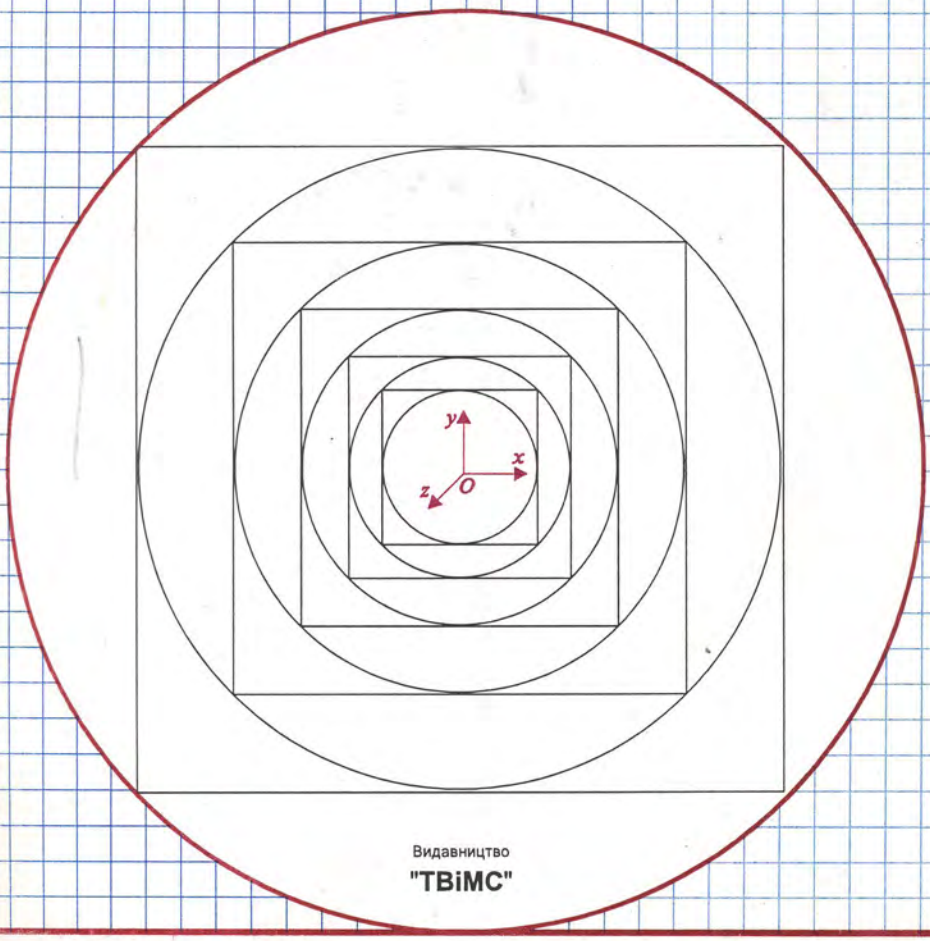
ISSN 1029-4171

2005

том 11
випуск 3

У світі математики



Видавництво
"ТВіМС"

Український математичний журнал для школярів

том 11 **У світі математики** випуск 3

2005

Присвячений 70-літньому ювілею В. А. Вишенського

Видається: з 1995 року Видавець: видавництво "ТВіМС"
Засновник: видавництво "ТВіМС" та Національний університет ім. Т. Шевченка
Свідоцтво: КВ № 1564

© ТВіМС, 2005

Журнал виходить 4 рази на рік: березень, червень, вересень, грудень.

РЕДАКЦІЙНА РАДА

В. С. Королюк (голова)	В. В. Анісімов	Ю. М. Березанський
М. Л. Горбачук	І. Й. Гуран	Ю. А. Дрозд
О. К. Закусило	В. М. Лейфура	Г. М. Литвиненко
Ю. О. Митропольский	В. П. Моторний	В. М. Петечук
В. В. Петришин	В. Г. Покотило	М. І. Портенко
А. М. Самойленко	Є. Сенета	З. І. Слєпкань
М. С. Собко	В. О. Тадєєв	Ю. Ю. Трохимчук
І. В. Федак	П. К. Хобзей	М. І. Шкіль

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

В. І. Сущанський (головний редактор)
М. В. Карташов (заступник головного редактора)
О. І. Василик (секретар)

В. Б. Брайман	В. В. Булдигін	Я. Ф. Виннишин
В. А. Вишенський	С. О. Горовий	О. І. Клесов
А. В. Князюк	О. В. Кужель	О. Г. Кукуш
В. С. Мазорчук	І. М. Мітельман	В. І. Михайловський
В. В. Некрашевич	А. Я. Оленко	М. О. Перестюк
В. М. Радченко	А. Сойфер	О. К. Толпиго
Р. П. Ушаков	Ю. Б. Чураченко	В. О. Швець
О. М. Ядренко	В. А. Ясінський	

АДРЕСА РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ

252033, Київ–33,
Національний університет ім. Т. Шевченка,
кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики
"У світі математики"
тел. 259-03-92
e-mail: vasylyk@univ.kiev.ua

Журнал друкується за постановою Вченої ради механіко-математичного факультету Національного університету ім. Т. Шевченка.

Передплата на журнал приймається в усіх поштових відділеннях України. Індекс видання 74581.

Про коника-стрибунця і теорію графів

І. Протасов, К. Протасова

Ця замітка про подорожі на графах. *Граф* Γ складається зі скінченної множини $V(\Gamma)$, елементи якої називають *вершинами*, при цьому деякі пари вершин можуть бути з'єднані одним неорієнтованим *ребром*. Оскільки кожне ребро однозначно визначається його кінцевими вершинами, то формально множина ребер $E(\Gamma)$ — це деякий набір двоелементних підмножин з $V(\Gamma)$.

Якщо u, v — вершини і $\{u, v\} \in E(\Gamma)$, то кажуть, що ці вершини *суміжні*. Впорядковану послідовність $v_0, \dots, v_n$ різних вершин називають *шляхом* між вершинами v_0, v_n, якщо всі пари вершин $v_i, v_{i+1}, i \in 0, \dots, n-1$ суміжні, а число n називають довжиною шляху. Якщо, до того ж, $n > 1$ і суміжними виявились вершини v_0, v_n, то такий шлях називають *циклом*. За означенням, граф Γ *зв'язний*, якщо між будь-якими двома його вершинами існує принаймні один шлях. Надалі йдеться лише про зв'язні графи. Граф, в якому немає жодного циклу, *називають деревом*.

Для довільних двох вершин $u, v \in V(\Gamma)$ означимо відстань $d(u, v)$ між цими вершинами. Для цього візьмемо один з найкоротших шляхів між u та v (їх може бути декілька, але всі вони мають однакову довжину) і позначимо через $d(u, v)$ довжину цього шляху. Очевидно, що $d(u, v) = 1$ тоді і тільки тоді, коли вершини u, v суміжні.

Теорія графів зародилась з деякої підбірки переважно розважальних задач (див. [7, глава 1]). Серед цих задач була і ломиголовка "Навколо світу", придумана сером Віл'ямом Гамільтоном 1859 року. Кожній з 20 вершин додекаедра Гамільтон приписав назву одного з міст і запропонував обійти "навколо світу", тобто знайти цикл що проходить по ребрах додекаедра, причому кожна вершина зустрічається в цьому циклі рівно один раз (звичайно, деякі ребра можуть залишитись непройденими). Кажуть, що Гамільтон продав цю ідею майстрові іграшок за 25 гіней, але якщо б ця ломиголовка і надійшла до продажу, то нікому не вдалося (і не вдасться) розв'язати її, бо таких циклів не існує. Проте, ця розвага призвела до деяких надзвичайно важливих понять в теорії графів.

Впорядковану послідовність $v_0, v_1, \dots, v_n$ всіх вершин графа називають *гамільтоновим циклом*, якщо $n > 1$ і

$$d(v_0, v_1) = d(v_1, v_2) = \dots = d(v_{n-1}, v_n) = d(v_n, v_0).$$

Отже, цикл гамільтонів, якщо він проходить через усі вершини графа. Граф називають *гамільтоновим*, якщо в ньому існує принаймні один гамільтонів цикл. Як з'ясувати, чи є заданий граф гамільтоновим? Ця загальна задача отримала назву "Гамільтонів цикл" і довгий час вважалась одною з центральних в теорії графів. Згодом було доведено, що ця задача належить до списку поганої слави NP-повних задач і навіть займає там чільне місце.

Доведення NP-повноти більшості задач проводиться зведенням їх до задачі "Гамільтонів цикл". По суті написане означає, що на сьогодні вияснити гамільтоновість (чи негамільтоновість) наперед заданого графа можна лише шляхом повного перебору всіх можливих циклів в графі. Якщо для такого перебору застосувати найефективніші з існуючих алгоритмів, то число необхідних операцій катастрофічно зростає з ростом числа вершин графа (і навіть найсучасніший комп'ютер виявиться безсилим, якщо, скажімо, число вершин 100). Про NP-повні задачі і місце серед них задачі "Гамільтонів цикл" можна прочитати в [6]. Після такого прочитання можна дійти до висновку, що задача "Гамільтонів цикл" наразі стала центральною проблемою теорії computer-science.

Погляньмо на гамільтонові графи з зоологічної точки зору і припустімо, що з деякої вершини такого графа стартує гусениця. Тоді, після певних роздумів, вона може скласти план подорожі по графу так, щоб проповзти через кожну вершину рівно один раз і повернутись у початкову вершину. Зрозуміло, якщо граф негамільтонів, то нічого з її роздумів не вийде.

А тепер уявімо, що замість гусениці по графу подорожує коник-стрибунець і його фізичні можливості дозволяють за один стрибок з даної вершини v досягти будь-якої суміжної вершини, а також будь-якої вершини, віддаленої від v на відстань 2 або 3. Дещо несподівано виявляється, що для кожного графа і кожної його вершини v коник-стрибунець може скласти маршрут так, щоб побувати в кожній вершині по одному разу і повернутись в вершину v. Математично це твердження формалізується в таку теорему про коника-стрибунця.

Для довільного графа Γ *і довільної його вершини* v *існує впорядкування* $v_0, v_1, \ldots, v_n$ *множини* $V(\Gamma)$ *вершин, таке що* $v = v_0$ і

$$d(v_0, v_1) \le 3, \quad d(v_1, v_2) \le 3, \quad \ldots, \quad d(v_{n-1}, v_n) \le 3, \quad d(v_n, v_0) \le 3.$$

Ми доведемо цю теорему про коника-стрибунця в дещо посиленій формі (це звичайна ситуація для математики: щоб довести щось, насправді, легше довести дещо значно сильніше). Тож ми доведемо, що для довільного графа Γ і довільних його суміжних вершин v, u існує упорядкування $v_0, v_1, \ldots, v_n$ множини $V(\Gamma)$, таке що $v_0 = v$, $v_n = u$ і

$$d(v_0, v_1) \le 3, \quad d(v_1, v_2) \le 3, \quad \ldots, \quad d(v_{n-1}, v_n) \le 3, \quad d(v_n, v_0) = 1.$$

Посилення полягає в тому, що $d(v_n, v_0) = 1$, а не $d(v_n, v_0 \le 3)$.

Перш за все ми переконаємось, що замість довільних графів, ми можемо обмежитися деревами. Дійсно, якщо наш граф Γ не є деревом, то в ньому є деякий цикл.

Видалимо в цьому циклі будь-яке ребро, але не ребро v, u. Повторимо цю процедуру допоки не отримаємо деякий граф без циклів, тобто дерево, T. Як пов'язані між собою граф Γ і отримане після цих маніпуляцій дерево T. Дуже просто: $V(T) = V(\Gamma)$, $E(T) \subseteq E(\Gamma)$. А тому, якщо ми доведемо нашу посилену теорему для дерев, то вона автоматично виявиться справедливою для довільних графів.

Застосуємо індукцію по числу n. Для $n = 2$ твердження очевидне. Припустімо, що наше твердження доведено для дерев з числом вершин $< n$. Нехай $V(T) = n$. Вилучимо з дерева T ребро (u, v). Одержимо два дерева T_u та T_v

з коренями u, v. Розглянемо два випадки.

Випадок $|V(T_u)| = 1$, тобто $u-$ кінцева вершина дерева T. Візьмемо довільну вершину w, суміжну з вершиною v в графі T_v. За припущенням індукції в дереві T_v існує цикл коника-стрибунця $v, \ldots, w$. Але тоді $v, \ldots, w, u$ — цикл коника-стрибунця в T.

Випадок $|V(T_u)| > 1$, $|V(T_v)| > 1$. В деревах T_v та T_u виберемо вершини w і w', суміжні з вершинами v та u. За припущенням індукції в T_v та T_u існують цикли коника-стрибунця $v, \ldots, w$ та $v, \ldots, w'$. Але тоді $u, \ldots, w, w', \ldots, u$ — відповідний цикл в T і теорему доведено.

Переформулюємо теорему про коника-стрибунця в дусі Астрід Ліндгрен. На кожному перехресті Стокгольма на Карлсона чекає хлопчик з банкою варення. Відстань між перехрестями визначимо як найменше число вулиць, пройшовши які можна з одного перехрестя добратися до іншого. Після банки варення Карлсон може перелетіти до будь-якого перехрестя, віддаленого на відстань ≤ 3. Щоб продовжити подорож, він обов'язково має підкріпитися варенням. Тоді після певних роздумів Карлсон може скласти маршрут так, щоб з'їсти все варення.

Наскільки складно Карлсону чи конику-стрибунцю придумати відповідний маршрут в наперед заданому графі? Виявляється, що на відміну від задачі "Гамільтонів цикл", задача "Цикл коника-стрибунця" може бути розв'язана досить ефективно. Про це можна буде прочитати в замітці Гліба Козирєва, що з'явиться в одному з наступних чисел "У світі математики".

Вперше теорема про коника-стрибунця з'явилась в статті [3], проте як зазначає її автор до того вона була відома в математичному фольклорі як деякий курйоз, ізольований від решти результатів теорії графів. Таке ставлення до цієї теореми не змінилось і після опублікування статті [3]. Перші застосування цієї теореми, причому до задач на перший погляд зовсім не пов'язаних з графами, з'явились лише недавно [4, Chapters 3, 10].

А тепер уявімо, що в одній з подорожей по графах наш коник-стрибунець забив колінце і може стрибати з даної вершини в довільну вершину на відстань 1 або 2. Чи може кульгавий коник-стрибунець обстрибати усі вершини довільного графа і повернутись у початкову вершину. Неважко помітити, що ні (наведіть відповідні приклади), але це приводить нас до такого означення.

Упорядкування $v_0, v_1, \ldots, v_n$ множини усіх вершин графа називають *квазігамільтоновим циклом* (або циклом кульгавого коника-стрибунця), якщо

$$d(v_0, v_1) \leq 2, \quad \ldots, \quad d(v_{n-1}, v_n) \leq 2, \quad d(v_n, v_0) \leq 2.$$

Граф, в якому є принаймні один квазігамільтонів цикл, називають *квазігамільтоновим* (в англомовній літературі - square-Hamiltonian). Характеризація квазігамільтонових графів невідома і видається дуже складною. Зокрема, є гіпотеза, що задача "Квазігамільтонів цикл" є NP-повною. Ми наведемо кілька достатніх ознак квазігамільтоновості.

Перш за все, квазігамільтонові дерева описати просто [4, Chapter 4]. В кожному такому дереві є шлях $v_0, \ldots, v_k$, такий що після вилучення ребер цього шляху кожне з одержаних дерев $T_{v_0}, \ldots, T_{v_k}$ з коренями $v_0, \ldots, v_k$ має таку властивість: всі вершини дерева T_{v_i}, відмінні від v_i, суміжні з v_i. Такі графи виглядають як "сороканіжки".

Далі ми опишемо одну загальну конструкцію квазігамільтонових графів.

Нехай $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ — графи, T — дерево, $V(T) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Припустімо, що множини вершин $V(\Gamma_1), \ldots, V(\Gamma_n), V(T)$ попарно не перетинаються і $|V(\Gamma_i)| \geq \rho(v_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, де $\rho(v_i)$ — число ребер дерева, що виходять з вершини v_i. Ми утворимо новий граф Γ, що називається *з'єднанням* графів $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ за деревом T. Множиною вершин графа Γ буде $V(\Gamma_1), \ldots, V(\Gamma_n)$. Всі ребра кожного з графів Γ_i є також і ребрами Γ. Крім цього, ми введемо деякі додаткові ребра, щоб зробити граф Γ зв'язним. Для кожного ребра (v_i, v_j) виберемо вершини $u \in V(\Gamma_i)$, $u' \in V(\Gamma_j)$ і введемо ребро u, u'. Це має бути зроблено так, щоб нові ребра не мали спільних вершин (таку можливість забезпечує умова $V(\Gamma_i) \geq \rho(v_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$). В статті [5] доведено, що з'єднання довільного набору гамільтонових графів за довільним деревом є квазігамільтоновим графом.

Проілюструємо цю теорему на двох прикладах. Для кожного графа Γ визначимо його *реберний* граф Γ^*. Для цього на кожному ребрі виберемо по одній точці, відмінній від кінців. Ці точки утворять множину вершин Γ^*. Далі дві вершини з'єднаємо ребром тоді і тільки тоді, коли відповідні їм ребра в Γ мають спільну вершину. За теоремою про з'єднання, реберний граф Γ^* до довільного графу Γ є квазігамільтоновим. Це ж твердження можна подати і в такій формі.

На кожній вулиці Стокгольму мешкає один хлопчик, що товаришує з Карлсоном. Будинки, в яких мешкають хлопчики не стоять на перехресті вулиць. Відстань між двома будинками означимо як найменше число перехресть, які необхідно пройти від одного до іншого. Погостювавши у чергового хлопчика, Карлсон може перелетіти до іншого, що мешкає в будинку, віддаленому на відстань 2. Тоді існує маршрут Карлсона за яким він може побувати у кожного хлопчика рівно один раз.

Для кожного графа Γ можна визначити також його *граф розв'я- зок* $R(\Gamma)$. Найперше, кожне ребро $\{u, v\} \in E(\Gamma)$ є ми замінимо на три ребра $\{u, u'\}$, $\{u', v'\}$, $\{v', v\}$, де нові вершини не належать множині $V(\Gamma)$. Далі вилучається вершина u, але поєднуються в деякий цикл нові вершини, суміжні до u. Після такої процедури, застосованої до кожної вершини $u \in V(\Gamma)$, ми і отримаємо граф $R(\Gamma)$. За теоремою про з'єднання граф розв'язок довільного графа Γ є квазігамільтоновим.

Ми завершимо замітку дуже простою за формулюванням (але надзвичайно складною за доведенням) теоремою Флейшнера ([2], [1, Theorem 10.3.1]): кожен блок Γ є квазігамільтоновим графом. При цьому блок — це граф, що залишається зв'язним після вилучення довільної його вершини, разом з ребрами, що виходять з цієї вершини.

Література

1. R. Diestel, *Graph Theory*, Graduated Text in Math., Springer-Verlag, 2000.
2. H. Fleishner, *The square of every 2-connected graph is Hamiltonian*, J. Comb. Theory B **16** (1974), 29–34.
3. Karaganis J, *On the cube of graph*, Canad. Math. Bull. **11** (1969), 295–296.
4. I. Protasov, T. Banakh, *Ball Structures and Coloring of Graphs and Groups*, Mat. Stud. Monogr. Ser., т. 11, 2003.
5. K. D. Protasova, *On square-Hamiltonian graphs*, Algebra and Discrete Math. (2005), № 2.
6. Х. Пападимитриу, К. Стайглиц, *Комбинаторная оптимизация*, "Мир", Москва, 1985.
7. Ф. Харари, *Теория графов*, "Мир", Москва, 1973.

Числа Фібоначчі й піфагорові трійки в одній задачі

О. Вишенський

Від редакції

Стаття студента 4 курсу механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка Олександра Вишенського є дещо переробленим варіантом його учнівської роботи на тему "О биномиальных коэффициентах, пифагоровых числах и последовательности Фибоначчи", яка отримала диплом другого ступеня на X Відкритій науково-практичній конференції школярів з фізики, інформатики, екології (Москва, 2001 р.).

Незрідка буває так, що сірувата, як на перше враження, задача, повниться барвами, тільки-но доторкнутися, розв'язуючи, до її замаскованих таємниць. І тоді виявляється, що вона — не з тих невиразних посередностей, котрих годі запам'ятати в лице, що поміж її найближчого оточення — не лише добре впізнавані, але й знамениті задачі.

Ця стаття — саме про такий випадок.

Умова і попередній аналіз задачі

Задача, розв'язуванню якої присвячено цю статтю, формулюється наступним чином. Чи існують три такі послідовні біномні коефіцієнти C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1}, $1 \le k \le n-1$, щоб для них виконувалася рівність

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_n^{k+1}? \tag{1}$$

Скільки є таких трійок? Чи можна вказати алгоритм для систематичного і вичерпного відшукання відповідних значень n і k?

Звичайно ж, розпочинаємо з перетворень рівності (1). Застосувавши відому формулу для біномних коефіцієнтів, дістанемо:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!}.$$

Після всіх скорочень отримуємо:

$$\frac{1}{(n-(k-1))(n-k)} + \frac{1}{k(n-k)} = \frac{1}{k(k+1)}.$$

В решті решт виходить рівняння

$$n^2 - 3kn + k^2 - 2k - 1 = 0 \tag{2}$$

з натуральними невідомими n і k. Рівняння такого виду називають діофантовими на честь давньогрецького математика пізнього періоду Діофанта. Точно невідомо, коли він жив, але найвірогідніше — в третьому столітті

нової ери. В його фундаментальному творі "Арифметика" трактуються переважно рівняння з одним чи кількома невідомими, розв'язки яких мають бути натуральними, цілими або раціональними числами.

Розв'язуємо рівняння (2) відносно n:

$$n = \frac{3k + \sqrt{k^2 + 4(k+1)^2}}{2} \tag{3}$$

(варіант зі знаком "$-$" перед радикалом відкидаємо, адже при будь-яких значеннях k він дає для n менші від k значення, що суперечить змістові цих двох чисел).

Формула (3) накладає серйозні обмеження на параметр k, адже значення n мають бути цілі. По-перше, число $k^2 + 4(k+1)^2$ має бути квадратом цілого числа, а по-друге, чисельник дробу має бути парним числом. Щоправда, про другу умову можна не турбуватися: якщо корінь добувається, то чисельник неодмінно буде парним числом. Щоб упевнитися в цьому, досить розглянути два випадки залежно від парності числа k. Тож зосередимося на проблемі: для яких k число $k^2 + 4(k+1)^2$ є квадратом цілого числа?

Ще за багато-багато століть до створення стрункої математичної науки у стародавній Греції математики прадавнього Вавілону вміли розв'язувати чи не найзнаменитіше діофантове рівняння

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{4}$$

Нині його розв'язки — трійки натуральних чисел $(x; y; z)$ — називають піфагоровими трійками. Кожній такій трійці відповідає свій прямокутний трикутник, усі сторони якого вимірюються цілим числами (піфагорів трикутник).

Якими бувають піфагорові трикутники? Якими бувають натуральні розв'язки рівняння (4)? Обидва ці запитання — про те саме, тільки висловлені вони різними словами: перше — мовою геометрії, а друге — алгебри. Вавілоняни знали вичерпну відповідь на них. А саме:

> Будь-яка трійка чисел
>
> $$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv, \quad z = u^2 + v^2, \tag{5}$$
>
> де u і v — натуральні числа, причому $u > v$, є піфагоровою. Інших піфагорових трійок не буває.

У формулі (3) під радикалом стоїть сума квадратів двох натуральних чисел, а саме: k та $2(k+1)$. Нам треба, щоб підрадикальний вираз також був квадратом натурального числа. Це станеться тільки в тому разі, коли числа k і $2(k+1)$ будуть двома меншими компонентами піфагорової трійки. Чи можливо це? Якщо так, то при яких саме значеннях k це трапиться?

Числа k і $2(k+1)$ разом із ще одним, більшим від них, числом складуть піфагорову трійку в тому й тільки тому разі, коли одне з них можна подати

у формі $u^2 - v^2$, а друге — $2uv$. Тут можливі два випадки. Розглядаємо їх по черзі.

1) З'ясуємо спочатку, чи можна підібрати такі натуральні числа u і v, щоб

$$2uv = k, \quad u^2 - v^2 = 2(k+1).$$

Вилучивши з цих двох рівностей k, матимемо:

$$u^2 - 4vu - (v^2 + 2) = 0,$$

звідки

$$u = 2v + \sqrt{5v^2 + 2}.$$

Радикал має бути цілим числом, проте це неможливо ні при якому значенні v, бо число $5v^2 + 2$ закінчується або цифрою 2, або 7, а цими цифрами не закінчується квадрат жодного цілого числа.

2) Випробовуємо тепер варіант

$$u^2 - v^2 = k,$$
$$2uv = 2(k+1).$$

Цього разу для u, v дістаємо рівняння

$$u^2 - vu - (v^2 - 1) = 0, \tag{6}$$

звідки

$$u = \frac{v + \sqrt{5v^2 - 4}}{2}. \tag{6*}$$

Завважуємо, що формула (6*) даватиме цілі значення, якщо лишень $5v^2 - 4$ буде квадратом натурального числа. Тож належить з'ясувати, для яких саме значень v це трапиться. Спробуймо скласти таблицю значень виразу $5v^2 - 4$ для всіх підряд значень v, починаючи від 1. Як далеко її продовжувати? Ми не можемо заздалегідь обмежити її довжину. Адже складаючи таблицю, ми сподіваємося, що нам пощастить виявити закономірності, достатні для формулювання чіткої і правдоподібної гіпотези щодо шуканих значень v. Щоб збільшити шанси на успіх, ми передбачимо в нашій таблиці також колонки для $\sqrt{5v^2 - 4}$ та значень u, обчислюваних за формулою (6*). При цьому в колонках для цих двох величин ми ставитимемо риску в тому разі, коли вони не цілі. Продовжуватимемо таблицю доти, доки не збагнемо, якому законові підлягають "цілодайні" значення v, або ж доки не згасне надія на його відкриття. Ось початкові 13 рядків нашої таблиці (див. табл. 1).

Аналіз таблиці. Гіпотеза

Послідовність "цілодайних" значень v розпочинається так:

$$1, 2, 5, 13, \ldots . \tag{7}$$

Табл. 1

v	$5v^2-4$	$\sqrt{5v^2-4}$	u
1	1	1	1
2	16	4	3
3	41	-	-
4	76	-	-
5	121	11	8
6	176	-	-
7	241	-	-
8	316	-	-
9	401	-	-
10	496	-	-
11	601	-	-
12	716	-	-
13	841	29	21

Надто мало матеріалу для формулювання гіпотези, проте дещо впадає в вічі: усі наведені числа — члени знаменитої послідовності Фібоначчі. Як відомо, цю послідовність було відкрито при спробі математизувати одну популяційну задачу. Вона починалася так:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots .$$

Кожний її член, окрім перших двох, є сумою двох попередніх. Автором відкриття був знаний математик Леонардо Пізанський, прозваний пізніше Фібоначчі. Протягом восьми століть, які збігли відтоді, було оприлюднено величезну кількість наукових праць, у яких вивчалися властивості цієї послідовності або знаходились все нові й нові її застосування. За популярністю з нею можуть конкурувати тільки прогресії, проте вона переважає цих останніх своїми витонченими й невичерпними властивостями.

Якщо взяти до уваги ще й значення u з четвертої колонки таблиці:

$$1, 3, 8, 21, \ldots , \tag{7*}$$

то зв'язок між натуральними розв'язками (діофантового) рівняння (6) та членами послідовності Фібоначчі видається майже безсумнівним. Якщо послідовності (7) і (7*) значень для v і u згорнути в одну послідовність, чергуючи їхні члени через один, то вийде початок послідовності Фібоначчі:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots .$$

Малоймовірно, щоб усе це було випадковим збігом. Тому зовсім не легковажною здається така гіпотеза:

Натуральні розв'язки рівняння

$$u^2 - v^2 = uv - 1 \tag{8}$$

(те саме, що й (6)) вичерпуються парами чисел $u_S = f_{2S}$, $v_S = f_{2S-1}$, де $(f_i, i \in N)$ — послідовність Фібоначчі. Іншими словами, якщо члени послідовності Фібоначчі розбити на пари

$$11 \mid 23 \mid 58 \mid 1321 \mid \ldots ,$$

взяти перше число будь-якої такої пари за значення v, а друге — за u, то вийде розв'язок рівняння (8). Інших розв'язків немає.

Отже, маємо ефектну й дуже правдоподібну гіпотезу. Якщо доведемо її, то початкову задачу буде розв'язано, адже $k = uv - 1$, а значення n дає після цього формула (3).

Доведення гіпотези

1) Спочатку належить довести, що будь-яка пара чисел

$$(u_S; v_S) = (f_{2S}; f_{2S-1})$$

є розв'язком рівняння (8). Доведемо це методом математичної індукції.

База індукції: Для $s = 1$ наше твердження справджується: пара $(1;1)$ — розв'язок (8).

Індуктивне припущення: Припускаємо, що для певного (довільного, але фіксованого) s пара $(f_{2S}; f_{2S-1})$ є розв'язком (8).

Індуктивний крок. Спираючись на індуктивне припущення, слід упевнитися, що пара $(f_{2S+2}; f_{2S+1})$ також є розв'язком рівняння (8). Спиратися на припущення — означає взяти до уваги рівність:

$$f_{2S}^2 - f_{2S-1}^2 - f_{2S}f_{2S-1} + 1 = 0.$$

Окрім того, беремо до уваги ще дві рівності, котрі означають, що числа f_i — члени послідовності Фібоначчі:

$$f_{2S+1} = f_{2S} + f_{2S-1}, \quad f_{2S+2} = f_{2S+1} + f_{2S} = 2f_{2S} + f_{2S-1}.$$

Тепер маємо:

$$\begin{aligned} f_{2S+2}^2 - f_{2S+1}^2 - f_{2S+2}f_{2S+1} + 1 &= (2f_{2S} + f_{2S-1})^2 - (f_{2S} - f_{2S-1})^2 \\ &\quad - (2f_{2S} + f_{2S-1})(f_{2S} + f_{2S-1}) + 1 \\ &= f_{2S}^2 - f_{2S-1}^2 - f_{2S}f_{2S-1} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Отже, твердження доведено для всіх натуральних s.

2) Лишається впевнитися, що рівняння (8) більше ніяких розв'язків не має. Доводитимемо від супротивного. Припускаємо, що (8) має якісь інші натуральні розв'язки. Тоді серед них є такий, у якого друга компонента найменша. Позначимо цей розв'язок через $(a; b)$. Зазначимо деякі його властивості.

а) $b > 13$. Для нас не конче важливо, щоб у правій частині стояло саме число 13, проте цю нерівність ми маємо "даром": вона – побічний продукт аналізованої раніше таблиці.

б) $a > b$. Наслідок нерівності $a^2 - b^2 = ab - 1 > 0$.

в) $2b - a > 0$. Випливає з того, що

$$(a - b)(a + b) = ab - 1 < ab + b^2 = b(a + b).$$

Справді, після скорочення нерівності $(a - b)(a + b) < b(a + b)$ на $a + b$ дістанемо, що $a - b < b$.

Із б) та в) випливає, що числа $a - b$ та $2b - a$ натуральні. Впевнимося тепер, що $(a - b; 2b - a)$ – розв'язок рівняння (8). Маємо:

$$(a - b)^2 - (2b - a)^2 - (a - b)(2b - a) + 1 = a^2 - b^2 - ab + 1 = 0.$$

Між іншим, із останньої рівності, згідно з б), випливає, що $2b - a < a - b$.

Чи може бути розв'язок $(a - b; 2b - a)$ рівняння (8) "фібоначчієвим"? Ні. Якби це було так:

$$\begin{cases} a - b = f_{2r}, \\ 2b - a = f_{2r-1}, \end{cases}$$

то розв'язавши цю систему відносно a і b, мали б:

$$a = 2f_{2r} + f_{2r-1} = f_{2r+2},$$
$$b = f_{2r} + f_{2r-1} = f_{2r+1},$$

цебто, розв'язок $(a; b)$ також був би "фібоначчієвий". Через те що $a > b$, то $2b - a = b - (a - b) < b$. Виходить, що друга компонента цього нового розв'язку менша, ніж друга компонента розв'язку $(a; b)$. А це суперечить нашому початковому припущенню про цей останній розв'язок.

Суперечність засвідчує, що насправді рівняння (8) ніяких натуральних розв'язків, окрім "фібоначчієвих", не має. Тепер гіпотезу доведено повністю.

Підіб'ємо підсумки. Між розв'язками рівняння (1) та парами чисел Фібоначчі $(f_{2S-1}; f_{2S})$ (за виключенням пари $(1; 1)$) існує бієкція. Для кожної такої пари відповідне значення k знаходимо за формулою $k = f_{2S-1}f_{2S} - 1$, а значення n до пари йому — за формулою (3). Кілька найменших значень k і n наводимо нижче в таблиці.

u	v	$k = uv - 1$	$n = \frac{3k+\sqrt{k^2+4(k+1)^2}}{2}$
3	2	5	14
8	5	39	103
21	13	272	713
55	34	1869	4894
144	89	12815	33551
377	233	87840	229969
987	610	602070	1576238
2584	1597	4126647	10803703
6765	4181	28284464	74049689
17711	10946	193864605	507544126
...	...	...	...

Отже, шуканих трійок біномних коефіцієнтів є безліч, проте в трикутнику Паскаля вони трапляються вкрай рідко.

Функція, що є узагальненням числа π

Б. Олійник

1. Функція, яку ми розглянемо в цій замітці можна розглядати як узагальнення добре відомого числа π. Це число є одним з найуживаніших в математиці, воно виникає в дуже багатьох ситуаціях, використовується в різноманітних формулах і визначати його можна багатьма різними способами. В шкільному курсі математики число π визначається як відношення довжини кола до його діаметра. При цьому, звичайно, спочатку потрібно визначити, що таке довжина кола і переконатися, що вказане вище відношення не залежить від розміщення кола на площині і його діаметра. Відомо, що число π є ірраціональним (навіть трансцендентним) і приблизно дорівнює $3.1415926\ldots$.

Для того, щоб визначити функцію pi, яка є узагальнювала б число π, фіксуємо множину Φ фігур на площині, які мають такі властивості:

1) Кожна фігура є обмеженою, тобто цілком міститься в деякому крузі.
2) Кожна фігура є опуклою, тобто разом з довільними двома точками вона містить відрізок, який ці точки з'єднує.
3) Внутрішність (множина точок фігури, що не лежать на кривій, яка її обмежує) є непорожньою для кожної фігури із Φ.

До множини Φ належать, зокрема круги, еліпси, опуклі многокутники, сектори, сегменти тощо. Відношення подібності, яке природним чином визначене на множині Φ розбиває її на класи подібних між собою фігур. Так всі круги утворюють один клас подібності, при кожному n всі правильні n-кутники також складають один клас подібності. Кожна множина подібних між собою прямокутників однозначно характеризується числом, що є відношенням більшої сторони до меншої, кожна множина подібних між собою еліпсів однозначно характеризується числом, що є відношенням більшого діаметра до меншого і т.п.

Визначимо тепер на множині Φ функцію із значеннями в множині дійсних чисел, яка має такі дві властивості:

(i) значення цієї функції на подібних фігурах є однаковим;
(ii) у випадку кругів це значення дорівнює π.

А саме, для довільної фігури $\varphi \in \Phi$ покладемо

$$pi(\varphi) = \frac{\text{периметр фігури}\,\varphi}{\text{діаметр фігури}\,\varphi}.$$

При цьому периметром фігури φ називається довжина кривої, що обмежує цю фігуру, а її діаметром — найбільша відстань між точками фігури (не обов'язково внутрішніми). Так визначена функція задовольняє умови 1) і 2), а тому її природно розглядати як певне узагальнення числа π.

2. Основна задача, щодо функції pi, яка буде розглядатись в цій замітці, — в яких межах можуть змінюватись її значення. Розглянемо спочатку значення функції pi на фігурах з деяких підмножин множини Ф.

2.1. Безпосередньо за визначенням, для довільного кола $\mathcal{K}$ маємо

$$pi(\mathcal{K}) = \pi.$$

2.2. Нехай $\mathcal{T}$ — підмножина Ф, яка складається з найможливіших невироджених трикутників. Якщо $T \in \mathcal{T}$ — довільний трикутник, то

$$pi(T) = \frac{\text{периметр}\, T}{\text{довжина найбільшої сторони}\, T}.$$

Позначимо a, b, c – довжини сторін трикутника T, причому для означеності покладемо $a \le b \le c$. Тоді оскільки c — найбільша сторона T, то

$$\frac{a+b+c}{c} \le \frac{c+c+c}{c} = 3.$$

Рівність досягається, якщо $a = b = c$, тобто трикутник T рівносторонній. З іншого боку, оскільки трикутник T є невиродженим, то $c < a + b$, звідки

$$2 = \frac{c+c}{c} < \frac{a+b+c}{c}.$$

Отже

$$2 < pi(T) \le 3.$$

Легко переконатися, що для довільного числа q з інтервалу $(2, 3]$ існує трикутник $T \in \mathcal{T}$ такий, що $pi(T) = q$. Справді, для рівнобедреного трикутника T_0, сторони якого дорівнюють $a = b = \frac{q-1}{2}c$, c, де c — довільне додатне дійсне число, маємо

$$pi(T_0) = \frac{\frac{q-1}{2}c + \frac{q-1}{2}c + c}{c} = \frac{(q-1)c + c}{c} = q.$$

Таким чином, образ $pi(\mathcal{T})$ множини трикутників $\mathcal{T}$ визначається рівністю

$$pi(\mathcal{T}) = (2, 3].$$

2.3. Нехай $\mathcal{TP}$ — множина найможливіших прямокутних трикутників на площині. У прямокутному трикутнику зі сторонами a, b, c такими, що $a \le b \le c$, сторона c є гіпотенузою, а сторони a, b — катетами. Якщо a утворює з c кут α, то

$$a = c\cos\alpha, \qquad b = c\sin\alpha.$$

А тому

$$\frac{a+b+c}{c} = \frac{a+b}{c} + 1 = \cos\alpha + \sin\alpha + 1.$$

Функція $y = \cos\alpha + \sin\alpha$ набуває найбільшого значення $\sqrt{2}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Звідси дістаємо, що в разі, коли $T \in \mathcal{TP}$ функція $pi(T)$ змінюється в межах

$$2 < pi(T) \leq 1 + \sqrt{2},$$

причому легко пересвідчитись, що в цьому разі значення pi також покривають весь інтервал

$$(2; 1 + \sqrt{2}].$$

2.4. Нехай $\mathcal{P}$ підмножина усіх прямокутників із Ф. Діаметром прямокутника $P \in \mathcal{P}$ зі сторонами a, b є його діагональ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Вона розбиває прямокутник P на 2 рівні трикутники $T_1, T_2 \in \mathcal{TP}$. При цьому

$$pi(P) = \frac{2a + 2b}{c} = pi(T_1) + pi(T_2) - 2.$$

Оскільки

$$2 < pi(T_1) \leq \sqrt{2} + 1,$$
$$2 < pi(T_2) \leq \sqrt{2} + 1,$$

то

$$4 - 2 < pi(P) \leq 2(\sqrt{2} + 1) - 2,$$

тобто

$$2 < pi(P) \leq 2\sqrt{2}.$$

Для довільного числа x з проміжку $(2, 2\sqrt{2}]$ існує прямокутник $P \in \mathcal{P}$ такий що $pi(P) = x$, а тому

$$pi(\mathcal{P}) = (2, 2\sqrt{2}].$$

2.5. Нехай $\mathcal{E}$ — підмножина Ф, яка складається з найможливіших невироджених еліпсів. Якщо $E \in \mathcal{E}$ — довільний еліпс, то

$$pi(E) = \frac{\text{довжина еліпса } E}{\text{довжина більшої осі } E}.$$

Нехай a, b відповідно довжини більшої і меншої півосей еліпса E, тоді діаметр E дорівнює $2a$ а його довжина —

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + \frac{b^2}{a^2}(\cos t)^2}\, dt.$$

Звідки

$$pi(E) = \frac{a\int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + \frac{b^2}{a^2}(\cos t)^2}\, dt}{2a} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + \frac{b^2}{a^2}(\cos t)^2}\, dt.$$

Функція

$$f(b) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t)^2 + \frac{b^2}{a^2}(\cos t)^2}\, dt$$

монотонно зростає на проміжку $(0, a]$, а тому

$$2 < f(b) \leq f(a).$$

У випадку, коли $b = a$ еліпс E стає колом радіуса a і $f(a) = \pi$. Отже

$$2 < pi(E) \leq \pi.$$

Крім того, функція $f(b)$ — неперервна, а тому за теоремою Коші про проміжне значення функції для довільного числа s з інтервалу $(2, \pi]$ існує число b^* таке, що $f(b^*) = s$. Тобто для довільного числа $s \in (2; \pi]$ існує еліпс E з півосями a і b^* такий, що $pi(E) = s$.

Таким чином, образ $pi(\mathcal{E})$ множини еліпсів $\mathcal{E}$ визначається рівністю

$$pi(\mathcal{E}) = (2, \pi].$$

3. Розглянемо тепер значення функції pi на множині всіх опуклих фігур Φ, що визначена вище. Нехай $\varphi \in \Phi$ — деяка опукла фігура діаметра d.

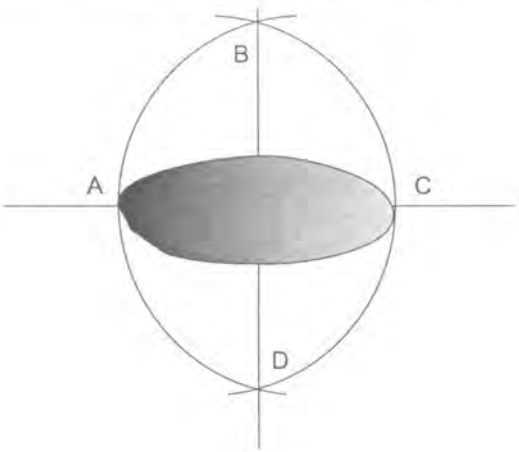


Рис. 1

Вона, очевидно, міститься всередині фігури $ABCD$, утвореної двома дугами радіуса d з центрами в точках A, C границі φ, віддаль між якими дорівнює d (рис. 1). Легко зрозуміти, що довжина кривої BAD (а отже й BCD) дорівнює третині кола з радіусом d. А тому, сума довжин цих кривих дорівнює $2\frac{2\pi d}{3} = \frac{4\pi d}{3}$. Звідси дістаємо таку верхню оцінку для значення $pi(\varphi)$:

$$pi(\varphi) \leq \frac{4\pi d}{3d} = \frac{4\pi}{3}.$$

Таким чином, елементарні міркування показують, що функція pi на множині Φ є обмеженою зверху і її найбільше значення не перевищує $\frac{4\pi}{3}$. Насправді ця оцінка є завищеною. Методами варіаційного числення можна довести, що найбільше значення, яке може набувати функція pi на родині всіх опуклих фігур Φ дорівнює π.

З пункту 2.5 випливає, що функція pi може набувати всіх проміжних значень з інтервалу $(2, \pi]$. А тому можна сформулювати таку теорему.

Теорема 1. *Множина значень функції pi, яку визначено на родині всіх опуклих фігур* Φ, *збігається з напіввідкритим інтервалом* $(2, \pi]$.

Коло не єдина опукла фігура, на якій функція *pi* набуває значення π. Розглянемо рівносторонній трикутник ABC зі стороною a. З кожної вершини трикутника проведемо дугу радіуса a. Отримаємо фігуру ABC схожу на трикутник, сторонами якого є дуги AB, BC, AC (рис. 2).

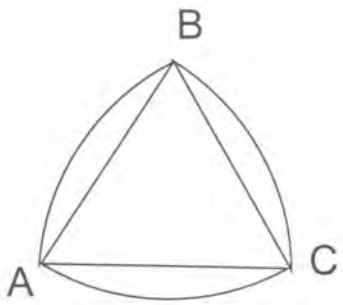


Рис. 2

Периметр цієї фігури дорівнює сумі довжин трьох дуг радіуса a з центральним кутом $\frac{\pi}{3}$, а діаметр ABC дорівнює a, тобто

$$pi(ABC) = \frac{3 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot a}{a} = \pi.$$

Можна побудувати й інші фігури, значення функції *pi* на яких дорівнює π.

Задачі.

1. Охарактеризувати множину значень $pi(\varphi)$, якщо φ пробігає множину а) найможливіших ромбів; б) найможливіших чотирикутників на площині.

2. Охарактеризувати множину значень $pi(\varphi)$, якщо φ пробігає множину найможливіших правильних n-кутників, $n \geq 5$.

3. Нехай Φ' — множина опуклих обмежених фігур на площині, площа яких відмінна від нуля. Визначимо на Φ' функцію pi' зі значеннями в множині додатних дійсних чисел таким чином

$$pi'(\varphi) = 4\frac{\text{площа фігури } \varphi}{\text{квадрат діаметра } \varphi}.$$

Дослідити цю функцію за такою ж схемою, за якою досліджено властивості *pi*.

Література

1. А. В. Никулин, А. Г. Кукуш, Ю. С. Татаренко, *Геометрия на плоскости (Планиметрия)*, Учебное пособие, "Попурри", Минск, 1996.
2. Р. Курант, Г. Роббинс, *Что такое математика*, ОГИЗ, Москва, 1947.
3. А. Я. Дороговцев, *Математический анализ*, Справочное пособие, "Вища школа", Киев, 1985.

Про прості числа в рівняннях і послідовностях

В. Плахотник

Знайомство і спілкування з Володимиром Андрійовичем Вишенським для мене, на жаль, не було таким, як між учнем і вчителем, або між студентом і викладачем. Так сталось. Але, на щастя, багаторічне спілкування було і триває досі. Важко зрозуміти, чому саме я навчився в нього: чи то чіткіше, принаймні для себе, формулювати ставлення до інших людей, чи то взнав багато незнайомих чудернацьких історій з життя відомих особистостей як у математиці, так і поза нею. Можливо, розумінню, як відрізняти красиву математичну задачу від посередньої, можливо філософському (у гарному розумінні цього слова) ставленню до життєвих проблем, можливо, ще чомусь. Не знаю. Однак у будь-якому разі, деякі риси характеру, необов'язково позитивні у загально прийнятому розумінні, вдалось у нього запозичити. Не виключено, що й дана замітка написана під враженнями від спілкування з цим справжнім чоловіком, математиком і педагогом.

Кілька років тому мені на очі попалась задача Української олімпіади з математики 1970 року [1] про *відшукання простих чисел p і q, для яких*

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

Крім того, проглядаючи книжку В. Серпінського [2], я виявив на стор. 83 фразу про те, що дуже схожа задача опису усіх пар простих чисел $(p; q)$, для яких $2p^2 - q^2 = 1$, ще не розв'язана. Невідомо навіть, скінченною є кількість таких пар, чи ні. Це підігріло інтерес до задачі.

Вдалось знайти простіше, відмінне від авторського, розв'язання рівняння $p^2 - 2q^2 = 1$. Ось воно.

Якщо жодне з чисел p і q не дорівнює трьом, то при діленні на 3 кожне із них дає остачу 1 чи 2, а остача від ділення на 3 чисел p^2 і q^2 у будь-якому разі дорівнюватиме 1. Оскільки тоді число $2q^2 + 1$ ділитиметься на 3 без остачі, то рівність $p^2 = 2q^2 + 1$ неможлива. Це значить, що одне із простих чисел p чи q повинне ділитися на 3 без остачі, а тому має дорівнювати трьом. Тепер легко встановити, що $p = 3$, $q = 2$.

Виникло бажання використати цю ідею. Так було придумано кілька схожих задач про відшукання простих чисел p і q, для яких $bp^2 - cq^2 = a$ (натуральні числа a, b, c — задані). Кожна із цих задач легко розв'язувалась після розгляду остач, утворених числами p і q при діленні на 3 або на 5. При цьому виходило, що одне з них має дорівнювати 3 або 5, бо ділиться на 3 або на 5 відповідно.

Пройшло кілька років, і чи то від поганого настрою, чи від природного інтересу я задумався над тим, чи не можна скласти задачу, зберігши ідею, але щоб її розв'язком була пара простих чисел (p, q), де $p > 5$ і $q > 5$. Ясно,

що в такій задачі здогадатись розглянути остачі при діленні, наприклад, на 37 або на 59 було б дуже і дуже непросто(!).

Після кількох невдалих спроб виникло припущення, що така задача не існує.

Для "проходження" ідеї потрібно, щоб для ненульового елемента a поля F_p лишків[1] за модулем p рівність $a = bx^2 - cy^2$ була неможливою у випадку, коли x, y — ненульові елементи цього поля, і була можливою тоді, коли $x = 0$ або $y = 0$ в полі F_p. Однак виявилось правильним наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо p — просте число, $p > 5$, то кожен ненульовий елемент a поля лишків F_p можна зобразити у вигляді сум $a = x+y = z+m = n+k$, де x, y, z — ненульові квадрати поля F_p, а елементи m, n, k — не є квадратами у ньому.*

Доведення. Надалі зафіксуємо елемент b поля F_p, який не є квадратом у ньому. Якщо такого елемента не існує, то рівняння $x^2 = c$ має два різних розв'язки $\pm x$ для кожного фіксованого елемента c поля. Це значить, що $p-1$ рівнянь виду $x^2 = c$ мають $2p-2$ розв'язків у сукупності, а це — неможливо в множині F_p із p елементів.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — усі різні ненульові квадрати в полі F_p, тоді

$$k = \frac{p-1}{2},$$

бо підносячи до квадрату кожен із $p-1$ елементів поля F_p, дістанемо $\frac{p-1}{2}$ різних елементів. Це значить, що $bx_1, bx_2, \ldots, bx_k$ — решта ненульових елементів поля, що не є квадратами, а кожен ненульовий елемент поля має вигляд x^2 або bx^2 для деякого x. Отже, потрібно довести, що для довільного ненульового елемента a поля F_p кожне із рівнянь $a = x^2 + y^2$, $a = x^2 + by^2$, $a = bx^2 + by^2$ має розв'язок, де x і y — деякі ненульові елементи поля F_p.

Розглядаючи випадки $a = z^2$ та $a = bz^2$, одержимо шість рівнянь в полі F_p:

1) $1 = x^2 + y^2$;
2) $b = x^2 + y^2$;
3) $1 = x^2 + by^2$;
4) $b = x^2 + by^2$;
5) $1 = bx^2 + by^2$;
6) $b = bx^2 + by^2$.

Після ділення (множення) на b четверте рівняння зводиться до третього, п'яте — до другого, а шосте — до першого, тому достатньо розглянути перші три із них.

Розв'язки першого і третього рівняння можна вказати явно. Так, наприклад,

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

[1]Про поле лишків за модулем p див. статтю А. В. Руссєва, В. П. Руссєва "Поля лишків і числа Мерсена". – У світі математики, т. 9 (2003), вип. 4, 3–17 (прим. ред.)

— розв'язок першого рівняння, якщо існує таке t, що $t^2 \neq \pm 1$, $t \neq 0$,

$$\left(\frac{b-t^2}{b+t^2}, \frac{2t}{b+t^2}\right)$$

— розв'язок третього рівняння, якщо існує таке t, що $t^2 \neq \pm b$, $t \neq 0$.

Існування потрібного елемента t якраз і гарантується умовою $p > 5$.

Якщо друге рівняння не має розв'язку, то, враховуючи довільність вибору елемента b, жоден ненульовий елемент, що не є квадратом у полі F_p, не буде сумою двох квадратів у ньому. Доведемо, що це неможливо.

Якщо $1+1$ не є квадратом, це суперечитиме сказаному, бо $1+1 = 1^2+1^2$. Отже, існує такий елемент u, що $1+1 = u^2$. Якщо $1+1+1$ не є квадратом, це суперечитиме сказаному, бо $1+1+1 = u^2+1^2$. Отже, існує такий елемент v, що $1+1+1 = v^2$. Якщо $1+1+1+1$ не є квадратом, це суперечитиме сказаному, бо $1+1+1+1 = v^2+1^2$. Отже, існує такий елемент v, що $1+1+1+1 = v^2$.

Продовжуючи аналогічно, дістанемо, що кожен із елементів вигляду

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{k \text{ разів}},$$

де $k = 1, 2, \ldots, p-1$, буде квадратом поля F_p. Це суперечить існуванню елемента b, оскільки кожен елемент поля поля F_p є сумою кількох одиниць.

Зауважимо, що формули для розв'язків першого і третього рівняння, указані вище, неможливо використати при $p = 2, 3$ або 5. □

Після доведення теореми стало ясно, що ідея задачі не допускає необмеженого ускладнення. Розглянути остачі при діленні на 3 або 5 і розв'язати її — можливо. Але, щоб досягнути успіху, розглянувши остачі при діленні на якесь більше просте число — ні. Ми дістанемо рівняння, яке, швидше за усе, має нескінченну кількість розв'язків, але довести цей факт або спростувати його вказаним вище способом — не вдасться (згадаємо про фразу із книжки [2]).

Спробуємо ускладнити завдання іншим шляхом і розглянемо наступну задачу.

Задача 1. Знайти усі пари простих чисел p, q для яких $13p^3 - q^3 = 454$.

Відповідь знайдемо, розглянувши остачі при діленні на 7. Дістанемо $p = 17$, $q = 7$. Цю задачу також можна ускладнити в указаному вище сенсі, взявши рівняння $p^3 - 2q^3 = 51$. Відповідь дістанемо, розглянувши остачі при діленні на 13: $p = 17$, $q = 13$. На завершення цієї теми — "смертельне" узагальнення.

Задача 2. Знайти усі пари простих чисел p, q, для яких

$$p^7 - 12q^7 = 6\,523\,415\,441.$$

Перебравши множину сьомих степенів ненульових елементів у полі F_{29}, бачимо, що вона складається з чотирьох елементів ± 1 і ± 12. Оскільки в цьому полі рівняння $p^7 - 12q^7 = 6\,523\,415\,441$ перетворюється у рівняння

$p^7 - 12q^7 = 1$, легко помітити, перебравши усі 16 випадків, що остання рівність неможлива. Тому одне з невідомих дорівнює нулеві в полі F_{29}, тобто в початковому рівнянні одне з невідомих дорівнює 29. Далі все просто: при $p = 29$ дістанемо $q = 19$, а при $q = 29$ не отримаємо цілого значення p. Тому знайдено єдину пару простих чисел $(p, q) = (29, 19)$, для якої справджується рівність $p^7 - 12q^7 = 6\,523\,415\,441$.

Розглянемо тепер задачі про відшукання усіх простих чисел серед членів деякої послідовності. Як відомо (теорема Діріхле), арифметична прогресія, у якій різниця і перший член — взаємно прості цілі числа, містить нескінченно багато простих чисел. Розглянемо послідовності, за способом задання досить близькі до арифметичної прогресії.

Задача 3. Довести, що серед членів послідовності, заданої умовою $x_{n+1} = 20x_n - 53$, де $x_1 = 3$, простими числами будуть тільки x_1 та x_2.

Безпосередня перевірка показує, що $x_2 = 7$ справді є простим числом. Знайдемо кілька наступних членів послідовності: $x_3 = 3 \cdot 29$, $x_4 = 7 \cdot 241$, $x_5 = 3 \cdot 11229$. Можна помітити, що члени послідовності x_1, x_3, x_5 діляться на 3, а x_2, x_4 діляться на 7. Очевидний зв'язок між членами послідовності, номери яких відрізняються на 2. Знайшовши формулу, яка виражає x_{n+2} через x_n, дістанемо

$$x_{n+2} = 20x_{n+1} - 53 = 20 \cdot (20x_n - 53) - 53 = 400x_n - 53 \cdot 21.$$

Звідси легко помітити, що з подільності на 3 або на 7 члена послідовності з номером n випливає подільність на 3 або на 7 відповідно члена цієї ж послідовності з номером $n+2$. Оскільки у задачі потрібно довести непростоту членів послідовності x_n при $n > 2$, досить довести індукцією за n, що усі вони, починаючи з x_3, більші за 7. Нерівність $x_n > 7$ правильна при $n = 3$. З умови задачі випливає, що $x_{n+1} - 7 = 20x_n - 60 > 0$, якщо $x_n > 7$, отже, нерівність $x_n > 7$ залишаються правильною при збільшенні номера n на одиницю. Це й доводить, що усі члени даної послідовності, починаючи із третього, не будуть простими числами.

Цю задачу можна розв'язати й істотно іншим способом. Вивчатимемо остачі p_n і q_n при діленні на 3 і 7 членів даної послідовності x_n.

Для остач p_n, $0 \le p_n \le 2$, при діленні x_n на 3 матимемо формулу $p_{n+1} = 2p_n + 1$, $p_1 = 0$, тому $p_2 = 1$, $p_3 = 0$, $p_4 = 1$, $p_5 = 0$, ... Очевидно, що кожен член послідовності p_n з непарним номером дорівнює нулеві, отже, кожен член послідовності x_n з непарним номером ділиться на 3.

Для остач q_n, $0 \le q_n \le 6$, при діленні x_n на 7 матимемо формулу $p_{n+1} = 6p_n + 3$, $q_1 = 3$, тому $q_2 = 0$, $q_3 = 3$, $q_4 = 0$, $q_5 = 3$, ... Очевидно, що кожен член послідовності q_n з парним номером дорівнює нулеві, отже, кожен член послідовності x_n з парним номером ділиться на 7.

Далі міркування аналогічні.

Попередня задача має наступне природне узагальнення.

Теорема 2. *Нехай p і q — довільні прості натуральні числа, $p < q$, а x_n — послідовність, задана формулою $x_{n+1} = (pq - 1)x_n + p + q - p^2q$, де*

$x_1 = p$. *Тоді серед членів послідовності простими числами будуть тільки її члени* x_1 *та* x_2.

Для доведення цієї теореми, як і при розв'язуванні попередньої задачі, достатньо виразити x_{n+2} через x_n і помітити, що з умови подільності x_n на p або q випливає подільність числа x_{n+2} на p або q відповідно, а потім довести, що $x_n > q$ при $n > 2$. Останнє твердження також доводиться індукцією за n, оскільки має місце рівність $x_{n+1} - q = (pq - 1)(x_n - p)$.

Наступна задача за формою дуже схожа на попередню, однак є значно складнішою за змістом.

Задача 4. Нехай кожен член послідовності x_n, починаючи із третього, задається формулою $x_{n+2} = 10x_{n+1} - x_n - 12$, де $x_1 = 531$, $x_2 = 55$. Знайти усі члени цієї послідовності, які є простими числами.

Бачимо, що $x_1 = 9 \cdot 59$, $x_2 = 5 \cdot 11$, $x_3 = 7$ — просте, $x_4 = 3$ — просте, $x_5 = 11$ — просте, $x_6 = 95 = 5 \cdot 19$, $x_7 = 927 = 9 \cdot 103$, $x_8 = 9163 = 49 \cdot 11 \cdot 17$, $x_9 = 90691 = 89 \cdot 1019$.

Виникає природне запитання: "Чи варто виконувати подальші обчислення членів послідовності?" Перші вісім її членів ділились на невеликі прості числа, і була надія помітити деяку закономірність, пов'язану із подільністю членів даної послідовності. Однак поява дев'ятого члена, що є добутком двох досить великих простих чисел, показала хибність такого шляху. Реккурентна формула задання членів послідовності з'являється також при відшуканні пар натуральних чисел $(x; y)$ — розв'язків рівняння Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$ або узагальненого рівняння Пелля $Ax^2 - By^2 = C$, де A, B, C — попарно взаємно прості натуральні числа, а добуток AB не ділиться на квадрат натурального числа, більшого від одиниці. Так, наприклад, можна довести [4], що усі пари натуральних чисел $(u; v)$, для яких справджується остання рівність (якщо такі взагалі існують), можна єдиним способом задати формулами

$$\begin{cases} u_{n+1} = pu_n + Bqv_n \\ v_{n+1} = Aqu_n + pv_n, \end{cases}$$

де $(p; q)$ — найменший розв'язок рівняння $p^2 - ABq^2 = 1$, $(u_1; v_1)$ — розв'язок рівняння $Au^2 - Bv^2 = C$, $u_1 \leq p\sqrt{C/A}$, $v_1 \leq q\sqrt{AC}$.

Послідовність u_n можна також задати без згадки про послідовність v_n формулою

$$u_{n+2} = 2pu_{n+1} - u_n,$$

де u_1 і u_2, як і раніше — перші два члени цієї послідовності.

Маючи послідовність x_n, задану в умові, розглянемо послідовності u_n і v_n, задані формулами $u_n = 2x_n - 3$, $v_n = \frac{u_{n+1} - 5u_n}{2}$. Чи завжди послідовності u_n та v_n будуть послідовностями цілих чисел? Відносно u_n сумніву немає, і видно, що усі члени цієї послідовності — непарні числа. Саме тому $u_{n+1} - 5u_n$ — парне число, отже, v_n — також ціле число.

Безпосередня перевірка показує, що $u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n$, $u_{n+1} = 5u_n + 2v_n$, $v_{n+1} = 12u_n + 5v_n$. Доведемо індукцією за n формулу $6u_n^2 - v_n^2 = 50$.

У випадку $n = 1$ дістанемо $u_1 = 2x_1 - 3 = 1062 - 3 = 1059$, $u_2 = 2x_2 - 3 = 110 - 3 = 107$, $v_1 = \frac{u_2 - 5u_1}{2} = -2594$, тому $6u_1^2 - v_1^2 = 50$, як і має бути. Крім

того,

$$6u_{n+1}^2 - v_{n+1}^2 = 6(5u_n + 2v_n)^2 - (12u_n + 5v_n)^2 = 150u_n^2 + 24v_n^2 - 144u_n^2 - 25v_n^2 = 6u_n^2 - v_n^2.$$

Отже, вираз $6u_n^2 - v_n^2$ не змінюється при збільшенні n на одиницю і дорівнює $6u_1^2 - v_1^2$, тому для довільних натуральних n справджується рівність $6u_n^2 - v_n^2 = 50$. Лишається у цю тотожність підставити значення $u_n = 2x_n - 3$, щоб дістати рівність $6x_n^2 - 18x_n + 1 = v_n^2$.

Поставимо задачу про відшукання усіх простих чисел x, для кожного із яких $6x^2 - 18^x + 1$ є квадратом цілого числа, тобто $6x^2 - 18^x + 1 = y^2$ для деякого цілого y.

Оскільки $6x(x-3) = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$ і число x — просте, то або $y-1$, або $y+1$ ділиться без остачі на x. Розглянемо кожен випадок окремо.

Якщо $y - 1 = kx$ для деякого цілого k, то

$$y + 1 = kx + 2, \quad 6x(x-3) = kx(kx+2), \quad 6x - 18 = k^2x + 2k, \quad x = \frac{2k+18}{6-k^2}.$$

Підставивши значення $k = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, тільки у чотирьох випадках дістанемо прості числа $-2, 3, 7, 11$. При $k < -3$ і при $k > 5$ отримаємо нерівність $|x| < 2$, тому число x простим не буде. Розглянемо тепер випадок, коли $y + 1 = kx$ для деякого цілого k, тоді

$$y - 1 = kx - 2, \quad 6x(x-3) = kx(kx-2), \quad 6x - 18 = k^2x - 2k, \quad x = \frac{18-2k}{6-k^2}.$$

Цей випадок відрізняється від попереднього тільки знаком числа k. Оскільки ми розглядали як додатні значення k, так і від'ємні, ніякої нової інформації не з'явиться. Отже, знайдено усі прості значення x: -2, 3, 7 і 11.

Що ми знаємо про послідовність x_n?

1) $x_3 = 7$ — просте, $x_4 = 3$ — просте, $x_5 = 11$ — просте;
2) для кожного x_n існує ціле число v_n, для якого $6x_n^2 - 18x_n + 1 = v_n^2$;
3) якщо x — просте число, і $6x^2 - 18^x + 1$ є квадратом цілого числа, то $x = -2$, $x = 3$, $x = 7$ або $x = 11$.

Для остаточного розв'язання задачі достатньо довести, що послідовність x_n зростає при $n > 5$ і $x_n > 11$. При $n = 5$ маємо нерівності $x_{n+1} - x_n > 0$, $x_{n+1} > 11$. З означення x_n і останніх двох нерівностей тоді випливає:

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 9x_{n+1} - x_n - 12 = 6x_{n+1} + (x_{n+1} - x_n) + (2x_{n+1} - 12) > 0,$$
$$x_{n+2} = 10x_{n+1} - x_n - 12 = 7x_{n+1} + (x_{n+1} - x_n) + (2x_{n+1} - 12) > 11.$$

Оскільки нерівності $x_{n+1} - x_n > 0$, $x_{n+1} > 11$ не порушились при збільшенні числа n на одиницю, вони залишаються правильними при довільних значеннях $n > 5$. Таким чином, інших простих чисел, крім x_3, x_4 та x_5, серед членів послідовності x_n немає.

Звернемо увагу на те, що пошук простих чисел у деякій послідовності був зведений до пошуку простих чисел, що є розв'язками деякого рівняння.

Напевне, комусь із читачів уже прийшла у голову думка спробувати відшукати рівняння, відповідне послідовності чисел Фібоначчі. Адже опис усіх

членів цієї послідовності, які є простими числами — ще й досі нерозв'язана задача [3]. Далі ми знайдемо таке рівняння, хоча й не дамо опису усіх простих чисел, які є його розв'язками.

Для відшукання рівняння нагадаємо, що послідовність чисел Фібоначчі f_n визначається рівністю $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, де $f_1 = f_2 = 1$, але її можна задати ще й формулою Біне: $f_n = (\lambda^n - \mu^n)/\sqrt{5}$, де $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\mu = -1$, тобто λ і μ є коренями квадратного рівняння $t^2 - t - 1 = 0$.

Позначимо $x = f_n$, $y = f_{n+1}$, тоді із формул Біне дістанемо

$$x^2 = \frac{1}{5}(\lambda^{2n} + \mu^{2n} - 2(\lambda\mu)^n), \quad xy = \frac{1}{5}(\lambda^{2n+1} + \mu^{2n+1} - (\lambda\mu)^n(\lambda + \mu)),$$
$$y^2 = \frac{1}{5}(\lambda^{2n+2} + \mu^{2n+2} - 2(\lambda\mu)^{n+1}),$$

тому

$$\lambda^{2n} + \mu^{2n} = 5x^2 + 2(-1)^n, \quad \lambda \cdot \lambda^{2n} + \mu \cdot \mu^{2n} = 5xy + (-1)^n,$$
$$(\lambda + 1)\lambda^{2n} + (\mu + 1)\mu^{2n} = 5y^2 - 2(-1)^n.$$

Порівнюючи ліві частини останніх трьох рівностей, отримаємо

$$(5x^2 + 2(-1)^n) + (5xy + (-1)^n) = 5y^2 - 2(-1)^n,$$

звідки й дістанемо співвідношення

$$y^2 - xy - x^2 = (-1)^n.$$

Це значить, що $y^2 - xy - x^2 + 1 = 0$, якщо число n — непарне і $y^2 - xy - x^2 - 1 = 0$, якщо число n — парне. Якщо x — просте число, то з останньої рівності $(y - 1)(y + 1) = x(x + y)$ матимемо або $y - 1 = kx$, або $y + 1 = kx$ для деякого натурального числа k. Аналогічно тому, як ми діяли при розв'язуванні останньої задачі, тут дістанемо єдину можливість $x = 3$. Це — єдиний член послідовності Фібоначчі f_n з парним номером, який є простим числом. У випадку непарного n, знаходячи дискримінант квадратного рівняння $y^2 - xy - x^2 + 1 = 0$, отримаємо, що число $5x^2 - 4$ є квадратом деякого цілого числа.

Теорема 3. *Нехай x — просте число і $x > 3$. Для того, щоб це число було членом послідовності Фібоначчі необхідно і достатньо, щоб число $5x^2 - 4$ було квадратом деякого цілого числа.*

Для доведення теореми залишилось довести тільки достатність її умови. Нехай $5x^2 - 4 = y^2$ для деякого натурального числа y. Використаємо викладену вище теорію узагальненого рівняння Пелля [4]. Тут $A = 5$, $B = 1$, $C = 1$, $p = 9$, $q = 4$, $(x_1; y_1) = (1; 1)$, або $(x_1; y_1) = (2; 4)$, або $(x_1; y_1) = (5; 11)$, тому усі члени послідовностей x_n та y_n можна знайти за формулами

$$\begin{cases} x_{n+1} = 9x_n + 4y_n, \\ y_{n+1} = 20x_n + 9y_n, \end{cases}$$

або, не використовуючи y_n, за формулою

$$x_{n+2} = 18x_{n+1} - x_n,$$

де $x_1 = 1$, $x_2 = 13$, або $x_1 = 2$, $x_2 = 34$, або $x_1 = 5$, $x_2 = 89$.

Як бачимо, числа x_1 та x_2 — в усіх трьох випадках є членами послідовності f_n, бо $f_1 = 1$, $f_3 = 2$, $f_5 = 5$, $f_7 = 13$, $f_9 = 34$, $f_{11} = 89$.

Лишається помітити, що для членів послідовності Фібоначчі справджується аналогічне співвідношення $f_{n+12} = 18f_{n+6} - f_n$, яке легко випливає із означення цієї послідовності. Це значить, що кожен член послідовності x_n є членом послідовності Фібоначчі: $x_n = f_{6n-5}$, або $x_n = f_{6n-3}$, або $x_n = f_{6n-1}$, у залежності від того, які саме значення x_1 та x_2 взято. А це й потрібно було довести.

Задачі для самостійного розв'язування і дослідження

1. Знайти усі пари простих чисел p і q, для яких:

а) $p^2 - 6q^2 = 19$;
б) $7p^2 - 2q^2 = 13$;
в) $3p^2 - 2q^2 = 97$.

2. Знайти усі пари простих чисел (p, q) для яких

а) $p^3 - 6q^3 = 181$,
б) $13p^3 - q^3 = 454$;
в) $p^3 - 2q^3 = 51$;
г) $p^3 - 5q^3 = 482$.

3. Знайти усі члени послідовності x_n, що є простими числами, якщо

а) $x_{n+1} = 14x_n - 37$, $x_1 = 3$;
б) $x_{n+1} = 34x_n - 163$, $x_1 = 5$.

4. Послідовність x_n, для якої $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, задається формулою $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n + 23$.

Довести, що ця послідовність не містить інших простих чисел, крім x_1 та x_2.

5. Послідовність x_n задається формулою $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n + 10$, де $x_1 = 175$, $x_2 = 28$.

Довести, що ця послідовність не містить інших простих чисел, крім x_3 та x_5.

Література

1. В.А.Вишенський, О.Г.Ганюшкін, М.В.Карташов та ін., *Українські математичні олімпіади*, "Вища школа", Київ, 1993.
2. В.Серпинский, *Что мы знаем и чего не знаем о простых числах*, Гос. издат. физ.-мат. литературы, Москва–Ленинград, 1963.
3. Н.Н.Воробьев, *Числа Фибоначчи*, "Наука", Москва, 1969.
4. А.З.Вальфиш, *Уравнение Пелля*, "Наука", Москва, 1980.

Ґрунтовна розмова про пряму Симсона–Уоллеса

Г. Філіпповський

Чому саме *пряма Симсона–Уоллеса*, а не просто Симсона, як вона зветься в усій математичній літературі? Ну хоча б заради історичної справедливості, оскільки вперше вона з'являється в працях шотландського математика Вільяма Уоллеса (1768–1843) — професора математики Единбурзького університету. *Прямою Симсона* її називають тому, що інший шотландський математик Роберт Симсон (1687–1768, професор в університеті Глазго, за змістом своїх геометричних робіт (про теорему Дезарга, Паскаля та інші) майже повинен був "вийти" на цю пряму.

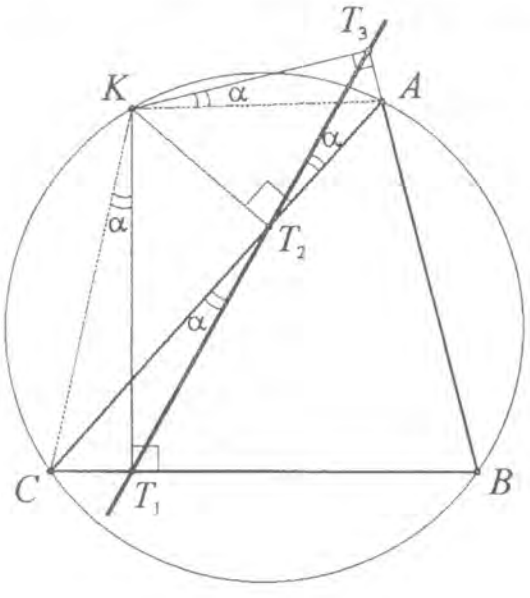
Саме так математики і вважали. Але справа в тому, що в працях Симсона, хоча всі вони збереглися, немає жодного слова про *пряму Симсона.*

Далі ми все ж таки називатимемо її *прямою Симсона* (так вже склалося), але хоча б в голові будемо тримати, що батьком цієї прямої в дійсності є В. Уоллес.

Отже, час розпочати ґрунтовну розмову про так звану *пряму Симсона.*

Теорема 1. *Основи перпендикулярів, проведених з довільної точки описаного навколо трикутника ABC кола на його сторони (або їх продовження), належать одній прямій.*

Доведення. Нехай K — довільна точка кола, описаного навколо трикутника ABC (мал. 1), T_1, T_2, T_3 — основи перпендикулярів, проведених з точки K



Мал. 1

на прямі, що містять сторони BC, AC і AB відповідно. Необхідно довести, що точки T_1, T_2, T_3 належать одній прямій.

Оскільки $KABC$ – вписаний чотирикутник, то

$$\angle AKC = 180^\circ - B. \tag{1}$$

Але навколо чотирикутника KT_3BT_1 також можна описати коло (два протилежні кути дорівнюють по 90°), тобто

$$\angle T_1KT_3 = 180^\circ - B. \tag{2}$$

Порівнюючи (1) і (2), робимо висновок: $\angle AKC = \angle T_1KT_3$. Тоді очевидно, що рівні і кути CKT_1 і AKT_3. Нехай кожен з них дорівнює α.

$\angle CT_2T_1 = \angle CKT_1 = \alpha$ (вписані, спираються на одну дугу в колі з діаметром KC).

Аналогічно $\angle AT_2T_3 = \angle AKT_3 = \alpha$ – вписані, спираються на одну дугу в колі з діаметром AK.

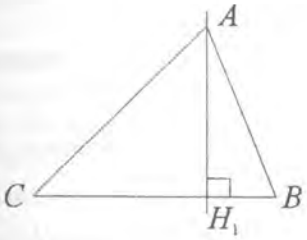
Оскільки $\angle CT_2T_1 = \angle AT_2T_3 = \alpha$, то точки T_1, T_2 та T_3 лежать на одній прямій. □

Пряму, що містить основи перпендикулярів, проведених з довільної точки описаного навколо трикутника кола на його сторони (або їх продовження), називають *прямою Симсона* цієї точки. Наприклад, у доведенні теореми 1 прямою Симсона точки K є пряма $T_1{-}T_2{-}T_3$ (ми використовуємо таке позначення прямої замість звичного позначення двома літерами, щоб підкреслити, що три або більше точок, які лежать на цій прямій, цілком рівноправні.)

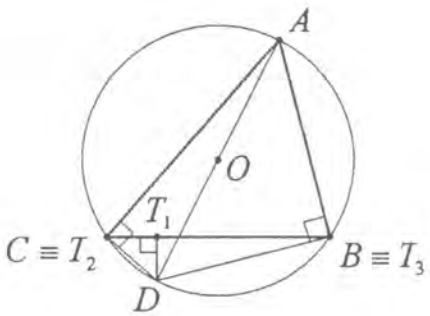
Задача 1. Чи існують точки, які належать своїй прямій Симсона?

Розв'язання. Так, існують. Це, наприклад, вершини трикутника ABC.

Дійсно, пряма AH_1, що містить висоту, проведену з вершини A, є прямою Симсона точки A (мал. 2).



Мал. 2



Мал. 3

Задача 2. Для яких точок пряма Симсона співпадає з однією з сторін трикутника ABC?

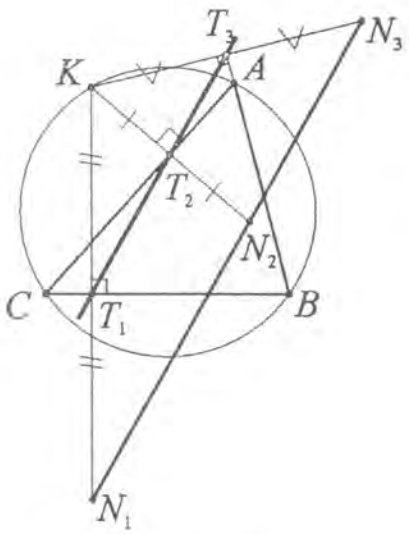
Розв'язання. Нехай D — точка, діаметрально протилежна точці A (мал. 3). Оскільки $\angle DBA = \angle DCA = 90°$ (вписані спираються на діаметр), то точки C і B відповідно співпадуть з точками T_2 і T_3 прямої Симсона, тобто пряма, що містить сторону BC і буде прямою Симсона точки D.

Отже, прямі Симсона точок, діаметрально протилежних вершинам A, B, C, містять сторони трикутника ABC.

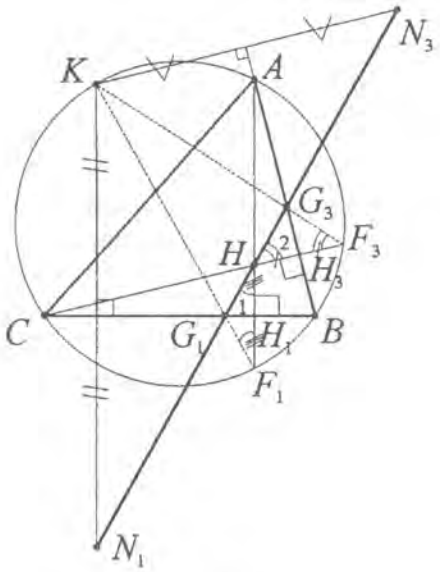
Неважко показати, що інших точок, для яких прямі Симсона співпадають зі сторонами, не існує.

Задача 3. Для будь-якої точки K кола, описаного навколо трикутника ABC, її симетричні образи відносно сторін трикутника належать одній прямій. Доведіть!

Розв'язання. Нехай точки N_1, N_2, N_3 — симетричні образи точки K відносно сторін BC, AC і AB відповідно (мал. 4).



Мал. 4



Мал. 5

Оскільки середини відрізків KN_1, KN_2, KN_3 — точки T_1, T_2 та T_3 — належать одній прямій (прямій Симсона), то й точки N_1, N_2 та N_3 також належать одній прямій (іноді кажуть: тут ми маємо справу з *"подвоєним" Симсоном*).

Задача 4. Довести, що прямій $N_1 - N_2 - N_3$ задачі 3 належить також і точка H — ортоцентр трикутника ABC.

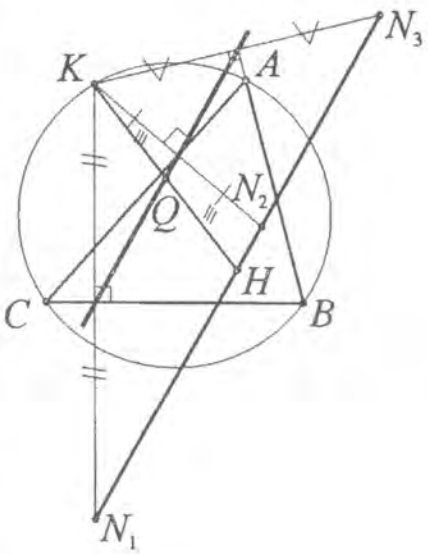
Розв'язання. З'єднаємо точки N_1 і N_3 задачі 3 з ортоцентром H (мал. 5). Нехай висоти AH_1 і CH_3 перетинають описане коло в точках F_1 і F_3 відповідно. Відомо, що точки, симетричні ортоцентру відносно сторін трикутника, належать описаному колу, тобто $HH_1 = H_1F_1$ і $HH_3 = H_3F_3$. З чотирикутника H_1HH_3B видно, що $\angle H_1HH_3 = 180° - B$. Якщо ми доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = B$, то задача буде розв'язана.

З міркувань симетрії KF_1 і HN_1 перетнуться в точці G_1, що належить BC, а KF_3 і HN_3 — в точці G_3, що належить AB. Тоді $\angle KF_1A = \angle 1$, а $\angle KF_3C = \angle 2$. Але $\angle KF_1A = \frac{1}{2} \cup AK$ і $\angle KF_3C = \frac{1}{2} \cup KC$ — як вписані. Отже, $\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup KC) = \frac{1}{2} \cup AC$.

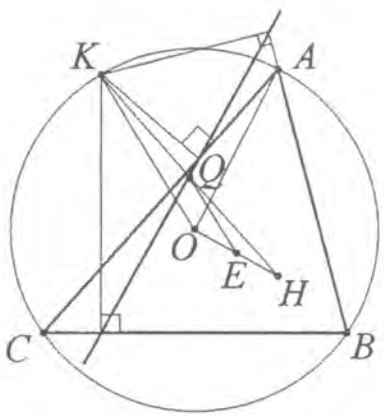
Враховуючи те, що $\cup AC = 2B$ (на цю дугу спирається вписаний кут B), отримаємо: $\angle 1 + \angle 2 = B$. Таким чином, ортоцентр H належить прямій $N_1 - N_2 - N_3$.

Задача 5. Пряма Симсона точки K ділить відрізок KH навпіл. Довести.

Розв'язання. Оскільки за задачею 4 ортоцентр H належить прямій $N_1 - N_2 - N_3$, яка є "подвоєним" Симсоном, то очевидно, що середина відрізка KH — точка Q — належить прямій $T_1 - T_2 - T_3$ — прямій Симсона точки K (мал. 6).



Мал. 6



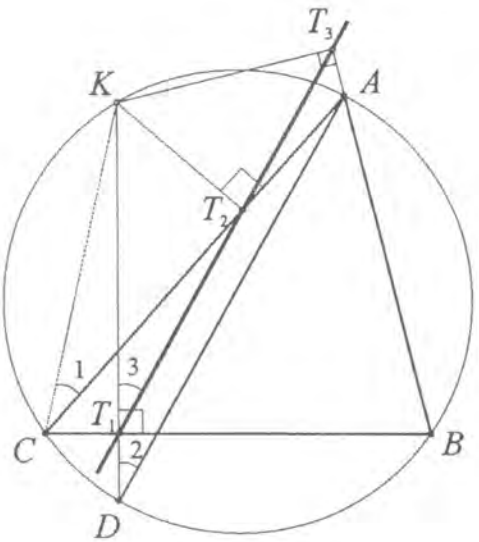
Мал. 7

Задача 6. Точка перетину Q прямої Симсона точки K і відрізку KH належить колу 9 точок трикутника ABC. Довести.

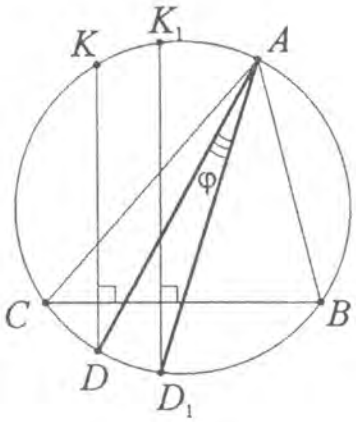
Розв'язання. Відомо, що центром кола 9 точок є точка E — середина відрізка OH, а радіус цього кола дорівнює $\frac{1}{2}R$ — половині радіуса кола, описаного навколо трикутника ABC. Тоді очевидно, що QE — середня лінія в трикутнику OKH (мал. 7), тобто $QE = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{2}R$. Це і означає, що Q — середина KH — належить колу 9 точок трикутника ABC.

Задача 7. Відрізок AD паралельний прямій Симсона точки K (D — точка перетину прямої KT_1 з описаним колом). Довести.

Розв'язання. $\angle 1 = \angle 2$ — вписані, спираються на дугу KA (мал. 8). $\angle 1 = \angle 3$ — вписані, спираються на одну дугу в колі з діаметром KC. Оже, $\angle 2 = \angle 3$, або відрізок AD паралельний прямій $T_1 - T_2 - T_3$.



Мал. 8



Мал. 9

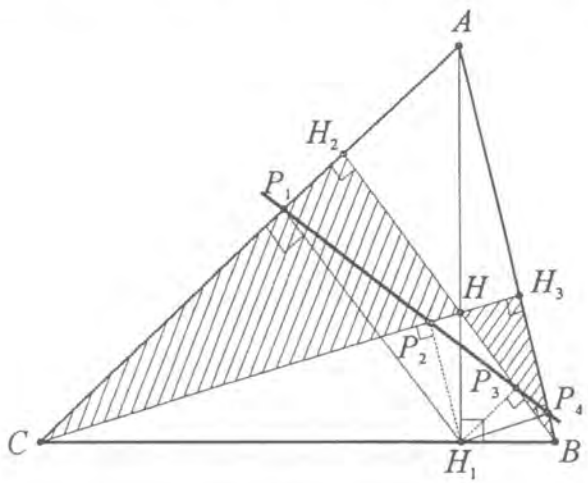
Задача 8. Кут між прямими Симсона точок K і K_1 дорівнює половині дуги між цими точками. Довести.

Розв'язання. Відрізки AD і AD_1 паралельні прямим Симсона точок K і K_1 (задача 7). Отже, кут між прямими Симсона точок K і K_1 дорівнює куту φ між паралельними їм відрізками AD і AD_1 (мал. 9).

А кут φ дорівнює половині дузі DD_1 (вписаний). Але $\cup DD_1 = \cup KK_1$ — як дуги, що містяться між паралельними хордами, тобто твердження задачі доведено: $\varphi = \frac{1}{2} \cup KK_1$.

Задача 9. Проекції основи висоти трикутника на дві інші сторони та дві інші висоти належать одній прямій. Доведіть!

Розв'язання. На мал. 10 P_1 і P_4 — проекції основи H_1 висоти AH_1 на сторони



Мал. 10

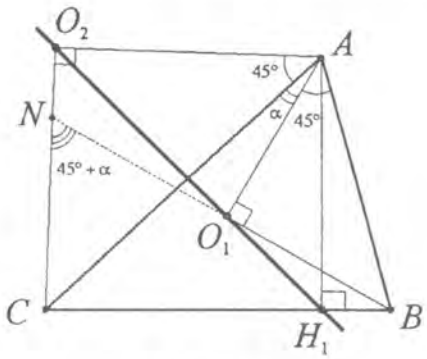
AC і AB відповідно, а P_2 і P_3 — проекції H_1 на висоти CH_3 і BH_2. Потрібно довести, що $P_1 - P_2 - P_3 - P_4$ — це одна пряма.

Навколо CH_2HH_1 можна описати коло (два протилежні кути дорівнюють по 90°). Тоді для точки H_1 описаного навколо ΔCH_2H кола пряма $P_1 - P_2 - P_3$ буде прямою Симсона.

Аналогічно навколо H_1HH_3B можна описати коло. І для точки H_1 цього кола, описаного навколо трикутника BH_3H пряма $P_2 - P_3 - P_4$ буде прямою Симсона.

Оскільки точки P_2 і P_3 належать кожній з двох прямих Симсона, то взагалі всі чотири точки P_1, P_2, P_3, P_4 належать одній прямій.

Задача 10. В гострокутному трикутнику ABC на стороні AB побудовано квадрат з центром O_1 — всередину трикутника, а на стороні AC — квадрат з центром O_2 — в зовнішню сторону. H_1 — основа висоти AH_1 трикутника ABC (мал. 11). Довести, що точки H_1, O_1, O_2 належать одній прямій.



Мал. 11

Розв'язання. Продовжимо BO_1 до перетину з O_2C в точці N. Покажемо, що пряма $H_1 - O_1 - O_2$ — пряма Симсона для точки A кола, описаного навколо трикутника BNC.

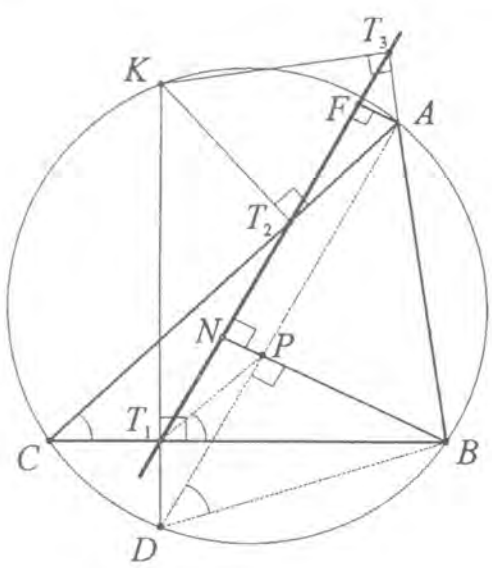
Оскільки AH_1, AO_1, AO_2 — перпендикуляри на сторони (або їх продовження) трикутника BNC, то достатньо довести, що точка A належить колу, описаному навколо цього трикутника.

Нехай $\angle O_1AC = \alpha$. Тоді $\angle CAB = 45° + \alpha$ і $\angle O_1AO_2 = 45° + \alpha$. В чотирикутнику O_2AO_1N підрахуємо, що $\angle O_2NO_1 = 135° - \alpha$, а суміжний з ним $\angle BNC = 45° + \alpha$. Таким чином $\angle BNC = \angle CAB = 45° + \alpha$, тобто точки B, A, N, C належать одному колу.

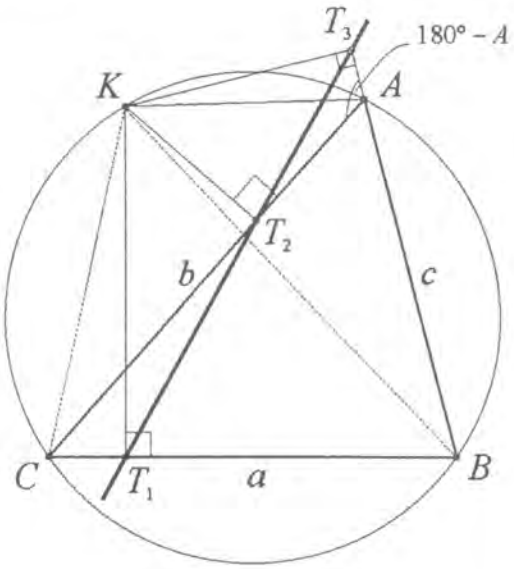
Задача 11. Відрізок NF — проекція сторони AB на пряму Симсона точки K (мал. 12). довести, що $T_1T_2 = NF$.

Розв'язання. Нехай P — точка перетину відрізків AD іBN. Відомо, що $AD \parallel NF$ *(задача 7). Навколо чотирикутника* DT_1PB *можна описати коло з діаметром* DB. *Тоді* $\angle PT_1B = \angle PDB$ *спираються на дугу* PB. *Але* $\angle ADB = \angle ACB$ *(вписані, спираються на дугу* AB*).*

Тобто $\angle ACB = \angle PT_1B$, *що означає паралельність прямих* T_1P *та* AC.



Мал. 12



Мал. 13

Тоді APT_1T_2 – паралелограм ($AP \parallel T_1T_2$ і $AT_2 \parallel T_1P$). Отже $AP = T_1T_2$. Але $AP = NF$. Таким чином, $T_1T_2 = NF$.

Задача 12. Скориставшись прямою Симсона, доведіть *теорему Птоломея*: добуток діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

Розв'язання. Відрізок KA — діаметр кола, описаного навколо чотирикутника KT_3AT_2 (мал. 13) і $\frac{T_2T_3}{\sin(180°-A)} = KA$, або $T_2T_3 = KA \cdot \sin A$.

KB — діаметр кола, описаного навколо KT_3BT_1, тоді $\frac{T_1T_3}{\sin B} = KB$ і $T_1T_3 = KB \cdot \sin B$.

Аналогічно KC — діаметр кола, описаного навколо KT_2T_1C, звідки

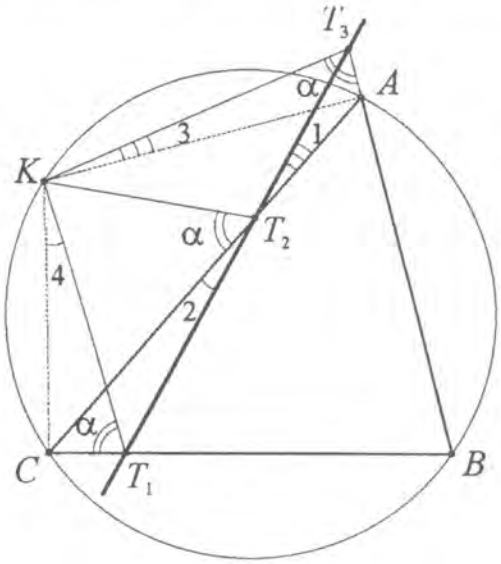
$$\frac{T_1T_2}{\sin C} = KC$$

(теорема синусів для ΔCT_2T_1), або $T_1T_2 = KC \cdot \sin C$.

Враховуючи те, що $T_1T_3 = T_1T_2 + T_2T_3$, отримаємо: $KB \cdot \sin B = KC \cdot \sin C + KA \cdot \sin A$, або $KB \cdot \frac{b}{2R} = KA \cdot \frac{a}{2R} + KC \cdot \frac{c}{2R}$, або, після скорочення на $2R$, $KB \cdot b = KA \cdot a + KC \cdot c$. Це вже і є теоремою Птоломея для вписаного в коло чотирикутника $KABC$ (дійсно, KB і b — його діагоналі, KA і a та KC і c — пари протилежних сторін).

Перед тим, як запропонувати декілька задач для самостійного розв'язання, доведемо узагальнену теорему про пряму Симсона–Уоллеса.

Теорема 2 (узагальнена). *З довільної точки K описаного навколо трикутника ABC кола проведено прямі, що перетинають BC, AC і продовження AB в точках T_1, T_2 і T_3 відповідно (мал. 14) — під рівними кутами α. Довести, що і в цьому випадку $T_1 - T_2 - T_3$ — одна пряма.*



Мал. 14

Доведення. Щоб довести теорему, покажемо рівність кутів 1 і 2.

Оскільки $\angle KT_2A = 180^\circ - \alpha$ (суміжний з кутом KT_2C), то навколо чотирикутника KT_3AT_2 можна описати коло, внаслідок чого $\angle 1 = \angle 3$.

Навколо KT_2T_1C також можна описати коло ($\angle KT_2C = \angle KT_1C = \alpha$) і $\angle 2 = \angle 4$.

Можна описати коло і навколо KT_3BT_1 ($\angle KT_1B = 180^\circ - \alpha$ як суміжний з кутом KT_1C).

Оскільки чотирикутники $KABC$ і KT_3BT_1 вписані, то

$$\angle CKA = \angle T_1KT_3 = 180^\circ - B.$$

Звідки випливає, що $\angle 3 = \angle 4$, або $\angle 1 = \angle 2$. Теорему доведено. □

Задачі для самостійного розв'язання.

Задача 13. Пряма Симсона точки K кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, ділить радіус OK навпіл. Доведіть.

Задача 14. Доведіть теорему про пряму Симсона за допомогою теореми Менелая.

Задача 15. Якщо основи перпендикулярів, проведених з точки K до сторін трикутника ABC (або їх продовжень) належать одній прямій, то точка K належить описаному навколо трикутника ABC колу. Доведіть! (задача, обернена до теореми про пряму Симсона).

Задача 16. Доведіть, що прямі Симсона діаметрально протилежних точок перпендикулярні, і що вони перетинаються на колі 9 точок трикутника ABC.

Задача 17. Відновіть ΔABC за кутом A та його *прямою Ейлера* (прямою, що містить центр описаного кола O і ортоцентр H).

Задача 18. Якщо через точку K описаного навколо трикутника ABC кола провести три довільні хорди і на кожній з них як на діаметрі побудувати коло, то ці кола попарно перетнуться в трьох точках, які належать одній прямій (*теорема Сальмона*).

Задача 19. $ABCD$ — вписаний чотирикутник. K — довільна точка кола. Для точки K і кожного з трикутників ABC, BCD, CDA, DAB існують свої прямі Симона. Довести, що проекції точки K на ці прямі Симсона належать одній прямій — *прямій Симсона чотирикутника.*

Література

1. Боголюбов А.Н., *Математики. Механики*, Биографический справочник, "Наукова думка", Киев, 1983.
2. Бородин А.Н., Бугай А.С., *Биографический словарь деятелей в области математики*, "Радянська школа", Киев, 1979.
3. Глейзер Г.И., *История математики в школе IX–X классы*, "Просвещение", Москва, 1983.
4. Зетель С.И., *Новая геометрия треугольника*, "Учпедгиз", Москва, 1940.
5. Коксетер Г.С.М., Грейцер С.Л., *Новые встречи с геометрией*, "Наука", Москва, 1978.
6. Кушнір І.А., *Методи розв'язання задач з геометрії*, "Абрис", Київ, 1994.
7. Прасолов В.В., *Задачи по планиметрии*, Часть I, "Наука", Москва, 1991.
8. Шарыгин И.Ф., *Задачи по геометрии. Планиметрия*, библиотечка "Квант", "Наука", Москва, 1986.

Русанівський ліцей, м. Київ

Про перетин многокутної піраміди площиною

*В. І. Лавренюк**

В замітці за допомогою векторного числення розв'язано дві подібні задачі про перетин многокутних пірамід площинами.

Задача 1. Нехай $SABCD$ – чотирикутна піраміда, в основі якої лежить чотирикутник $ABCD$. На бічних ребрах SA, SB, SD, вибрано точки K, L, N так, що $SK : SA = m$, $SL : SB = n$, $SN : SD = l$ (рис. 1). Визначити, у

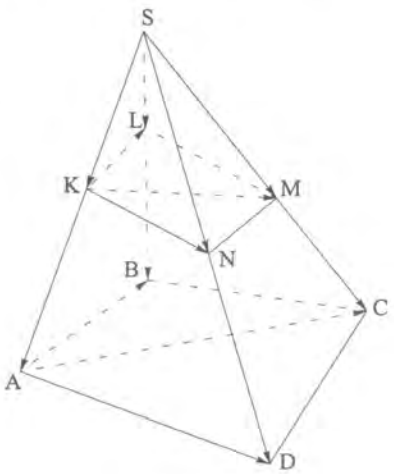


Рис. 1

якому відношенні площина проведена через точки K, L, N ділить ребро SC.

Позначимо точку, в якій вказана площина перетинає ребро SC або його продовження, через M, та шукане відношення $SM : SC$ через x.

Розглянемо вектори

$$\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{SD} = \vec{d}, \quad \overrightarrow{SC} = \vec{c}.$$

Тоді

$$\overrightarrow{SK} = m\vec{a}, \quad \overrightarrow{SL} = n\vec{b}, \quad \overrightarrow{SN} = l\vec{d}, \quad \overrightarrow{SM} = x\vec{c}.$$

Для визначення величини x складемо векторне рівняння. Вектор $\overrightarrow{KM}$, що належить площині, яка побудована на векторах $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{KL}$, завжди можна подати у вигляді: $\overrightarrow{KM} = u\overrightarrow{KL} + v\overrightarrow{KN}$, з іншого боку $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SK}$. Тому

$$u\overrightarrow{KL} + v\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SK}, \tag{1}$$

тут u, v — невідомі, які потрібно визначити.

*Кандидат фіз.-мат. наук, доцент, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, механіко-математичний факультет.

Визначимо тепер через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$, які є некомпланарними, вектори $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{SM}$ та $\overrightarrow{SC}$. З рис.1 знаходимо

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SK} = n\vec{b} - m\vec{a}, \quad \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SK} = l\vec{d} - m\vec{a}, \quad \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}.$$

Зауважимо також, що вектор $\overrightarrow{AC}$ для довільного чотирикутника можна подати у вигляді $\overrightarrow{AC} = q\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{AD}$. Зокрема, для $p = q = 1$ чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, а для $q = 1$, $p > 0$ — трапецією.

Визначимо далі вектор AC через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$. Вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$ визначаються так:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA} = \vec{d} - \vec{a}.$$

Звідси $\overrightarrow{AC} = q(\vec{b} - \vec{a}) + p(\vec{d} - \vec{a})$.

Таким чином, вектор $\overrightarrow{SC}$ остаточно запишемо у вигляді:

$$\overrightarrow{SC} = \vec{a} + q\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + p\left(\vec{d} - \vec{a}\right) = q\vec{b} + p\vec{d} + (1 - p - q)\,\vec{a}.$$

Підставляючи в (1) вирази для KL, KN, SM та SK через вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ отримаємо векторне рівняння:

$$u\left(n\vec{b} - m\vec{a}\right) + v\left(l\vec{d} - m\vec{a}\right) = x\left(q\vec{b} + p\vec{d} + (1 - p - q)\,\vec{a}\right) - m\vec{a}.$$

Звівши подібні отримаємо:

$$\vec{b}\,(un - qx) + \vec{d}\,(vl - px) - \vec{a}\,(m\,(u + v - 1) + (1 - p - q)\,x) = 0. \qquad (2)$$

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ — некомпланарні, тому рівняння (2) рівносильне системі:

$$\begin{cases} un - qx = 0, \\ vl - px = 0, \\ m\,(u + v) + x\,(1 - p - q) - m = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

З системи (3) легко знаходимо:

$$x = \frac{mnl}{m\,(ql + np) + nl\,(1 - p - q)}.$$

Проаналізуємо отриманий вираз:

1. Якщо $p = q = 1$, матимемо чотирокутну піраміду, в основі якої паралелограм. У цьому випадку x набуде вигляду:

$$x = \frac{mnl}{m\,(l + n) - nl}.$$

2. Якщо $q = 1$, $p > 1$ або $0 < p < 1$, то матимемо піраміду, в основі якої трапеція з відношенням основ p, і x набуде вигляду:

$$x = \frac{mnl}{m\,(l + np) - nlp}.$$

3. Очевидно, що для $x \in (0; 1)$ площина перетинатиме ребро S, для $x > 1$ — продовження SC за точку C, для $x < 0$ площина перетинатиме ребро SC на його продовженні за точку S.

4. Якщо $m = n = l$, то $x = m$.

5. Якщо $n\,(ql + np) + nl\,(1 - p - q) = 0$, то січна площина буде паралельна ребру SC.

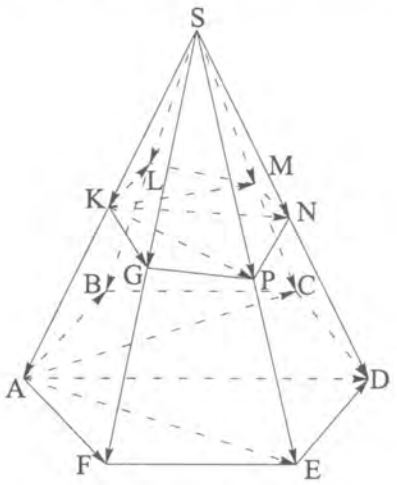


Рис. 2

Задача 2. Нехай $SABCDEF$ — шестикутна піраміда (рис. 2), в основі якої лежить шестикутник $ABCDEF$. На бічних ребрах SA, SB та SF вибрано точки K, L, G так, що $SK : SA = m$, $SL : SB = n$, $SF : SG = l$. Визначити, в якому відношенні площина, яка проходить через точки K, L, G, ділить інші бічні ребра піраміди.

Позначимо (рис. 2)

$$\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{SF} = \vec{f}, \quad \overrightarrow{SC} = \vec{c}, \quad \overrightarrow{SD} = \vec{d}, \quad \overrightarrow{SE} = \vec{e}.$$

Оскільки

$$SK : SA = m, \quad SL : SB = n, \quad SG : SF = l,$$

то

$$\overrightarrow{SK} = m\vec{a}, \quad \overrightarrow{SL} = n\vec{b}, \quad \overrightarrow{SB} = l\vec{f}.$$

Позначимо також

$$SM : SC = x, \quad SN : SD = y, \quad SP : SE = z.$$

Тоді $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{f} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = 2\big(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}\big) = 2\big(\vec{b} + \vec{f} - 2\vec{a}\big)$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = 2\vec{b} + \vec{f} - 3\vec{a}$. Аналогічно

$$\overrightarrow{AE} = 2\vec{f} + \vec{b} - 3\vec{a}, \quad \overrightarrow{SD} = \vec{d} = 2\vec{b} + 2\vec{f} - 3\vec{a}, \quad \overrightarrow{SC} = \vec{c} = 2\vec{b} + \vec{f} - 2\vec{a},$$

$$\overrightarrow{SE} = \vec{e} = \vec{b} + 2\vec{f} - 2\vec{a}, \quad \overrightarrow{SM} = x\left(2\vec{b} + \vec{f} - 2\vec{a}\right),$$

$$\overrightarrow{SN} = y\left(2\vec{b} + 2\vec{f} - 3\vec{a}\right), \quad \overrightarrow{SP} = z\left(\vec{b} + 2\vec{f} - 2\vec{a}\right).$$

Вектори $\overrightarrow{KL}$ і $\overrightarrow{KG}$ мають вигляд: $\overrightarrow{KL} = n\vec{b} - m\vec{a}$, $\overrightarrow{KG} = l\vec{f} - m\vec{a}$. Векторні рівняння для визначення x, y, z матимуть вигляд:

$$u_1\overrightarrow{KL} + v_1\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SK},$$

$$u_2\overrightarrow{KL} + v_2\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SK},$$

$$u_3\overrightarrow{KL} + v_3\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SK}.$$

Підставляючи у рівняння цієї системи вирази для $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SN}$, $\overrightarrow{SK}$, $\overrightarrow{SP}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{KG}$ отримаємо:

$$\begin{cases} u_1\left(n\vec{b}-m\vec{a}\right)+v_1\left(l\vec{f}-m\vec{a}\right)=x\left(2\vec{b}+\vec{f}-2\vec{a}\right)-m\vec{a}, \\ u_2\left(n\vec{b}-m\vec{a}\right)+v_2\left(l\vec{f}-m\vec{a}\right)=z\left(\vec{b}+2\vec{f}-2\vec{a}\right)-m\vec{a}, \\ u_3\left(n\vec{b}-m\vec{a}\right)+v_3\left(l\vec{f}-m\vec{a}\right)=y\left(2\vec{b}+2\vec{f}-3\vec{a}\right)-m\vec{a}. \end{cases}$$

Кожне з цих рівнянь рівносильне системі трьох рівнянь, а саме

$$\begin{cases} u_1 n = 2x, \\ v_1 l = x, \\ m\left(u_1+v_1\right)-2x=m, \end{cases} \quad \begin{cases} u_2 n = z, \\ v_2 l = 2z, \\ m\left(u_2+v_2\right)-2z=m, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 n = 2y, \\ v_3 l = 2y, \\ m\left(u_3+v_3\right)-3y=m. \end{cases}$$

Розв'язками цих систем будуть

$$x=\frac{mnl}{m\left(2l+n\right)-2nl}, \quad y=\frac{mnl}{2m\left(n+l\right)-3nl}, \quad z=\frac{mnl}{m\left(2n+l\right)-2nl}.$$

Аналіз розташування точок M, N, P аналогічний пункту 3 з попередньої задачі. А саме:

1) Якщо, скажімо, $y \in (0;1)$, то точка N лежить на ребрі SD; якщо $y<0$, то точка N лежить на продовженні SD за точку S, а для $y>1$ – на продовженні SD за точку D.

2) Якщо $m=n=l$, то $x=y=z=m$.

3) Якщо $2m\left(n+l\right)-3nl=0$, то січна площина буде паралельна ребру SD.

Задачі для самостійного розв'язання.

1. Розв'язати аналогічним чином сформульовану задачу для правильної

а) п'ятикутної піраміди;

б) восьмикутної піраміди.

2. Основою чотирикутної піраміди $SABCD$ є паралелограм $ABCD$. На бічних ребрах SA, SB, SD взято точки K, L, N, через які проведена площина. У якому відношенні ця площина ділить об'єм піраміди, якщо відомо, що вона перетинає ребро SC, причому $SK:SA=m$, $SL:SB=n$, $SN:SD=l$?

Відповідь. $V_1 : V_{SABCD} = \frac{1}{2}m^2\frac{nl(n+l)}{m(n+l)-nl}$.

Про вступні іспити на механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2005 році

І. Парасюк[1], *О. Перегуда*[2]

Як стати студентом першого курсу механіко-математичного факультету? Цього року це можна було зробити кількома способами: 1) успішно пройти заочний тур олімпіади факультету з математики (для усіх бажаючих випускників поточного навчального року), потім успішно виступити на очному турі цієї ж олімпіади і, нарешті, пройти співбесіду; 2) одержати золоту або срібну медаль після закінчення школи й успішно пройти співбесіду; 3) закінчити один із ліцеїв м. Києва, що уклали угоду про співробітництво з механіко-математичним факультетом, одержати рекомендацію педагогічної ради ліцею й успішно пройти співбесіду; 4) успішно скласти два вступні іспити (з української мови й літератури та з математики). Були й інші способи вступу, визначені правилами прийому (для учасників міжнародних олімпіад з математики, для переможців та призерів третього і четвертого етапів Всеукраїнської олімпіади з математики, олімпіади МАН, для переможців конкурсу, який проводить університет разом з газетою "Аргументи і факти в Україні", для жителів Чорнобильської зони).

У 2005 році за результатами співбесід всього було рекомендовано до вступу на перший курс механіко-математичний факультету (очна форма навчання) 94 особи: 44 особи — переможці факультетської олімпіади, в числі яких 11 медалістів та 17 рекомендованих педагогічними радами ліцеїв; 16 осіб — переможців олімпіад різних рівнів, з них Кравець Олександр, Лужевська Катерина, Мисак Данило, Попович Дмитро, Слободянюк Сергій — призери всеукраїнських фахових олімпіад та учасники міжнародних олімпіад; 16 учнів — тільки за рекомендацією педагогічних рад ліцеїв; 18 — абітурієнти, які мали золоту або срібну медаль, але не були переможцями олімпіад.

Зауважимо, що абітурієнти, які не змогли вступити на факультет за результатами співбесіди, мали право стати студентами на загальних підставах, склавши вступні іспити, і таких цього року було 19 осіб. Загалом же два екзамени склали 82 особи. З них набрали: 10 балів — 1; 9 балів — 6; 8 балів — 37; 7 балів — 30; 6 балів — 8. За рішенням конкурсної комісії до зарахування було рекомендовано всіх абітурієнтів, які набрали не менше 8 балів, та 19 семибальників.

---

[1]Ігор Остапович Парасюк — доктор фіз.-мат. наук, професор, декан механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

[2]Олег Володимирович Перегуда — кандидат фіз.-мат. наук, заступник декана механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Не слід забувати й про контрактний спосіб вступу: склавши вступні іспити, але не набравши прохідного балу, абітурієнт міг укласти угоду з університетом і, сплативши певну суму, стати студентом.

Варто відмітити, що набір студентів на механіко-математичний факультет (очна форма навчання) цього року, як і раніше, проводився на 150 місць державного фінансування за трьома спеціальностями: математика, статистика, механіка. Стосовно математики і статистики розподіл достатньо умовний, оскільки студенти перших двох курсів цих двох спеціальностей слухають загальні математичні курси переважно разом. Крім того, студенти-математики старших курсів слухають досить об'ємні курси зі статистики, математичної економіки та інших предметів економічного профілю, що дає їм змогу після закінчення університету працювати в цьому напрямку. Студенти-механіки — це також математики, тільки їхня підготовка має прикладне спрямування уже починаючи із першого курсу.

Далі наведено приклади завдань для співбесід і для вступних іспитів у 2005 році, пропонуються також розв'язки задач або вказівки до них. Зауважимо, що інколи для успішного проходження співбесіди достатньо було правильно розв'язати лише одну із трьох задач.

Завдання співбесід у 2005 році

1. Знайти суму перших 30 натуральних чисел, які при діленні на 7 дають в остачі 2, а при діленні на 3 дають в остачі 1.

2. Знайти всі значення a, при кожному з яких система нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{1+a}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

має розв'язки.

3. Знайти об'єм трикутної піраміди $ABCD$, якщо $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $AD = 6$, $BD = 7$, $CD = 8$.

4. Знайти всі пари натуральних чисел (x, y), для яких $x^3 - y^3 = xy + 25$.

5. Побудувати графік функції $y = \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x$.

6. Розв'язати рівняння $\frac{(x^2-1)x}{(x^2-x-1)^2} = \frac{10}{9}$.

Розв'язки задач співбесіди

1. Натуральні числа, які при діленні на 7 дають в остачі 2, можна записати у вигляді

$$7n + 2, \qquad n \in N. \tag{1}$$

Для того, щоб ці числа при діленні на 3 давали в остачі 1, треба, щоб число n при діленні на 3 давало в остачі 2. Отже, числа вигляду (1) при діленні на 3 дають в остачі 1, якщо $n = 3q + 2$, $q = 0, 1, 2, \ldots$. Натуральні числа, про які йдеться у задачі, можна записати у вигляді

$$C_q = 21q + 16, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Ці натуральні числа утворюють арифметичну прогресію, різниця якої $d = 21$, а перше натуральне число дорівнює 16.

Залишилось обчислити суму перших 30 членів даної прогресії: $S_{30} = \frac{2\cdot 16+29\cdot 21}{2}\cdot 30 = 9615$.

2. Нехай a_0 значення параметра a, при якому система має розв'язок (x_0, y_0). Тоді мають місце нерівності

$$\begin{cases} -x_0^2 - 2x_0y_0 + 7y_0^2 \le 1 - \frac{2}{a_0+1}, \\ 3x_0^2 + 10x_0y_0 - 5y_0^2 \le -2. \end{cases} \tag{3}$$

Домноживши першу нерівність на 2 і додавши до другої отримаємо

$$(x_0 + 3y_0)^2 \le \frac{-4}{a_0+1}.$$

Отже, маємо $-\frac{4}{a_0+1} \ge 0$ або $a_0 < -1$.

Далі доведемо, що для кожного $a < -1$ система має розв'язки. Так як при $a < -1$ має місце $-1 > \frac{1-a}{1+a}$, то досить довести, що система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2 \end{cases} \tag{4}$$

має розв'язки. Кожен розв'язок даної системи буде розв'язком і початкової системи нерівностей. Аналогічними перетвореннями (як і для системи нерівностей (3)) отримаємо для системи (4) дві пари розв'язків $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Отже, ці розв'язки будуть розв'язками і заданої системи нерівностей (при $a < -1$).

3. В даній задачі доцільно використати метод координат. Виберемо тривимірну прямокутну декартову систему координат. Нехай $A(0;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$ і $D(x;y;z)$. Тоді площа основи піраміди ABC дорівнює $6\,\text{см}^2$, а абсолютна величина z-ої координата точки D дорівнює довжині висоти піраміди $ABCD$. Для знаходження координат точки D скористаємося формулою відстані між двома точками у просторі:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36, \\ x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 49, \\ x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 64. \end{cases}$$

З даної системи знайшовши координати точки D, маємо значення висоти піраміди, а отже і значення об'єму піраміди $ABCD$.

4. Очевидно, що $x > y$. Нехай $x = y + k$, $k \in N$. Тоді вихідне рівняння перепишемо у вигляді $(3k-1)y^2 + (3k^2 - k)y + k^3 - 25 = 0$. Зауважимо, що $3k - 1 > 0$ і $3k^2 - k > 0$. Отже, для того щоб рівняння мало невід'ємні корені, потрібно, щоб $k^3 - 25 < 0$. Таким чином, k може набувати лише таких значень: $k = 1$ і $k = 2$. Безпосередньою перевіркою отримаємо, що лише при $k = 1$ рівняння має розв'язки $x = 4$, $y = 3$.

5. Перетворимо значення виразу

$$\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x=\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}$$
$$=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}$$
$$=\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

Отже, потрібно побудувати графік функції $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

6. Перетворимо рівняння до вигляду $\frac{\left(x^2-1\right)^2-2x\left(x^2-1\right)+x^2}{\left(x^2-1\right)x}=\frac{9}{10}$. Поділимо чисельник лівої частини рівняння почленно на знаменник і отримаємо

$$\frac{x^2-1}{x}-2+\frac{x}{x^2-1}=\frac{9}{10}.$$

Зробивши відповідну заміну змінної $y=\frac{x^2-1}{x}$, отримаємо рівняння, що зводиться до квадратного рівняння $y+\frac{1}{y}-2.9=0$. Неважко знайти розв'язок даного рівняння і відповідного початкового.

Вибрані задачі вступних екзаменаційних білетів (механіко-математичний факультет, 2005 рік)

1. Многочлен $P(x)$ при діленні на $x-1$ дає остачу 2, а при діленні на $x-2$ дає остачу 1. Знайти остачу при діленні цього многочлена на $(x-1)(x-2)$.

2. Довести нерівність $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$, якщо α, β, γ — кути трикутника.

3. Довести, що для довільного натурального n число $\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}$ дорівнює квадрату цілого числа, і знайти це число.

4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sin^3 x+\sin^4 y=1,\\ \cos^4 x+\cos^5 y=1.\end{cases}$

5. Площа трикутника дорівнює 24 см^2. Кожна сторона трикутника поділена на три частини у відношенні 1:2:1. Знайти площу шестикутника з вершинами у точках поділу.

6. Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайти площу $ABCD$, якщо площі трикутників ABD, ACD, AED відповідно дорівнюють 10 см^2, 9 см^2, 6 см^2.

Розв'язки задач вступних екзаменаційних білетів

1. Якщо многочлен $P(x)$ при діленні на $x-1$ дає остачу 2, а при діленні на $x-2$ дає остачу 1, то можемо записати: $P(x)=Q_1(x)(x-1)+2$, $P(x)=Q_2(x)(x-2)+1$, де $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ певні многочлени. Нехай остача при діленні $P(x)$ на $(x-1)(x-2)$ дорівнює $ax+b$. Тоді отримаємо

$$P(x)=Q_(x)(x-1)(x-2)+ax+b.$$

Так як $P(1) = 2$ і $P(2) = 1$, то отримаємо систему рівнянь для знаходження невідомих a і b: $\begin{cases} a+b=2, \\ 2a+b=1. \end{cases}$ Отже остача дорівнює $-x+3$.

2. Оскільки $\frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{2} = \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

Тоді

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2}\right) \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}.$$

3. Представимо задане число у вигляді

$$\underbrace{11\ldots1}_{2n} - \underbrace{22\ldots2}_{n} = \underbrace{1\ldots1}_{n}\underbrace{0\ldots0}_{n} + \underbrace{1\ldots1}_{n} - 2\cdot\underbrace{1\ldots1}_{n} = \underbrace{1\ldots1}_{n}\cdot\left(1\underbrace{0\ldots0}_{n} - 1\right)$$

$$= \underbrace{1\ldots1}_{n}\cdot\underbrace{9\ldots9}_{n} = \underbrace{(3\ldots3)^2}_{n},$$

що й треба було довести.

4. Додамо рівняння даної системи і зробимо низку перетворень:

$$\sin^3 x + \cos^4 x + \sin^4 y + \cos^5 y = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^3 x - \sin^2 x\right) + \left(\cos^4 x - \cos^2 x\right) + \left(\sin^4 y - \sin^2 y\right) + \left(\cos^5 y - \cos^2 y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x\left(\sin x - 1\right) = 0 \\ \cos^2 x\left(\cos^2 x - 1\right) = 0 \\ \sin^2 y\left(\sin^2 y - 1\right) = 0 \\ \cos^2 y\left(\cos^3 y - 1\right) = 0. \end{cases}$$

Знайшовши розв'язки кожного з рівнянь і виділивши спільну частину, отримаємо множину розв'язків вихідної системи:

$$x = k\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad y = 2\pi n, \qquad k, n \in Z.$$

5. Нехай точки K, L, M, N, P, R є точками розбиття сторін трикутника ABC, тобто $AK : KL : LB = 1 : 2 : 1$, $BM : MN : NC = 1 : 2 : 1$, $AR : RP : PC = 1 : 2 : 1$. Кожен з трикутників BLM, AKR, PNC подібні трикутнику ABC з відповідними коефіцієнтами подібності. Для знаходження площі утвореного шестикутника потрібно від площі трикутника ABC відняти площі утворених трикутників. Так як у подібних трикутників площі відносяться як квадрати відповідних сторін, то отримаємо $S_{KLMNPR} = 24\cdot\left(1 - \frac{3}{(2\cdot2+1)^2}\right) = \frac{528}{25}$ см^2.

6. Для знаходження розв'язку задачі скористаємося таким фактом: якщо в опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці E, то маємо відповідне співвідношення добутків площин $S_{AED}\cdot S_{BEC} = S_{AEB}\cdot S_{DEC}$. Згідно заданих умов, отримаємо $S_{ABCD} = 4+3+6+2 = 15$ см^2.

Поради і побажання

Якщо Ви закінчуєте середню школу, любите і знаєте математику, хочете, щоб математика допомогла знайти Вам своє місце у житті, дала професію, цінність якої у будь-якому суспільстві незаперечна й стабільна, вступайте на механіко-математичний факультет. Аби спростити собі це завдання, можете взяти участь в олімпіаді, яка уже одинадцять років проводиться на факультеті. Завдання заочного туру олімпіади регулярно друкуються в журналах "У світі математики", "Математика в школі" та інших періодичних виданнях у листопаді–січні, а також розповсюджуються безпосередньо в деканаті механіко-математичного факультету. Крім того, відповідну інформацію можна знайти на сайті університету за адресою `http://www.univ.kiev.ua`.

Приклади завдань співбесіди, яка має успішно завершити Ваші наміри, наведені у цій замітці. Запропонований тут короткий конспект розв'язків задач використайте для детальнішого їх аналізу. Зробіть прогноз, які додаткові запитання можна задати по кожній задачі, адже співбесіда передбачає деяке обговорення, спілкування на визначену тему. Поцікавтеся наступного року, чи не змінились правила вступу до Київського національного університету імені Тараса Шевченка, і подавайте необхідні документи в приймальну комісію. Нехай Вам щастить!

Нова матура з математики в польських школах

П. Ґаврон, В. Сущанський

Цього року розпочався 3-річний експеримент з випускними (матуральними) екзаменами (коротко, — матурею) в польських ліцеях. Нині середня освіта в Польщі трьохрівнева: школа подстевова (перші 6 років), гімназіум (3 роки) і ліцеум (останні 3 роки). Школи третього рівня мають різні спеціалізації: гуманітарну, економічну, фізико-математичну, технічну, природничу, мистецьку. Обов'язковою є 9-річна освіта (перші 2 рівні), випускник гімназії може продовжити навчання в ліцеї або в одній з технічних шкіл, які відповідають нашим професійно-технічним училищам. Але близько 90 відсотків випускників гімназій продовжують навчання в одному з ліцеїв. Випускники другого рівня також складають випускні екзамени. Цього року це синтезований тест з природничих наук, математики, історії тощо. Але найважливішими є матуральні екзамени. Нова матура дає можливість випускникам ліцеумів поступати до вищих навчальних закладів без екзаменів. Лише в окремих випадках (архітектура, художня творчість тощо) дозволятимуться співбесіди щодо відповідності здібностей вступника обраному фаху. Матуральні екзамени поділяються на обов'язкові, що їх складають всі випускники ліцеумів, та ті, що вибираються випускником самостійно. До обов'язкових належать польська мова і література та іноземна мова. Була довга дискусія, чи робити екзамен з математики обов'язковим, але зрештою попередній міністр освіти Польщі Кристина Любасна прийняла рішення (хоч сама за освітою є вчителем математики) не включати математику до списку обов'язкових матуральних екзаменів. Теперішній міністр освіти Польщі Мірослав Савіцкі хоче, щоб за три роки математика знову стала обов'язковим матуральним екзаменом. Ось його думка з цього приводу:

— Математика на основному рівні була б оправдана як мова для опису світу, а не рівня, алгоритми, логарифми і складні обчислення. Потрібна нова програмна основа, яка буде робити наголос на вмінні логічно міркувати. Праці над темою програмної основи вже тривають (Gazeta wyborcza, 10 травня 2005 р.) Для проведення матуральних екзаменів було створено центральну екзаменаційну комісію, територія Польщі поділена на округи, в кожному з округів створено свою екзаменаційну комісію. До комісій всіх рівнів обов'язково входять представники вищих навчальних закладів. Всі матуральні екзамени — письмові, екзаменаційні роботи перевіряються спеціальними комісіями причому в одному місці — центрі округу. Це зроблено з тією метою, щоб окремі завдання і вся екзаменаційна робота оцінювалася за узгодженими однаковими критеріями. Кожна робота буде перевірятися кількома екзаменаторами, але серед них не повинно бути вчителів школи, де ця робота виконувалась. В цілому регламент роботи комісій для проведення екзаменів і комісій для перевірки їх результатів розроблено докладно

і скрупульозно.

Цьогорічна матура з математики писалась всіма випускниками польських шкіл в один і той же день — 9 травня — і в один і той же час. Це — перший термін. В цьому році будуть ще два додаткові терміни — в червні (для тих, хто хворів і не зміг прийти на екзамен 9 травня) і для бажаючих скласти, або перескласти матуру — у вересні. Правда, міністерство Освіти спочатку запланувало лише один додатковий термін — у вересні. Другий було встановлено вже під сильним тиском громадськості, адже ті, що складуть екзамен у вересні, вже не матимуть змоги в цьому році поступати до більшості навчальних закладів Польщі. Лише навчальні заклади з традиційно низьким конкурсом будуть намагатися "виловити" собі додаткових вступників ще й після вересневого екзамену.

Складало матуральний екзамен з математики трохи менше третини всіх випускників. В принципі, це відповідає прогнозованому рівню. Але цієї кількості не досить, щоб забезпечити потреби вищої школи — вищі навчальні заклади на спеціальності, де математика є одним з обов'язкових предметів, потребують дещо більше випускників шкіл. В зв'язку з цим ряд вузів планує дозволити вступ на спеціальності, пов'язані з вивченням математичних курсів, випускників, які не складали матуральний екзамен з математики. Але тоді для них буде проводитись вступний іспит з математики.

Нова матура з математики поділяється на дві частини: обов'язкову і розширену для бажаючих. Обов'язковий рівень складався з 10 завдань, які треба розв'язати за 2 години. Розширений рівень охоплював 9 завдань і на його розв'язання давалося 2 год. 30 хв. Кожне завдання оцінювалось певною кількістю балів (пунктів). Випускник міг набрати щонайбільше 50 пунктів за обов'язкову частину екзаменаційної роботи і 50 пунктів за розширену частину. Випускники шкіл наперед знали, що вищі навчальні заклади оцінюватимуть результати екзамени по-різному. А саме, їм дозволяється застосовувати формулу

$$\langle\text{оцінка екзамену}\rangle = K_1 \cdot \langle\text{число пунктів за обов'язкову частину}\rangle + K_2 \cdot \langle\text{число пунктів за розширену частину}\rangle,$$

де $0 < K_1, K_2 \leq 1$, $K_1 + K_2 = 1$ коефіцієнти K_1 і K_2 для кожної із спеціальностей визначатиме ВНЗ. Для математичних та інформатичних відділень університетів з порівняно високим конкурсом прогнозується $K_1 = 0.3$, $K_2 = 0.7$. А тому матуристам, які планують вчитися далі (а таких переважна більшість) треба намагатися набрати якомога більшу кількість пунктів з розширеної частини екзамену. Адже всі випускники, які подадуть документи для вступу на спеціальність "математика", наприклад, Варшавського університету будуть внесені до списку в порядку, який відповідає їх оцінкам (в сенсі описаної вище формули) з математики. Потім з верхньої частини цього списку вибереться потрібна кількість вступників, проводиться умовна риска і всі ті, що залишилися під нею вважаються такими, що не пройшли за конкурсом. Велика кількість задач і велика кількість пунктів, які "розігруються", дають широкі можливості для диференціації екзаменаційних оцінок.

Нижче ми наводимо тексти основної і розширеної частини матурально-

го завдання екзамену, який відбувся 9 травня. Тексти основної частини було опубліковано в газеті "Gazeta wyborcza" 10 травня поточного року, а тексти розширеної частини знаходяться на інтернет сторінці цієї газети (`http://www.gazeta.pl`).

Основна частина

Завдання 1 (3 пункти). В коробці лежать три білі кулі і п'ять чорних куль. До коробки можна або докласти одну білу кулю, або ж вийняти з неї одну чорну кулю, а потім випадковим чином вибрати з неї одну кулю. В якому з цих випадків вибір білої кулі буде більш ймовірним? Виконай відповідні обчислення.

Завдання 2 (4 пункти). Дано ряд $\{a_n\}$, де

$$a_n = \frac{n+2}{3n+1} \quad \text{для } n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Визначити всі члени цього ряду більші від $\frac{1}{2}$.

Завдання 3 (4 пункти). Дано многочлен

$$W(x) = x^3 + kx^2 - 4.$$

a) Визначити коефіцієнт k цього многочлена знаючи, що він ділиться без остачі на двочлен $x + 2$.
b) Для знайденого значення k розклади многочлен $W(x)$ на множники і випиши всі його корені.

Завдання 4 (5 пункти). На трьох палицях поставлено 76 компактових дисків. Виявилось, що числа дисків на верхній, середній і нижній полицях утворюють зростаючу геометричну прогресію. На середній полиці стоїть 24 диски. Визначити, скільки дисків стоїть на верхній полиці, а скільки — на нижній.

Завдання 5 (4 пункти). Магазин закуповує оптом куртки по 100 злотих[1] за штуку, і продає в середньому 40 штук щомісяця по 160 злотих. Було помічено, що кожна чергова знижка ціни куртки на 1 злотий збільшує місячний продаж курток магазином на 1 штуку. Яку ціну куртки повинен виставити магазин, щоб його місячний прибуток був найбільшим?

Завдання 6 (6 пунктів). Дано множини дійсних чисел

$$A = \{x: |x + 2| < 3\},$$
$$B = \{x: (2x - 1)^3 \leq 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3\}.$$

Запиши у вигляді числових відрізків множини

$$A, \quad B, \quad A \cap B, \quad B \setminus A.$$

Увага. Символом $B \setminus A$ позначено різницю множини B і A, тобто

$$B \setminus A = \{x: x \in B, x \notin A\}.$$

[1]Злотий — основна грошова одиниця Польщі; 1 злотий приблизно дорівнює 1.5 гривні.

Завдання 7 (5 пунктів). В таблиці, яку подано нижче, представлено результати зондажу серед учнів однієї з шкіл про те, скільки часу вони витрачають на приготування домашніх завдань

Час (в годинах)	1	2	3	4
Кількість учнів	5	10	15	10

a) Нарисувати стовпчикову діаграму для ілюстрації результатів зондажу.
b) Облічити середню кількість годин, які учні витрачають на приготування домашнього завдання.
c) Облічити wariancje і стандартне відхилення часу, витраченого щоденно на приготування домашніх завдань.

Результат подати з точністю до 0.01.

Завдання 8 (6 пунктів). З шматка тканини у вигляді чотирикутника A, B, C, D (див. рис. 1) витнули круглу серветку радіусом 3 дм.

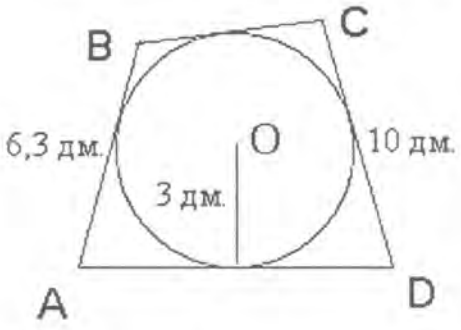


Рис. 1

Визначити, який процент від усієї тканини складає її невикористана частина. Результат подати з точністю до 0.01 процента.

Завдання 9 (6 пунктів). Два брати 8 і 10 років отримали разом спадок 84000 тисячі злотих. Гроші ті покладено до банку, який нараховує на вклад 5% щороку. Кожне з дітей отримає свою частину спадку по досягненню 21 року. Побажання спадкодавця було так поділити початковий вклад, щоб в майбутньому обидві частини спадку, заокруглені до 1 злотого, були однакові. Як потрібно поділити вклад 84000 злотих між братами? Запиши всі необхідні обчислення.

Завдання 10 (7 пунктів). В правильній чотирикутній піраміді висоти протилежних бічних граней, опущені з вершини піраміди, мають довжину h і утворюють кут $2a$. Визначити об'єм цієї піраміди.

Розширена частина

Завдання 11 (3 пункти). Знайти область визначення функції

$$f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$$

і запиши її у вигляді об'єднання числових відрізків.

Завдання 12 (4 пункти). Дано функцію

$$f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Нарисувати графік функції f.
b) Розв'язати рівняння

$$f(x) = 1$$

Завдання 13 (4 пунктів). Кидаємо n разів двома симетричними кубиками для гри, на гранях яких нарисовано від одного до 6 очок, причому без повторень. Визначити, для яких n ймовірність отримання щонайменше один раз того самого числа очок на обох кубиках буде менша від $\frac{671}{1296}$.

Завдання 14 (5 пунктів). Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{5+7+9+\ldots+2n+3}.$$

Завдання 15 (4 пункти). В довільному трикутнику ABC точки M і N є, відповідно, серединами сторін AC і BC (рис. 2).

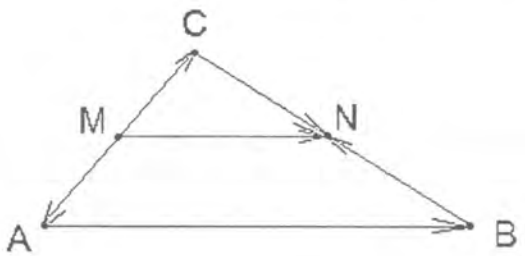


Рис. 2

Ознайомся уважно з подальшими міркуваннями.

Використовуючи властивості векторів і дій над векторами, записуємо рівності

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \tag{1}$$

та

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}. \tag{2}$$

Додаючи окремо праві і ліві частини рівностей (1) і (2), отримуємо рівності

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}.$$

Оскільки

$$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}, \qquad \overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN},$$

то

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN},$$

або

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0},$$

Звідси

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Використовуючи властивості множення вектора на число, останню рівність можна проінтерпретувати таким чином:

> Відрізок, що з'єднує середини двох сторін довільного трикутника є паралельним до третьої його сторони, а довжина цього відрізка дорівнює половині довжини третьої сторони.

Провівши аналогічні міркування, встановити зв'язок між вектором $\overrightarrow{MN}$ і векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$, знаючи, що чотирикутник $ABCD$ є довільною трапецією, а точки M і N є серединами бічних сторін трапеції $ABCD$ (рис. 3).

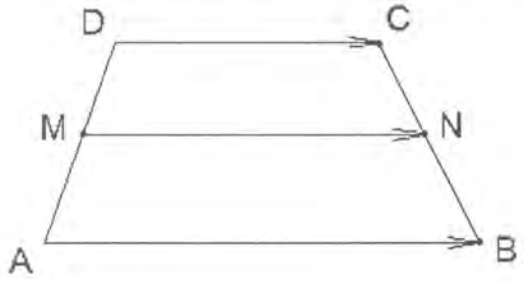


Рис. 3

Подати інтерпретацію так отриманого результату.

Завдання 16 (5 пунктів). Куб з ребром довжини a перетнуто площиною, яка проходить через бісектрису основи і нахилена до площини основи під кутом $\frac{\pi}{3}$. Нарисувати відповідний рисунок. Обчислити площу перерізу.

Завдання 17 (7 пунктів). Довести, без вживання калькулятора і таблиць, що

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

є числом цілим.

Завдання 18 (8 пунктів). Пари лічб (x, y), які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0; \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

є координатами вершинами опуклого чотирикутника $ABCD$.

а) Визначити координати точок A, B, C, D.

б) Довести, що чотирикутник $ABCD$ є рівнобічною трапецією.

в) Визначити рівняння кола, описаного навколо трапеції $ABCD$.

Завдання 19 (10 пунктів). Дано рівняння

$$x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0.$$

Дослідити, для яких значень параметра m відношення суми дійсних коренів рівняння до їх добутку набуває найбільшого значення. Визначити це значення.

Відбори команди Києва на Всеукраїнську олімпіаду юних математиків

В. Брайман, О. Кравченко, Д. Мітін,
Д. Номіровський, А. Примак, Б. Рубльов, П. Цицура

Вже традиційно, учні 8–11 класів, що отримали на Київській міській олімпіаді з математики дипломи першого та другого ступенів, були запрошені на відбірково-тренувальні збори по підготовці до Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Склад команди Києва планувалось визначити за підсумками чотирьох відбіркових турів, в кожному з яких було запропоновано чотири задачі та надано чотири години на їх розв'язання. Оскільки виявилось, що результати основних турів не дозволили повністю сформувати команду, то для претендентів на останні дві вакансії у складі команди Києва довелось провести додатковий тур. Вже традиційно, крім учнів на відбори запрошують чотири команди організаторів, кожна з яких підбирає свій комплект задач та проводить один з турів.

В цьому номері ми наводимо умови задач відбіркових турів. Біля задач, що є новими, в дужках зазначені прізвища їх авторів.

Умови задач відборів

Перший тур. 27/01/2005
(організатори В. Брайман, Д. Мітін)

8 клас

1. Знайти всі натуральні числа n, для яких числа n, $2n$, $5n$ та $8n$ є дев'ятизначними, причому запис кожного з них містить всі цифри від 1 до 9 по одному разу. *(В. Брайман)*

2. Нехай AD — висота, BE — медіана та CF — бісектриса гострокутного трикутника $\triangle ABC$. Позначимо M та N точки перетину CF з AD та DE. Знайти периметр трикутника $\triangle ABC$, якщо $FM = 2$, $MN = 1$ та $NC = 3$.

3. Довести, що існує нескінченно багато натуральних чисел n, для яких число $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ ділиться на $n + 1$. *(В. Брайман)*

4. Нескінченна на всі боки пустеля поділена на квадратні клітинки, в одній з яких знаходиться лев. Мисливець встановлює паркани, кожен з яких розділяє дві сусідні клітинки пустелі, а лев після встановлення кожного наступного паркану перебігає на одну з сусідніх клітинок. (Клітинки називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону; лев не може перестрибнути паркан). Для того, щоб вполювати лева, мисливець має повністю огородити деяку частину пустелі, в якій знаходиться лев. Чи може він це зробити, маючи дозвіл на встановлення 50 парканів? *(В. Брайман)*

9 клас

1. Див. задачу 8.3.

2. Нехай I — центр кола, вписаного в трикутник $\triangle ABC$, ω_1 — коло, яке проходить через точку B та дотикається до CI в точці I, а ω_2 — коло, яке проходить через точку C та дотикається до BI в точці I. Довести, що одна з точок перетину кіл ω_1 та ω_2 належить колу, описаному навколо трикутника $\triangle ABC$.

3. Див. задачу 8.4.

4. Для довільних $0 < a, b, c, d \leq 2$ довести нерівність

$$\frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \geq \frac{4}{3}.$$

(В. Брайман)

10 клас

1. Див. задачу 9.2.

2. Знайти всі натуральні числа n та k, при яких для всіх дійсних чисел x має місце рівність

$$\sin^n x + \cos^k x = \sin^k x + \cos^n x.$$

(В. Брайман)

3. Див. задачу 9.4.

4. Нескінченна на всі боки пустеля поділена на квадратні клітинки, в одній з яких знаходиться лев. Мисливець встановлює паркани, кожен з яких розділяє дві сусідні клітинки пустелі, а лев після встановлення кожного наступного паркану перебігає на одну з сусідніх клітинок. (Клітинки називаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону; лев не може перестрибнути паркан.) Для того, щоб вполювати лева, мисливець має повністю огородити деяку клітинку пустелі, в якій знаходиться лев. Чи може він це зробити, маючи дозвіл на встановлення 100 парканів? *(В. Брайман)*

11 клас

1. Див. задачу 10.2.

2. Нехай $ABCD$ — паралелограм, а E, F — точки перетину висот трикутників $\triangle ABC$ та $\triangle BCD$ відповідно. Довести, що $\angle CAF = \angle BDE$. *(В. Брайман)*

3. Див. задачу 10.4.

4. Для довільних $1 \leq a, b, c, d \leq 2$ довести нерівність

$$\frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \leq 2.$$

(В. Брайман)

Другий тур, 12/02/2005
(організатор А. Примак)

8 клас

1. Знайти всі натуральні числа n такі, що $3^n + 5^n$ ділиться на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.

2. Числа $0, 1, 2, \ldots, 2005$ поділили на 1003 пари

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_{1003}, b_{1003})$$

так, що при кожному $1 \le i \le 1003$ або $|a_i - b_i| = 2$, або $|a_i - b_i| = 7$. Якою може бути остання цифра суми $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{1003} - b_{1003}|$?

3. У трикутнику $\triangle ABC$ кут $\angle C = 60^\circ$ та $AC < BC$. На стороні BC відмітили точку D так, що $BD = AC$, а на продовженні AC за точку C відмітили точку E так, що $AC = CE$. Довести, що $AB = DE$.

4. Для яких $n \ge 2$ квадратну дошку $2n \times 2n$ без кутових клітинок можна розрізати на фігурки вигляду ? *(А. Примак)*

9 клас

1. Див. задачу 8.2.

2. Див. задачу 8.3.

3. Чи існує таке натуральне n, що $\frac{S(n^3)}{S(n^2)} > 2005^{2005}$, де $S(k)$ позначає суму цифр числа k? *(Д. Петровський)*

4. Див. задачу 8.4.

10 клас

1. Довести, що для довільних $x, y > 0$ таких, що $x + y = 2$, має місце нерівність

$$x^3y^3(x^3 + y^3) \le 2.$$

2. Див. задачу 9.3.

3. Два кола з центрами O_1, O_2 перетинаються в точках A, B. Через точки O_1, O_2, A проведено коло, яке вдруге перетинає задані кола в точках K, M. Довести, що AB — бісектриса кута $\angle KAM$ або кута, суміжного з кутом $\angle KAM$. *(Т. Тимошкевич)*

4. Див. задачу 8.4.

11 клас

1. Див. задачу 10.1.

2. Див. задачу 10.3.

3. Нехай функція f неперервна на всій дійсній осі та рівняння

$$f(x + f(x + \ldots f(x) \ldots)) = 2005x,$$

де f застосовано 2005 разів, має розв'язок. Довести, що рівняння $f(x) = x$ теж має розв'язок. *(В. Байденко)*

4. Див. задачу 8.4.

Третій тур, 15/02/2005
(організатори Д. Номіровський, О. Кравченко, П. Цицура

8 клас

1. Знайти всі натуральні числа c, для яких існують такі натуральні числа a та b, що $c = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

2. На медогляд прийшли хлопчики вагою 39кг та дівчата вагою 40кг. Усього прийшло не більше ніж 40 дітей. Напередодні дівчатка обіцяли принести на медогляд своїх хом'ячків (кожен хом'ячок важить 1кг). На медогляді з'ясувалось, що хлопчики важать у сумі стільки ж, скільки дівчатка разом з хом'ячками. Доведіть, що дівчатка принесли щонайменше 20 хом'ячків.

3. Нехай $ABCD$ — квадрат з центром O, точка E лежить на стороні CD, N — середина BC, а P — точка перетину BE з NO. Відомо, що $\triangle POE$ — рівнобедрений. В якому відношенні точка E ділить сторону квадрата CD? *(О. Клурман)*

4. Деякі пари міст країни сполучені або ґрунтовими, або асфальтовими дорогами так, що з будь-якого міста можна потрапити до будь-якого іншого. Відомо, що з кожного міста виходить хоча б одна ґрунтова дорога і хоча б одна асфальтова дорога. Чи обов'язково з будь-якого міста можна проїхати до будь-якого іншого так, щоб під час подорожі асфальтові та ґрунтові дороги чергувалися? *(Т. Тимошкевич)*

9 клас

1. Знайти усі трійки натуральних чисел (x, y, z), для яких $x! + y! = 15 \cdot 2^{z!}$.

2. Див. задачу 8.3.

3. Додатні числа a, b, c такі, що $abc \geq 1$. Довести, що виконується нерівність

$$a^3 + b^3 + c^3 + 1 \geq \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{2}.$$

(О. Клурман)

4. Див. задачу 8.4.

10 клас

1. Нехай I — інцентр $\triangle ABC$. Відомо, що $CA + AI = CB$. Довести, що $\angle CAB = 2\angle ABC$.

2. Дано натуральне число $n > 10$. Довести, що існує єдине натуральне число m таке, що при будь-якому розбитті m на два натуральних доданки сума цифр першого та сума цифр другого доданків разом складають n.

3. Див. задачу 9.3.

4. Деякі пари міст країни сполучені або ґрунтовими, або асфальтовими дорогами так, що з будь-якого міста можна потрапити до будь-якого іншого. Відомо, що з кожного міста виходить парна кількість доріг і серед них є хоча б одна ґрунтова дорога і хоча б одна асфальтова дорога. Чи обов'язково з будь-якого міста можна проїхати до будь-якого іншого так, щоб під час подорожі асфальтові та ґрунтові дороги чергувалися? *(Т. Тимошкевич)*

11 клас

1. Див. задачу 10.1.

2. Чи існує така нескінченна послідовність простих чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, що $|p_{n+1} - 2p_n| = 1$ при всіх натуральних n?

3. Довести, що при $a, b > 0$ та $n \in N$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \cdots + \frac{1}{a+nb} < \frac{n}{\sqrt{a(a+nb)}}.$$

4. Див. задачу 10.4.

Четвертий тур. 20/02/2005
(організатори Д. Мітін, В. Брайман)

8 клас

1. Кожне з натуральних чисел a, b, c, d є різницею квадратів деяких двох натуральних чисел. Довести, що $abcd$ теж є різницею квадратів деяких натуральних чисел.

2. Дано трикутник $\triangle ABC$, в якому $CA = CB$. Візьмемо точку P на тій з двох дуг AB описаного навколо цього трикутника кола, на якій не лежить вершина C. Нехай D — основа перпендикуляра, опущеного з C на PB. Довести, що $PA + PB = 2 \cdot PD$.

3. Про многочлен $P(x)$ з цілими коефіцієнтами відомо, що існують цілі числа $a \neq b$, для яких $P(a) = b$, $P(b) = a$. Для якої найбільшої кількості цілих чисел c може виконуватись рівність $P(c) = c$?

4. Двадцять тенісистів змагаються за таким регламентом: спочатку грають тенісисти T_1 та T_2, а тенісисти $T_3, T_4, \ldots, T_{19}, T_{20}$ стоять у черзі. Кожного разу, коли хтось програє, він стає у кінець черги, а переможець отримує одне очко та грає з наступним тенісистом. (У тенісі нічиїх не буває.) Гра закінчується, коли деякий тенісист набирає 8 очок. Після закінчення гри виявилось, що разом всі тенісисти набрали 136 очок. Хто з них став переможцем?

9 клас

1. Див. задачу 8.3.

2. Двадцять п'ять тенісистів змагаються за таким регламентом: спочатку грають тенісисти T_1 та T_2, а тенісисти $T_3, T_4, \ldots, T_{24}, T_{25}$ стоять у черзі. Кожного разу, коли хтось програє, він стає у кінець черги, а переможець отримує одне очко та грає з наступним тенісистом. (У тенісі нічиїх не буває.) Гра закінчується, коли деякий тенісист набирає 9 очок. Після закінчення гри виявилось, що разом всі тенісисти набрали 136 очок. Хто з них став переможцем?

3. Дано дійсні числа $x_1, \ldots, x_n \leq 1$, де $n \geq 3$. Довести, що з нерівності $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n - 2$ випливає нерівність

$$x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5 \geq \frac{(n-2)^5}{n^4}.$$

(Д. Мітін)

4. Хорди UV та RS кола з центром O перетинаються в точці N. Нехай AU, AV, BR та BS — дотичні до цього кола. Довести, що прямі ON та AB перпендикулярні.

10 клас

1. Див. задачу 9.3.

2. Див. задачу 9.4.

3. Тридцять тенісистів змагаються за таким регламентом: спочатку грають тенісисти T_1 та T_2, а тенісисти $T_3, T_4, \ldots, T_{29}, T_{30}$ стоять у черзі. Кожного разу, коли хтось програє, він стає у кінець черги, а переможець отримує одне очко та грає з наступним тенісистом. (У тенісі нічиїх не буває.) Гра закінчується, коли деякий тенісист набирає 10 очок. Після закінчення гри виявилось, що разом всі тенісисти набрали 136 очок. Хто з них став переможцем?

4. Про коефіцієнти многочлена $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ відомо, що

$$a > 0, \quad e > 0 \quad \text{та} \quad ad^2 + b^2e - 4ace < 0.$$

Довести, що цей многочлен не має дійсних коренів. *(Д. Мітін)*

11 клас

1. Тридцять п'ять тенісистів змагаються за таким регламентом: спочатку грають тенісисти T_1 та T_2, а тенісисти $T_3, T_4, \ldots, T_{34}, T_{35}$ стоять у черзі. Кожного разу, коли хтось програє, він стає у кінець черги, а переможець отримує одне очко та грає з наступним тенісистом. (У тенісі нічиїх не буває.) Гра закінчується, коли деякий тенісист набирає 11 очок. Після закінчення гри виявилось, що разом всі тенісисти набрали 136 очок. Хто з них став переможцем?

2. Див. задачу 10.4.

3. Нехай вписане в трикутник $\triangle ABC$ коло дотикається сторін BC, CA, AB в точках D, E, F відповідно. Візьмемо точку K всередині цього трикутника так, щоб вписане в трикутник $\triangle KBC$ коло також дотикалось BC в точці D. Нехай це коло дотикається CK та KB в точках L та M відповідно. Довести, що чотирикутник $EFML$ вписаний.

4. Дано дійсні числа $-\pi/2 < x_1, \ldots, x_n < \pi/2$, де $n \geq 3$. Довести, що з нерівності

$$x_1 + \cdots + x_n \geq \pi(n-2)/2$$

випливає нерівність

$$\operatorname{tg} x_1 + \operatorname{tg} x_2 + \cdots + \operatorname{tg} x_n \geq n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

(Д. Мітін)

П'ятий тур. 25/02/2005
(організатор Б. Рубльов)

На останні вакансії у складі команди Києва претендували лише учні 9 та 11 класів.

9 клас

1. Є 21 монета вагою 1995 мг, 1996 мг, ... , 2015 мг. За допомогою супертерезів для довільних трьох монет за одне зважування можна з'ясувати, яка з них є середньою за вагою. Довести, що за 100 зважувань можна знайти монету вагою 2005 мг.

2. Знайти всі трійки цілих невід'ємних чисел a, b, c, для яких $2^a \cdot 3^b - 7^c = 1$.

3. На колі відмітили точки A, B, C, D, E (вони розташовані на колі саме в такому порядку). Промені AE та CD перетинаються в точці L. На промені AC вибрали таку точку K, що BK — дотична до цього кола. Виявилось, що пряма KL паралельна прямій ED. Довести, що $KB = KL$.

4. Для додатних дійсних чисел a, b, c довести нерівність

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq (a+b+1)(b+c+1)(c+a+1).$$

11 клас

1. Є 21 монета вагою 1995 мг, 1996 мг, ... , 2015 мг. За допомогою супертерезів для довільних трьох монет за одне зважування можна з'ясувати, яка з них є середньою за вагою. Вагу скількох з цих монет можна визначити на супертерезах за 100 зважувань?

2. Знайти всі трійки цілих невід'ємних чисел a, b, c, для яких $4 \cdot 3^a - 5^b \cdot 7^c = 1$.

3. На колі відмітили точки A, B, C, D (вони розташовані на колі саме в такому порядку). Дотична до кола в точці A перетинає промінь CB в точці F, а дотична до кола в точці B перетинає промінь DA в точці E. Відомо, що $AD = AE$ та $BC = BF$. Довести, що $ABCD$ — паралелограм або трапеція

4. Нехай x, y, a, b, c, d — додатні дійсні числа, для яких виконується умова

$$a+b+c+d = 1.$$

Довести нерівність

$$\frac{a^3}{ax+by} + \frac{b^3}{bx+cy} + \frac{c^3}{cx+dy} + \frac{d^3}{dx+ay} \geq \frac{1}{4(x+y)}.$$

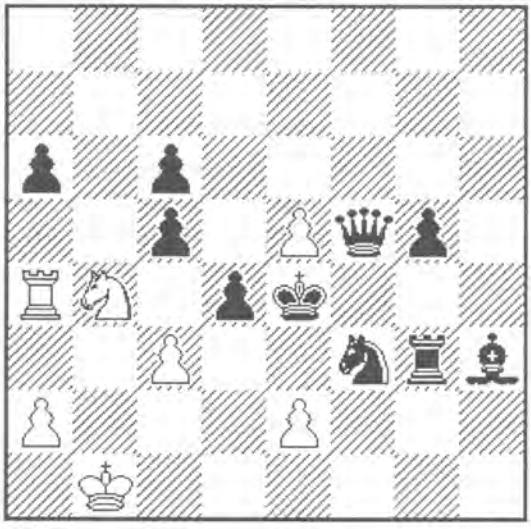
(В. Кондратенко)

Арифметичні парадокси шахової композиції

*А. Фролкін**

Шахова композиція помережана найрізноманітнішими дивовижами. Це і вражаючі жертви фігур, і запаморочливі довжелезні маневри для виграшу чи задля втрати одного-єдиного темпу, і навіть "казкові" фігури, дошки та правила. У цій царині можливі навіть порушення законів арифметики, на кшталт тих, що зустрічаються в квантовій механіці чи теорії відносності. Щоб показати, як виникають такі парадокси, звернемось до позиції на діаграмі 1.

1. С. Комаров, А. Фролкін
"diagrammes", 1990



Кооперативний мат за 2 ходи;
б) див. текст

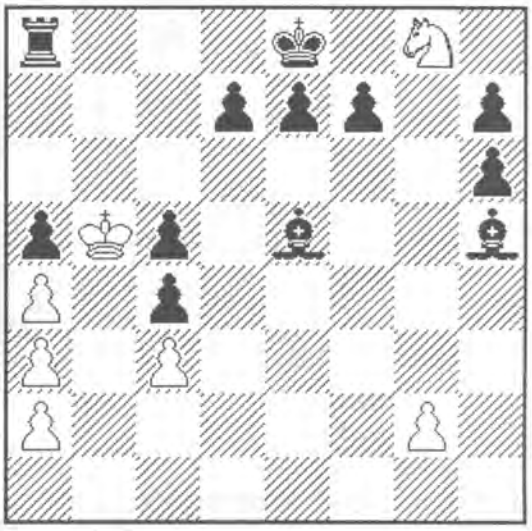
Як відомо, у задачах на кооперативний мат чорні починають і допомагають білим якнайшвидше заматувати чорного короля. У даному випадку мат досягається за 2 ходи: 1. Крf4+ e4 2. de+ (на проході) Kd3×. Тепер повернемо фігури на початкові позиції та повторимо перші ходи чорних і білих; позицію, що утворилася, розглядатимемо як незалежного "близнюка". За скільки ходів досягається кооперативний мат тепер? У розв'язанні 2 ходи, 1 ми вже зробили; здавалося б, залишився ще 1 хід. Так? Ні! Тепер для кооперативного мату потрібно 3 ходи! Тобто $2-1=3$. Як же так? Справа в тім, що в першому розв'язку ми ЗНАЛИ, що білий пішак щойно зробив хід

*Андрій Фролкін — майстер ФІДЕ з шахової композиції, Київ.

на два поля, а значить, чорні мали право взяти його на проході. У другій позиції, яку ми розглядаємо окремо від першої, ми НЕ маємо підстав стверджувати, що пішак ходив на дві клітинки, бо ж останній хід білих міг бути іншим. У таких випадках, згідно з правилами композиції, взяття на проході не дозволяється. Тож чорні й білі змушені йти до мети іншим, довшим шляхом: 1. Ф f6 cd 2. С e6 dc 3. Кр:e5 К d3×.

У наступному прикладі 4 – 1 = 2.

2. А. Фролкін, С. Комаров
"diagrammes", 1990

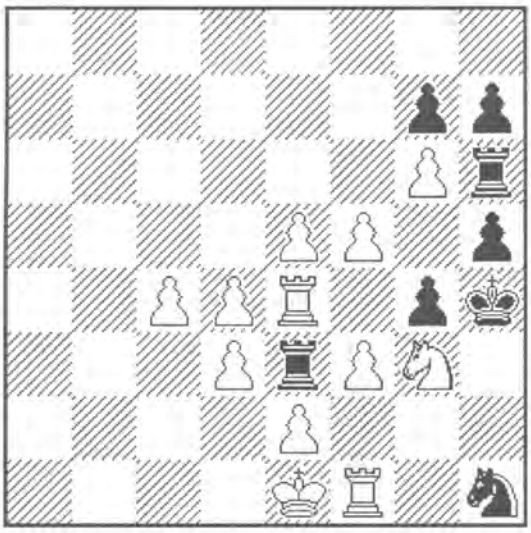


Кооперативний мат за 4 ходи;
після першого ходу чорних та
білих — кооперативний мат за 2 ходи;
б) див. текст

Ретроаналіз показує, що в позиції на діаграмі 2 чорні втратили право на рокіровку. Доведемо це. Білі пішаки били 4 рази: b2:a3, c2:b3:a4, d2:c3. Оскільки на дошці не вистачає саме чотирьох чорних фігур, ясно, що чорна Th8 або серед "загиблих", або перейшла на a8, але в останньому випадку право на рокіровку вочевидь втрачене. Задля "порятунку" права чорних на рокіровку вважатимемо, що ні Т a8, ні Кре8 не рухались. Тоді білий К g8 міг потрапити на своє нинішнє місце лише з поля h6; після цього чорні побили g7:h6, відкриваючи шлях як для С f8, так і для Т h8 (нагадуємо: Кр e8 нерухомий!). Але Т h8 вже не могла б вийти "на простір", бо К g8 "пришпилив" би її до поля h8. Отже, доводиться визнати, що кінь потрапив на g8 після g7:h6 і виходу тури; зробити це він міг лише з e6, чорний король мав відійти, пропускаючи коня, і право на рокіровку чорними втрачено. Розв'язання: 1. f6 Кр:c5 2. Кр f7 К:h6+ 3. Кр e6 К f5 4. С f7 К g7×. У близнюку б) на дошці на одну чорну фігуру менше, і Th8 могла загинути на своєму початковому полі, тож чорні мають право на рокіровку, і 1. 0-0-0 Кр b6 2. С b8 К:e7×.

Задача на діаграмі 3 ще парадоксальніша: вона доводить, що на шаховій дошці можливе навіть життя після смерті!

3. А. Фролкін
"diagrammes", 1990

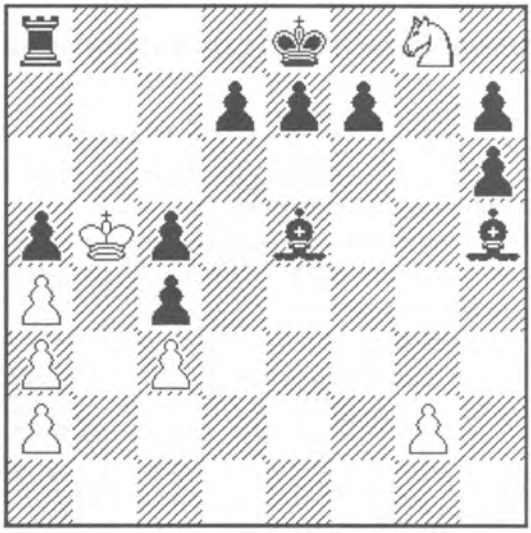


Кооперативний мат за 2 ходи, хід білих;
б) див. текст

Кооперативний мат досягається елементарно; для цього сторонам потрібно півтора повних ходи: 1. ... Т:h1+ 2. Крg5 f4×. Тепер поглянемо на фінальну позицію у відриві від щойно зіграних ходів — як на близнюка б). Чи можемо ми стверджувати, що чорним мат? Ні, бо не можемо довести, що останній хід — неодмінно f3–f4 ×, а не f2–f4+. У другому випадку чорні б'ють на проході, і мату немає. Проте в позиці б) взяття на проході згідно з правилами композиції взагалі-то не дозволяється (див. коментар до задачі 1). Тож як нам "реанімувати" чорних? На допомогу знову приходить ретроаналіз. Неважко підрахувати, що і білі, і чорні пішаки побили всі відсутні на дошці фігури протилежного кольору. Якщо останній хід f3–f4×, то єдино можливий хід чорних — королем з h4 на h5 (поміркуйте, чому не з f6?), а перед тим білі дали шах турою, і право на рокіровку втрачено. Якщо ж останній хід f2–f4+, то перед тим чорні могли ходити турою — з f3 на e3, і неможливо довести, що білі втратили право на рокіровку; тут, згідно з правилами, починає діяти "презумпція невинності", тож білі МОЖУТЬ рокірувати, а проведення рокіровки "заднім числом" уможливить (легалізує) взяття на проході. Тож у позиції б) чорні "оживають" і наносять "удар у відповідь": завдання — кооперативний мат БІЛИМ за 2.5 ходи – реалізується так: 1. gf (на проході) 0-0! 2. Т:e2 Кh1 3. Тg2×.

Спробуйте самостійно розв'язати позицію на діаграмі 4 і довести, що різниця $5 - 1$ може дорівнювати 5.

4. А. Василенко, А. Фролкін
"diagrammes", 1990



7+8 Мат за 5 ходів;
б) після першого ходу чорних та
білих — знову мат за 5 ходів

Відповідь: 1. Тe8+! Крːe8 2. Тb4 Тh4 3. gh b1Ф Тːb1 ! 5. Тb8×; b) 1. Тb4! 0-0! 2. Кe7+ Крh8 3. Тːb2 Тf4+ 4. gf ! 5. Тh1×.

Академіку Ю. М. Березанському — 80

8 травня 2005 року виповнилось 80 років видатному українському математику, доктору фізико-математичних наук, професору, академіку НАН України Юрію Макаровичу Березанському.



Юрій Макарович народився в Києві. Середню школу закінчив за 8 років і вступив на механіко-математичний факультет Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Закінчив його екстерном за 4 роки.

Все наступне життя Юрія Макаровича пов'язане з Інститутом математики Академії наук України: навчання в аспірантурі, захист кандидатської (1951 р.) та докторської (1955 р.) дисертацій, обрання членом-кореспондентом (1964 р.) та академіком (1988 р.) АН України. Понад 40 років Ю. М. Березанський завідував відділом функціонального аналізу Інституту математики НАН України. Він є лауреатом Державної премії України в галузі науки та техніки (1998 р.), премій НАН України імені М. М. Крилова (1980 р.) і М. М. Боголюбова (1997 р.).

Наукова діяльність Юрія Макаровича завжди успішно поєднувалась з педагогічною. Багато років він працював на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, читав нормативні та спеціальні курси, керував дипломними роботами та підготовкою аспірантів. Завжди був улюбленим викладачем. Серед його вихованців 10 докторів та 33 кандидати наук.

Отримані Юрієм Макаровичем фундаментальні результати в області функціонального аналізу, теорії операторів, теорії диференціальних рівнянь та їх застосувань широко відомі в математичному світі і є гордістю вітчизняної математики. Він автор 6 монографій та більш ніж 200 наукових статей.

Редакційна колегія журналу "У світі математики" зичить Вам, дорогий Юрію Макаровичу, міцного здоров'я, творчого натхнення і нових прекрасних результатів у математиці. Бажаємо Вам оптимізму, позитивних емоцій на роботі, в сім'ї та від спілкування з учнями, друзями і послідовниками.

Її життя — Україна і математика

*В. В. Булдигін**

Ніна Опанасівна Вірченко — з тих людей, які підносять репутацію України як наукової держави, стверджують образ українки як сучасної, освіченої, інтелектуально розвиненої, політично свідомої жінки. *Із кн. "Українки в історії", Київ, "Либідь", 2004.*

Вступ

2005 рік видався врожайним на ювілейні дати видатних українських математиків. Серед цих дат мені хочеться виділити 5 травня 2005 року. В цей день виповнилось 75 років Ніні Опанасівні Вірченко, про яскраву долю якої треба знати всім, і особливо молодим людям, які пов'язують своє життя з математикою, наукою, Україною.



Як кожен студент механіко-математичного факультету Київського державного університету імені Тараса Шевченка другої половини 60-х років минулого сторіччя (швидко плине час!) я зустрічав на факультеті доцента кафедри математичної фізики Ніну Опанасівну Вірченко, чув про її важку

*В. В. Булдигін — доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, Національний технічний університет України "КПІ".

та героїчну долю, велику любов і здібності до математики. Безпосередньо з Ніною Опанасівною я познайомився в 1969 році, як з керівником наукової роботи студентів факультету. Було дуже приємно одержати з рук Ніни Опанасівни диплом Республіканського конкурсу студентських наукових робіт з математики, почути її привітання. Худорлява, симпатична, скромна жінка з доброзичливим гострим поглядом і жвавою мовою, та водночас, з якоюсь внутрішньою силою та впевненістю, викликала повагу.

Тоді я не знав, що з восени 1986 року ми з Ніною Опанасівною будемо працювати разом в Київському політехнічному інституті на кафедрі вищої математики, яка згодом перетвориться на кафедру математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету КПІ. Мені пощастило ближче познайомитись з Ніною Опанасівною, бачити її сходження до вершин наукової, педагогічної та громадської діяльності, чути її цікаві розповіді про минуле та сучасне. Дещо з цих розповідей, записів та спогадів її друзів, з деякими моїми доповненнями, складає подальші нотатки, які з глибокою шаною присвячуються Ніні Опанасівні з побажанням довгих років творчого активного життя. Ці нотатки для молоді, яка шукає "з кого своє життя робити".

Трохи енциклопедичних відомостей. Творчий доробок

Н. О. Вірченко — відомий український математик, доктор фізико-математичних наук, професор, віце-президент АН Вищої школи України, член НТШ, Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Едінбургзького, Лондонського математичних товариств, Соросівський Професор (1997), лауреат першої премії Національного технічного університету України "КПІ" (1998), Заслужений викладач НТУУ "КПІ" (1999), Голова Науково-методичної ради Всеукраїнського Товариства політв'язнів та репресованих, має нагороду Ярослава Мудрого від АН ВШ України (1999, 2005), медаль "Будівничий України" (2001), Почесний професор НТУУ "КПІ" (2005).

Коло наукових інтересів та досліджень Н. О. Вірченко — теорія узагальнених аналітичних функцій, теорія змішаних крайових задач, сингулярні диференціальні рівняння з частинними похідними, інтегральні рівняння, спеціальні функції, інтегральні перетворення, історія та методика математики тощо.

Н. О. Вірченко — автор та співавтор понад 325 наукових та науково-методичних праць, серед яких вісімнадцять наукових монографій та книг: "Смешанные краевые задачи математической физики" (1985), "Парні (потрійні) інтегральні рівняння" (1989), "Математика в афоризмах, цитатах, висловлюваннях" (1974, російською (1984) та японською мовами (1989, 1995)), "Дробові інтегральні перетворення гіпергеометричного типу" (1995), "Графіки елементарних та спеціальних функцій" (1996), "Основні методи розв'язання задач математичної фізики" (1997, 2005), "Узагальнені функції Лежандра та їх застосування" (1998), "Generalized associated Legendre functions and their applications" (2001), "Graphs of elementary and special functions" (USA, 2001, 770 p.), "Вибрані питання методики вищої математики"

(2003) та інші.

Н. О. Вірченко — керівник наукових семінарів "Крайові задачі. Спеціальні функції", "Диференціальні рівняння та їх застосування", науково-методичного семінару кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, член Вченої Ради по захистах кандидатських та докторських дисертацій при Інституті математики НАН України, постійний експерт та опонент. Вона — науковий керівник курсових та дипломних робіт, науковий керівник аспірантів та здобувачів. Під її керівництвом захищено вісім кандидатських дисертацій. Вона — учасник та організатор численних наукових семінарів, Міжнародних наукових конференцій, з'їздів, конгресів.

Все це безперечно засвідчує високий авторитет Ніни Опанасівни у математичному світі, вагомість здійснених нею наукових досліджень та одержаних результатів.

А починалося життя Ніни Вірченко дуже просто: з любові до України, яку вона увібрала з молоком матері, духом батьківським вирощена та загартована, рідною природою виплекана

Ще в шкільні роки Ніна вже вирішила присвятити Україні своє життя, служити науці, рідному народу.

Зокрема, в своєму випускному творі на атестат зрілості вона писала, цитуючи відомі слова: "Я — дочка свого народу, Всю красу свою, всю вроду, Лиш йому, йому віддам, За кохану Україну, Як потрібно, то й загину."

Навіть псевдонім мала — УЖМА, за який її пізніше мучили на слідстві в КДБ. А розшифровується він так: Україна — Жінка – Математика — Астрономія або Українська жінка-математик!

Ніна веде щоденник, в якому потайки описує оточуюче життя, намагається аналізувати його. А епіграфом до щоденника вибрала слова Шевченка "Караюсь, мучусь, але не каюсь". Без Шевченка, без України — жодного дня! — так живе. Поезії Шевченка пронизують кожну її клітинку.

Любов до математики у Ніни з раннього дитинства. Її мама розповідала, як Ніні ще не було й року, не ходила ще: " ... Якось залишили її саму. А вона дотягнулася до підвіконня, на якому були помідори висаджені. От ті помідори від її рук рівненькими рядочками лягли! Гармонію, симетрію Ніна відчувала і змалку, і пізніше: приміром, жили в Білій Церкві, то в сусідки була гарна грядочка з айстрами, то незабаром і їх Ніна упорядкувала у рядочки! ... " До школи пішла в шість років, вчилася на відмінно, а за поведінку мала двійку. Коли переїхали в нове місце жити, вчителька каже: "Що це таке — все п'ять, а поведінка — два". Батьки з ранку йшли на завод, а вона — до школи. Посадили її на першій парті, бо ж поведінка "2", а їй скучно сидіти, вміла читати, писати, то все ходила по класу ...

Восени 1945 року родина переїхала до Житомира, і Ніна на два місяці запізнилася до школи (випускний клас). З самого ранку йшла до бібліотеки, сиділа там до обіду — а потім без обіду та пішки через увесь Житомир до школи (єдина українська десятирічка була далеко, а на трамвай грошей у неї не було). Там, в школі № 36, є список медалістів за всі роки, і її прізвище —

перше.

Від осені 1946 року Ніна Вірченко — студентка механіко-математичного факультету Київського університету. Хотіла до Московського університету, вступила до нього, але вчитися не вийшло (раджу прочитати про це дуже цікавий нарис самої Ніни Опанасівни "Як академік А. М. Колмогоров прийняв мене на мехмат Московського університету" в журналі "У світі математики", т. 10, № 1, 2004).

Київ розпочався для Ніни з підвальної кімнати гуртожитку. Дев'ятнадцять дівчат тулились в кімнатці. Та це — не біда для юної Ніни: головне, аби було, де голову на ніч прихилити. У Києві не тільки університет, а й концерти, публічні лекції, численні музеї, бібліотеки! Ніна добре вчилася, була сміливою і дуже незалежною, мріяла про міжпланетні польоти. Ці мрії привели її до студентського гуртка ракетної техніки та аеродинаміки, де молоді ентузіасти висували всілякі гіпотези підкорення космосу. Двадцять дев'ять хлопців і одна дівчина (Ніна) вивчали будову літаків, розробляли власні проекти вдосконалення польотів, стрибали з парашутом. Ніна мала десять таких стрибків. Своєю сміливістю та відчайдушністю вражала навіть хлопців, старших за неї на 5–10 років (багато хто з них щойно повернувся з війни!). На запитання, хто буде стрибати першим, поспішала викрикнути: "Я"!

Вчилась на мехматі захлинаючись. Отака худенька 16-річна дівчинка, з косичками, заворожено слухала лекції з аналітичної геометрії 87-річного професора Б. Я. Букреєва, який понад 60 років викладав у Київському університеті, з математичного аналізу — С. Г. Крейна. С. Г. Крейн був блискучим лектором, романтиком математики, який умів підбирати і слова, і незвичайні вразливі жести, прагнув збудити цікавість студентів до загальних математичних ідей, зачаровував невблаганною логікою міркувань, своєрідністю висловлення думки. Його лекції були музикою для Ніни, його лекції вона сприймала як інтелектуальні свята. До речі, коли у червні 1948 року Ніна була арештована і сиділа в тюрмі на вул. Володимирській, 33, то саме С. Г. Крейн прийшов туди до начальства врятувати Ніну, розповідав їм, що вона — суцільна математика, що її таку юну і талановиту не можна тримати в неволі ... Та ба!..

"Із тих перших студентських літ, — згадує Ніна, — найбільше пам'ятаю: радість невимовну, неймовірну насолоду від занять математикою і нестерпне почуття голоду! Це ж був голодний в Україні 1947-ий рік! На лекціях формули змішувалися перед очима зі шматочками хліба ... "

Шляхом мужності ...

Влітку 1948 року сталося жахливе, те, що не можна було зрозуміти ні тоді, ні потім, ні сьогодні.

За доносом Ніну було заарештовано. Її звинуватили у політичній змові, заколоті, який таємно готувався. Молода дівчина опинилася віч-на-віч із досвідченими катами, але не зрадила ні себе, ні своїх друзів. Це була і її перемога над тоталітарною системою! Далі все йшло згідно з відпрацьованим сценарієм: слідство на тій самій Володимирській вулиці, де стоїть черво-

ний корпус Київського університету — її alma mater, потім — Лук'янівська тюрма, а 8 січня 1949 Ніну засуджено на 10 років спецтаборів за участь в "українсько-націоналістичній банді".

І почалися етапи ... Дорога до Східного Сибіру, у сорокаградусний мороз йшли якось колоною через Уфу. По-різному сприймало місцеве населення каторжан: хто вітав, хто хрестився, а хто і кулаком погрожував ... Були і приємні спогади: з чоловічої зони в пересильній в'язниці Ніні передали записку, а в ній — присвячений їй вірш:

О, не забуду я, що в ці години
Зі мною разом йшла
Моєї скореної Батьківщини
Нескорена дочка!

Нарешті — тайшетські спецтабори (лісоповал, каменеломні, лікарня ...). Ні радіо, ні газет, ні паперу — все суворо заборонялося. Листи — тільки двічі на рік. Суворий режим, знущання конвоїрів та наглядачів, тяжка робота та хвороби, 40-градусні морози та втрати друзів, а Ніна і там жила за своїм принципом — що ти зробив щодня для України?

Та чорний одяг з номерами (у неї Р-840) не годен був затьмарити сонцесяйні очі юнок по неволі. Вони, хоча і коротко й крадькома, але й співали, і вишивали, і віршували ... А Ніну там ще рятувала і математика, усні уроки якої вона проводила для товаришок. Це фактично була її перша педагогічна практика, але без олівця й паперу. Нічого цього в таборі не дозволялося!

Єдине, чим в'язні могли писати (і то, щоб не бачили наглядачі) – це паличкою по снігу взимку, а влітку — камінчиком гострим по землі чи якійсь дощині. Каторжанка Уля Кравченко (теж студентка-математик) писала про Нінині "ранньо-вчительські" дні:

В твоїх очах — безкрай надій,
А в серці — висота,
Рядочки формул на снігу,
А навкруги — тайга!
Знесилена: пила і ліс,
І я у снах тяжких з тобою,
А ти — рядками формул,
Нам німих, все борешся з добою!

Серед табірних подруг Ніни була японочка Тізуко Накаяма — теж студентка-математик. Тільки Ніні пощастило залишити Східний Сибір живою, а Тізуко не перенесла морозів і навік залишилася у сибірській тайзі ...

Повернення та перемога

Згодом у 1954 році (після смерті Сталіна) Ніну амністували — як "малолітку" (після шести років ув'язнення). Повернувшись в Україну, Ніна вперто працювала і продовжувала навчання, та пильне око держбезпеки стежить за нею аж до самого 1990 року. З часом вона повертається до свого університету і закінчує його. Завдяки доценту Н. О. Пахарєвій, професорам Г. М. Положію та І. І. Ляшку, академіку І. Т. Швецю, які постійно

підтримували її — попадає до аспірантури. Після дострокового завершення аспірантури, стає асистентом, через рік — старшим викладачем, а з 1965 року — доцентом в університеті.

Та після "хрущовської відлиги" знову почалися "труднощі", і в 1974 році Ніну Опанасівну звільняють з роботи в університеті. Вона переходить до Київського політехнічного інституту.

Через політичні мотиви захистити докторську дисертацію Ніна Опанасівна змогла тільки в 1988 році. Тема докторської — "Нові типи парних (потрійних) інтегральних рівнянь зі спеціальними функціями". Захист пройшов блискуче в Інституті математики. Присвятила цю дисертацію своїм батькам, які так і не дочекались її наукового успіху.

А далі — незалежна Україна! І тепер професор Ніна Опанасівна Вірченко з повною силою і притаманною мабуть тільки їй енергією поринає у світ математики, працює в нових її напрямках, багато сил і часу приділяє своїм учням, пише нові монографії та підручники, розробляє нові математичні курси, бере участь в наукових конференціях, мітингах, різних громадських заходах. Як високо обдарований педагог з більше ніж 45-річним педагогічним стажем, вона має великий організаторський талант, була керівником наукових студентських товариств у КДУ і пізніше — у КПІ. А скільки наукових консультацій та науково–популярних лекцій провела Ніна Опанасівна для студентів та викладачів різних вузів і наукових установ, інженерів та науково-технічних працівників різних заводів та фабрик!

Наукові та науково-методичні праці, різні літературні та публіцистичні нариси Ніни Опанасівни, її розмаїта педагогічна й громадська діяльність становлять безперечно значний внесок у розвиток всієї математичної науки в Україні, сприяють ефективному зв'язку науки й техніки з вищою освітою, допомагають вихованню творчої молоді. І зовсім природно та дуже приємно, що її обирають членом багатьох міжнародних математичних товариств, віцепрезидентом Академії наук вищої школи України та почесним професором НТУУ "КПІ".

Михайло Кравчук та Ніна Вірченко

Людські долі пишуться на небесах, а здійснюються на землі і здійснюють їх люди, хто як вміє, і тільки деякі — як це повинно бути. І мабуть дуже символічно, що духовний та математичний прапор видатного українського математика Михайла Пилиповича Кравчука прийняла і високо піднесла видатна українська жінка–математик Ніна Опанасівна Вірченко.

Ще в 1965 році, працюючи в Київському університеті над питаннями математичної фізики, Ніна Опанасівна не раз натрапляла в науковій літературі на згадки про Михайла Кравчука. І коли стала шукати його праці, то виявила, що вони були практично вилучені з бібліотечних фондів. Швидко зрозуміла, що академік Михайло Кравчук — непересічний, великий Математик, а далі дізналася, що він загинув на Колимі. Це ще дужче Ніну привернуло до Михайла Кравчука, як до науковця, так й особистості трагічної долі.

Згодом захоплення Михайлом Кравчуком перейшли у дослідження його наукової спадщини. Михайло Кравчук (1892–1942) — зірка української ма-

тематики XX сторіччя, дійсний член ВУАН, учений світової слави, праці його є фундаментальним надбанням вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей і математичної статистики, історії та методики математики. Велику роль він відіграв як математик–педагог, як організатор вищої і середньої освіти, як співтворець української математичної термінології, як популяризатор наукових знань.

За його ідеями і відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх. Аналізуючи потенціальні можливості вітчизняної науки, він писав у 30-ті роки: " ... ми маємо право і підстави сподіватися в ближчому майбутньому таких наукових математичних кадрів, що зроблять нашу математичну школу осередком світового значення". Уже давно існують на сторінках наукових досліджень і *многочлени Кравчука*, і *моменти Кравчука*, і *формули Кравчука*, і *осцилятори Кравчука*, а згодом виявилося, що Михайло Кравчук стояв і біля витоків винаходу першого у світі електронного комп'ютера!

Михайло Кравчук викладав загальний курс вищої математики та різні її спеціальні розділи і у Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він був завідувачем кафедри вищої математики в політехнічному інституті та завідувачем відділу в Інституті математики. Він відкрив талант і дав путівку в світ видатних досягнень і творцю космічних ракет Сергію Корольову, і творцю авіаційних двигунів Архипу Люльці (як тут не згадати захоплення молодої Ніни авіацією та космосом!).

У 1938 році Михайла Кравчука за доносом арештовують та засуджують на 20 років на Колиму за підготовку "націоналістичного заколоту". (Через десять років така сама доля чекає Ніну Вірченко.) Він загинув у колимському спецтаборі у 1942 році. Місце його могили невідоме. І через шість років після цього "зоряний колимський" шлях Михайла Кравчука "перетинається" з "земним тайшетським" шляхом Ніни Вірченко.

Загалом понад сорок років Ніна Вірченко "займається Михайлом Кравчуком". "Мій громадський та науковий обов'язок — досліджувати, вивчати, пропагувати наукові ідеї вченого, продовжувати та розвивати всі напрямки його наукової громадської діяльності, скрізь і завжди бути гідним його імені" — каже Ніна Вірченко.

Ніна Вірченко — організатор десяти Міжнародних наукових конференцій імені академіка Михайла Кравчука (1992–2004). Багато зусиль приклала вона для відкриття аудиторії імені Михайла Кравчука в КПІ (2002), відкриття на території КПІ пам'ятника Михайлу Кравчуку (2003), створення фільму "Голгофа академіка Кравчука" (2004), упорядкування та видання трьох книг Михайла Кравчука: "Науково-популярні праці" (2000), "Вибрані математичні праці" (2002, 800 стор.), "Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука" (2004, 850 стор.).

Вся математична громадськість України схиляє голову перед Ніною Вірченко і щиро дякує їй — "духовній дочці Михайла Кравчука" за все, що зроблене нею.

Післямова

Ніна Опанасівна Вірченко — дивовижна, неповторна, світла Жінка, Вчений, Педагог з Божої ласки, особлива Людина!

Вона володіє рідкісним даром переливати свою силу, енергію та знання у слухачів. Всіх, хто має щастя спілкуватися з нею, вражає її людяність і вміння прийти на допомогу, унікальна щирість і сердечність, працьовитість і невтомність, незгасаюча енергійність і виняткова безкомпромісність.

Про Ніну Вірченко багато було і ще буде написано. Нарис про неї включено в книгу "Українки в історії" (Київ, "Либідь", 2004, с. 279), присвячену видатним українкам.

Про Ніну Опанасівну та її незвичайну долю я часто розмовляв зі своїм вчителем Михайлом Йосиповичем Ядренком, якого, на превеликий жаль, вже нема з нами. Михайло Йосипович дуже поважав Ніну Опанасівну і, як головний редактор журналу "У світі математики", пропонував мені написати нарис для учнівської молоді про Ніну Опанасівну. Я обіцяв і, користуючись ювілейної датою Ніни Опанасівни Вірченко, з великим задоволенням виконую цю обіцянку і сподіваюсь, що написане буде цікавим та корисним читачам.

Про красу математики

*Н. Вірченко**

Частина 1.
Роль математики в морально-естетичному вихованні

Краса тішить розум, серце, душу людини. Цю незвичайну красу, красу розуму, красу Науки не раз оспівували поети, філософи, митці ... Ще в стародавній Греції вважали, що краса розуму — це найвеличніше! Платон зворушливо описує те, як відбувається сходження до вершин краси. Роздуми про красу наукового пошуку, про велич людського духу ніколи не переставали хвилювати мислячих людей. Як самостійної дисципліни — науки естетики — не існує. Може тому, що великі вчені, яким у першу чергу "дано" побачити справжню красу науки, лише зупиняються на мить, заворожені її красою і простують далі ... Цікаве порівняння можна зробити з альпіністами. Альпіністи, добираючись до вершини, теж тільки на мить зупиняються, здивовані та захоплені красою і величчю гір.

Шотландський філософ Ф. Гатчесон (1694—1747) у роботі "Про красу теорем" виділяє три ознаки краси науки:

- краса — це єдність у розмаїтті,
- краса — це узагальнений характер наукових істин,
- наукова краса — це знаходження неочевидної істини.

Так, краса науки полягає у відкритті нових істин, у виявленні стрункості та ладу там, де ще недавно панував хаос. Тільки неперервний рух вперед, угору — до нових вершин істини — така формула прекрасного в науці. Зауважмо, що всі три згадані вище естетичні принципи справедливі для будь-якої науки, але Гатчесон вивів їх саме для математики. Це трапилось, можливо, і тому, що математика в усі часи була і є "першою красунею" серед наук, отже, і естетичні принципи науки як такої найяскравіше виявляються в математиці. Саме математика вносить красу в будь-яку науку, в цьому полягає, зокрема, її естетична цінність.

Великі вчені, творці й відкривачі — це люди цілковитої відданості науці. Як наука неможлива без творчості, так творчість неможлива без краси. Математичної творчості це стосується насамперед: "всюди, де число, там і краса", — казали ще давні греки. На перший погляд математика виглядає схожою на непролазні хащі формул, математична символіка створює ілюзорне уявлення про неї, як нібито суху, беземоційну галузь людського пізнання. Насправді ж математична творчість, як і, скажімо, мистецька, — пройнята

*Ніна Опанасівна Вірченко — доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України.

буянням уяви й фантазії. "Спершу вгадати, а тоді довести" — ось принцип, за яким було зроблено більшість математичних відкриттів. Фантазія у математиці — дійове знаряддя творчості, воно не менш цінне, ніж міркування. Аналогія і зіставлення, здавалося б, безмежно віддалених одне від одного явищ, інтуїтивне проникнення в природу процесів та станів, стрибки уяви в невідоме і спалахи осяяння при відкриттях — усе це однаково притаманне як мистецтву, так і математиці. Мистецькі ідеали пропорційності та гармонійності — це водночас і математичні ідеали. Не слід, проте, забувати й про істотну відмінність математики та мистецтва. Інтуїція, уява, фантазія у математиці — це немов би десант на ще тільки розвідувану територію; остаточно ж вона завойовується для науки, а згодом і для практики, шляхом логічних операцій і доведень. "Уміння формулювати істинні твердження раніше, ніж знайдено їх доведення, — винятковий привілей найвидатніших представників нашого цеху, — писав Г. Штейнгауз. — Але і вони не зловживають цим правом, а ставлять свої здогади під контроль суворого доведення, перш ніж оприлюднити їх як математичні істини". Отже, без допомоги міркування математичне відкриття не може набрати чинності закону.

У жодній з галузей науки не знайдено такої чарівної, такої багатої на приховані скарби, такої щедрої на дивовижні несподіванки, як чиста математика. Саме математиці притаманна і найбільша краса, "та холодна сувора краса, яка є в скульптурі, краса, яка не промовляє ні до чого в нашій тендітній натурі і не має блискучого зовнішнього оформлення живопису чи музики; а проте ця краса такої піднесеної чистоти й витонченої досконалості, на яку спроможне лише найвеличніше мистецтво", — захоплено писав англійський математик і філософ Б. Рассел (1872–1970).

Безсумнівно можна стверджувати, що справжній математик завжди є і художником, і архітектором, і поетом. За допомогою свого інтелекту математики створили свій світ, світ уявний, який вони розвивають в усіх найможливіших напрямках, в який вірять, в якому знаходять силу для буття, який допомагає їм чітко, ясно, глибоко і всебічно розуміти гармонію природи.

"Не треба думати, — писав Е. Белл у книзі "Творці математики" (1979), — що функція математики — "служниці наук" — полягає лише в тому, щоб служити природознавству. Та математику ще називають і "царицею наук"! Якщо цариця іноді ніби і послуговується чимось таким, що здобули інші науки, то вона робить це з гордістю, не просить і не приймає ніяких пільг від якої-небудь впливовішої з її сестер-наук. Вона платить за те, що одержує. У математиці містяться власний світ, і мудрість, і людський розум, який вловлює, що математика означає для самої себе ... Це не стара доктрина мистецтва заради мистецтва. Це мистецтво заради людини".

Особливо слід підкреслити значення виховання математичної культури у тих, хто вивчає математику. Як відомо, математична культура — дуже важлива частина загальнолюдської культури. Широка застосовність математики в техніці, природознавстві та в інших науках — робить володіння математичними знаннями основною ознакою високої кваліфікації в більшості галузей знань.

Загальноосвітнє значення математики полягає:

- у вивченні математичних структур,
- в опануванні математичної мови,
- у набутті навичок математичного моделювання,
- в оволодінні основними методами розв'язання математичних задач.

Вивчення математичних структур і математичної мови полягає у виділенні основних абстракцій, у розмежуванні первісних та визначувальних понять, у засвоєнні основних концепцій і методів доведення, у вивченні математичної символіки — мови математики, за допомогою якої описуються явища дійсності. Викладаючи математику, потрібно надавати особливу увагу глибокому засвоєнню студентами основних математичних понять і методів.

Бо математика — *вагома* для розвитку не лише точних наук, а й *практично* для усього, що є в науковому арсеналі людства.

"Ніякої вірогідності немає у тих науках, в яких не можна застосувати котроїсь із математичних наук, і в тому, що не має зв'язку з математикою", — вважав ще великий геній Леонардо да Вінчі.

Те, що математика відіграє величезну роль у розвитку інших галузей пізнання — нині незаперечний факт. Визначні науково-технічні досягнення останнього сторіччя були зроблені завдяки використанню математичних методів: це атомна енергетика, космічні польоти, створення квантових генераторів, пересадка серця, відкриття `homo habilis` та ін. Роль математики у науково-технічній революції виявилась, здебільшого у створенні швидкодійних електронно-обчислювальних машин. Про такі машини ще кілька десятиліть тому можна було тільки мріяти. За допомогою математики людина відірвалась від землі і стала освоювати космос, опустилася на дно океану та в надра землі. Без математики неможливе раціональне планування народного господарства; вона тісно пов'язана не тільки з такими науками, як хімія, фізика, ботаніка, медицина, а й з більш "гуманітарними", так би мовити, науками — соціологія, психологія, мовознавство та мистецтвознавство ...

Сама математика теж не стоїть на місці: в ній невпинно постають усе *нові* галузі й напрямки, вона перетворюється на стрункo побудовану цілу систему наук. Якщо звернутися до історії, то навіть стародавні єгиптяни, перси і лакедемоняни рідко обирали собі царів, котрі не зналися хоча б трохи на математиці, вважаючи, що неознайомлений з нею не вміє досконало мислити і, отже, непридатний для того, щоб правити. "Для мене знайти доведення математичної теореми важливіше, ніж здобути все персидське царство", — писав давньогрецький мислитель Демокріт.

Математичному мисленню, як і математиці взагалі, властива висока логічність, строгість, виразність, глибина, точність, лаконізм і т.п. Математичне мислення тісно пов'язане з математичними здібностями, які спираються на природні задатки особистості та формуються в процесі її активної творчої діяльності. А. Колмогоров підкреслював, що математик не конче повинен мати прекрасну пам'ять, але повинен вміти послідовно, правильно, логічно міркувати. А. Пуанкаре вважав, що для математика важлива математична інтуїція, здібність передбачати, вгадувати правильний напрям пошуку розв'язку математичної задачі тоді, коли логіка не може допомогти.

Підкреслимо, що математичне мислення, як граничнo абстрактне й теоре-

тичне, — це складник загальної культури мислення, який необхідно систематично виховувати і вдосконалювати в кожному студенті. Мислення людини тільки тоді можна вважати культурним, коли воно здійснюється у повній відповідності із законами логіки.

Декарт: "Ми ніколи, наприклад, не станемо математиками, навіть знаючи напам'ять усі чужі доведення, якщо наш розум нездатний самостійно розв'язувати хоч які-небудь проблеми ... " [1, с. 85]. А французький математик Л. Карно (1753–1823) підкреслював: "Перша умова, якої треба дотримуватися у математиці, — це бути точним, друга — бути ясним і, наскільки можливо, простим" [2, с. 92]. Або: "Я вважаю, що вивчення математики завжди сприяє розвитку строгості та ясності мислення", — писав А. Картан [3, с. 260].

Слід зауважити, що високу культуру мислення легше прищепити студентові тоді, коли він сам активно працює над оволодінням цією культурою, над систематичним її удосконаленням. Недарма великий педагог В. Сухомлинський зауважував: "Виховання, що спонукає до самовиховання, — це і є, за моєю переконаністю, справжнє виховання" [4, с. 10].

Виховання працьовитості, вміння довго й наполегливо працювати у вибраному напрямку зводиться, власне, до виховання здібностей, виховання волі, виховання справжнього характеру. Тут можна подати студентам деякі приклади. Зокрема, розповісти коротко про знаменитого винахідника Т. Едісона, котрому приписують відомий вислів: "Геній — це на один відсоток натхнення, а на дев'яносто дев'ять відсотків — піт". Едісонове життя, його дивовижна непосидючість, невтомність, незвичайна працелюбність — промовиста ілюстрація цього визначення суті геніальності. Едісон сам розповідав, що до 50-річного віку робочий день у нього тривав пересічно 19 з половиною годин, пізніше він працював близько 18 годин щодня. Зосередившись, наприклад, над створенням акумулятора, Едісон виконував десятки тисяч дослідів, іноді по декілька діб не відпочиваючи жодної хвилини. Як відомо, перші десять тисяч дослідів, проведених у цьому напрямку, виявились безрезультатними, та це не зупинило винахідника. А подальша наполегливість Едісона увінчалася успіхом: він винайшов лужний акумулятор. Геніальний винахідник умів "пріти" і саме тому йому пощастило зробити так багато. Його життя — чудовий приклад для молоді, і мав рацію доктор Маукларін, заявивши: "Увесь світ у боргу в Едісона, але найбільше завдячує йому педагогічний світ! Для цілого покоління він сам — першокласна виховна установа" [5, с. 229, 243].

Вражає також і працьовитість великого Ньютона. Він умів думати по-справжньому! Ньютон володів талантом зосереджуватись увагою аж до надмірних меж. Під час роздумів над яким-небудь питанням він не тільки не помічав, що діється навколо нього, але й забував про самого себе. Бувало, що якась ідея захоплювала його в той час, коли він тільки-но підводився з постелі. Тоді він по кілька годин міг сидіти напіводягненим у ліжку. Захоплений своїми обчисленнями, він забував про сон, про їжу, про всілякі інші справи. "Я постійно маю на думці об'єкт свого дослідження і терпляче дожидаю, коли перший проблиск поступово перетвориться на повне й осяйне

світло", згадував пізніше Ньютон [6, с. 45].

"Серед усіх університетських дисциплін математика, можливо, більш, ніж інші, вимагає самозречення, терпіння й наполегливості від молодих людей і саме тоді, коли вони мають свободу дій, коли перед лицем явних спокус "особливої цінності набирає звичка до стриманості та старанності"", — писав англійський математик А. Тодгантер (1820–1884) [за 7, с. 51].

А відомий німецький математик Курант зазначає: "Математика містить у собі риси вольової діяльності, умоглядного міркування і прагнення до естетичної досконалості. Її основні і взаємно протилежні елементи — логіка й інтуїція, загальність і конкретність. Хоч би які були розбіжні погляди, що ґрунтуються на тих чи інших традиціях, лише спільна дія цих полярних засад і боротьба за синтез їх забезпечують життєздатність математичній науці, корисність і високу цінність її" [8, с. 17].

Математика виховує чесність, правдивість, схильність до праці, шляхетність — риси, що прикрашають моральну особистість людини. При вивченні математики необхідно обґрунтовувати кожну думку свою, порівнювати її з іншими думками, мислити глибше, а це виховує наукову чесність, що впливає і на чесність людини в цілому. "Теоретична чесність, яка для математика незмінний закон його наукового мислення і професійної діяльності, висить над ним у всіх його життєвих функціях — від абстрактних міркувань до практичної поведінки", — писав О. Хінчин [9, с. 32].

Математика, як ніяка інша наука, виховує наполегливість у подоланні труднощів, мужність, посидючість, упертість, завзятість у досягненні мети, тягу до творчості. Дуже гарно про це сказав О. Хінчин: "Саме цей творчий, дослідницький характер математичних завдань більше, ніж будь-що інше, тягне до себе молоді сили учневого інтелекту. Той, хто раз зазнав шляхетну, високу радість творчого досягнення, ніколи вже не пошкодує зусиль, щоб знову її пережити. Ніякі труднощі йому не перепона, сила його поривань та змагань, його посидючість та витримка в подоланні перешкод дужчатимуть з кожним новим досягненням, а невдачі, помилки, тимчасові поразки він навчиться сприймати, як належиться справжньому борцеві — не опускаючи перед ними руки, а черпаючи в них джерело та стимул для все нових і нових напружень думки та волі" [9, с. 33].

Як відомо, творчий процес характерний тим, що людина створює і розробляє нове на базі недостатньої інформації про реальний світ. У зв'язку із збігом логіки творчого процесу зі структурною схемою процесу пізнання і з логікою розв'язання математичних задач очевидний вплив математики як науки на розвиток творчих здібностей. Математика привчає діяти в напрямках, що їх підказує структурна схема процесу пізнання, а отже, і сприяє набуттю та розвитку творчого підходу до тієї чи іншої проблеми.

Велику роль у морально-етичному вихованні відіграють естетичні елементи математики. Нагадаймо — естетика (гр. *aesthesis* — чуттєве сприймання) — це наука про закономірності естетичного опанування світу людиною, наука про суть і форми творчості за законами краси.

Зупинимось на прикладах впливу естетичних елементів математики на формування та розвиток творчих здібностей, на пробудження та ствердже-

ня глибоких громадянських почуттів професійної відповідальності, нарешті, на прищеплення естетичної культури студентській молоді. Справді, без розвинутого естетичного почуття нема ні генія, ні таланту, ні розуму.

При читанні лекцій з вищої математики бажано й треба постійно викликати в студентів позитивні емоції, вкрай необхідні для виникнення та розвитку в них інтересу до цієї науки. Треба підкреслювати спроможність математики зачаровувати своїм внутрішнім змістом, несподіваними теоремами. Дуже образно про це висловився у своїй доповіді на Міжнародному конгресі математиків у Москві (1966 р.) румунський математик Г. Сергію: "Математика має свою поезію; і якщо у чистій поезії звучання, акцентування слова, стиль чи запитання роблять приємним і зрозумілим найважчий і найглибший поетичний текст, то аналогічне явище, можна припустити, існує і в математичній поезії. Ще й більше: фундаментальним і першорядним елементом будь-якої людської мови завжди була її музика. Музика, що породжує у людському серці діаметрально протилежні враження. Музика, що має силу викликати бурхливий запал і водночас навіювати повний духовний спокій, який становить найнеодмінніщу умову викладання математики" [за 10, 1968, с. 88].

Математика справді, як це не здається на перший погляд парадоксальним, у певному розумінні — "родичка" поезії. Незважаючи на всю свою складність і абстрактність, вона містить у собі багато художнього й образного — і в шляхах творення, і в характері існування. Дехто навіть говорить про "математичні образи", як про властивий математиці спосіб пізнання світу. Безперечно, математика — таки поезія, *поезія думки*, "поезія логіки ідей", як говорив А. Ейнштейн, а математичні формули й закони не тільки виявляють істотні особливості об'єктивного світу, а й відображають "справжню глибоку красу природи". Як мистецтво дарує людині красу чуттєвого, так математика дарує людині красу розумового. Недаремно ж так багато великих математиків були ревними шанувальниками поезії, а чимало поетів (як от і Юрій Липа) висловлювало своє захоплення стрункістю та красою математичної думки.

Так, справжній математик — це той, хто не лише розв'язує задачі, але й прагне розв'язати їх *красиво*, бо саме витонченість, краса, стрункість, лаконізм розв'язку засвідчують найвищий ступінь знання, інтелекту, майстерності математика, його талант і зрілість.

Справжній математик і свої лекції читає по-особливому, бо для нього математика — це поезія, це музика!

Недарма часто в математичній літературі зустрічаємо вирази: "красива побудова", "стрункий виклад", "чарівна, дивовижна теорема", "нема нічого кращого, гарнішого", "золота формула", "витончена теорія", "елегантний підхід" і т.п.

Всесвітньо відомий український математик *А. Скороход* на семінарах і на лекціях любить повторювати, що "математичні поняття — мертві та нерухомі в своїх означеннях і оживають у математичних доведеннях. Ці доведення становлять основний зміст математики, у них криється і краса математики: нема нічого прекраснішого, ніж просте і ясне доведення нетривіального

твердження".

Інша цитата зі Скорохода: "За допомогою математики відкривають нові, часто дивовижні і несподівані факти. У математиці прекрасне завжди містить елемент несподіваного — хоч не все несподіване прекрасне, — тоді як у математиці несподіване завжди прекрасне" [за 11, 1973, с. 129].

А відомий український математик В. Дзядик "переживав кожен інтеграл, кожну формулу" всіма фібрами душі своєї, любив підкреслювати, що "справжнім математиком є лише той, хто, по-перше, глибоко розуміє красу цієї науки і, по-друге, спроможний розв'язувати нетривіальні математичні задачі" [за 11, 1973, с. 129].

Так, потрібно постійно звертати увагу студентів на красу геометричних фігур, на витонченість формулювання деяких теорем, математичних тверджень, на красиві задачі, ідеї, факти, зразки раціональних обчислень, на чудодійні співвідношення, на весь скарб емоційної та естетичної інформації з історії математики тощо. Бо ж внутрішня досконалість, стрункість математичної побудови майже завжди гарантує її істинність та важливість, — але й кращу її засвоюваність.

А скільки книжок, нарисів, етюдів написано про математику, в яких навіть у заголовках містяться поетичні слова і т. п.! Приміром, "Поет німого числа" (Б. Харчук), "Його любов: Україна і математика" (В. Штинько), "Син Неба" (Г. Дацюк), "Математика — поезія мислі" (А. Зоря, С. Кіро), "Математика і романтика" (М. Кованцов), "Прелюдія до математики" (У. Соєр), "Три перлини теорії чисел" (А. Хинчин), "Про божественну пропорцію" Лука Пачолі (1509) ...

Математика — наука молодості. Мав рацію Н. Вінер, коли писав: "Математика — наука молодих. Інакше й не може бути. Заняття математикою — це така гімнастика розуму, для якої потрібні вся гнучкість та витривалість молодості" [12, с. 37]. Маємо безліч разючих прикладів, коли науковці на великі відкриття спромагались саме в молодому віці.

Ґ. Ґалілей, якого зображають на портретах, як людину поважного віку з великою бородою — він справді жив довго (1564–1642), — та перше своє велике відкриття у фізиці (незалежність періоду коливання від амплітуди коливань) оприлюднив, ще не бувши двадцятилітнім. А професором Ґалілей став у 26-річному віці.

І. Ньютон одне із великих своїх відкриттів — закон всесвітнього тяжіння — здійснив, як і Ґалілей, ще не мавши 20 років, а диференціальне числення виклав — у 24 роки.

Теоретичною основою всієї сучасної електрорадіотехніки й оптики служать чотири знаменитих рівняння Максвела — "Ньютона в електриці". Побачивши ці рівняння, видатний німецький фізик Л. Больцман пройнявся таким естетичним захватом, що аж вигукнув: "Це чи не Бог накреслив ці письмена?!". А Максвелові виповнилось лишень 19 років! Однак він уже тоді глибоко зрозумів і відчув ідею електромагнітних хвиль, тож і з'єднав в одне ціле електрику, магнетизм і світло.

Ґалуа скінчив свій земний вік у 21 рік, Абель — в 27, Урисон — в 26, Рамануджан в 33 роки, Ріман — в 40. А кожен з них встиг виконати без

перебільшення епохальні праці в Науці! Тож є підстави вважати, що людині, яка вирішила присвятити своє життя науковим студіям, доцільніше почати їх якомога раніше, ще в студентські роки.

Відомий фізик-теоретик А. Мігдал висловив цікаву думку про те, що поняття краси відіграє важливу роль для перевірки правильності результатів та для знаходження нових законів і що воно відображає гармонію, наявну в природі. А П. Діракові належить афоризм про те, що краса править за критерій істинності фізичної теорії. Такої самої думки і багато інших учених, зокрема, англійський математик Г. Гарді, який писав: "Краса — це перший пробний камінь для математичної ідеї; у світі немає місця потворній математиці" [13, с. 4].

Поняття симетрії лежить в основі краси і в математиці, і у фізиці, і в інших науках. У 1918 р. німецький математик Емма Нетер довела чудову теорему, згідно з якою кожному типові симетрії відповідає свій закон збереження. Приміром, знаменитий закон зберігання енергії являє собою наслідок однорідності часу, тобто симетрії щодо часових зсувів. 1963 року американський фізик-теоретик Ю. Віґнер отримав Нобелівську премію з фізики за дослідження принципів симетрії, що лежать в основі взаємодії елементарних частинок. Про велику роль симетрії в науці й у мистецтві можна багато писати. А основне тут — що симетрія становить загальновизнаний критерій краси як у науці, так і в мистецтві.

Підкреслимо, що математика відіграє ще й велику моральну роль, як своєрідний спосіб спілкування. Важливою перевагою мови математики є її стислість і точність. У цій перевазі теж полягає краса математики, бо саме математична мова містить одну з основних ознак краси в науці: зведення складного до простого.

Роль математики у збагненності неочевидних істин, а, отже, і краси цієї науки — просто неперевершені!

Ю. Віґнер захоплюється незбагненністю ефективності математики в природничих науках, узяти хоча б для прикладу відкриття планети Нептун: далеку невідому планету було відкрито в кабінеті вченого лише за допомогою олівця та аркушу паперу, тобто за допомогою математики! "Чарівна загадка відповідності математичної мови законам фізики — це дивний скарб, якого ми, фізики, не можемо зрозуміти і якого ми, можливо недостойні ... ". Математики цю незбагнену ефективність вбачають у глибоких зв'язках з реальним світом, а, з другого боку, — розвинуті математичні ідеї починають жити своїм власним життям, завдяки чому математика стає подібною до мистецтва.

З давніх-давен про славу математики, про її красу, логічність, стислість, бездоганну послідовність, дивовижні її результати писали не тільки великі математики, а й філософи, письменники, політики та люди інших професій. Подамо невеличку добірку висловлювань на цю тему.

Видатний український математик М. Остроградський, ім'я якого ЮНЕСКО занесла до Міжнародного календаря славетних імен, а до 200-річчя від дня народження якого в Україні було проведено Перший український Математичний Конгрес, — дуже образно висловився про красу математики: "Це

найвища філософська наука, наука найбільших *поетів* ... " [за 14, с. 285].

Про математику, як музику розуму, англійський математик Дж. Сільвестр писав так: "Музикант *відчуває* Математику, математик *думає* Музикою. Музика — це мрія. Математика — це діяльне життя. І кожна досягне свого завершення за допомогою другої, коли людський інтелект, розвинутий до досконалості, засяє, прославлений, в якомусь майбутньому Моцарті — Діріхле чи Бетховені — Ґаусі — спілці, яку вже досить виразно провіщено в генії та працях Гельмгольца" [за 7, с. 191].

Американський педагог Т. Гіл так оригінально порівнював математику і поезію: "Математика і поезія — це ... вираз тієї самої сили уяви, тільки в першому разі уява звернена до голови, а в другому — до серця ...

... Математика і поезія — якнайспорідненіші, оскільки вони обоє — витвір уяви. Поезія — це творення, побудова, вигадка; так само й математику ревні її прихильники називали найвеличнішою і найчарівнішою вигадкою. Бо й справді: вона не тільки наука, а й мистецтво" [за 7, с. 189].

Почуття гордості за своєрідність математики, за її вагомість і красу відбилося у словах відомого французького математика А. Пуанкаре: " ... Ми, напевно, носимо в собі відчуття математичної краси, гармонії чисел і форми, геометричної витонченості. Всі ці відчуття мають справді естетичний характер, і їх добре знають усі справжні математики" [13, с. 32].

Український математик М. Зарицький (батько української героїні, яка боролася за незалежність України і багато років відбула в більшовицьких концтаборах — Катрусі Зарицької) писав: "Інтелектуальні й емоціональні чинники дають початок новим математичним теоріям. Кого не манить краса, ні мистецтво, хто живе вбогим духовним життям, той нічого не дасть математиці. Поезія не ріжниться від математики вищим летом уяви, а математик ріжниться від поета лиш тим, що все і всюди розумує ... " Але як у мистецтві, так і в математиці лише твори *гарні* переживають століття і виховують цілі покоління.

... Найліпшим свідоцтвом краси математичних конструкцій є голоси самих математиків. І так Міттаг-Лефлер каже, що найліпший твір математика є твором мистецтва, мистецтва величного, досконалого і смілого, як найбільше закриті мрії уяви, ясного та прозорого, як відірвана думка. Великий Ґаус пише, що лише вибрані відчувають цю чарівність, бо чарівність цієї ніжної науки об'являється в цілості лише тим, що мають відвагу її поглибити. Пуанкаре каже, що в математиці не так нам залежить на позитивних результатах, як на переживанні естетичних почувань та на передаванні їх тим, що можуть їх пережити" [15, с. 35–37].

А перший ректор Київського політехнічного інституту В. Кирпичов зазначав, що " ... серед усіх наук найбільшу силу уяви треба мати в математиці. Фантазія потрібна математикові, щоб придумувати нові прийоми, нові побудови. Без неї він не рухатиметься вперед, а буде тільки крутитися в колі тих самих ідей".

Саме математикам "німі числа" говорять дуже багато. Число потрібно оспівувати, доносити його красу, значення до людей. А краще за математика цього не зробить ніхто. Тільки устами людини, закоханної в математику,

німе число може говорити і перетворитися на поезію.

Математика — така чиста і витончена, глибинна й красива, філігранна, вершинна, багата, музична, а ще — повік-віки вона незрадлива, мила і поетична.

Високо оцінив чинник прекрасного в математиці М. Чайковський: "Якби в математиці не було краси, то мабуть, не було б і самої математики. Бо яка ж тоді сила притягала б до цієї нелегкої науки найбільших геніїв людства?"

Приклади

Подамо декілька прикладів чудових математичних фактів із програмного матеріалу вищої математики на підтвердження того, що "природа розмовляє математичною мовою", літерами якої "є трикутники, чотирикутники, круги, кулі, конуси, піраміди та інші математичні фігури ... " Ґ. Ґалілей [16, с. 499].

Ф. Мостеллер у вступі до своєї книги [22, с. 5] пише: "Задача може бути цікавою з багатьох причин: тому, що цікавий зміст умови, тому, що інтуїтивно незрозуміла відповідь, тому, що відповідь ілюструє важливий принцип, тому, що ця задача має велику степінь загальності, тому, що вона важка, тому, що в розв'язанні схована "родзинка" чи просто тому, що відповідь елегантна і проста".

I. "У математиці є формули, за змістом неосяжні, як "Божественна комедія", а за формою — короткі і виразні, як японські тривірші "хоку". Ці формули — найкраща ілюстрація до слів Генріха Манна про те, що занадто велика концентрація думки мимоволі приводить до поезії" [17, с. 39].

Прикладом такої дивної компактності є співвідношення:

$$e^{\pi i} + 1 = 0, \tag{$\star$}$$

яке випливає з не менш красивої формули

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{$\star\star$}$$

відкритої Л. Ейлером 1748 р. і Р. Коутсом 1714 р. Зауважимо, що Ньютон на могилі свого найздібнішого учня Коутса (1682–1716) сказав: "Якби Коутс не вмер так рано, ми багато чого ще б дізналися". Формула ($\star\star$) фактично запровадила в математику логарифм від уявних чисел. А формула ($\star$) — найкраща ілюстрація до слів Манна про те, що занадто велика концентрація думки мимоволі приводить до поезії (у вінку співвідношення ($\star$) сплелись п'ять "королівських" у математиці чисел:

$$0, \qquad 1, \qquad i, \qquad e, \qquad \pi.$$

Примітка для філателістів. Не так давно в Швейцарії була випущена поштова марка з портретом Ейлера та формулою ($\star$).

II. На берегах сторінки книги Діофанта, в якій мовиться про рівність теореми Піфагора, П. Ферма записав: "Я знайшов чудове доведення, що рівність

$$a^n + b^n = c^n$$

неможлива при a, b, c — цілих, коли показник більше 2, та брак місця не дозволяє мені викласти це доведення". 27 червня 1968 р. Королівське вчене товариство в Геттінгені опублікувало оголошення, яке починалося так: "Згідно з духовним заповітом, залишеним на наше ім'я покійним Паулем Вольфскелем в Дармштадті, цим оголошується премія в 100 000 марок тій особі, яка раніше за інших знайде доведення "великої теореми Ферма" ... Якщо премію до 13 вересня 2007 року не буде присуджено, то надалі ніяких домагань на неї не може бути подано".[1]

III. У 1820 р. К. Ґаус запропонував посадити ліс на ділянці землі, що утворює фігуру, назвати її "Піфагорові штани", щоб наші гадані співбрати по Сонячній системі, які живуть на сусідніх планетах, здогадалися про високу цивілізацію земних істот. Ідею цю не було здійснено.

IV. "Доведення від супротивного", таке любе Евклідові, становить найвишуканіше знаряддя математики. Це набагато красивіший засіб, ніж будь-який шаховий гамбіт: шахіст, щоб досягти успіху, може пожертвувати пішака або навіть важливу фігуру, математик іде на ризик програшу всієї партії", — писав Г. Гарді [18, с. 8].

V. "Мистецтво, яке я викладаю, нове або принаймні настільки було зіпсуте часом та перекручене впливом варварів, що я вирішив надати йому нового вигляду ... Усі математики знали, що під їхньою алгеброю та алмукабалою заховано незрівнянні скарби, та не вміли їх знайти; задачі, які вони вважали найважчими, дуже легко розв'язуються десятками за допомогою нашого мистецтва, яке і є найвірніший шлях для математичних досліджень" (Ф. Вієт, 1591 р.) [19, с. 70].

VI. Чудова задача про брахістохрону та подібні до неї.

VII. Конічні перерізи, їхні властивості.

VIII. Чудові границі.

IX. Похідні вищих порядків. Формула Лейбніца.

X. Чудові криві.

XI. Теорія лишків.

XII. Рівняння Шредінгера $i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi + V\varphi$.

XIII. Ряд Лейбніца $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$.

XIV. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_p\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$.

XV. $e^a = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$.

XVI. $\sqrt{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{n^2}{4}}$.

XVII. Квадратичний закон взаємності $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Література

1. Декарт Р., *Избранные произведения*, "Госполитиздат", Москва, 1950.
2. Карно Л., *Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых*, "Технотеоргиз", Москва–Ленинград, 1933.
3. Декарт Р., *Рассуждения о методе*, Изд-во АН СССР, Москва, 1953.
4. Сухомлинский В.А., *Сердце отдаю детям*, "Рад. шк.", Киев, 1971.

[1] Е. Вайлс розв'язав це питання остаточно (1996 р.).

5. Лапиров-Скобло М.Я., *Эдисон*, Мсква, 1960.
6. *Мысли учёных о науке*, "Штиинцы", Кишинев, 1971.
7. *Математика в афоризмах, цитатах і висловлюванняx*, Укл. Н. О. Вірченко, "Вища шк.", Київ, 1974 ; рос. мовою, 1983 ; япон. мовою, 1985, 1995.
8. Курант Р., Роббинс Г., *Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов*, "Просвещение", Москва, 1967.
9. Хинчин А.Я., *Педагогические статьи*, Изд-во АПН, Москва, 1963.
10. *Математика в школе*, Москва.
11. *Вісник Київського університету*, Серія математики та механіки, т. 15, Київ, 1973.
12. Винер Н., *Кибернетика*, "Советское радио", Москва, 1958.
13. *Математики о математике*, "Знание", Москва, 1965.
14. Прудников В.Е., *Русские педагоги–математики XVIII–XIX в.*, "Учпедгиз", Москва, 1956.
15. *Математика серед наук*, Львів, 1927.
16. Галилей Г., *Избранные труды в 2-х томах*, "Наука", Москва, 1964.
17. Зенкевич И.Г., *Эстетика урока математики: Пособие для учителей*, "Просвещение", Москва, 1981.
18. *Математики о математике*, "Знание", Москва, 1972.
19. *Хрестоматія з історії математики*, Київ, 1976.
20. Гельбаум Б., Олмстед Дж., *Контрпримеры в анализе*, Москва, 1967.
21. Бурбаки Н., *Очерки по истории математики*, "ИЛ", Москва, 1963.
22. Мостеллер Ф., *Пятдесят занимательных вероятностных задач*, Москва, 1975.

Слово про Вчителя і друга

В. Сущанський

Виповнилось 70 років від дня народження прекрасного педагога і математика та надзвичайно цікавої людини — Володимира Андрійовича Вишенського. Знаю його вже більше сорока років, добре знаю його непросту біографію, але не хочу зводити свою розповідь про нього до переказу біографічних відомостей. Володимир Андрійович мав на мене величезний вплив, у спілкуванні з ним проходило моє формування як математика і педагога, складалась моя життєва філософія.

Серед його математичних якостей виділяю широку ерудованість, вміння досконало оволодіти тим чи іншим фрагментом математичної теорії, гранично спростити його і чітко викласти, та вміння сконцентруватися над розв'язуванням задачі.

Педагогічний талант Володимира Андрійовича оцінюю особливо високо. Про таких кажуть, що є педагогом від Бога. Захоплює його стиль читання лекцій, методичні новації, майстерність, з якою організується весь лекційний матеріал, вміння володіти увагою аудиторії. Щодо останнього, то мені завжди здається, що Володимир Андрійович має ще й певні гіпнотичні здібності, які й використовує під час лекцій. Так це, чи ні — не берусь стверджувати, але певний гіпнотичний вплив на себе, будучи слухачем його лекцій чи виступів на семінарах і конференціях, я відчував. Володимир Андрійович — майстер малих форм, що також вважаю важливою складовою педагогічного таланту. Десятки нових доведень відомих теорем, сотні оригінальних задач, багато з яких є справжніми шедеврами. І треба додати до цього ще абсолютне відчуття складності задачі, безпомильне розташування задач у збірниках чи навчальному курсі відповідно ієрархії складності.

Багаторічне спілкування з В.А.Вишенським, особливо в молоді роки, мало істотний вплив на формування мого світогляду. В молодості намагався навіть бути схожим на нього, а мої колеги "виловлювали" в моїх розмовах зразки сентенцій Володимира Андрійовича. Зобов'язаний йому своїм знайомством з багатьма творами української і зарубіжної літератури (ряд з них були тоді заборонені і розповсюджувались нелегально), правильному розумінню вітчизняної історії, соціальних процесів у радянському суспільстві і за кордоном. Написав про все це від свого імені, але не був я якимось винятком. Учнів і послідовників у В.А.Вишенського завжди вистачало і кожен міг би написати про себе те ж саме або щось подібне.

Життя Володимира Андрійовича не складалось легко. Напівголодне воєнне та повоєнне дитинство (мати, вчителька середньої школи, залишилася сама з трьома маленькими синами, батько загинув на фронтах Великої Вітчизняної війни). Середню школу закінчив із золотою медаллю в 1952 році. За тодішніми правилами прийому до вищих навчальних закладів як ме-

даліст мав право вступу до будь-якого вузу без екзаменів. Вибрав історико-філологічний факультет Київського державного університету імені Тараса Шевченка. І не ясно, як би склалася його доля, коли б не дві обставини. По-перше, на механіко-математичному факультеті того року було збільшено набір студентів, додатково набиралась ще одна академічна група зі спеціальності "математика". При цьому відповідний наказ Міністерства Освіти було видано із запізненням і додаткову групу почали формувати аж наприкінці вересня. А по-друге, саме тоді з'явилась друком стаття Й.В.Сталіна "Марксизм і питання мовознавства". Роботу вождя вивчали на всіх факультетах, але майбутні філологи — особливо. За словами Володимира Андрійовича, фактично всі заняття з усіх предметів протягом осіннього семестру було присвячено вивченню цієї "геніальної" праці. Повчившись так тижнів зо три, молодий Вишенський засумував і задумався, що робити далі. Вихід, за його словами, підказав сусід по гуртожитку, студент механіко-математичного факультету Л.Нижник (нині провідний науковий співробітник Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук). Він розповів Володимиру Андрійовичу, що формується нова група студентів-математиків. Золота медаль "спрацювала" ще раз і Вишенського зарахували на перший курс механіко-математичного факультету КДУ імені Тараса Шевченка. Закінчив він цей факультет з відзнакою. Далі — аспірантура під керівництвом професора Л.А.Калужніна, після якої — викладацька праця на кафедрі алгебри та математичної логіки КДУ. Ще в аспірантські роки Володимира Андрійовича почала приваблювати педагогіка математики, особливо створення конкретних методик викладання різних розділів математики. На початку 60-х він стає постійним лектором навчального телебачення і ведучим Республіканської телевізійної фізико-математичної школи. Його лекції на телебаченні — невеличкі шедеври. Добре знаю, що дивились і слухали їх тоді навіть люди, далекі від математики, бо вчили вони ще й культурі мовлення. В цей же час розпочав він свою роботу як вчитель Республіканської фізико-математичної школи-інтернату.

Порівняно спокійне життя закінчилося 1967 року, коли Володимир Андрійович підписав відкритий лист представників української інтелігенції до ООН про порушення прав людини в Україні, численні закриті судові процеси (над В. Стусом, Є. Сверстюком, Л. Лук'яненком та іншими). Почалися довгі "разбірательства" і організаційні висновки. Хотіло високе університетське начальство звільнити з роботи Володимира Андрійовича, але загальні збори викладачів факультету вирішили обмежитись строгою доганою.

Десь тоді розпочалося моє ближче знайомство з Володимиром Андрійовичем, яке згодом переросло в дружні відносини. Пов'язане це було з експериментом, який вирішили провести Л. А. Калужнін та В. А. Вишенський. При плануванні лекцій Республіканської телевізійної фізико-математичної школи Володимир Андрійович запланував цикл з трьох лекцій для Льва Аркадійовича. Але лекції треба було читати українською мовою, а Лев Аркадійович нею не володів. Тому вони вирішили, що сценарій напише Лев Аркадійович, а прочитати лекції доручать мені — тоді студенту 5 курсу. Тренінг проводив Володимир Андрійович. Першу лекцію я прочитав у повній відповідності з

його вказівками і все було добре. А другу — вирішив трішечки в деяких місцях щось деталізувати. І зробив найстрашнішу на телебаченні помилку — не вклався у відведений для телепередачі час (десь на 45 секунд). Про це відразу ж стало відомо керівництву студії навчальних передач, при цьому випливло, що лектор — всього-навсього студент. Було трохи шуму, мабуть і Володимиру Андрійовичу перепало. Бо якщо після першої лекції він мене стримано похвалив, то після другої вилаяв, причому добряче. Він це добре вміє. Ну а третьої лекції мені вже читати не довелося, прочитав її сам Володимир Андрійович. Але після цього ми з ним заприязнилися, я почав бувати у Вишенських вдома.

Через кілька років була друга спроба звільнити Володимира Андрійовича з роботи в університеті. Мабуть, була якась загальна вказівка позбутися "непевних" викладачів, а кого саме — то вже була університетська ініціатива. На механіко-математичному факультеті до категорії "непевних" разом з Володимиром Андрійовичем Вишенським було зараховано також доцента кафедри математичної фізики Ніну Опанасівну Вірченко — політв'язня сталінських концтаборів. Тиск чинився під час чергових перевиборів на посаду (такі перевибори відбувалися щоп'ять років). Був він дуже сильний, про що свідчить хоча б те, що Ніна Опанасівна вимушена була звільнитися з роботи. Ніякого стосунку до якості викладання і науково-методичного рівня викладача це не мало, адже Ніна Опанасівна відразу влаштувалася на роботу в Київському політехнічному інституті і невдовзі захистила докторську дисертацію.

Володимир Андрійович вирішив триматися і ніяких заяв про звільнення не подавати. В зв'язку з цим десь так за два місяці до перевиборів біля аудиторії, де він проводив заняття, почали прогулюватись співробітники навчальної частини університету (з надією зафіксувати порушення трудової дисципліни). Найчастіше це була криклива пані із завжди збитою набік зачіскою, методист за посадою і доносчик за покликанням. Проте чергування нічого не дало, Володимир Андрійович щодо своїх дидактичних обов'язків завжди був людиною пунктуальною. Пробували звинуватити його в тому, що нібито незаконно отримує зарплату в Республіканській фізико-математичній школі-інтернаті при Київському університеті, але Володимир Андрійович дав настільки аргументовану відповідь на всі звинувачення, що вони просто розсипалися. Тоді було вирішено використати як аргумент те, що Володимир Андрійович не мав на той час наукового ступеня. Це могло бути серйозною проблемою і всі друзі, яким стало відомо про ці плани, попереджали його. Володимир Андрійович вирішив і тут не давати козирів своїм переслідувачам. Публікацій в нього на той час було вже багато, дисертаційний матеріал був готовий і він протягом двох тижнів оформив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук. Добре пам'ятаю те засідання кафедри алгебри і математичної логіки (тоді я вже був її співробітником). Сценарій, спущений "зверху", не вдався, засідання перетворилося в обговорення дисертаційної роботи В. А. Вишенського; його одностайно було рекомендовано до переобрання на посаду викладача кафедри.

Дисертацію Володимир Андрійович захистив, але пізніше, і не з педаго-

гіки, а з математики. Взагалі-то він є переконаним противником всіляких захистів і звань. Але на початку 80-х років у Київському університеті було прийнято рішення не дозволяти читати лекції викладачам без наукового ступеня. Тут уже Володимира Андрійовича почали вмовляти з усіх сторін: він просто не має права марно витрачати свій лекторський талант. І він здався, захистив кандидатську дисертацію з теорії груп підстановок. А чудова дисертаційна робота з методики викладання математики так і залишилася лише фактом історії.

Негаразди, які часто сипалися на В. А. Вишенського з боку адміністраторів від освіти і науки, з надлишком компенсувалися повагою і повним розумінням його значимості колегами — математиками і педагогами. Він завжди був бажаним гостем на вчительських конференціях і семінарах, часто виступав з лекціями на вчительських зібраннях. Добре пам'ятаю пленарні доповіді Володимира Андрійовича на Всесоюзній алгебраїчній конференції (Кишинів, 1985) і Міжнародній конференції з алгебри і комбінаторики (Кьонінгштайн, 1994). Пам'ятаю ту атмосферу, що панувала в залах під час доповіді, ту особливу, навіть урочисту тишу, ту увагу, з якою було вислухано доповіді Вишенського. Це були одні з кращих доповідей, які мені довелося слухати.

В 90-х роках Володимир Андрійович працював також у Києво-Могилянській Академії. "Поставив" курс вищої математики на природничому факультеті, читав лекції на факультеті інформатики. І досі на студентському інтернет-форумі Академії, де обговорюють викладачів, щороку можна зустріти фразу такого змісту: "Так, все, що ви пишете нині, дітки, писати можна, але що ви знаєте про справжні лекції, коли ви не слухали лекцій В. А. Вишенського?".

Нині Володимир Андрійович на заслуженому відпочинку. Проте він продовжує працювати над новими книгами з математики, над спогадами, веде заняття в одному з київських ліцеїв.

Хай і далі праця Ваша залишається такою ж плідною!

З роси і води Вам, дорогий Володимире Андрійовичу!

Коротка історія одного незавершеного проекту

М. Перестюк, В. Сущанський

Після проголошення незалежності України відразу ж виникла проблема незалежного атестування наукових кадрів вищої кваліфікації. В Радянському Союзі цю функцію виконувала Вища атестаційна комісія (ВАК) при Раді міністрів СРСР. Саме вона присвоювала наукові ступені кандидата та доктора наук і наукові звання доцента і професора. Територіально ВАК СРСР знаходилась у Москві і після розпаду Радянського Союзу автоматично перетворилась на ВАК Росії. Тому в 1992 році розгорнулась робота по створенню Вищої атестаційної комісії (ВАК) України. Роботу цю очолив перший голова ВАК України, відомий український фізик–теоретик, доктор фізико–математичних наук, професор Іван Дзюб. Попередні консультації, створення власних принципів формування ВАК, розробка відповідних нормативних документів, організація і затвердження спеціалізованих рад по захисту дисертацій вимагали багато часу. Це був такий собі період невизначеності, коли циркулювала різна офіційна й неофіційна інформація про роботу майбутнього ВАК'у, про регламент захисту дисертацій, тощо. Певний час серед наукової громадськості була поширена думка, що відомим ученим буде надано можливість здобувати науковий ступінь без оформлення дисертації тільки за сукупністю наукових праць, а в окремих випадках, коли досягнення вченого є безсумнівно видатними і добре відомими, ВАК навіть присвоюватиме науковий ступінь за сукупністю робіт без захисту дисертації. Проте ці положення до Статуту ВАК'у не було включено (і, як потім виявилось, слушно, бо інакше нині Україна мала б, мабуть, утричі більше державних чиновників з науковими ступенями, ніж має, а їх кількість у нас і так не порівняльна з цивілізованими країнами). Саме тому ми й не змогли завершити свій проект, хоча мета, яку він ставив, буз сумніву є достойною і правильною.

У період формування ВАК України, який одночасно, як уже говорилось, був періодом невизначеності, що ж буде далі, на механіко–математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка зародилась ініціатива висунути на здобуття наукового ступеня доктора педагогічних наук без захисту дисертації за сукупністю науково–педагогічних праць доцента кафедри алгебри і математичної логіки Володимира Андрійовича Вишенського. На той час Володимир Андрійович — знаний педагог–новатор, автор чи співавтор 16 книг з шкільної математики, ряду статей і препринтів про викладання різних розділів математики у фізико–математичних школах, постійний ведучий Республіканської телевізійної фізико–математичної школи, лектор навчального телебачення, — був уже добре відомий не лише широкій педагогічній громадськості, але й вчителям, численним випускникам шкіл і вузів України, та й просто любителям математики.

Науково–педагогічний доробок доцента Вишенського — вражаючий. Десятки розроблених тем з математики для фізико–математичних шкіл, починаючи з часу їх заснування, перші програми з математики для цих шкіл, сотні оригінальних задач, у тому числі й олімпіадних, сотні сценаріїв телевізійних передач для навчальних програм, цікаві методичні статті, науково-популярні видання, підручники, навчальні посібники. Здається, що працювала не одна людина, а значний педагогічний колектив однодумців. Крім того, були ще новітні розробки навчальних курсів "Методика викладання математики" та "Історія математики" для студентів університетів, безпосередня участь у проведенні математичних олімпіад різних рівнів, просвітницька діяльність серед учителів середніх шкіл і багато іншого.

Автори статті виступили організаторами акції. Було вирішено провести обговорення наукових результатів Володимира Андрійовича на кафедрі алгебри і математичної логіки та Вченій раді факультету, зафіксувавши його у витягах з протоколів засідань кафедри та ради. З листами підтримки мали виступити Республіканська фізико–математична школа–інтернат при Київському університеті імені Тараса Шевченка (тепер — Український фізико–математичний ліцей) та окремі математики і педагоги. Із клопотанням до ВАК України повинна була звернутися група академіків і членів–кореспондентів Академії Наук України (тоді ще без епітета "національна").

Вчена рада механіко-математичного факультету Київського університету імені Тараса Шевченка на своєму засіданні 12 жовтня 1992 року розглянула це питання і одностайно ухвалила рішення про підтримку нашої ініціативи.

Всі члени і члени-кореспонденти Академії Наук, до яких ми звертались, з цілковитим розумінням сприйняли нашу пропозицію. При цьому було попередньо обговорено саму форму клопотання, його зміст, на які сторони науково-педагогічної діяльності В. А. Вишенського слід звернути особливу увагу, які саме його праці висунути на здобуття наукового ступеня (висувалися не всі праці). Після проведеного обговорення ми написали текст клопотання, який згодом і був підписаний п'ятьма академіками і п'ятьма членами-кореспондентами Академії Наук України. Вісім з них — математики, а два — фахівці в галузі механіки. Такої представницької вибірки науковців для оцінки наукових досягнень претендента на науковий ступінь доктора наук з методики викладання математики в нашій країні не було ніколи і навряд чи буде в найближчі роки.

Отримали ми також всі заплановані і навіть незаплановані листи підтримки. Всі документи збереглися. Хочемо познайомити читачів із двома з них — з клопотанням до ВАК України групи академіків і членів–кореспондентів АН України і з витягом з протоколу засідання Вченої ради механіко–математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Голові Вищої атестаційної
комісії України
проф. ДЗЮБУ І.П.

К Л О П О Т А Н Н Я

Ми, співробітники Академії наук України, що нижче підписалися, входимо до Вищої атестаційної комісії України з клопотанням про присудження відомому українському вченому-педагогу, кандидату фізико-математичних наук, доценту Київського університету ім. Тараса Шевченка Вишенському Володимиру Андрійовичу наукового ступеня доктора педагогічних наук за сукупністю наукових праць без захисту дисертаційної роботи.

Володимир Андрійович Вишенський - добре знаний в нашій країні фахівець з педагогіки математики. Його наукові інтереси лежать в галузі створення і впровадження нових методів інтенсифікації та поглиблення шкільної математичної освіти. Над цією проблематикою він працює понад 30 років. До його наукових інтересів входять питання інтенсифікації та поглиблення математичної освіти за допомогою спеціальної літератури, через фізико-математичні школи /очні, заочні та телевізійні/, математичні олімпіади. Основні науково-методичні досягнення В.А.Вишенського можна коротко охарактеризувати таким чином.

І. В.А.Вишенський - один із ініціаторів створення мережі фізико-математичних шкіл на Україні. Він є одним з фундаторів Республіканської фізико-математичної школи-інтернату при Київському університеті і автором першої програми з математики для цієї школи. Ця програма покладена в основу нині діючих програм з математики більшості фізико-математичних шкіл і класів, за його участю відбувалось її подальше вдосконалення. Протягом багатьох років викладання математики в цій школі він створив оригінальні методики подачі матеріалу, уклав методично виважені добірки задач до всіх розділів програми, написав методичні розробки і посібники до окремих її розділів. Ними нині користуються не лише вчителі Києва, а й багатьох інших міст і сіл України.

2. В.А.Вишенським розроблено концепцію поглиблення математичної освіти школярів загальноосвітніх шкіл України за допомогою навчального телебачення. Протягом 30 років він є постійним ведучим Української /раніше - Республіканської/ телевізійної фізико-математичної школи. На основі розвинутих ним методологічних принципів здійснювався добір матеріалу для занять цієї школи,

підбирався контингент її лекторів. Особисто ним за вказаний період було створено понад 200 сценаріїв телевізійних передач - занять фізико-математичної школи. В них охоплено майже всі розділи шкільної математики, причому на телепередачах завжди було видно певну перспективу - сценарист /і ведучий/ вміло пов'язував питання шкільної математики із близькими до них за змістом та ідеологією теоретичними положеннями і задачами, які не входять до шкільної програми. Всі телесценарії розроблено з урахуванням найновіших досягнень педагогічної науки, в них значною мірою було реалізовано власні ідеї В.А.Вишенського щодо викладання математики.

3. В.А.Вишенський - один з ініціаторів відродження математичних олімпіад в Україні повоєнного періоду. За його активної участі відбувалося становлення республіканських математичних олімпіад. Ним було створено цілі цикли оригінальних математичних задач, які використовувалися при проведенні математичних олімпіад всіх рівнів /районних, обласних, республіканських/, а також щорічної Республіканської телевізійної математичної олімпіади. За його участі вийшли друком перші українські збірники задач олімпіадного характеру. Він є співавтором збірника задач Республіканських математичних олімпіад, який витримав уже 4 видання, щоразу поповнюючись новими задачами, в цьому році повинно з'явитися нове, 5-е видання.

4. Навчити математиці неможливо без розв'язування різноманітних задач. А тому укладення збірників задач є, без перебільшення, основною компонентою творчості В.А.Вишенського. Збірники задач, підготовлені різними колективами під його ідейним керівництвом і за його найактивнішої участі вигідно відрізняються наявністю великої кількості оригінальних задач, методично продуманим розташуванням задач, граничною чіткістю формулювань, добірною українською мовою. В них часто подаються основні теоретичні відомості, виважені рекомендації щодо розв'язування та можливих помилок, вдало підібрані приклади розв'язувань типових задач та задач підвищеної складності. Серед збірників є великі за обсягом, тематика яких охоплює всі розділи шкільної математики, і порівняно невеликі вузькоспеціалізовані добірки задач з однієї чи кількох споріднених тем. Орієнтовані на широку читацьку аудиторію ці книги користуються дуже великим попитом серед школярів і вчителів математики середніх шкіл. Вони, без сумніву, приносять велику користь у справі поліпшення математичної підготовки учнів.

5. В.А.Вишенський - автор /чи співавтор/ ряду навчальних посібників з шкільної математики, серед яких найбільше відомі "Вибрані питання елементарної математики", які вже витримали 3 видання. Впроваджений ним стиль викладу характеризується лаконічністю і простотою, чітким і зрозумілим поданням матеріалу, тонким проникненням в психологію школяра. На жаль, через видавничі труднощі досі не вийшов друком поданий до редакції "Вища школа" ще 1989 р. "Довідник з елементарної математики", в якому реалізовано велику частину методичних знахідок В.А.Вишенського та розроблених ним загальних методичних принципів, і який, безперечно, є новим словом в довідниковій літературі. Посібники, створені В.А.Вишенським /чи за його участю/ є, без винятку, "математичними бестселерами", вони ніколи не залежуються на полицях магазинів.

6. В.А.Вишенському належить багато науково-методичних та науково-популярних статей, опублікованих в таких періодичних виданнях, як "Математика в школі", "Квант", "В світі математики". Кожна з публікацій присвячена розгляду конкретної теми чи задач. Одним із важливих складників педагогічної концепції В.А.Вишенського є використання циклів пов'язаних між собою задач, які дають змогу учню активно оволодіти тим чи іншим методом або колом питань. Створення таких циклів задач вимагає не лише високої математичної культури, а й великого педагогічного хисту.

7. Протягом останніх років В.А.Вишенський розробив принципово новий курс "Основи педагогіки і методики викладання математики" для студентів університетів і неодноразово читав його на механіко-математичному факультеті.

Загальний обсяг друкованих праць /не рахуючи сценаріїв/, автором чи співавтором яких є В.А.Вишенський, складає понад 200 друкованих аркушів. Вже одне це яскраво промовляє про ту величезну роботу, яку він веде в галузі педагогіки математики.

Таким чином, в науково-педагогічних працях В.А.Вишенського розвинуто нові ідеї і підходи до питань інтенсифікації та поглиблення математичної освіти школярів, які можна кваліфікувати як нове значне досягнення в галузі педагогічної науки. Окремо слід зазначити, що основні науково-методичні відкриття В.А.Вишенського впроваджено в освітянську практику нашої країни і результати впровадження здобули найширше визнання. Це дає всі підстави стверджувати, що Володимир Андрійович Вишенський цілком заслуговує присудження йому наукового ступеня доктора наук за спеціальністю

- 4 -

І3.00.02 "Методика викладання математики". Враховуючи, що в Україні поки що немає достатньої кількості фахівців вищої кваліфікації - докторів наук - із даної спеціальності, що унеможливлює захист дисертації у звичайному порядку, вважаємо доцільним присудити Вишенському Володимиру Андрійовичу науковий ступінь доктора наук /спеціальність І3.00.02 "Методика викладання математики"/ за сукупністю наукових праць без захисту докторської дисертації.

Академік АНУ / Ю.М.Березанський /

Академік АНУ / В.С.Королюк /

Академік АНУ / О.С.Парасюк /

Член-кореспондент АНУ / Д.Я.Петрина /

Член-кореспондент АНУ / А.М.Самойленко /

Академік АНУ / Б.М.Пшеничний /

Член-кореспондент АНУ / А.Ф.Улітко /

Член-кореспондент АНУ / В.Т.Грінченко /

Академік АНУ / А.В.Скороход /

Член-кореспондент АНУ / М.И.Ядренко /

ВИТЯГ

ІЗ ПРОТОКОЛУ ЗАСІДАННЯ ВЧЕНОЇ РАДИ
МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТУ
КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ВІД 12 ЖОВТНЯ 1992 Р., ПРОТОКОЛ № 3.

СЛУХАЛИ: Про входження Вченої ради факультету з клопотанням до Вищої атестаційної комісії України на предмет присудження доценту механіко-математичного факультету Київського університету, кандидату фізико-математичних наук ВИШЕНСЬКОМУ ВОЛОДИМИРУ АНДРІЙОВИЧУ наукового ступеня доктора педагогічних наук за сукупністю робіт без захисту докторської дисертації.

ВИСТУПИЛИ: 1. Голова ради, декан механіко-математичного факультету, проф. Перестюк М. О., який зазначив, що В. А. Вишенський понад 30 років плідно працює в галузі методики викладання математики. Коло його безпосередніх інтересів охоплює створення методик інтенсифікації навчання математиці та поглиблення знань з математики учнями загальноосвітніх шкіл. В. А. Вишенський є автором (чи співавтором) понад 20 навчальних посібників, збірників задач та методичних розробок із різних розділів шкільної математики загальним обсягом близько 200 друкованих аркушів. У цих працях реалізовано значну кількість педагогічних ідей В. А. Вишенського. Вони приносять велику користь у справі покращення математичної освіти учнів середніх шкіл України. Крім того, В. А. Вишенський веде велику роботу з учнями загальноосвітніх шкіл України через телебачення. Протягом багатьох років він є постійним ведучим телевізійної фізико-математичної школи, за час роботи в ній створив понад 200 сценаріїв телепередач. Всі сценарії створено на високому науково-педагогічному рівні. В них враховано не лише нові досягнення педагогічної науки, а й специфіку телевізійних передач, вікову психологію школярів. Різноманітні за методами подачі матеріалу (навчальна лекція, практичне заняття, безпосередня робота з учнями, аналіз контрольних робіт і олімпіад, проведення вікторин тощо) вони вимагають великої педагогічної майстерності, чи навіть, без перебільшення, — педагогічного таланту. Все це свідчить про закономірність постановки питання щодо присудження В. А. Вишенському наукового ступеня доктора педагогічних наук за спеціальністю 13.00.02 "Методика викладання математики". Вважаю, що рада факультету повинна увійти з клопотанням до ВАК України про присудження В.А.Вишенському наукового ступеня доктора наук за сукупністю праць, без захисту дисертації, оскільки нині на Україні не досить фахівців вищої кваліфікації — докторів наук із вказаної спеціальності — для створення відповідної спеціалізованої ради.

2. Член ради, член-кореспондент АНУ, завідувач кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики Ядренко М. Й., який окремо висвітлив науково педагогічні результати В. А. Вишенського, отримані ним під час викладання в фізико-математичній школі-інтернаті при Київському університеті, та його визначний вклад у підготовку і проведення Республіканських (нині — Українських) математичних олімпіад, створення і впровадження в освітянську практику науково-виважених методик підготовки учнів до таких

олімпіад, велику роботу по підбору задач, укладення збірників олімпіадних задач тощо. М. Й. Ядренко підтримав пропозицію декана факультету проф. М. О. Перестюка увійти з клопотанням до ВАК України про присудження В. А. Вишенському наукового ступеня доктора педагогічних наук за сукупністю наукових праць без захисту дисертації.

3. Член ради, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедрою алгебри та математичної логіки Дрозд Ю. А., який зазначив, що В. А. Вишенський розробив принципово новий двосеместровий лекційний курс основ педагогіки та методики викладання математики для студентів 3–4 курсів університетів і вже кілька років читає його на факультеті. Під його керівництвом створена нова методика проведення семінарських занять до цього курсу. Ю. А. Дрозд також підтримав пропозицію декана факультету М. О. Перестюка.

ПОСТАНОВИЛИ: 1. Враховуючи, що за браком достатньої кількості спеціалістів вищої кваліфікації — докторів наук із спеціальності 13.00.02 "Методики викладання математики" докторську раду в Україні поки що створити неможливо, просити вищу атестаційну комісію, як виняток, присудити В. А. Вишенському науковий ступінь доктора наук за фахом 13.00.02 без захисту дисертаційної роботи. 2. Затвердити список наукових праць, які висуваються В. А. Вишенським на здобуття наукового ступеня доктора педагогічних наук за спеціальністю 13.00.02 "Методика викладання математики".

Голова вченої ради
механіко-математичного факультету
доктор ф.-м.наук, проф. М. О. Перестюк

Учений секретар ради З. В. Пасічник

Як ми вже сказали, наш проект так і залишився незавершеним. Захищати докторську дисертацію в установленому ВАК'ом України порядку Володимир Андрійович категорично відмовився. Сказав, що звання доктора чи професора не зробить його розумнішим і він не має найменшого бажання витрачати свої сили на оформлення тексту дисертаційної роботи — тексту одноразового користування за матеріалами, які вже увійшли в освітянську практику. Краще потратити ці сили на опрацювання нових дослідницьких тем і написання ще кількох книг. І такі книги з'явились, з того часу вийшли друком п'ять навчальних посібників і посібників для вступників до вищих навчальних закладів, співавтором яких є Володимир Андрійович. Нині науково-педагогічний доробок Володимира Андрійовича Вишенського чи не найповажніший серед українських педагогів-математиків, а все зроблене ним на царині Освіти ще довго залишатиметься зразком для наслідування.

Задачі 256–261

Розділ ведуть
Володимир Брайман, Сергій Горовий, і Володимир Некрашевич

256. Чи існує такий многочлен $P(x)$, що

a) $P(\sin x) = \cos^{2004} x$;
b) $P(\sin x) = \cos^{2005} x$

для всіх $x \in \mathbb{R}$? *(Б. Байденко, Київ)*

257. Точки M_1 та M_2 лежать всередині трикутника $\triangle ABC$. На сторонах AB, BC, AC вибрали точки C_1 та C_2, A_1 та A_2, B_1 та B_2 відповідно так, що

$$A_1M_1 \parallel M_2B_2 \parallel AB, \quad B_1M_1 \parallel M_2C_2 \parallel BC, \quad C_1M_1 \parallel M_2A_2 \parallel AC.$$

Виявилось, що $A_1M_1 = B_1M_1 = C_1M_1 = l_1$, $A_2M_2 = B_2M_2 = C_2M_2 = l_2$. Довести, що $l_1 = l_2$. *(Е. Туркевич, Чернівці)*

258. Розв'язати рівняння $x^y - y^x = xy^2 - 19$ в простих числах.
(Balkan Mathematical Olympiad)

259. До короля Артура приїхали сто лицарів, деякі з яких ворогують між собою. Кожна з 2005 пар лицарів-ворогів відмовляється сидіти за одним столом. Скільки столів повинен мати король Артур щоб бути впевненим, що зможе розсадити за ними цих лицарів? *(В. Брайман, Житомир)*

260. Нехай A — одна з точок перетину кіл ω_1 та ω_2 з центрами O_1, O_2. Пряма l дотикається кіл ω_1 та ω_2 в точках B, C відповідно. Позначимо O_3 центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. На продовженні O_3A за точку A відкладемо $AD = O_3A$. Нехай M — середина O_1O_2. Довести, що $\angle O_1DM = \angle O_2DA$. *(О. Клурман, Львів)*

261. Позначимо $S(n)$ суму цифр натурального числа n. Довести, що послідовність $\left\{\frac{S(n)}{S(n^2)}, n \geq 1\right\}$ є необмеженою. *(Е. Туркевич, Чернівці)*

256. Does there exist a polynomial $P(x)$ such that

a) $P(\sin x) = \cos^{2004} x$;
b) $P(\sin x) = \cos^{2005} x$

holds for every $x \in \mathbb{R}$? *(B. Baydenko, Kyiv)*

257. Points M_1 and M_2 lie inside the triangle $\triangle ABC$. Points C_1 and C_2, A_1 and A_2, B_1 and B_2 are chosen at AB, BC, AC respectively such that

$$A_1M_1 \parallel M_2B_2 \parallel AB, \quad B_1M_1 \parallel M_2C_2 \parallel BC, \quad C_1M_1 \parallel M_2A_2 \parallel AC.$$

It is known that $A_1M_1 = B_1M_1 = C_1M_1 = l_1$, $A_2M_2 = B_2M_2 = C_2M_2 = l_2$. Prove that $l_1 = l_2$. *(E. Tyrkevych, Chernivtsi)*

258. Solve in prime numbers the equation $x^y - y^x = xy^2 - 19$.
(Balkan Mathematical Olympiad)

259. A hundred of knights some of which are at enmity among themselves came to king Arthur. Each of 2005 pairs of knights who are at enmity deny sitting at the same table. How many tables needs king Arthur to be sure that he can seat his guests? *(V. Brayman, Zhytomyr)*

260. Let A be one of the intersection points of the circles ω_1 and ω_2 with centres O_1, O_2. The straight line l is tangent to ω_1 and ω_2 at points B, C respectively. Denote by O_3 the circumcenter of triangle $\triangle ABC$. Let D be such point that A is a midpoint of O_3D. Denote by M the midpoint of O_1O_2. Prove that $\angle O_1DM = \angle O_2DA$. *(O. Klurman, Lviv)*

261. Denote by $S(n)$ the sum of the digits of positive integer n. Prove that the sequence $\left\{\frac{S(n)}{S(n^2)}, n \geq 1\right\}$ is unbounded. *(E. Tyrkevych, Chernivtsi)*

Розв'язання задач 220–225

Розділ ведуть
Володимир Брайман, Сергій Горовий, і Володимир Некрашевич

220. Після завершення чемпіонату міста з футболу виявилось, що команда, яка посіла перше місце, забила 1 гол, команда, яка зайняла друге місце, забила 2 голи, команда, яка виборола третє місце, забила 3 голи і так далі. При якій найменшій кількості команд таке могло трапитись? (Кожні дві команди зіграли між собою один раз. За перемогу присуджують 3 очки, за нічию – одне та за поразку – нічого. При рівній кількості очок вище місце посідає команда, що має кращу різницю між кількостями забитих та пропущених голів, а якщо ці показники теж однакові – команда, яка забила більше голів.)

Розв'язок. Якщо команд дві, то відбудеться єдиний матч, який перша команда програє з рахунком 1:2 та не зможе посісти перше місце. Якщо команд три, то третя команда в матчах проти перших двох забиває стільки ж голів, як і вони разом узяті. Тому можливі два випадки:

а) Третя команда двічі грає внічию 1:1 та 2:2. Тоді в матчі між собою перша та друга команда не забивають жодного гола. В цьому випадку місця команд в турнірі визначаються за кількістю забитих голів та маємо протиріччя з умовою.

б) Третя команда хоча б один раз перемагає і набирає хоча б 3 очки. Тоді всі команди набирають принаймні по 3 очки, а це можливо лише коли кожна команда один раз виграла та один раз програла. Але перша команда виграла з рахунком 1:0 та має недодатну різницю забитих та пропущених голів, а третя команда має таку саму кількість очок, як перша, та додатну різницю забитих та пропущених голів (інакше перші дві команди зіграли б між собою внічию 0:0). Тому третя команда не може посісти в чемпіонаті місце нижче, ніж перша, протиріччя.

Залишилось навести приклад чемпіонату для чотирьох команд. Нехай матчі закінчились так, як вказано в таблиці:

	1	2	3	4
1	×	0:0	0:0	1:0
2	0:0	×	0:2	2:0
3	0:0	2:0	×	1:4
4	0:1	0:2	4:1	×

Тоді перша команда отримала 5 очок, друга та третя — 4 та четверта — 3, причому друга команда має кращу різницю забитих та пропущених голів, ніж третя. (*Розв'язок автора*)

221. Всередині трикутника ABC вибрали точку P. Позначимо X, Y, Z точки перетину прямих AP, BP, CP з BC, AC, AB відповідно. Нехай M_1, M_2, M_3 — середини AC, AB,

BC, а N_1, N_2, N_3 — середини XZ, XY, YZ відповідно. Довести, що прямі M_1N_1, M_2N_2 та M_3N_3 перетинаються в одній точці.

Розв'язок. Спроектуємо трикутник ABC у рівнобедрений прямокутний трикутник $A'B'C'$ з прямим кутом C'. Будемо позначати проекції точок тими ж літерами зі штрихом. Введемо систему координат так, щоб точки A', B', C', P' мали координати $(2;0)$, $(0;2)$, $(0;0)$, $(2a;2b)$.

Тоді рівняння прямих $A'P'$, $B'P'$ та CP'

$$y = -\frac{b}{1-a}x + \frac{2b}{1-a}, \quad y = -\frac{1-b}{a}x + 2, \quad y = \frac{b}{a}x$$

відповідно. Координати точок

$$X'\left(0;\frac{2b}{1-a}\right), \quad Y'\left(\frac{2a}{1-b};0\right), \quad Z'\left(\frac{2a}{a+b};\frac{2b}{a+b}\right),$$
$$M_1'(1;0), \quad M_2'(1;1), \quad M_3'(0;1),$$
$$N_1'\left(\frac{a}{a+b};\frac{b}{1-a}+\frac{b}{a+b}\right), \quad N_2'\left(\frac{a}{1-b};\frac{b}{1-a}\right),$$
$$N_3'\left(\frac{a}{1-b}+\frac{a}{a+b};\frac{b}{a+b}\right).$$

Тепер знайдемо рівняння прямих

$$M_1'N_1': \quad y = \frac{1+b}{a-1}x - \frac{1+b}{a-1},$$
$$M_2'N_2': \quad y = \frac{1-b}{1-a}x + \frac{b-a}{1-a},$$
$$M_3'N_3': \quad y = \frac{b-1}{a+1}x + 1,$$

та переконаємось, що всі вони проходять через точку $\left(\frac{a+1}{2};\frac{b+1}{2}\right)$.

222. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n \neq 0$ — дійсні числа такі, що $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} = 0$. Довести, що

$$|x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1| \leq \left(\max_{1\leq k\leq n}|x_k| - \min_{1\leq k\leq n}|x_k|\right)(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|).$$

Розв'язок. Нехай $m = \min_{1\leq k\leq n}|x_k|$, $M = \max_{1\leq k\leq n}|x_k|$. Покажемо, що при $x \in [-M,-m]$ та при $x \in [m,M]$ виконується нерівність $x - \frac{Mm}{x} \geq m - M$. Справді, на кожному з відрізків $[-M,-m]$ та $[m,M]$ ліва частина цієї нерівності зростає, а при $x = -M$ та $x = m$ має місце рівність. Аналогічно при $x \in [-M,-m]$ та при $x \in [m,M]$ маємо $x - \frac{Mm}{x} \leq M - m$. Отже, для кожного x_k виконується нерівність

$$\left|x_k - \frac{Mm}{x_k}\right| \leq M - m.$$

Тепер маємо

$$\begin{aligned}
&|x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1| \\
&\quad = \left|x_1x_2 - \frac{Mmx_1}{x_2} + x_2x_3 - \frac{Mmx_2}{x_3} + \cdots + x_nx_1 - \frac{Mmx_n}{x_1}\right| \\
&\quad \le |x_1| \cdot \left|x_2 - \frac{Mm}{x_2}\right| + |x_2| \cdot \left|x_3 - \frac{Mm}{x_3}\right| + \cdots + |x_n| \cdot \left|x_1 - \frac{Mm}{x_1}\right| \\
&\quad \le (M-m)\left(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|\right),
\end{aligned}$$

що й треба було довести. *(Розв'язок автора)*

223. Позначимо $s(n)$ та $k(n)$ суму та кількість цифр десяткового запису числа n. Знайти всі натуральні n, для яких $k(n) \cdot s(n^2) = n + 1$.

Розв'язок. Нехай $k(n) = k$, $k \ge 1$. Тоді $10^{k-1} \le n < 10^k$, $10^{2k-2} \le n^2 < 10^{2k}$, $k(n^2) \le 2k$ та $s(n^2) \le 9k(n^2) \le 18k$. Отже, $10^{k-1} + 1 \le n + 1 \le 18k^2$. Покажемо індукцією по k, що умова $10^{k-1} + 1 \le 18k^2$ не виконується при $k \ge 4$. Справді, при $k = 4$ маємо $10^3 + 1 = 1001 > 18 \cdot 4^2 = 288$. Нехай тепер $10^{k-1} > 18k^2 - 1$. Тоді $10^k > 180k^2 - 10 > 18(k+1)^2 - 1$, бо при $k \ge 1$ $162k^2 > 36k + 27$, тобто $180k^2 > 18(k+1)^2 + 9$. Тому достатньо розглянути лише випадки $k = 1$, $k = 2$ та $k = 3$.

1) $k = 3$. Оскільки $s(n^2) \le 18k = 54$, то $n + 1 = 3s(n^2) \le 162$, $n \le 161$. Але тоді $n^2 \le 161^2 = 25921$, $s(n^2) \le 37$, $n + 1 \le 111$, $n \le 110$. Тепер $10^4 \le n^2 \le 110^2 = 12100$, $s(n^2) \le 29$, $n + 1 \le 87$ та $k < 3$, суперечність.

2) $k = 2$. Оскільки $s(n^2) \le 18k = 36$, то $n + 1 = 2s(n^2) \le 72$, $n \le 71$. Але тоді $n^2 \le 71^2 = 5041$, $s(n^2) \le 31$, $n + 1 \le 62$, $n \le 61$.

З умови $n+1 = 2s(n^2)$ випливає, що n непарне та не ділиться на 3. Тоді n^2 та $s(n^2)$ дають остачу 1 від ділення на 3, $2s(n^2)$ дає остачу 2 та n дає остачу 1 від ділення на 3. Отже, число n дає остачу 1 від ділення на 2 та на 3, $n = 6m + 1$. Перевіряючи значення $n = 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61$, знаходимо розв'язки 19, 25, 31, 37, 43.

3) $k = 1$. З умови $n + 1 = s(n^2)$ випливає, що n не ділиться на 3. Але тоді $s(n^2)$ дає остачу 1 від ділення на 3 та n має ділитись на 3, суперечність.

Відповідь. 19, 25, 31, 37, 43.

(Розв'язок автора)

224. Правильний 2004-кутник розбили на а) 2002; б) 2003 трикутники. Знайти найбільшу можливу кількість тупокутних трикутників в розбитті.

Розв'язок. а) Оскільки сума кутів 2004-кутника дорівнює $2002 \cdot 180°$ та співпадає з сумою кутів 2002 трикутників, то всі вершини трикутників розбиття є вершинами 2004-кутника. Але вписаний в коло трикутник є гострокутним, прямокутним або тупокутним в залежності від того всередині, на стороні або зовні трикутника лежить центр кола. Тому принаймні один з трикутників не може бути тупокутним, бо містить центр кола, описаного навколо 2004-кутника. Якщо цей трикутник буде гострокутним, то інші 2001 трикутники розбиття — тупокутні.

б) Наведемо приклад розбиття, для якого всі 2003 трикутники тупокутні. Позначимо декілька послідовних вершин 2004-кутника A_1, A_2, A_3, A_4, а діаметрально протилежні вершини B_1, B_2, B_3, B_4. Розіб'ємо спочатку 2004-кутник діагоналями на п'ятикутник $A_1A_2A_3A_4B_2$ та 1999 трикутників. Всі ці трикутники тупокутні, бо центр кола, описаного навколо 2004-кутника, лежить всередині п'ятикутника. Виберемо на A_4B_2 точку C так, що трикутник $\triangle A_1CB_2$ рівнобедрений. Це можна зробити, бо $\angle A_4B_2A_1 < \angle A_4A_1B_2$. Тоді трикутник A_1CB_2 буде тупокутним, бо

$$\angle ACB_2 = 180^\circ - 2\angle CB_2A_1 = 180^\circ - 2\angle A_4B_2A_1 = 180^\circ\left(1 - \frac{6}{2004}\right) > 90^\circ.$$

Оскільки $\angle A_3A_4C = \angle A_3A_4B_2 > \angle A_3A_4B_3 = 90^\circ$, $\angle A_2A_3C > \angle A_2A_3B_2 = 90^\circ$, то трикутники $\triangle A_3A_4C$ та $\triangle A_2A_3C$ також тупокутні. Залишилось перевірити, що трикутник $\triangle A_1A_2C$ тупокутний. Нехай D – середина A_2B_1. Тоді в прямокутному трикутнику $\triangle A_1A_2D$ $A_1D > A_2D = B_1D$. Звідси в трикутнику $\triangle A_1DB_1$ $\angle DA_1B_1 < \angle DB_1A_1 = \angle B_1A_1B_2$. Отже, $\angle DA_1B_2 = \angle DA_1B_1 + \angle B_1A_1B_2 < 2\angle B_1A_1B_2 < 3\angle B_1A_1B_2 = \angle CA_1B_2$. Тоді C та A_1 лежать по різні сторони від A_2B_1, $\angle CA_2A_1 > \angle DA_2A_1 = 90^\circ$, трикутник $\triangle CA_1A_2$ тупокутний. Отримали потрібне розбиття.

Відповідь. а) 2001; б) 2003.

(*Розв'язок автора*)

225. Нехай $f(x) = \frac{1}{4a^2(1-x)}$, $x \neq 1$. Знайти всі значення a, при яких існує таке натуральне число n, що

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n}(0)\ldots)) = 1.$$

Розв'язок. Нехай $x_0 = 0$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$, $x_n = f(x_{n-1}) = 1$. Знайдемо декілька перших значень x_k:

$$x_1 = \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{2a \cdot 2a}, \quad x_2 = \frac{1}{4a^2 - 1} = \frac{2a}{2a(4a^2-1)},$$
$$x_3 = \frac{4a^2-1}{16a^4 - 8a^2} = \frac{4a^2-1}{2a(8a^3-4a)}, \quad \ldots$$

Доведемо, що для деяких многочленів $P_k(a)$, $k \geq 0$, рівність $x_k = \frac{P_{k-1}(a)}{2aP_k(a)}$ виконується для $k = 1, \ldots, n$. Справді, при $P_0(a) = 1$, $P_1(a) = 2a$ рівність виконується для $k = 1$. Нехай тепер $x_k = \frac{P_{k-1}(a)}{2aP_k(a)}$. Тоді

$$x_{k+1} = f(x_k) = \frac{1}{4a^2(1 - \frac{P_{k-1}(a)}{2aP_k(a)})} = \frac{P_k(a)}{2a(2aP_k(a) - P_{k-1}(a))} = \frac{P_k(a)}{2aP_{k+1}(a)},$$

де $P_{k+1}(a) = 2aP_k(a) - P_{k-1}(a)$. За принципом математичної індукції рівність $x_k = \frac{P_{k-1}(a)}{2aP_k(a)}$ доведено для $1 \leq k \leq n$. Але умова $x_n = 1$ означає, що $P_{n+1}(a) = 2aP_n(a) - P_{n-1}(a) = 0$. Навпаки, якщо $a \neq 0$ є коренем одного з

многочленів P_m, де $P_0(a) = 1$, $P_1(a) = 2a$ та $P_{n+1}(a) = 2aP_n(a) - P_{n-1}(a)$, $n \geq 1$, то x_m визначити не можна, а отже для деякого $k \leq m-1$ маємо $x_k = 1$. Отже, в послідовності $x_1, x_2, \ldots$, зустрічається число 1 тоді і тільки тоді, коли $a \neq 0$ є коренем одного з многочленів P_n, $n \geq 1$. Оскільки многочлен P_n має степінь n, то достатньо для кожного n вказати n коренів P_n. Випишемо корені декількох многочленів P_n. Маємо $P_1(a) = 2a$, $P_2(a) = 4a^2 - 1$, $P_3(a) = 8a^3 - 4a$. Коренем P_1 є $0 = \cos\frac{\pi}{2}$, коренями P_2 є $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ та $-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$, коренями P_3 є $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$, $0 = \cos\frac{2\pi}{4}$ та $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4}$. Отже, виникає припущення, що коренями $P_n(a)$ є числа $\cos\frac{m\pi}{n+1}$, $m = 1, 2, \ldots, n$. Покажемо, що це справді так. Для цього доведемо індукцією по n, що при $\sin\varphi \neq 0$

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}.$$

При $n = 0$ та $n = 1$ це очевидно. Нехай тепер $P_2(\cos\varphi) = \frac{\sin(i+1)\varphi}{\sin\varphi}$, $0 \leq i \leq k$. Тоді

$$P_{k+1}(\cos\varphi) = 2\cos\varphi P_k(\cos\varphi) - P_{k-1}(\cos\varphi) = \frac{2\cos\varphi\sin(k+1)\varphi - \sin k\varphi}{\sin\varphi}$$
$$= \frac{\sin(k+2)\varphi}{\sin\varphi}.$$

За принципом математичної індукції твердження доведено. Отже,

$$P_n\left(\cos\frac{m\pi}{n+1}\right) = \frac{\sin m\pi}{\sin\frac{m\pi}{n+1}} = 0.$$

Залишилось відкинути корінь $a = \cos\frac{m\pi}{n+1} = 0$, що з'являється при $m = \frac{n+1}{2}$.

Відповідь. $a = \cos\frac{m\pi}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n$, $m \neq \frac{n+1}{2}$.

(Розв'язок автора)

Список читачів, що надіслали правильні розв'язки

Макарчук О. *(смт. Добровеличівка, Кіровоградська обл.)*

Український математичний журнал для школярів

том 11 **У світі математики** випуск 3

2005

Присвячений 70-літньому ювілею В. А. Вишенського

ЗМІСТ

Обрії математики

І. Протасов, К. Протасова
Про коника-стрибунця і теорію графів 1

Математичні повідомлення

О. Вишенський
Числа Фібоначчі й піфагорові трійки в одній задачі 5

Б. Олійник
Функція, що є узагальненням числа π 11

Математичний гурток

В. Плахотник
Про прості числа в рівняннях і послідовностях 16

Г. Філіпповський
Ґрунтовна розмова про пряму Симсона–Уоллеса 24

Сторінки абітурієнта

В. І. Лавренюк
Про перетин многокутної піраміди площиною 33

І. Парасюк, О. Перегуда
Про вступні іспити на механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2005 році 37

Освіта за рубежем

П. Ґаврон, В. Сущанський
Нова матура з математики в польських школах 43

Математичні олімпіади

В. Брайман, О. Кравченко, Д. Мітін, Д. Номіровський, А. Примак, Б. Рубльов, П. Цицура
Відбори команди Києва на Всеукраїнську олімпіаду юних математиків 49

Математики на шахівниці

А. Фролкін
Арифметичні парадокси шахової композиції 56

ЗМІСТ

ПРО МАТЕМАТИКУ І МАТЕМАТИКІВ

Академіку Ю. М. Березанському — 80 60

В. В. Булдигін
Її життя — Україна і математика 61

Н. Вірченко
Про красу математики 69

В. Сущанський
Слово про Вчителя і друга 81

М. Перестюк, В. Сущанський
Коротка історія одного незавершеного проекту 85

НАШ КОНКУРС

Задачі 256–261 93

Розв'язання задач 220–225 95

Український математичний журнал для школярів

том 11 **У світі математики** випуск 3

2005

Дорогі читачі!

Цей випуск присвячений 70-літньому ювілею В. А. Вишенського.

Наш журнал розрахований в першу чергу на школярів і викладачів математики. Проте ми сподіваємось, що і студенти математичних факультетів університетів та педагогічних інститутів, професіональні математики, любителі і шанувальники цієї древньої і вічно молодої науки в кожному числі журналу знайдуть для себе багато цікавого.

В розділі "*Горизонти математики*" ми публікуємо розповіді про новітні досягнення в математиці, про застосування математики в різних областях природознавства, техніки, соціальних наук. Особливу увагу ми будемо приділяти застосуванням математики до розв'язання проблем економіки та фінансової математики. Хотілось би, щоб в Україні з'явилось покоління молодих математиків, які вміють творчо застосовувати математичні методи до розв'язання складних проблем економіки.

Одним з основних завдань журналу редакційна колегія вважає розвиток творчих здібностей читачів, залучення їх до активної творчої роботи. В розділі "*Математичні повідомлення*" ми публікуємо нові результати наших читачів. В розділі "*Проблеми і гіпотези*" мова йде про нерозв'язані математичні проблеми, формулюються теми для самостійних досліджень.

В розділі "*Математичний гурток*" вміщуються короткі статті, кожна з яких може бути матеріалом одного чи двох занять математичного гуртка.

Запрошуємо наймолодших читачів нашого журналу до знайомства з матеріалами розділу "*Сторінки для наймолодших математиків*". Саме в юному віці розкриваються і розвиваються математичні здібності. Редакційна колегія завжди прагне до того, щоб матеріали цього розділу були цікавими і доступними.

Значний обсяг в нашому журналі займають задачі математичних олімпіад (як правило, ми подаємо такі задачі з повними розв'язаннями), задачі з конкурсних екзаменів. В розділі "*Сторінки абітурієнта*" ми вміщуємо короткі розповіді про окремі теми, пов'язані з тими задачами, які часто пропонуються на вступних екзаменах до вищих навчальних закладів.

Розділ "*Математичні ігри та розваги*" адресовано широким колам любителів математики і цього жанру. В ньому вміщуються статті про різні ігри, стратегії, в яких допускають математичний аналіз, інформації про чемпіонати з розв'язання головоломок. Для численних любителів шахів дуже цікавою є "*Шахова сторінка*". В її створенні беруть участь не лише вітчизняні, а й зарубіжні гросмейстери.

Запрошуємо всіх читачів (незалежно від віку, посад, наукових ступенів і звань) до розв'язання задач "*Нашого конкурсу*". В цьому розділі ми публікуємо, як правило, нові задачі. Розв'язання задач "*Нашого конкурсу*" ми публікуємо разом з прізвищами читачів, які правильно розв'язали ту чи іншу задачу.

В розділі "*Новини математичного життя*" ми оперативно подаємо інформацію про з'їзди, конгреси, наради з проблем математичної освіти, інші новини математичного життя. В розділі "*Книжкові обрії*" ми інформуємо наших читачів про нові книги.

Більшість матеріалів нашого журналу реферується в провідних реферативних журналах світу: "Zentrallblatt fur Mathematik", "Zentrallblatt fur Mathematische Didaktik", "Mathematical Reviews", "РЖ Математика".

Чекаємо від читачів зауважень, побажань відносно змісту журналу. Надсилайте нам статті, інформацію про олімпіади, конкурсні екзамени, новини математичного життя, нові задачі, нові книги для рецензування.

Редакційна колегія

Почалася передплата на журнал на 2006 рік.

Передплата здійснюється в кожному відділенні Укрпошти.

Передплатний індекс журналу 74581.