю та міжнародною репутацією зірки світового класу. Він, без сумніву, в перших лавах серед математиків, що заслуговують статусу визначного дослідника".

Кожного літа Ростислав Іванович поспішає до батьківської оселі на Україну. У його житті відіграють важливу роль дві річки: Прут, де пройшло його дитинство, та Дністер, з яким доля пов'язала його пізніше. Влітку Ростислав Іванович полюбляє перебувати на батьковій дачі у селі Макарівка, що на березі Дністра (місцеві жителі прозвали її "професорською"), та рибалити зі своїм батьком.

І якщо хтось побачить суперечність між місцем праці — "професор Техаського університету та професор Московського державного університету ім. Ломоносова" і формулюванням — "український математик", то нагадаємо слова самого Ростислава: "Я — український математик, душа моя завжди з Україною".

Відома українська поетеса Оксана Лесюк присвятила Ростиславу Івановичу такого вірша:

### Рідні береги

*Присвята видатному українському математикові Ростиславові Григорчуку*

Як над рідним краєм щедре сонце сходить,
Іскорками грають трави росяні —
У дзвінкоголосі молодої вроди
Лине благодатна музика землі.

У такі хвилини, неповторні миті,
Хочеться злетіти в небо журавлем,
Щоб з вершин високих, сонцем перелитих,
Осягнути серцем пережитий день.

Відігнати втому і думки тривожні,
І щоденних буднів суєту земну.
Ми у цьому світі тільки подорожні ...
Встигнути б пізнати часу бистрину.

Віднайду я стежку, що веде додому,
У джерел цілющих зачерпну снаги,
Лишуся в стихії весняного грому,
Де Прута дзвінкого рідні береги.

Тут душа радіє в повені бузковій
В солов'їнім щебеті, маминих піснях.
Тут душа мужніла в батьковій любові,
Тут життя початок і дитинства шлях.

Тож побажаємо Ростиславу Івановичу доброго здоров'я і подальшої плідної праці в математиці на славу нашої Батьківщини.

## Задачі 250–255

Розділ ведуть
Володимир Брайман, Сергій Горовий, та Володимир Некрашевич

**250.** Про коефіцієнти многочлена $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ відомо, що $a > 0$, $e > 0$ та $ad^2 + b^2e - 4ace < 0$. Довести, що цей многочлен не має дійсних коренів. *(Д. Мітін, Київ)*

**251.** Нехай функція $f$ неперервна на всій дійсній осі та рівняння

$$\underbrace{f(x + f(x + \ldots + f}_{2005}(x)\ldots)) = 2005x$$

має розв'язок. Довести, що рівняння $f(x) = x$ також має розв'язок.
*(Б. Байденко, Київ)*

**252.** Кола $\omega_1$ та $\omega_2$ з центрами $O_1$, $O_2$ перетинаються в точках $A$ та $B$. Через точки $O_1$, $O_2$, $A$ проведено коло $\omega$, яке перетинає кола $\omega_1$, $\omega_2$ в точках $K$, $M$. Довести, що $AB$ — бісектриса кута $\angle KAM$ або кута, суміжного з $\angle KAM$. *(Т. Тимошкевич, Київ)*

**253.** Знайти всі натуральні числа $n$ та $k$, при яких для всіх дійсних чисел $x$ має місце рівність

$$\sin^n x + \cos^k x = \sin^k x + \cos^n x.$$

*(В. Брайман, Житомир)*

**254.** Коло $\omega$, яке проходить через вершини $B$ та $C$ трикутника $\triangle ABC$ з $AB \neq AC$, перетинає сторони $AB$ та $AC$ вдруге в точках $R$ та $S$. Нехай $M$ — середина $BC$. Перпендикуляр до $MA$ в точці $A$ перетинає $BS$ та $CR$ в точках $K$ та $T$ відповідно. Довести, що якщо $TA = AK$, то $MS = MR$. *(О. Клурман, Львів)*

**255.** Числа $a, b, c > 1$ задовольняють рівність $a + b + c = abc$. Довести, що

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) \leq 8.$$

*(О. Макарчук, Добровеличівка)*

**250.** The coefficients of a polynomial $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ are such that $a > 0$, $e > 0$ and $ad^2 + b^2e - 4ace < 0$. Prove that this polynomial has no real roots. *(D. Mitin, Kyiv)*

**251.** Let $f$ be a continuous function on $\mathbb{R}$. It is known that the equation

$$\underbrace{f(x + f(x + \ldots + f}_{2005}(x)\ldots)) = 2005x$$

has a solution. Prove that the equation $f(x) = x$ also has a solution.

*(B. Baydenko, Kyiv)*

**252.** The circles $\omega_1$ and $\omega_2$ with centres $O_1$, $O_2$ intersect at points $A$ and $B$. The circle $\omega$, passing through $O_1$, $O_2$, $A$ intersects $\omega_1$ and $\omega_2$ again in points $K$, $M$ respectively. Prove that $AB$ is a bisector of $\angle KAM$ or of angle adjacent to $\angle KAM$. *(T. Tymoshkevych, Kyiv)*

**253.** Find all positive integers $n$ and $k$, such that for every real $x$ the identity

$$\sin^n x + \cos^k x = \sin^k x + \cos^n x$$

holds true. *(V. Brayman, Zhytomyr)*

**254.** The circle $\omega$ passing through the vertices $B$ and $C$ of a triangle $\triangle ABC$ with $AB \neq AC$ intersects the sides $AB$ and $AC$ at $R$ and $S$. Let $M$ be the midpoint of $BC$. The straight line perpendicular to $MA$ at $A$ intersects $BS$ and $CR$ at $K$ and $T$ respectively. Prove that if $TA = AK$ then $MS = MR$. *(O. Klurman, Lviv)*

**255.** Let $a, b, c > 1$ be such that $a + b + c = abc$. Prove the inequality

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) \leq 8.$$

*(O. Makarchuk, Dobrovelychkivka)*

## Розв'язання задач 214–219

Розділ ведуть
Володимир Брайман, Сергій Горовий, та Володимир Некрашевич

**214.** Для кожного натурального числа $k$ знайти всі натуральні числа $n$, для яких $7^n+1$ ділиться на $5^k$.

*Розв'язок.* Оскільки дві останні цифри чисел $7^n$ повторюються з періодом 4: $07, 49, 43, 01, 07, \ldots$, то для $k=1$ та $k=2$ маємо $n=2+4j$, $j\geq 0$. При $k\geq 3$ потрібні значення $n$ теж слід шукати серед чисел $2(2j+1)$. Знайдемо найбільший степінь 5, на який ділиться $7^{2(2j+1)}+1$, в залежності від $j$. Нехай $2j+1$ не ділиться 5. Тоді маємо

$$7^{2(2j+1)}+1 = 49^{2j+1}+1 = 50(49^{2j}+(-49^{2j-1})+\ldots+(-49)+1).$$

Вираз в дужках містить $2j+1$ доданків, кожен з яких дає остачу 1 при діленні на 5, а отже цей вираз не ділиться на 5, $7^{2(2j+1)}+1$ ділиться на $5^2$, але не на $5^3$. Тепер запишемо рівність

$$\begin{aligned} 7^{2\cdot 5(2j+1)}+1 &= 49^{5(2j+1)}+1 \\ &= (7^{2(2j+1)}+1)(49^{4(2j+1)}+(-49^{3(2j+1)})+49^{2(2j+1)}+(-49^{2j+1})+1). \end{aligned}$$

Вираз в дужках містить 5 доданків, кожен з яки дає остачу 1 від ділення на 50, тому цей вираз ділиться на 5, але не на 25. Звідси $7^{2\cdot 5(2j+1)}+1$ ділиться на 5 в степені на одиницю більшому, ніж $7^{2(2j+1)}+1$. Тому при $2j+1=5^m(2j_0+1)$, де $2j_0+1$ не ділиться на 5, $7^{2(2j+1)}+1$ ділиться на $5^{m+2}$, але не на $5^{m+3}$. Звідси знаходимо відповідь до задачі.

Відповідь: $\begin{cases} \text{при } k=1, & n=4j+2,\ j\geq 0; \\ \text{при } k\geq 2, & n=5^{k-2}(4j+2),\ j\geq 0. \end{cases}$ *(Розв'язок автора)*

**215.** Нехай $ABC$ — трикутник. Коло, яке проходить через $A$ та $B$, перетинає відрізки $AC$ та $BC$ у точках $D$ та $E$ відповідно. Промені $BA$ та $ED$ перетинаються у точці $F$, а прямі $BD$ та $CF$ — у точці $M$. Довести, що $MF=MC$ тоді і тільки тоді, коли $MB\cdot MD=MC^2$.

*Розв'язок.* Нехай $MF=MC$. Відкладемо на продовженні $BM$ $MG=MD$. Тоді $CGFD$ — паралелограм, а отже $AC\parallel GF$, $EF\parallel CG$, $\angle CGF=\angle EDA$. Оскільки $\angle CBF+\angle CGF=\angle EBA+\angle EDA=180^\circ$, то чотирикутник $CBFG$ вписаний. Тому $BM\cdot MD=BM\cdot MG=CM\cdot MF=CM^2$.

Нехай тепер $MB\cdot MD=MC^2$. Тоді $MC$ — дотична до кола, описаного навколо $\triangle BCD$, а отже $\angle MCD=\angle CBD$. Але чотирикутник $ADEB$ вписаний, $\angle CBD=\angle EBD=\angle EAD$. Отже $\angle MCD=\angle EAD$, $CF\parallel AE$. При гомотетії, що переводить $\triangle EBA$ в $\triangle CBF$, точка $D$ переходить в деяку

точку $G$, що лежить на продовженні $BM$. Тоді $ED \parallel CG$, $AD \parallel GF$, а отже $CGFD$ — паралелограм та $M$ — середина $CF$.

**216.** В центральній клітинці дошки розміром $2003 \times 2003$ стоїть фішка. Двоє гравців по черзі пересувають її на одну з сусідніх клітинок (сусідніми є клітинки, що мають спільну сторону). При цьому перший гравець або зберігає напрямок руху фішки, або повертає ліворуч, а другий гравець або зберігає напрямок руху, або повертає праворуч. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців має виграшну стратегію?

*Розв'язок.* Розглянемо квадрати $1 \times 1$, $3 \times 3$, $5 \times 5$, ..., центр кожного з яких співпадає з центром дошки. Першим ходом перший гравець виводить фішку за межі квадрата $1 \times 1$. Покажемо, що другий гравець може діяти так, щоб перший гравець виводив фішку з усіх квадратів $(2k+1) \times (2k+1)$. Тоді через деякий час йому доведеться вийти і за межі квадрату $2003 \times 2003$, тобто дошки, і він програє.

Нехай після того, як перший гравець щойно вивів фішку з квадрату

$$(2k-1) \times (2k-1)$$

в квадрат $(2k+1) \times (2k+1)$, другий гравець повертає праворуч, а потім зберігає напрямок руху фішки. Тоді або перший гравець поверне ліворуч і виведе фішку з квадрату $(2k+1) \times (2k+1)$, або буде постійно зберігати напрямок руху. Але через деякий час фішка потрапить в кутову клітинку квадрату $(2k+1) \times (2k+1)$. Покажемо, що в цей момент хід має робити перший гравець. Для цього пофарбуємо дошку в чорний та білий кольори в шаховому порядку так, щоб центральна клітинка була чорною. Помітимо, що коли фішка стоїть на чорній клітинці, то хід має робити перший гравець, а кутові клітинки всіх квадратів чорні. Отже, коли фішка потрапить в кутову клітинку квадрату $(2k+1) \times (2k+1)$, то хід зробить перший гравець і цим ходом він обов'язково виведе фішку з квадрату $(2k+1) \times (2k+1)$. Отже, виграшну стратегію має другий гравець. *(Розв'язок автора)*

**217.** Нехай для кожного натурального $n$ $\varphi(n)$ — функція Ойлера, визначена наступним чином: $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$, де $p_1, p_2, \dots, p_m$ — всі попарно різні прості дільники $n$. Наприклад, $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(4) = 2$. Знайти всі $n \le 1000$, для яких $\varphi(n) = \varphi(n+1)$.

*Розв'язок.* Нехай $s$ та $t$ — парне та непарне з чисел $n$ та $n+1$ відповідно. Помітимо, що $\varphi \le \frac{s}{2}$ та рівність досягається лише для $s = 2^l$. Тому або пара $(n, n+1)$ має вигляд $(2^l - 1, 2^l)$, або $t$ задовольняє умову

$$\varphi(t) = \varphi(s) < \frac{s}{2} \le \frac{t+1}{2},$$

$\varphi(t) < \frac{t+1}{2}$, а отже $\varphi(t) \le \frac{t+1}{2} - 1 < \frac{t}{2}$, бо $\frac{t+1}{2}$ — ціле. Звідси

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_m}\right) < \frac{1}{2},$$

де $p_1, p_2, \dots, p_m$ — всі попарно різні дільники $t$. Але цих дільників щонайбільше 3, бо $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1155 > 1000$. Якщо серед дільників немає 3 або

5, то $(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\dots(1-\frac{1}{p_m}) \geq \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11} > \frac{1}{2}$, тому серед дільників є 3 та 5. Оскільки $(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{17}) > \frac{1}{2}$, то серед дільників є 7, 11 або 13. Остаточно набір дільників $t$ має вигляд 3,5,7; 3,5,11 або 3,5,13, маємо варіанти 105, 315, 525, 735, 945, 165, 495, 825, 195, 585 та 975, для кожного з яких достатньо перевірити, чи утворює це число пару з одним з сусідніх парних чисел. Таким чином знаходимо пари (104,105), (164,165), (194,195), (495,496), (584,585) та (975,976). Розгляд пар $(2^l-1, 2^l)$ дає ще 4 пари розв'язків, дві з яких вказані в умові задачі: (1,2), (3,4), (15,16), (255,256).

Відповідь: 1, 3, 15, 104, 164, 194, 255, 495, 584, 975. *(Розв'язок автора)*

**218.** В опуклому вписаному чотирикутнику $ABCD$ бісектриси кутів $\angle BAD$ та $\angle BCD$ перетинаються на діагоналі $BD$. Нехай $E$ — середина $BD$. Довести, що $\angle BAE = \angle CAD$.

*Розв'язок.* Візьмемо на продовженні $BA$ точку $P$ так, що $BA = AP$. Тоді $\angle PAD = 180^\circ - \angle BAD = \angle BCD$, бо чотирикутник $ABCD$ вписаний. За властивістю бісектрис $\frac{PA}{AD} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$, тому трикутники $\triangle PAD$ та $\triangle BCD$ подібні, $\angle APD = \angle CBD$. Але $\angle CAD = \angle CBD$ як кути, що спираються на одну дугу, та $\angle BAE = \angle APD$, бо $AE$ — середня лінія в $\triangle BPD$. Тому $\angle BAE = \angle CAD$. *(Олег Макарчук)*

**219.** Обчислити границю послідовності

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2+2^2} + \dots + \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2},\ n \geq 1.$$

*Розв'язок.* Розкладемо дріб

$$\frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}$$

на найпростіші. Маємо

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-(2n+1)^2}{n(n+1)(2n+1)} = -\frac{4n(n+1)}{n(n+1)(2n+1)} = -\frac{4}{2n+1},$$

тобто

$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = 6\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\right),$$

$$a_n = 6\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1}\right).$$

Перепишемо цей вираз у більш зручному вигляді. Позначимо

$$H_n = c_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} = \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{i} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - 1 = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1,$$

а отже

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{4}{2k+1} \right) = H_n + H_{n+1} - 1 - 4\left( H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1 \right)$$

$$= 3 + 4H_n + \frac{1}{n+1} - 4H_{2n+1} = 3 + \frac{1}{n+1} - 4\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{n+1}{k}.$$

Тому $\lim_{n\to\infty} a_n = 6(3 - 4\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k})$. Але

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{1+\frac{i}{n}}.$$

Це інтегральна сума для функції $\frac{1}{x}$ на проміжку $[1, 2]$,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

та остаточно $\lim_{n\to\infty} a_n = 6(3 - 4\ln 2) = 18 - 24\ln 2$. *(Розв'язок авторів)*

Список читачів, що надіслали правильні розв'язки

**Макарчук О.** (*смт. Добровеличівка, Кіровоградська обл.*) 212(з минулого номера), 215, 218, 219;

**Голентус І.** (*Кривий Ріг*) 214, 218, 219;

**Федак І.** (*с. Парищє, Івано-Франківська обл.*) 214, 215, 216, 217, 218, 219.

*Український математичний журнал для школярів*

том 11 **У світі математики** випуск 2

2005

## ЗМІСТ

Обрії математики

*М. Й. Ядренко*
Піфагорові трикутники і Велика теорема Ферма 1

*Б. Кликавка, А. Оленко*
Чи легко впевнитись, що число просте? 10

Математичні повідомлення

*Д. Мавло*
Що можна отримати з опуклості синуса? 19

Математичний гурток

*В. В. Вишенський*
Про комбінаторні задачі з геометрії 28

Сторінки абітурієнта

*В. В. Крючковський, А. Н. Хомченко*
Про деякі цікаві залежності між коефіцієнтами і коренями рівняння третього степеня 32

Математичні олімпіади

*В. Брайман, С. Горовий, М. Пупашенко*
Підсумки дев'ятої заочної математичної олімпіади журналу "У світі математики" 40

*В. Б. Брайман, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов*
LX Київська міська олімпіада юних математиків 45

*О. О. Курченко, В. М. Лейфура, О. Ю. Теплінський, В. А. Ясінський*
XLV Всеукраїнська олімпіада юних математиків 53

*О. Перегуда*
Про заочний та очний тури олімпіади з математики на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2005 році 72

*О. Рибак*
Граничні прямокутники 75

*С. В. Слободянюк*
Полюси і поляри в просторі 79

ЗМІСТ

Математика на шахівниці

*І. Антоненко*

Замикання у шашках 83

Минуле і сучасне математики

*О. Ганюшкін, Р. Заторський, О. Безущак*

Видатний український математик Ростислав Іванович Григорчук 87

Наш конкурс

Задачі 250–255 94

Розв'язання задач 214–219 96

*Український математичний журнал для школярів*

том 11 **У світі математики** випуск 2

2005

Дорогі читачі!

**Почалася передплата на журнал на 2006 рік.**

Наш журнал розрахований в першу чергу на школярів і викладачів математики. Проте ми сподіваємось, що і студенти математичних факультетів університетів та педагогічних інститутів, професіональні математики, любителі і шанувальники цієї древньої і вічно молодої науки в кожному числі журналу знайдуть для себе багато цікавого.

В розділі "*Горизонти математики*" ми публікуємо розповіді про новітні досягнення в математиці, про застосування математики в різних областях природознавства, техніки, соціальних наук. Особливу увагу ми будемо приділяти застосуванням математики до розв'язання проблем економіки та фінансової математики. Хотілось би, щоб в Україні з'явилось покоління молодих математиків, які вміють творчо застосовувати математичні методи до розв'язання складних проблем економіки.

Одним з основних завдань журналу редакційна колегія вважає розвиток творчих здібностей читачів, залучення їх до активної творчої роботи. В розділі "*Математичні повідомлення*" ми публікуємо нові результати наших читачів. В розділі "*Проблеми і гіпотези*" мова йде про нерозв'язані математичні проблеми, формулюються теми для самостійних досліджень.

В розділі "*Математичний гурток*" вміщуються короткі статті, кожна з яких може бути матеріалом одного чи двох занять математичного гуртка.

Запрошуємо наймолодших читачів нашого журналу до знайомства з матеріалами розділу "*Сторінки для наймолодших математиків*". Саме в юному віці розкриваються і розвиваються математичні здібності. Редакційна колегія завжди прагне до того, щоб матеріали цього розділу були цікавими і доступними.

Значний обсяг в нашому журналі займають задачі математичних олімпіад (як правило, ми подаємо такі задачі з повними розв'язаннями), задачі з конкурсних екзаменів. В розділі "*Сторінки абітурієнта*" ми вміщуємо короткі розповіді про окремі теми, пов'язані з тими задачами, які часто пропонуються на вступних екзаменах до вищих навчальних закладів.

Розділ "*Математичні ігри та розваги*" адресовано широким колам любителів математики і цього жанру. В ньому вміщуються статті про різні ігри, стратегії, в яких допускають математичний аналіз, інформації про чемпіонати з розв'язання головоломок. Для численних любителів шахів дуже цікавою є "*Шахова сторінка*". В її створенні беруть участь не лише вітчизняні, а й зарубіжні гросмейстери.

Запрошуємо всіх читачів (незалежно від віку, посад, наукових ступенів і звань) до розв'язання задач "*Нашого конкурсу*". В цьому розділі ми публікуємо, як правило, нові задачі. Розв'язання задач "*Нашого конкурсу*" ми публікуємо разом з прізвищами читачів, які правильно розв'язали ту чи іншу задачу.

В розділі "*Новини математичного життя*" ми оперативно подаємо інформацію про з'їзди, конгреси, наради з проблем математичної освіти, інші новини математичного життя. В розділі "*Книжкові обрії*" ми інформуємо наших читачів про нові книги.

Більшість матеріалів нашого журналу реферується в провідних реферативних журналах світу: "Zentrallblatt fur Mathematik", "Zentrallblatt fur Mathematische Didaktik", "Mathematical Reviews", "РЖ Математика".

Чекаємо від читачів зауважень, побажань відносно змісту журналу. Надсилайте нам статті, інформацію про олімпіади, конкурсні екзамени, новини математичного життя, нові задачі, нові книги для рецензування.

*Редакційна колегія*

**Передплата здійснюється в кожному відділенні Укрпошти.**

**Передплатний індекс журналу 74581.**