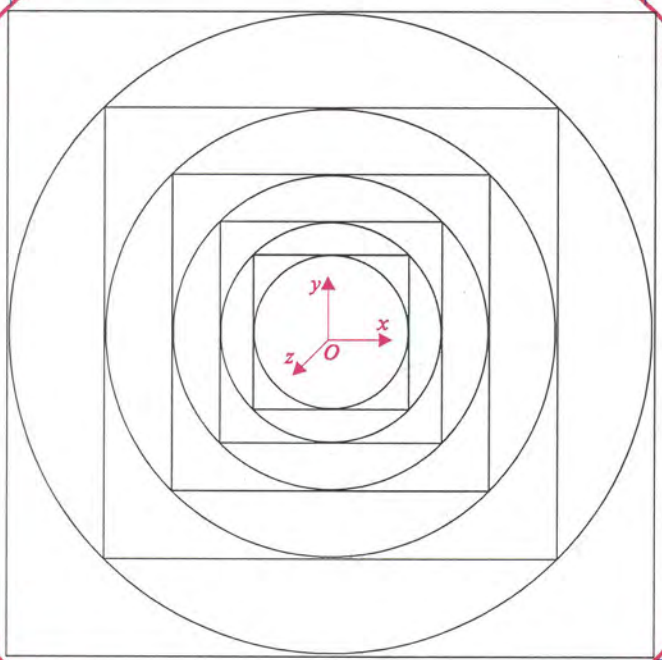
ISSN 1029-4171

2005

том 11
випуск 4

У світі математики



Видавництво
"ТВіМС"

Український математичний журнал для школярів

том 11 **У світі математики** випуск 4

2005

Видається: з 1995 року Видавець: видавництво "ТВіМС"
Засновник: видавництво "ТВіМС" та Національний університет ім. Т. Шевченка
Свідоцтво: КВ № 1564

© ТВіМС, 2005

Журнал виходить 4 рази на рік: березень, червень, вересень, грудень.

РЕДАКЦІЙНА РАДА

В. С. Королюк (голова)	В. В. Анісімов	Ю. М. Березанський
М. Л. Горбачук	І. Й. Гуран	Ю. А. Дрозд
О. К. Закусило	В. М. Лейфура	Г. М. Литвиненко
Ю. О. Митропольский	В. П. Моторний	В. М. Петечук
В. В. Петришин	В. Г. Покотило	М. І. Портенко
А. М. Самойленко	Є. Сенета	З. І. Слєпкань
М. С. Собко	В. О. Тадеєв	Ю. Ю. Трохимчук
І. В. Федак	П. К. Хобзей	М. І. Шкіль

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

В. І. Сущанський (головний редактор)
М. В. Карташов (заступник головного редактора)
О. І. Василик (секретар)

В. Б. Брайман	В. В. Булдигін	Я. Ф. Виннишин
В. А. Вишенський	С. О. Горовий	О. І. Клесов
А. В. Князюк	О. В. Кужель	О. Г. Кукуш
В. С. Мазорчук	І. М. Мітельман	В. І. Михайловський
В. В. Некрашевич	А. Я. Оленко	М. О. Перестюк
В. М. Радченко	А. Сойфер	О. К. Толпиго
Р. П. Ушаков	Ю. Б. Чураченко	В. О. Швець
О. М. Ядренко	В. А. Ясінський	

АДРЕСА РЕДАКЦІЙНОЇ КОЛЕГІЇ

252033, Київ–33,
Національний університет ім. Т. Шевченка,
кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики
"У світі математики"
тел. 259-03-92
e-mail: vasylyk@univ.kiev.ua

Журнал друкується за постановою Вченої ради механіко-математичного факультету Національного університету ім. Т. Шевченка.

Передплата на журнал приймається в усіх поштових відділеннях України. Індекс видання 74581.

Кєно, або "як будувалась Велика Китайська Стіна"

О. Г. Зражевський[1]

Кожний з нас з дитинства пам'ятає казку про Івана-дурника. Не мав собі нічого, лежав на печі, потім раз — ухопив за хвіст щуку і розбагатів. Може, тому мрія раптово, без зусиль, розбагатіти живе в кожному з нас. І кожний з нас, хоч раз, але пробує "піймати свою щуку", граючи в лотерею. Та чи реально це? Спробуємо відповісти на це питання, використовуючи таку науку, як теорія ймовірності.

Слово "ймовірність" давно перестало бути науковим терміном. Та чи всі знають, що таке ймовірність з точки зору науки? Відкрийте будь-який підручник з теорії ймовірності, наприклад [5], і ви прочитаєте там, що: ймовірністю деякої події A називається відношення кількості елементарних результатів, при яких подія A наступає до загальної кількості всіх рівно можливих результатів. Більш детально про це можна прочитати, наприклад, в статтях М. Й. Ядренка [1]–[3].

Оцінимо наші шанси виграти, граючи в лотерею Кєно. Кожного вечора проводиться розіграш, в якому розігруються 20 номерів з 80. Ви придбали картку лотереї і закреслили l номерів ($l \leq 10$). Ймовірність вгадати k ($k \leq l$) виграшних номерів з них обчислюється за формулою:

$$P_l(k) = \frac{C_l^k C_{80-l}^{20-k}}{C_{80}^{20}}. \tag{1}$$

Щоб отримати формулу (1) міркуємо таким чином:

Відберемо з l номерів, які ми закреслили, k виграшних номери. Оскільки для нас не важливий порядок слідування виграшних номерів, це можна зробити C_l^k способами.

Останні $20-k$ виграшних номери заповнимо вибраними навмання номерами серед тих $80-l$ номерів, що ми не закреслили. Це можна зробити C_{80-l}^{20-k} способами.

Оскільки операції з попередніх пунктів незалежні, кількість комбінацій, що приведуть нас до вгадування рівно k номерів при закресленні l номерів, є $C_l^k C_{80-l}^{20-k}$.

За умовою гри навмання вибирається 20 номерів з 80 можливих. Тому повна кількість можливих варіантів є C_{80}^{20}.

Отже, за означенням, ймовірність вгадати k номерів при закресленні l номерів з 80 визначається формулою (1).

---

[1]Зражевський Олексій Григорович — студент 5-го курсу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

За правилами гри Кєно можна закреслити від 2 до 10 номерів. При цьому, виграшними вважаються різні ситуації в залежності від кількості закреслених номерів. Наприклад, при закресленні 9 номерів виграшними вважаються ситуації при вгадуванні від 5 до 9 номерів та ситуація, при якій не вгадано жодного номера.

Таблиця 1. Ймовірності виграшу

	Кількість обраних вами номерів								
Кількість вгаданих номерів	10	9	8	7	6	5	4	3	2
10	$1.122 \cdot 10^{-7}$								
9	$6.12 \cdot 10^{-6}$	$7.24 \cdot 10^{-7}$							
8	0.000135	0.000032	$4.34 \cdot 10^{-6}$						
7	0.00161	0.00059	0.00016	0.00002					
6	0.11479	0.00571	0.00236	0.00073	0.00012				
5	0.05142	0.0326	0.0183	0.00863	0.00309	0.00064			
4			0.0815	0.05219	0.02853	0.01209	0.00306		
3					0.12982	0.08393	0.04324	0.01387	
2							0.21263	0.13875	0.0601
1									
0	0.09158	0.12749							
Всього	0.11045	0.10269	0.10233	0.06158	0.16158	0.09667	0.25894	0.15262	0.0601

Розглянемо таблицю 1. У ній наведено ймовірності виграшних ситуацій в залежності від кількості закреслених номерів. Останній рядок таблиці — сумарна ймовірність виграшу. Як видно з таблиці 1, найбільші шанси у вас виграти, якщо Ви закреслите 4 номери, оскільки ймовірність вгадати при цьому 2 номери буде найбільшою: $P_4(2) = 0.21263$. Водночас, найменші шанси у Вас вгадати 10 номерів з 10 закреслених:

$$P_{10}(10) = 1.122 \cdot 10^{-7} \approx \frac{1}{10000000}.$$

Іншими словами, реальний шанс такого виграшу з'явиться (при середньостатистичній вдачі) лише після того як Ви придбаєте порядку кількох мільйонів білетів. Хоча здоровий глузд підказує, що, навіть не торкаючись фінансового боку проблеми, Вам знадобиться кілька років, щоб заповнити ці картки.

Але, звичайно, гравця рідко коли цікавлять такі дрібниці. Спробуємо задовольнити його цікавість, відповівши на кілька практично важливих питань. Наприклад, чи варто зосередитись на грі на 4 номерах, сподіваючись на виграш? І так, і ні. Так, якщо Вас цікавить лише сам факт виграшу, і ні, якщо Ви сподіваєтесь хоча б повернути затрачені гроші.

Дійсно, як і в кожній грі, в Кєно різні (з точки зору ймовірності) виграшні ситуації оцінюються по-різному. Так, ймовірність виграшу 2 з 4 — $P_4(2) =$

0.212, але виграшна премія — $K_4(2) = 1$. Тобто, вгадавши 2 номери з 4 Ви лише повернете свої гроші, отримавши 1 грн. премії на кожну 1 грн., вкладену в квитки. З іншого боку, вгадавши 10 номерів з 10,

$$P_{10}(10) = 1.122 \cdot 10^{-7} \approx \frac{1}{10000000},$$

Ви отримаєте виграшну премію $K_{10}(10) = 100000$. То що ж краще, отримати 100000 грн. з ймовірністю $\frac{1}{10000000}$, чи 1 грн. з ймовірністю $\frac{1}{5}$?

Для підрахунку таких співвідношень можна використати числову характеристику випадкової величини — математичне сподівання. Математичним сподіванням називають суму добутків можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.[1] Тобто, тому, хто збирається заробити, граючи в гру Кєно, треба оперувати не ймовірністю виграшу, а ймовірністю отримання грошової премії за виграш — математичним сподіванням виграшу.

Не приводячи повних характеристик виграшних премій (Ви можете прочитати про них та про всі умови гри в Кєно в рекламній брошурці), порахуємо математичні сподівання виграшів (див. табл. 2).

Таблиця 2. Математичне сподівання виграшу

	Кількість обраних вами номерів								
Кількість вгаданих номерів	10	9	8	7	6	5	4	3	2
10	0.01122								
9	0.03060	0.01810							
8	0.06770	0.08148	0.04345						
7	0.08861	0.05916	0.04813	0.04880					
6	0.11479	0.08579	0.07100	0.07320	0.06449				
5	0.10285	0.13040	0.18302	0.17270	0.17026	0.15478			
4			0.16300	0.20876	0.14269	0.18138	0.12253		
3					0.12982	0.16787	0.17299	0.23588	
2							0.21263	0.27750	0.48101
1									
0	0.09158	0.12749							
Всього	0.50737	0.50245	0.50862	0.50354	0.50726	0.50403	0.50816	0.51338	0.48101

Значення, наведені в таблиці, трактуються таким чином. Наприклад, якщо Ви будете грати достатньо довго (в ідеалі — нескінченно довго), то закреслюючи кожен раз по 4 номери, Ви повернете, як виграш за рахунок вгадування 2-х номерів, 21.26 коп. на кожну затрачену Вами гривню.

Звернемо тепер увагу на останній рядок таблиці. В ньому приведені сумарні математичні сподівання виграшу при закресленні певної кількості номерів. Бачимо, що всі вони приблизно рівні 0.5. Це означає, що з фінансової точки зору немає ніякого значення, яку кількість номерів закреслювати.

[1] Детальніше про математичне сподівання можна прочитати, наприклад, в статті [4].

В будь якому випадку Ви в середньому будете втрачати половину грошей, вкладених в гру. І тепер стає зрозумілим факт, наведений в рекламній брошурці (я б з психологічних міркувань його приховав), що " ... вже 3000 років тому в стародавньому Китаї грали в лотерею Кєно ... Велика Китайська Стіна будувалася саме на її кошти". Хай живе невідомий китайський математик, який винайшов цей безпрограшний спосіб залазити в кишеню до своїх співвітчизників та ще мати від них подяку за турботу!

Тепер, коли ми зрозуміли, що заробити на цій грі неможливо, прояснимо ще кілька практичних моментів. За умовою гри один і той самий заповнений Вами білет може брати участь у кількох послідовних розіграшах, але при n розіграшах ваш білет стане відповідно в n разів дорожчим. Чи має це значення з практичної точки зору?

Нехай ймовірність виграшу в одному розіграші становить P. Тоді $1-P$ — ймовірність програшу. Ймовірність хоча б одного виграшу при участі в n розіграшах

$$P(1 \mid n) = 1 - (1-P)^n.$$

Оскільки $P < 1$, то

$$P(1 \mid n) < P(1 \mid n+1)$$

та

$$\lim_{n\to\infty} P(1 \mid n) = 1.$$

Тобто ймовірність виграти по одному білету зростає при збільшенні кількості розіграшів, в яких він приймає участь.

Порахуємо тепер математичне сподівання виграшу при участі в n розіграшах. Тобто, чи зміняться Ваші шанси повернути гроші в цьому випадку (я не кажу — "виграти гроші" з огляду на досвід китайських будівельників). Нехай математичне сподівання для виграшу в одному розіграші M, і Ви граєте n разів. Математичне сподівання d виграшів в n розіграшах $M^d(1-M)^{n-d}$ (d разів виграємо, а отже $(n-d)$ разів програємо). Оскільки таких комбінацій рівно C_n^d, то математичне сподівання виграшу при участі в n розіграшах визначається формулою:

$$M(n) = \frac{1}{n}\sum_{d=0}^{n} C_n^d M^d (1-M)^{n-d}. \tag{2}$$

Коефіцієнт $\frac{1}{n}$ з'являється тому, що при участі в n розіграшах треба заплатити в n разів більше. Враховуючи відому формулу

$$\sum_{d=0}^{n} C_n^d M^d (1-M)^{n-d} = nM,$$

маємо $M(n) = M$. Отже, з фінансової точки зору не має ніякої різниці, скільки розіграшів Ви замовите. Втрата половини грошей – математично обґрунтований результат Вашої гри. Хоча, звичайно, якщо Ви азартний гравець, грайте кілька разів — отримаєте принаймні моральне задоволення від самого факту вигравання та від участі у грі.

У рекламному проспекті є цікавий факт. Стверджується, що в середньому кожен п'ятий білет Кєно стає виграшним. Хоча, як бачимо з таблиці 1, середня ймовірність виграшу в 1 розіграші рівна 0.148. Отже, в середньому один білет приймає участь в 1.35 розіграшах ($0.2/0.148 \approx 1.35$). Не слід також радіти рекламній заяві, що, не вгадавши жодного номера при закресленні 9 чи 10 чисел, Ви щось виграєте. Ймовірність такого виграшу відповідно 3 та 5 шансів зі 100.

У чому основний висновок статті? В світі повно людей, які грають заради азарту. Для них важливий сам факт виграшу. Заради цієї втіхи вони готові платити гроші. Таких людей ми можемо втішити надією на те, що гроші, які вони віддають (приблизно так само люди віддають гроші, щоб, наприклад, отримати втіху від каруселі) підуть на пожвавлення національної економіки (тут не Китай, та і Стіни вже ніби-то ні до чого). Тим же, хто мріє задовольнити Велику Слов'янську Мрію "отримати щось задарма", радимо прочитати цю статтю та зосередитись на більш надійних проектах, наприклад, відкрити свою власну лотерею.

Література

1. М. Й. Ядренко, *Випадкові події*, У світі математики **8** (2002), № 2, 18–23.
2. М. Й. Ядренко, *Ймовірність випадкової події*, У світі математики **8** (2002), № 3, 12–19.
3. М. Й. Ядренко, *Випадкові величини*, У світі математики **9** (2003), № 1, 6–8.
4. М. Й. Ядренко, *Математичне сподівання випадкової величини*, У світі математики **9** (2003), № 2, 8–13.
5. В. Феллер,, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1, "Мир", Москва, 1984.

У глибинах нескінченних множин

Ф. Р. Липченко

Поняття множини виникло внаслідок абстрагування від того факту, що визначені й відмінні між собою предмети і явища навколишньої дійсності існують не ізольовано одне від одного, а в складі певним чином утворених сукупностей. Тому в обіг понять сучасної математики воно вводиться на рівні первісного, вихідного, далі вже не означуваного і дуже важливого поняття. Об'єкти, які утворюють множину, називаються її елементами і об'єднуються вони в сукупність за якою-небудь ознакою або яким-небудь правилом.

Для позначення певних зв'язків між предметами чи поняттями в математиці найчастіше користуються терміном "відношення". Між множинами та їх елементами задаються відношення належності, але більш змістовними виявляються відношення між самими множинами, зокрема відношення зіставлення або взаємопорівняння. Якщо кожному елементу з множини A відповідатиме один і тільки один елемент з множини B, до того ж різним елементам з A відповідають різні елементи з B, то говорять, що між множинами A і B встановлено *взаємно однозначну відповідність*. Множини, між елементами яких *хоча б одним способом* можна становити взаємно однозначну відповідність, називаються *еквівалентними*, або *рівнопотужними*.

Множини, обмежені за кількістю своїх елементів, називаються скінченими, а число, яке характеризує кількість елементів множини, називається *кардинальним*. Для скінчених множин кардинальне число співпадає з такою характеристикою множин як їх потужність. Для нескінченних множин справа з визначенням їх потужності значно ускладнюється і вступає в залежність від дещо інших факторів.

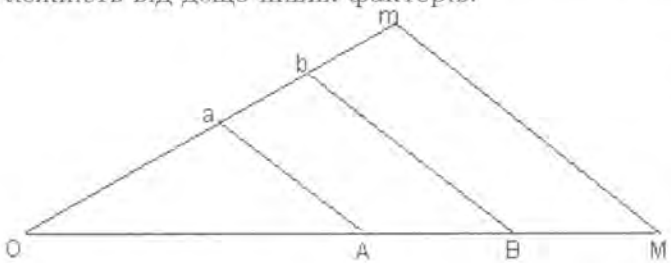


Рис. 1

Справа в тому, що існують множини, для яких можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементами самої множини і елементами її власної підмножини. Розглянемо ситуацію на рис. 1. Хоч відрізок Om менший за розмірами від OM (тобто він є підмножиною OM), але кожній довільній точці $A, B, \ldots$ одного відрізка можна поставити у відповідність одну і тільки одну точку $a, b, \ldots$ іншого відрізка і встановити їх взаємно однозначну відповідність. Цей парадоксальний, на перший погляд, результат (частина дорівнює цілому) є одним із сюрпризів нескінченності. Ця характеристична ознака нескінченних множин прийнята німецьким математиком Р. Дедекіндом за саме означення нескінченної множини:

нескінченною називається множина, з якої хоч би одним способом можна виділити власну підмножину, еквівалентну самій множині.

Проте в даний час є декілька логічних протиріч при використанні теорії в області нескінченних множин, що дісталися нам у спадщину від її засновника, видатного німецького математика Георга Кантора, який розпочав відчайдушну спробу проникнути в таємниці математичної нескінченності. Це поняття має настільки абстрактний характер, що його розуміння дається науці не легше, ніж поняття фізичної нескінченності в подобі Всесвіту або елементарних часток, що асоціюються в нашій свідомості з недосяжністю і неосяжністю своїх просторових, часових і структурних кількісних характеристик. Справді, часові інтервали від 10^{-23} до $5 * 10^{17}$ с, що перекривають діапазон 40 десяткових порядків (від часу життя резонансних часток до часу життя Всесвіту), такого ж порядку діапазони відстаней від ядерних до всесвітніх, різниця в інтенсивності дії електромагнітних і гравітаційних взаємодій, нарешті, сама кількість елементарних частинок, що складають Всесвіт, дорівнює 10^{80} одиниць і сконцентрована у сотнях мільйонів галактик, вражає нашу уяву і здається немислимою. Але досить показник ступеня в математичному виразі числа частинок Всесвіту збільшити усього на одну одиницю, як ми автоматично одержимо 10 Всесвітів. А можемо приписати не тільки одиницю ... От якими масштабами кількостей оперує математика! Давайте ж спробуємо детальніше розібратися в цих проблемах і просунутися трохи далі, ніж це вдалося Г. Кантору.

Факт нескінченності натурального ряду чисел тривіальний, тому що ми за визначенням творимо його шляхом послідовної операції додавання одиниці до попереднього члена ряду, починаючи з нуля, проведеної необмежене число разів. Але в математиці є цілий ряд інших послідовностей (рядів) із необмеженою кількістю членів, і було б цікавим спробувати порівняти їх між собою, щоб визначити вагомість кожної із них. Що розуміти під вагомістю конкретної нескінченності буде зрозуміло далі.

До таких фундаментальних нескінченностей належать множини цілих точок площини (рис. 2) і куба, раціональних і ірраціональних точок на одинич-

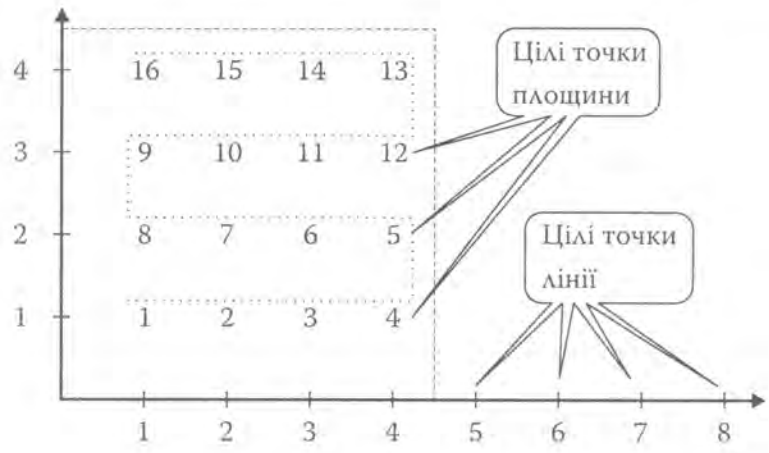


Рис. 2

ному відрізку (будемо називати їх раціональними й ірраціональними нескінченностями — РН і ІН), точок квадратичної ірраціональності тощо. Методику такого порівняння названих нескінченних множин і спробував розробити Г. Кантор.

Першим кроком був поділ множин на класи скінчених і нескінченних. Для скінчених множин було впроваджене поняття "кардинального числа", що характеризує кількість елементів даної множини. Зрозуміло, що для нескінченної множини це поняття втрачає зміст, тому що ніяким конкретним числом нескінченність висловити неможливо. Тоді він вирішив кожну із вищезгаданих нескінченних множин просто порівнювати з множиною чисел натурального ряду, ставлячи їхні члени у взаємно однозначну відповідність.

Візьмемо, наприклад, цілі числа квадратичної ірраціональності і почнемо їх рахувати (цілим числом цієї множини будемо називати число, яке після здійснення операції взяття кореня продовжує належати до множини натуральних чисел):

Ціле число						
множини	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{25}$	...
№ п/п	1	2	3	4	5	...

Ми одержали повну взаємно однозначну відповідність між цими двома рядами чисел. У такий спосіб за допомогою послідовних чисел натурального ряду ми можемо "перерахувати" члени заданої множини, і такі множини були названі "рахунковими" (зліченними).

Але роздивимося ряд квадратичних ірраціональностей, так би мовити, у повному бойовому порядку:

$$\underline{\sqrt{1}}\ \sqrt{2}\ \sqrt{3}\ \underline{\sqrt{4}}\ \sqrt{5}\ \sqrt{6}\ \sqrt{7}\ \sqrt{8}\ \underline{\sqrt{9}}\ \sqrt{10}\ldots,$$

в якому підкреслені його цілі числа, і ми побачимо, що цілих чисел цього ряду значно менше, ніж усіх його членів, тобто даний ряд ніби "потужніший" від натурального. З іншого боку, якщо ми почнемо перераховувати члени цього розгорнутого ряду за допомогою натуральних чисел, то знову одержимо взаємно однозначну відповідність. Ось чому у вищезазначеному визначенні нескінченних множини батьки-засновники теорії множин підкреслюють вагомість слів "хоч би одним способом", ігноруючи існування інших способів, при яких зіставлення двох множин виявляє їх нееквівалентність (див. також пояснення до рис. 2).

Суперечність, що з'являється, привела Г. Кантора до думки про те, що потужність натурального ряду придатна для проведення "якісних" порівнянь усередині великого кола нескінченних множин, що одержали загальне найменування "рахункових" (злічених) без надії на одержання більш точних кількісних характеристик. Тим більше, що незабаром йому вдалося довести положення, що є множини, які настільки переважають натуральний ряд за потужністю, що їхні члени вже не можуть бути поставлені з ним у взаємно однозначну відповідність. Не повторюючи тут доведення Г. Кантора, відзначимо лише, що прикладом такої множини є множина ІН. Такі множини

одержали назву "незліченних". Таким чином, Г. Кантор якісно розділив множини за ознакою потужності на три види, і ми дотепер користуємося цим поділом.

Але існуюче положення не може задовольнити нас ні з погляду логіки, ні з погляду математики. Математику не може задовольнити якісний підхід до проблеми, тому що вона Ї наука про кількісні співвідношення, а логіку не може задовольнити суперечливість граничного переходу: справді, обриваючи натуральний ряд у будь-якому, як завгодно далекому від його початку, але конкретному місці, ми точно знаємо, що парних чисел одержимо в два рази менше, ніж членів натурального ряду, а при переході до нескінченності ми втрачаємо в цьому впевненість, і вважаємо, що парні числа за потужністю дорівнюють всім числам натурального ряду, тому що перебувають з ними у взаємно однозначній відповідності.

Ці суперечливості теорії множин можуть бути подолані, якщо ми методично правильно скористаємося властивостями скінчених множин, що не відчувають подібних незручностей, і спроектуємо їх на взаємовідносини нескінченних множин. Нам необхідно відновити поняття "кардинального числа", але, звичайно, у переломленні до особливостей нескінченності. Кардинальне число скінченої множини здатне існувати тільки за наявності одиниці рахунку, якою є одиниця натурального ряду. За допомогою цієї одиниці ми заміряємо кількість елементів даної скінченої множини і ставимо на неї клеймо Ї кардинальне число, яке і характеризує його потужність. В умовах нескінченності, як уже зазначалося вище, кардинальне число і його міра (одиниця) втрачають свою репрезентативність. Нам необхідна якась заміна цього поняття, спроможна охопити глибину нескінченного. Питання вирішиться, якщо ми за одиницю нескінченності приймемо якусь визначену нескінченність і з її допомогою будемо заміряти всі інші нескінченності. Найзручнішою і найприроднішою такою одиницею є натуральний ряд, який ми позначимо через N і назвемо "одиницею потужності нескінченності" (ОПН).

При цьому всі суперечності зникають, і ми вільно і легко визначаємо вагові категорії серед будь-яких нескінченностей. Тоді парні числа натурального ряду будуть мати потужність $N/2$ (теж нескінченну, але усе ж удвічі меншу), і це не буде входити ні в яку суперечність з властивостями будь-якого скінченого послідовного ряду чисел. Тоді потужність цілих точок площини буде дорівнювати N^2, і це не буде бентежити розуми студентів, які дивуються зараз від того, що їм доводять дивну тезу про те, що потужності множини цілих точок лінії і площини зліченні і, отже, рівнопотужні.

Але, скажете ви, Г. Кантор також вимірює потужності натуральним рядом. Чим же його метод гіршезапропонованого? Вся справа в тому, що він нескінченності виміряє скінченими одиницями, коли ставить у взаємно однозначну відповідність члени натурального ряду з елементами множини, що вимірюється. І при цьому виникає так звана "фігура умовчання". Звернімося до рис. 2.

У межах квадрата 4×4 ми хочемо перерахувати цілі точки площини, котрих, природно, більше ніж 4. Але в нашому розпорядженні усього 4 одиниці натурального ряду (в межах окресленого поля), якими ми можемо оперува-

ти при встановленні взаємно однозначної відповідності двох множин. Тоді ми, "ничтоже сумняшеся", мовчки порушуємо межу заданого поля і починаємо користуватися в борг наступними числами тільки тому, що вони є в запасі за межами окресленого квадрата. І тому, що натуральний ряд нескінченний, то цей фокус у нас проходить майже завжди. Але це абсолютно не гарантує слушність рішення, зокрема, ставити знак рівності між кількістю цілих точок площини і натуральним рядом для нескінченності навряд чи справедливо, тому що пройшовши перший нижній ряд цілих точок площини у відповідності до цілих точок координатної осі ми вичерпаємо можливості натурального ряду і для підрахунку точок другого ряду площини позичати числа буде вже ні в кого, а, отже, говорити про рівність потужностей не випадає. Тобто існує спосіб переліку цілих точок площини, який не дає бажаного результату еквівалентності двох множин. Користуючись же ОПН, ми повертаємося в лоно добре знайомої нам теорії меж і чинимо при порівнянні нескінченностей просто граничний перехід від скінченого до нескінченного. Наприклад, порівнюючи потужність натурального ряду з потужністю парних чисел, отримуємо:

$$\lim_{n\to N} \frac{n}{n/2} = \frac{N}{N/2} = 2,$$

і парних чисел завжди буде в 2 рази менше, ніж усіх, і цей результат є однозначним.

На закінчення спробуємо знайти математичний вираз в ОПН для дуже цікавих множин РН і ІН, згаданих на початку статті. Для розрахунку потужності РН запишемо всі можливі значення правильних дробів у порядку зростання чисельників і знаменників у вигляді матриці (рис. 3).

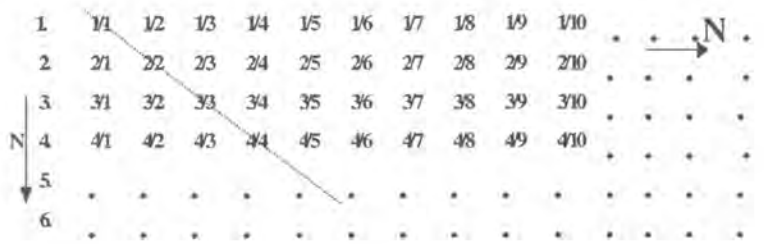


Рис. 3

При такій формі запису всі правильні дроби розміщуються праворуч від риски і їхню загальну кількість у грубому наближенні вже можна оцінити, як $N^2/2$. Але тому що деякі з них, ті, що мають кратні чисельники і знаменники, багаторазово повторюються, наприклад

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots,$$

то це значення потужності повинно бути зменшено. Наскільки? Відповідь на це питання дає прямий підрахунок кількості нескорочених правильних

дробів на даному інтервалі знаменників. Зокрема, на рис. 3 для знаменників до 7-ми маємо такі 17 нескорочуваних дробів:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}$$

Якщо ми продовжимо такі підрахунки, то отримані дані можна відобразити в таблиці:

Значення проміжку знаменників	0–100	0–200	0–500	0–900
Кількість нескорочених дробів	3042	I2I95	76052	246260
Дані за формулою, що апроксимує	3040	I2I58	75991	246210

З таблиці очевидно, що формула, яка апроксимує, у вигляді

$$\frac{n^2}{\pi^2/3} \approx \frac{n^2}{3.29},$$

де n — значення знаменника, достатньо добре відбиває реальну поведінку даної функції, і потужність РН, виражена в ОПН, становить приблизно третю частину від потужності цілих точок площини. Цей результат вперше отриманий автором статті і цікавий самий по собі, тому що дільник N^2 дорівнює:

$$\frac{\pi^2}{3} = 2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$$

і розкриває якісь додаткові глибинні зв'язки у взаємовідносинах між числами натурального ряду і їхніх раціональних відображень.

Нам залишається тільки оцінити потужність ІН і зрозуміти, чому вона незліченна. Усім знайома система маркування автомобілів індивідуальними номерами, скажімо КІ 12–34, що складаються з буквеної серії і цифрового набору. За допомогою цього коду можна відзначити 10000 автомобілів у кожній серії, причому ця відмінність буде виражатися, як мінімум, одною цифрою в якомусь розряді, тобто множина автомобілів що відзначаються, визначається кількістю комбінацій по 4 цифри (за числом розрядів) із 40 наявних цифр (у десятковій системі числення). За таким же принципом ми можемо підрахувати і множину ІН, тому що кожний член цієї множини виражається нескінченним неперіодичним десятковим дробом, і число комбінацій цифр десяткових розрядів цих дробів визначить нам необхідну потужність цієї множини. Вона дорівнює 10^N! Отже де був заритий собака! Виявляється, незліченною множина стає тоді, коли містить нескінченність у показнику ступеня!

Лише тепер ми можемо відчути наскільки велика потужність континууму одиничного відрізка, основу якого і складають ірраціональні числа. Раціональні ж числа, що мають періодичний порядок цифр у десятковому "хвості" після коми, вкладають у континуум "усього лише" $\frac{3N^2}{\pi^2}$ ОПН. При цьому зображення чисел у різноманітних системах числення не змінює істотно цих

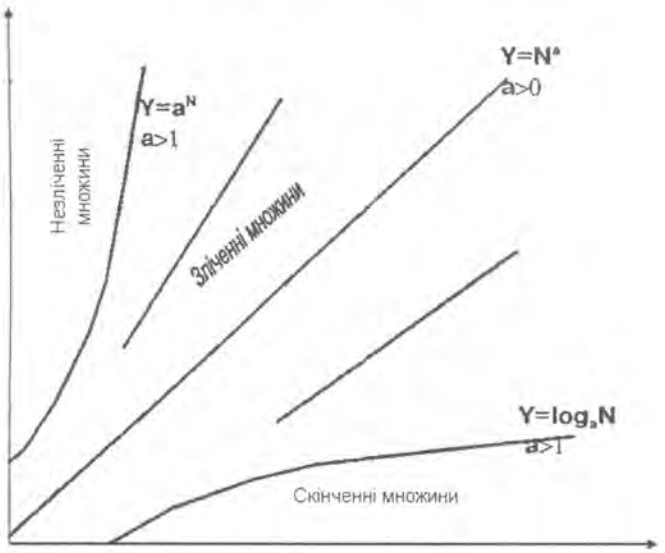


Рис. 4

співвідношень. Скажімо, у двійковій системі ІН виразиться як $\approx 2^{3.2N}$, тобто залишається показовою, що не виводить її за межі свого "незліченного" класу потужностей.

Таким чином, усі три види потужностей множин можна зобразити в координатній площині такими областями (рис. 4).

Стає цілком зрозумілим, які непевні наші визначення, які відносні поняття, які багатогранні переходи! Адже нескінченність для усіх одна, і тільки щільність упаковки на одиничній довжині або швидкість досягнення нескінченності відрізняють вагомість множин одне від одного.

На закінчення підсумуємо викладене. Що нам дає порівняння нескінченних множин за методом Г. Кантора? Ми отримуємо одну показову незліченну множину у вигляді континууму точок одиничного відрізка (тобто множину ІН), всі інші набувають статусу зліченних без усякого натяку на кардинальну самобутність. Крім того, ми здобуваємо неприємні колізії з логікою у зв'язку із залежністю результатів порівняння від способу його проведення.

За запропонованою методою з використанням ОПН кожна нескінчена множина отримує індивідуальне обличчя, логічні протиріччя зникають і безкінечність стає нам ближчою і зрозумілішою, бо ми вже давно звикли робити граничні переходи в теорії меж. Ми починаємо розуміти, що парадоксальні ситуації на кшталт рис.1 виникають тільки тому, що математичні об'єкти (точки, лінії, площини), якими оперує математика, кардинально відрізняються від аналогічних фізичних об'єктів, бо позбавлені матеріальних атрибутів (розмірів, маси, і т.і.), набувають абстрактного статусу, і з ними можуть траплятися найдивовижніші речі, коли, наприклад, частина дорівнює цілому, або коли Ахілл не може наздогнати черепаху (відповідно до відомої апорії Зенона).

Нерівність Кі Фана

О. М. Вороний, О. О. Вороний[1]

Нехай $a_1, \ldots, a_n$ — числа з проміжку $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, $n \geq 2$. Утворимо середні арифметичні

$$A_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \qquad A'_n = \frac{(1-a_1) + \cdots + (1-a_n)}{n}$$

і середні геометричні

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}, \qquad G'_n = \sqrt[n]{(1-a_1) \cdot \ldots \cdot (1-a_n)}.$$

Нерівністю Кі Фана для чисел $a_1, \ldots, a_n$ називається співвідношення

$$\frac{A_n}{A'_n} \geq \frac{G_n}{G'_n}, \tag{1}$$

у якому знак рівності досягається тоді і тільки тоді, коли $a_1 = \cdots = a_n$.

Нерівність Кі Фана є своєрідним узагальненням нерівності Коші. Як зазначено в [1] нерівність (1) можна довести методом математичної індукції. В [2] вміщено три доведення вагової нерівності Кі Фана:

$$\frac{\tilde{A}_n}{\tilde{A'}_n} \geq \frac{\tilde{G}_n}{\tilde{G'}_n}, \tag{1'}$$

яка пов'язує зважені середні арифметичні

$$\tilde{A}_n = \frac{p_1 a_1 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + \cdots + p_n}, \qquad \tilde{A'}_n = \frac{p_1 (1-a_1) + \cdots + p_n (1-a_n)}{p_1 + \cdots + p_n}$$

і зважені середні геометричні

$$\tilde{G}_n = (a_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n})^{1/p}, \qquad \tilde{G'}_n = ((1-a_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (1-a_n)^{p_n})^{1/p},$$

де $p_1, \ldots, p_n$ — додатні вагові коефіцієнти і $p_1 + \cdots + p_n = p$. Два доведення нерівності (1′) базуються на нерівності Йєнсена для опуклих функцій, тому в цих доведеннях вагові коефіцієнти підпорядковані умові $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Третє доведення проводиться за допомогою інтегралу.

Нерівність (1) є частинним випадком (1′), коли $p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$. Тому згадані способи доведення стосуються й нерівності (1).

---

[1]Вороний Олексій Миколайович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математики; Вороний Олексій Олексійович — магістрант кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету ім. В. Винниченка.

Пропонуємо ще одне доведення нерівності Кі Фана, яке проведемо методом математичної індукції, залучаючи для перевірки бази індукції і виконання кроку індукції похідну [3].

База індукції. Для $n = 2$ нерівність (1) набуває такого вигляду:

$$\frac{a_1 + a_2}{2 - a_1 - a_2} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)}},$$

або

$$\frac{a_1 + a_2}{2 - a_1 - a_2} \cdot \frac{\sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)}}{\sqrt{a_1 a_2}} \geq 1. \tag{2}$$

Введемо функцію

$$f_1(x) = \ln\left(\frac{a + x}{2 - a - x} \cdot \frac{\sqrt{(1 - a)(1 - x)}}{\sqrt{ax}}\right),$$

де $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ — параметр. Визначимо найменше значення функції на проміжку $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. Для цього використаємо її похідну

$$f_1'(x) = \frac{1}{a + x} + \frac{1}{2 - a - x} - \frac{1}{2(1 - x)} - \frac{1}{2x} = \frac{-3x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 2a}{2x(a + x)(2 - a - x)(1 - x)}.$$

Стаціонарними точками функції $f_1(x)$ є корені $x_1 = a$ і $x_2 = \frac{2-a}{3}$ квадратного тричлена $-3x^2 + 2(a + 1)x + a^2 - 2a = 0$, який міститься в чисельнику похідної. При цьому $0 < x_1 < \frac{1}{2} < x_2$, якщо $0 < a < \frac{1}{2}$, і $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, коли $a = \frac{1}{2}$.

Нехай $0 < a < \frac{1}{2}$ Тоді, враховуючи знак квадратного тричлена, встановлюємо, що $f_1'(x) < 0$ в інтервалі $(0; x_1)$ і $f_1'(x) > 0$ на проміжку $\left(x_1; \frac{1}{2}\right]$. За ознакою монотонності в першому інтервалі функція $f_1(x)$ спадає, а на другому проміжку зростає. Тому $f_1(x) > f_1(x_1)$ для $0 < x < x_1$ і $f_1(x) > f_1(x_1)$ для $x_1 < x \leq \frac{1}{2}$.

Якщо $a = \frac{1}{2}$, то

$$f_1'(x) = \frac{-3(2x - 1)^2}{2x(2x + 1)(3 - 2x)(1 - x)} \leq 0,$$

а тому на проміжку $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ функція $f_1(x)$ спадає і досягає свого найменшого значення в точці $x_1 = \frac{1}{2}$.

Отже, $f_1(x_1)$ — найменше значення функції на проміжку $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ для всіх $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Оскільки $f_1(x_1) = f_1(a) = \ln 1 = 0$, то для всіх $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ і $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ маємо нерівність:

$$f_1(x) \geq 0, \quad \text{звідки} \quad \frac{a + x}{2 - a - x} \cdot \frac{\sqrt{(1 - a)(1 - x)}}{\sqrt{ax}} \geq 1.$$

Заміною в останній нерівності a на a_1 і x на a_2 завершуємо встановлення бази індукції, якою є нерівність (2).

Крок індукції. Припустимо, що нерівність (1), яку запишемо так:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \geq \frac{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}}{\sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}},$$

або

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \cdot \frac{\sqrt[n]{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}}{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \geq 1, \qquad (3)$$

виконується для $n>2$ і поміж $a_1,\ldots,a_n$ є різні числа. Використовуючи ці припущення, доведемо нерівність

$$\frac{A_{n+1}}{A'_{n+1}} \geq \frac{G_{n+1}}{G'_{n+1}},$$

тобто

$$\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1-(a_1+\cdots+a_n+a_{n+1})} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{(1-a_1)\ldots(1-a_n)(1-a_{n+1})}}{\sqrt[n+1]{a_1\ldots a_na_{n+1}}} \geq 1. \quad (4)$$

Введемо функцію

$$f_n(x) = \ln\left(\frac{S_n+x}{(n+1)-S_n-x} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{P_n(1-x)}}{\sqrt[n+1]{\Pi_n x}}\right),$$

де

$$\begin{gathered} S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n, \qquad \Pi_n = a_1a_2\ldots a_n, \\ P_n = (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n). \end{gathered} \qquad (5)$$

Визначимо найменше значення цієї функції на проміжку $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. Її похідна

$$f'_n(x) = \frac{-\left(n^2+2n\right)x^2+\left(n^2+n+2S_n\right)x-S_n(S_n-n-1)}{x(n+1)(1-x)(x+S_n)(n+1-x-S_n)}$$

дорівнює нулю в точках $x_1=\frac{S_n}{n}\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $x_2=\frac{1+n-S_n}{2+n}\geq\frac{1}{2}$, від'ємна в інтервалі $(0;x_1)$ і додатна, коли $x\in\left(x_1;\frac{1}{2}\right]$. Тому $f_n(x_1)$ — найменше значення функції f_n на проміжку $\left(x_1;\frac{1}{2}\right]$. Знайдемо це значення:

$$f_n(x_1) = \ln\left(\frac{S_n+x_1}{(n+1)-S_n-x_1} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{(1-x_1)P_n}}{\sqrt[n+1]{\Pi_n x_1}}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{S_n+\frac{S_n}{n}}{(n+1)-S_n-\frac{S_n}{n}} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{\left(1-\frac{S_n}{n}\right)P_n}}{\sqrt[n+1]{\Pi_n\frac{S_n}{n}}}\right) = \ln \sqrt[n+1]{\frac{S_n^{n+1}(n-S_n)P_n}{(n-S_n)^{n+1}\Pi_nS_n}} =$$

$$= \ln \sqrt[n+1]{\frac{S_n^n P_n}{(n-S_n)^n \Pi_n}} = \frac{n}{n+1} \ln \left(\frac{S_n}{n-S_n} \cdot \frac{\sqrt[n]{P_n}}{\sqrt[n]{\Pi_n}} \right).$$

Маємо

$$f_n(x_1) = \frac{n}{n+1} \ln \left(\frac{S_n}{n-S_n} \cdot \frac{\sqrt[n]{P_n}}{\sqrt[n]{\Pi_n}} \right). \tag{6}$$

Оскільки, враховуючи позначення і припущення (3), маємо нерівність

$$\frac{S_n}{n-S_n} \cdot \frac{\sqrt[n]{P_n}}{\sqrt[n]{\Pi_n}} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n-(a_1+\cdots+a_n)} \cdot \frac{\sqrt[n]{(1-a_1)\ldots(1-a_n)}}{\sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_n}} \geq 1,$$

то $f_n(x_1) \geq \frac{n}{n+1} \ln 1 = 0$. Тому $f_n(x) \geq 0$ для всіх $a_k \in \left(0; \frac{1}{2}\right], k = 1, \ldots, n$, і $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Якщо ж $x = a_{n+1}$, то

$$f_n(a_{n+1}) = \ln \left(\frac{S_n + a_{n+1}}{(n+1) - S_n - a_{n+1}} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{P_n(1-a_{n+1})}}{\sqrt[n+1]{\Pi_n a_{n+1}}} \right) \geq 0.$$

Звідси, враховуючи монотонність логарифмічної функції і введені позначення (5), приходимо до нерівності (4).

Отже, нерівність (1) виконується для всіх $n \geq 2$.

Тепер доведемо, що рівність $\frac{A_n}{A'_n} = \frac{G_n}{G'_n}$ виконуються тоді і тільки тоді, коли $a_1 = \cdots = a_n$.

Правильність достатності цього твердження встановлюється безпосередньою перевіркою. Для доведення необхідності використаємо метод математичної індукції. Спочатку встановимо базу індукції:

$$\frac{a_1 + a_2}{2 - a_1 - a_2} = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)}}.$$

Вводячи позначення $a_1 + a_2 = S_2, a_1 a_2 = \Pi_2$, перетворимо цю рівність:

$$\frac{S_2}{2-S_2} = \sqrt{\frac{\Pi_2}{1-S_2+\Pi_2}}, \; S_2^2(1-S_2+\Pi_2) = (2-S_2)^2 \Pi_2,$$

$$(1-S_2)(S_2^2 - 4\Pi_2) = 0, \quad \left[\begin{array}{l} 1-S_2 = 0, \\ S_2^2 - 4\Pi_2 = 0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a_1 + a_2 = 1, \\ (a_1 - a_2)^2 = 0, \end{array}\right. \quad a_1 = a_2.$$

Базу індукції доведено.

Припустимо що з рівності $\frac{A_n}{A'_n} = \frac{G_n}{G'_n}$, де $n > 2$, випливають рівності $a_1 = \cdots = a_n$. Розглянемо рівність $\frac{A_{n+1}}{A'_{n+1}} = \frac{G_{n+1}}{G'_{n+1}}$, яку відповідно з позначеннями (5), запишемо так:

$$\frac{S_n + a_{n+1}}{(n+1) - S_n - a_{n+1}} \cdot \frac{\sqrt[n+1]{P_n(1-a_{n+1})}}{\sqrt[n+1]{\Pi_n a_{n+1}}} = 1.$$

Звідси, використовуючи функцію $f_n(x)$, маємо $f_n(a_{n+1}) = 0$. Оскільки $f_n(x_1)$, де $x_1 = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ — найменше значення функції $f_n(x)$ на проміжку $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, то з співвідношень $0 \le f_n(x_1) \le f_n(a_{n+1}) = 0$ отримуємо $f_n(x_1) = f_n(a_{n+1}) = 0$.

З рівності $f_n(x_1) = 0$, згідно з (6), маємо

$$\frac{n}{n+1} \ln\left(\frac{S_n}{n-S_n} \cdot \frac{\sqrt[n]{P_n}}{\sqrt[n]{\Pi_n}}\right) = 0, \quad \frac{S_n}{n-S_n} \cdot \frac{\sqrt[n]{P_n}}{\sqrt[n]{\Pi_n}} = 1, \quad \frac{A_n}{A'_n} = \frac{G_n}{G'_n},$$

а отже за зробленим припущенням виконуються рівності $a_1 = \cdots = a_n$.

Водночас з рівності $f_n(x_1) = f_n(a_{n+1})$ і єдиності стаціонарної точки x_1 на проміжку $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ функції $f_n(x)$ маємо рівність $x_1 = a_{n+1}$. Тому

$$a_{n+1} = x_1 = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \frac{na_n}{n} = a_n,$$

а отже, $a_1 = \cdots = a_n = a_{n+1}$. Нерівність (1) доведено.

Доведення вагової нерівності (1′) проведемо поетапно. Спочатку це зробимо для додатних вагових коефіцієнтів $p_1, \ldots, p_n$, які є натуральними числами, потім для раціональних коефіцієнтів і насамкінець — для ірраціональних.

У першому випадку доведення очевидне, бо вагові середні арифметичне $\tilde{A}_n$ і геометричне $\tilde{G}_n$ для n чисел $a_1, \ldots, a_n$ співпадають з відповідними середніми для p чисел $\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{p_1}, \ldots, \underbrace{a_n, \ldots, a_n}_{p_n}$. Це стосується і середніх вагових $\tilde{G}_n$ та $\tilde{G}'_n$.

Випадок, коли $p_i = \frac{m_i}{k_i}$, $i = 1, \ldots, n$, де m_i, k_i — натуральні числа, зводиться до першого, бо

$$\tilde{A}_n = \frac{kp_1a_1 + \cdots + kp_na_n}{kp_1 + \cdots + kp_n}, \quad \tilde{A'}_n = \frac{kp_1(1-a_1) + \cdots + kp_n(1-a_n)}{kp_1 + \cdots + kp_n},$$

$$\tilde{G}_n = \left(a_1^{kp_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{kp_n}\right)^{\frac{1}{kp}}, \quad \tilde{G'}_n = \left((1-a_1)^{kp_1} \cdot \ldots \cdot (1-a_n)^{kp_n}\right)^{\frac{1}{kp}},$$

де $kp_1, \ldots, kp_n$ — натуральні числа, якщо k — найменше спільне кратне чисел $k_1, \ldots, k_n$.

Зупинимося на випадку, коли вагові коефіцієнти — ірраціональні числа. Нехай $p_{1k}, \ldots, p_{nk}$ — десяткові наближення з надлишком чи недостачею ірраціональних чисел $p_1, \ldots, p_n$. Тоді для раціональних вагових коефіцієнтів $p_{1k}, \ldots, p_{nk}$ має місце нерівність (1′):

$$\frac{p_{1k}a_1 + \cdots + p_{nk}a_n}{p_{1k}(1-a_1) + \cdots + p_{nk}(1-a_n)} \ge \frac{\left(a_1^{p_{1k}} \ldots a_n^{p_{nk}}\right)^{\frac{1}{p_{1k}+\cdots+p_{nk}}}}{\left((1-a_1^{p_{1k}}) \ldots (1-a_n^{p_{nk}})\right)^{\frac{1}{p_{1k}+\cdots+p_{nk}}}},$$

$$\ln\left(\frac{p_{1k}a_1 + \cdots + p_{nk}a_n}{p_{1k}(1-a_1) + \cdots + p_{nk}(1-a_n)}\right) \ge \frac{1}{p_{1k} + \ldots p_{nk}} \left(p_{1k} \ln \frac{a_1}{1-a_1} + \cdots + p_{nk} \ln \frac{a_n}{1-a_n}\right).$$

Перейдемо до границі в останній нерівності при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{p_{1k}a_1 + \cdots + p_{nk}a_n}{p_{1k}(1-a_1) + \cdots + p_{nk}(1-a_n)}\right) \geq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p_{1k} + \ldots p_{nk}} \left(p_{1k} \ln \frac{a_1}{1-a_1} + \cdots + p_{nk} \ln \frac{a_n}{1-a_n}\right).$$

Використовуючи неперервність логарифмічної функції і властивості границі, матимемо

$$\ln\left(\frac{a_1 \lim_{k\to\infty} p_{1k} + \cdots + a_n \lim_{k\to\infty} p_{nk}}{(1-a_1)(\lim_{k\to\infty} p_{1k} + \cdots + (1-a_n)\lim_{k\to\infty} p_{nk}}\right) \geq \frac{\left(\ln \frac{a_1}{1-a_1} \lim_{k\to\infty} p_{1k} + \cdots + \ln \frac{a_n}{1-a_n} \lim_{k\to\infty} p_{nk}\right)}{\lim_{k\to\infty} p_{1k} + \cdots + \lim_{k\to\infty} p_{nk}}.$$

Оскільки $\lim_{k\to\infty} p_{1k} = p_1, \ldots, \lim_{k\to\infty} p_{nk} = p_n$, то остання нерівність рівносильна нерівності $(1')$. Вагову нерівність Кі Фана доведено. З доведення випливає, що нерівність $(1')$ перетворюється в рівність тоді і тільки тоді, коли $a_1 = \cdots = a_n$.

Нерівність

$$\ln\left(\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b (1-f(x))\,dx}\right) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right)dx, \tag{7}$$

де функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і набуває значення на проміжку $\left(0;\frac{1}{2}\right]$, є інтегральним аналогом нерівності Кі Фана. Оскільки

$$\ln\left(\frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b (1-f(x))\,dx}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}{\frac{1}{b-a}\int_a^b (1-f(x))\,dx}\right),$$

то нерівність (7) означає, що натуральний логарифм відношення середніх значень інтегралів функцій $f(x)$ і $1-f(x)$ не менший за середнє значення інтегралу від натурального логарифма відношення цих функцій на відрізку $[a;b]$.

Для доведення цієї нерівності виконаємо рівномірне розбиття відрізка $[a;b]$ точками $x_0 = a, x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, де $k = 1, \ldots, n$, на n частин. Для чисел $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ має місце нерівність Кі Фана

$$\frac{\frac{1}{n}\left(f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right)}{\frac{1}{n}\left((1-f(x_1)) + \cdots + (1-f(x_n))\right)} \geq \frac{\sqrt[n]{f(x_1)\cdot\ldots\cdot f(x_n)}}{\sqrt[n]{(1-f(x_1))\cdot\ldots\cdot(1-f(x_n))}}. \tag{8}$$

Прологарифмуємо цю нерівність і одержаний результат запишемо так:

$$\ln\left(\frac{f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x}{(1-f(x_1))\,\Delta x + \cdots + (1-f(x_n))\,\Delta x}\right) \geq \frac{1}{b-a}\left(\left(\ln\frac{f(x_1)}{1-f(x_1)}\right)\Delta x + \cdots + \left(\ln\frac{f(x_n)}{1-f(x_n)}\right)\Delta x\right),$$

де $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Перейдемо у цій нерівності до границі при умові, що $n \to \infty$. За властивостями границі отримаємо нерівність

$$\ln\left(\frac{\lim_{n\to\infty}\left(f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x\right)}{\lim_{n\to\infty}\left((1-f(x_1))\,\Delta x + \cdots + (1-f(x_n))\,\Delta x\right)}\right) \geq \frac{1}{b-a}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\left(\ln\frac{f(x_1)}{1-f(x_1)}\right)\Delta x + \cdots + \left(\ln\frac{f(x_n)}{1-f(x_n)}\right)\Delta x\right)\right). \tag{9}$$

Оскільки $\Delta x \to 0$, якщо $n \to \infty$, то за означенням інтегралу маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x\right) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left((1-f(x_1))\,\Delta x + \cdots + (1-f(x_n))\,\Delta x\right) = \int_a^b (1-f(x))\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\ln\frac{f(x_1)}{1-f(x_1)}\right)\Delta x + \cdots + \left(\ln\frac{f(x_n)}{1-f(x_n)}\right)\Delta x\right) = \int_a^b \ln\frac{f(x)}{1-f(x)}\,dx.$$

Тому нерівність (9) є не що інше, як нерівність (8).

Інтегральним аналогом вагової нерівності Кі Фана є нерівність

$$\ln\left(\frac{\int_a^b f(x)p(x)\,dx}{\int_a^b (1-f(x))\,p(x)\,dx}\right) \geq \frac{1}{\int_a^b p(x)\,dx}\int_a^b p(x)\ln\left(\frac{f(x)}{1-f(x)}\right)dx,$$

де $p(x)$ — додатна і неперервана на відрізку $[a;b]$ функція.

Література

1. Беккенбах Э., Беллман Р., *Неравенства*, "Мир", Москва, 1965.
2. Калинин С.И., *Неравенство Ки Фана*, Математика в школе (2004), № 8, 69–72.
3. Вороний О.М., *Про один спосіб доведення класичних нерівностей*, У світі математики **7** (2001), № 2, 23–32.

Від олімпіадної задачі — до нових кіл у геометрії трикутника

Л. А. Кіношевер,[1] *І. М. Мітельман*,[2] *А. С. Швець*[3]

0. Вступ

На Всеукраїнській олімпіаді юних математиків 2003 року для учнів 11 класу було запропоновано наступну задачу (автор — Заслужений вчитель України та АР Крим Ігор Петрович Нагель).

Задача. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до його сторін AB, BC і AC в точках K, M і N відповідно. Нехай P (див. рис. 0, на якому цю точку позначено P_B) — точка перетину прямих, які містять середні лінії трикутників AKN і CMN, котрі паралельні сторонам KN і NM відповідно. Довести, що описане коло трикутника ACP дотикається до вписаного кола трикутника ABC.

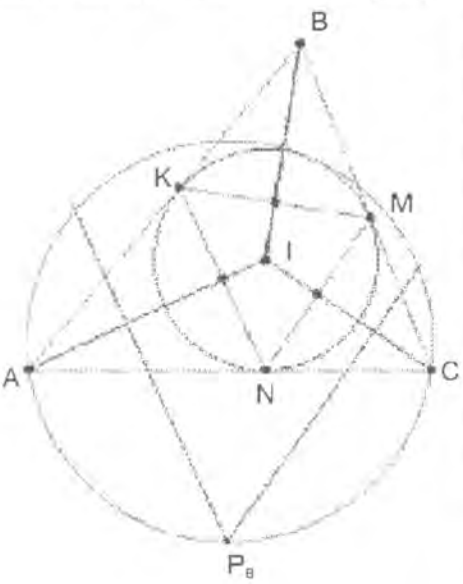


Рис. 0

Задача виявилася найскладнішою задачею олімпіади: її розв'язав лише один учасник — учень Українського фізико-математичного ліцею при КНУ ім. Тараса Шевченка Арам Туманян.

Сформульований у задачі факт викликав значний інтерес у багатьох викладачів та знавців елементарної геометрії. Після олімпіади в різних математичних та методичних виданнях було подано декілька її розв'язань (ми — для зручності — наводимо їх у розділі 4 даної статті): власне розв'язання автора задачі, розв'язання А. Туманяна та розв'язання, запропоноване членом журі олімпіади І. М. Мітельманом (останнє ґрунтувалося на органічному поєднанні геометричних ідей та аналітичних методів).

---

[1]Кіношевер Леонід Анатолійович — викладач дитячо-юнацького культурного центру "Самоцвіт" Приморського району м. Одеси.

[2]Мітельман Ігор Михайлович — Заслужений вчитель України, кандидат фізико-математичних наук, доцент, викладач Рішельєвського ліцею м. Одеси.

[3]Швець Андрій Сергійович — студент Одеського національного університету ім. І.І.Мечникова, випускник Рішельєвського ліцею м. Одеси.

Утім, геометричні "механізми", задіяні в даній задачі, є набагато більш змістовними, аніж може бути висвітлено однією — навіть і досить вишуканою — олімпіадною задачею. Крім того, перетворення олімпіадної задачі на об'єкт самостійної математичної розвідки завжди привертало підвищену методичну увагу (як приклад можна було б навести численні публікації часописів "Квант", "Математика в школі", "У світі математики" тощо).

Доведення автора задачі пов'язане з дослідженням трьох важливих кіл, котрі називатимемо колами І. П. Нагеля, і трьох точок, що позначаються надалі як P_A, P_B і P_C (див. рис. 2.1). Походження цих кіл та точок буде обговорюватися нижче. Автор задачі розглянув тільки деякі властивості даних об'єктів, причому виключно в межах складеної ним задачі, не заглиблюючись в їхні геометричні "взаємовідносини".

Метою даної статті є подальше дослідження кіл І. П. Нагеля та властивостей точок P_A, P_B і P_C. Основними результатами є такі:

(1) доведено, що кожне з кіл І. П. Нагеля дотикається до описаного кола Ω трикутника $P_AP_BP_C$;
(2) доведено, що коло Ω є концентричним до описаного кола трикутника ABC;
(3) отримано формули для радіуса кола Ω;
(4) розглянуто узагальнення для зовнівписаних кіл.

1. Допоміжні твердження

Лема 1.1 (див. також [7]). *Точки попарного перетину серединних перпендикулярів до відрізків, що сполучають вершини трикутника з його інцентром I, лежать на описаному колі вихідного трикутника (це точки A і L_C) (див. рис. 1).*

Доведення. Доведемо даний факт, наприклад, для сторони AC (для решти сторін — аналогічно).

Розглянемо точку L_B — точку перетину бісектриси кута B та описаного кола: $\angle L_BIC = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ (як зовнішній кут трикутника CIB), $\angle L_BCA = \frac{\beta}{2}$ (оскільки цей кут і кут ABL_B спираються на спільну дугу).

Далі, $\angle ICA = \frac{\gamma}{2}$, $\angle L_BCI = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$, а тому L_BIC— рівнобедрений.

Таким чином, L_B належить серединному перпендикулярові відрізка CI. Повністю аналогічно доводиться, що ця точка належить серединному перпендикуляру відрізка AI.

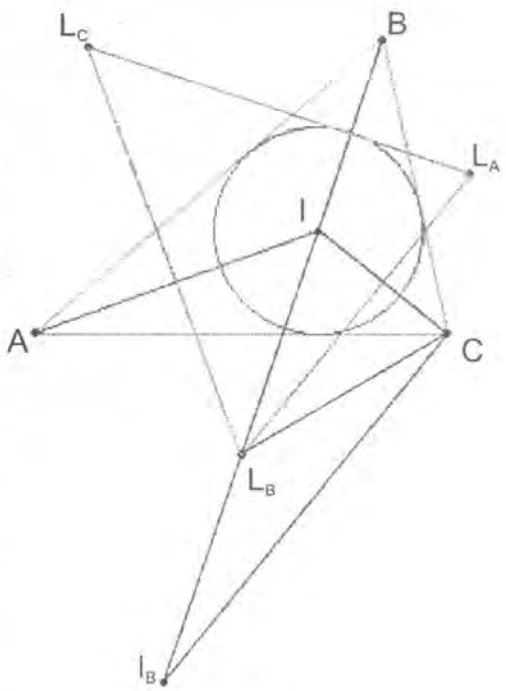


Рис. 1

Лема 1.2 (див. також [7]). *Серединні перпендикуляри, проведені до відрізків, що сполучають вершини трикутника з центрами зовнівписаних кіл (кожні дві вершини — з центром кола, котре дотикається до відповідної сторони), перетинаються на описаному колі вихідного трикутника, причому — у точках L_A, L_B і L_C відповідно (див. рис. 1).*

Доведення. Доведення проведемо для сторони AC. Нехай I_B — центр зовнівписаного кола. Маємо, що, $\angle ICI_B = 90°$, $\angle CII_B = \frac{\beta+\gamma}{2}$ (як зовнішній кут трикутника BIC),

$$\angle CI_BL_B = 90° - \angle CII_B = 90° - \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) = \frac{180° - \beta - \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$
$$\angle L_BCI_B = 90° - \angle ICL_B = \frac{\alpha}{2}.$$

Таким чином, I_BCL_B — рівнобедрений, а тому точка L_B належить серединному перпендикулярові відрізка CI_B. Аналогічно — для відрізка AI_B.

2. Нові результати щодо вписаного кола

Теорема 2.1. *Чотирикутник AQ_AQ_CC ($Q_A = AI \cap NK$, $Q_C = CI \cap NM$) є вписаним до кола з центром у точці P_B (для точок P_A і P_C аналогічно) (див. рис. 2.1).*

Доведення. Нехай Q_AQ_C — середня лінія $\triangle KMN$, вершинами якого є точки дотику вписаного кола до сторін $\triangle ABC$.

Тоді

$$Q_AQ_C \parallel KM$$

і $BI \perp Q_AQ_C$ (зауважимо, що трикутник BKM є рівнобедреним, промінь BI — бісектриса кута KBM). Розглянемо трикутник ISQ_C ($S = BI \cap Q_AQ_C$): $\angle SIQ_C = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$ (як зовнішній кут трикутника BIC),

$$\angle SQ_CI = 90° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{180° - \beta - \gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$
$$\angle CQ_CQ_A = 180° - \frac{\alpha}{2}.$$

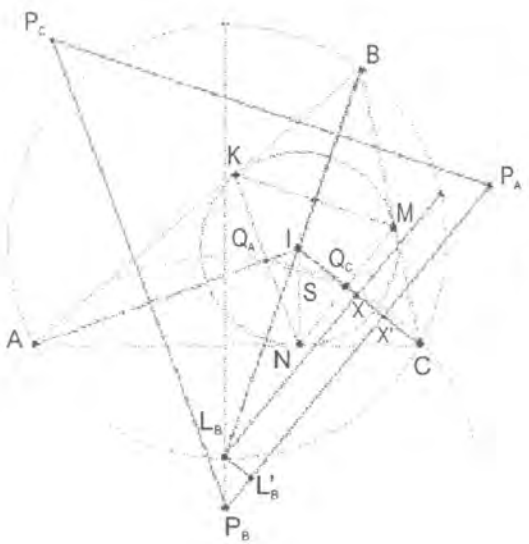


Рис. 2.1

Отже, чотирикутник AQ_AQ_CC є вписаним ($\angle CAQ_A + \angle CQ_CQ_A = 180°$).

Центр описаного кола є точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін чотирикутника. З цього випливає, що центром даного

кола є точка перетину серединних перпендикулярів відрізків AQ_A і CQ_C. Таким чином, центром описаного кола чотирикутника AQ_AQ_CC є точка P_B.

Зауваження. Із доведення також випливає, що точка P_B належить серединному перпендикуляру відрізка AC, а цим дається ще одне доведення того, що $AP_B = P_BC$ (такий факт використовувався в усіх розв'язаннях вихідної задачі). Але щойно наведене доведення, на відміну від інших, використовує розташування тільки центра вписаного кола; з цього випливає, що будь-які дві точки, котрі лежать на прямих AI і CI і, крім того, належать до прямої, паралельної прямій Q_AQ_C, є — разом з точками A і C — вершинами вписаного чотирикутника з центром у точці, що належить серединному перпендикуляру сторони AC. Більш того, якщо побудувати такі центри проти решти сторін трикутника ABC, то коло, яке проходить через ці три точки, буде концентричним до описаного кола вихідного трикутника).

Теорема 2.2. *Коло Ω, проведене через точки P_A, P_B і P_C, є концентричним до описаного кола трикутника ABC і має радіус $\rho = R + \frac{r}{2}$ (R — радіус описаного кола трикутника ABC, r — радіус його вписаного кола) (див. рис. 2.1).*

Наведемо два доведення.

Перше доведення. Відстань від центра описаного кола O до сторони AC дорівнює $R\cos\beta$, відстань від точки P_B до сторони AC дорівнює $\frac{(p-a)(p-c)}{2r}$ (доведено в [6], дивись також далі в даній статті). Центр описаного кола O та P_B лежать на серединному перпендикулярі сторони AC, а тому

$$OP_B = \frac{(p-a)(p-c)}{2r} + R\cos\beta.$$

Далі,

$$\begin{aligned} OP_B &= \frac{p\left(b^2-(a-c)^2\right)}{8S} + \frac{abc}{4S}\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ &= \frac{p\left(b^2-a^2-c^2+2ac\right)+ba^2+bc^2-b^3}{8S} \\ &= \frac{ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+2abc-\left(a^3+b^3+c^3\right)}{16S} \\ &= \frac{(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc-2\left(a^3+b^3+c^3\right)}{16S}. \end{aligned}$$

Одержана формула є симетричною відносно a, b, c, а тому для точок P_A і P_C результат буде таким самим. Отже, P_A, P_B, P_C належать колу з центром у точці O — центрі описаного кола трикутника ABC.

Користуючись формулами $r = \frac{S^2}{pS} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}$ та $R = \frac{abc}{4S}$ легко перевірити, що $OP_B = R + \frac{r}{2}$.

Друге доведення. Нехай L_B — точка перетину серединних перпендикулярів відрізків AI і CI. Зауважимо, що $OL_B = R$. Нехай X, X' — середини

відрізків CI, Q_CC відповідно, $L_BL'_B$ — перпендикуляр до відрізка P_BP_A. Тоді за означенням точок L_B та P_B маємо $L_BX \perp CI$, $L'_BX' \perp CI$, а отже $L_BX \parallel L'_BX'$ та $L_BL'_BXX'$ — прямокутник.

Отримуємо, що $L_BL'_B = XX'$, $\angle NIC = \angle P_BL_BL'_B$.

Маємо:

$$r = NI = IQ_C/\cos\angle NIC,$$

$$L_BL'_B = XX' = CX - CX' = \frac{1}{2}(CI - CQ_C) = \frac{IQ_C}{2},$$

$$L_BP_B = L_BL'_B/\cos\angle P_BL_BL'_B = \frac{IQ_C/\cos\angle NIC}{2} = \frac{r}{2},$$

$$OP_B = OL_B + L_BP_B = R + \frac{r}{2}.$$

Із міркувань симетрії знов-таки випливає, що $OL_B = OL_A = OL_C = R + \frac{r}{2}$, а тому коло, яке проходить через точки P_A, P_B і P_C, має центр у точці O та радіус $\rho = R + \frac{r}{2}$.

Теорема 2.3. *Кожне з кіл І. П. Нагеля дотикається до кола Ω — описаного кола трикутника $P_AP_BP_C$ (див. рис. 2.3).*

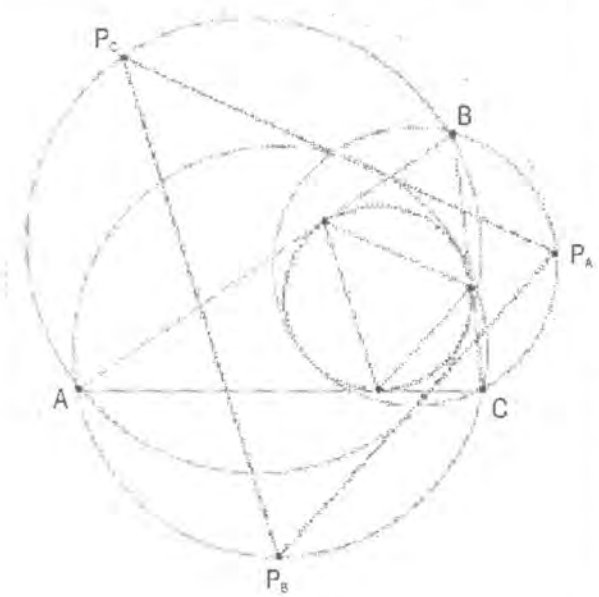


Рис. 2.3

Доведення. Дотичні до кола Ω в точках P_A, P_B і P_C перпендикулярні відповідним радіусам цього кола. Оскільки центр кола Ω збігається з центром описаного кола трикутника ABC, а точки P_A, P_B, P_C належать до серединних перпендикулярів сторін вихідного трикутника, то дотичні до кола Ω в точках P_A, P_B і P_C перпендикулярні серединним перпендикулярам відповідних сторін трикутника. Розглянемо одне з кіл Нагеля. Дотична до обраного кола І. П. Нагеля у відповідній точці буде перпендикулярною до серединного перпендикуляра відповідної сторони трикутника ABC. Очевидно тепер, що дотичні до кіл І. П. Нагеля, проведені через точки P_A, P_B або P_C відповідно, збігаються з дотичними, проведеними в цих самих точках, але до кола Ω. З цього випливає, що кожне з кіл І. П. Нагеля дотикається до кола Ω внутрішнім чином.

3. Нові результати щодо зовнівписаних кіл

Будемо використовувати такі позначення:

1) I_A, I_B, I_C — центри відповідних зовнівписаних кіл;

2) L'_{AB}, L'_A, L'_{AC} — точки, в яких зовнівписане коло, що лежить проти вершини A, дотикається до відповідних сторін або їх продовжень;
3) AT_A, BT_B, CT_C — висоти $\triangle BL'_{AB}L'_A$, $\triangle CL'_{AC}L'_A$ і $\triangle AL'_{AB}L'_{AC}$ відповідно;
4) l_A — пряма, яка містить середню лінію трикутника $L'_{AB}AL'_{AC}$, паралельну до $L'_{AB}L'_{AC}$, l_B — пряма, яка містить середню лінію $L'_{AB}BL'_A$, паралельну до $L'_{AB}L'_A$, l_C — пряма, яка містить середню лінію $L'_{AC}CL'_A$, паралельну до $L'_{AC}L'_A$;
5) $P_{AA} = l_B \cap l_C$, $P_{AB} = l_A \cap l_C$, $P_{AC} = l_A \cap l_B$.

Теорема 3.1. *Чотирикутники BT_CT_BC, ACT_BT_A, ABT_CT_A є вписаними, а центрами їхніх описаних кіл є точки P_{AA}, P_{AB} і P_{AC} відповідно (див. рис. 3).*

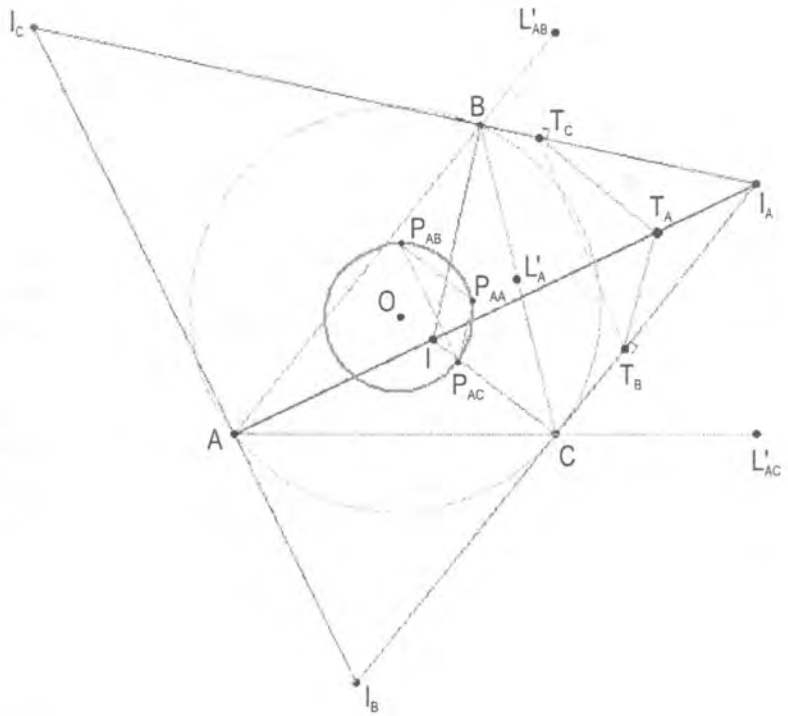


Рис. 3

Доведення. Маємо $\angle T_AL'_{AB}B = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ (із рівнобедреного $\triangle L'_{AC}AL'_{AB}$),

$$\angle T_CL'_{AB}B = \frac{180^\circ - \angle L'_ABL'_{AB}}{2} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \beta)}{2} = \frac{\beta}{2},$$
$$\angle T_AL'_{AB}T_C = \angle T_AL'_{AB}B - \angle T_cL'_{AB}B = \frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Аналогічно, $\angle T_AL'_{AC}T_B = \frac{\beta}{2}$, $T_BT_A \parallel L'_AL'_{AB}$ (як середня лінія трикутника $L'_{AC}L'_{AB}L'_A$).

Звідси

$$\angle L'_{AC}T_AT_B = \angle T_AL'_{AB}T_C = \frac{\gamma}{2},$$
$$\angle T_AT_BI_A = 90^\circ - \angle T_AL'_{AC}T_B - \angle L'_{AC}T_AT_B = \frac{\alpha}{2},$$
$$\angle T_AT_BC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}, \qquad \angle CAI_A + \angle T_AT_BC = 180^\circ.$$

Таким чином, ACT_BT_A — вписаний чотирикутник, і, зрозуміло, центром його описаного кола буде точка P_{AB}, бо за побудовою $l_A = P_{AB}P_{AC}$ та $l_C = P_{AA}P_{AB}$ є серединними перпендикулярами до AT_A та CT_B. Аналогічний результат встановлюємо для чотирикутника ABT_CT_A і точки P_{AC}.

Далі,

$$\angle BT_CT_B = 90^\circ + \angle L'_AT_CT_B = 90^\circ + \angle T_CL'_{AB}L'_{AC} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$
$$\angle BCT_B = \frac{\angle BCL'_{AC}}{2} = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$
$$\angle BCT_B + \angle BT_CT_B = 180^\circ.$$

Отже, чотирикутник BT_CT_BC — вписаний, центр його описаного кола — точка P_{AA}.

Зауваження. Із доведеного видно, що точка P_{AA} лежить на серединному перпендикулярі відрізка BC, точка P_{AB} лежить на серединному перпендикулярі відрізка AC, а точка P_{AC} лежить на серединному перпендикулярі відрізка AB.

Теорема 3.2. *Описане коло Ω_A трикутника, вершинами котрого є точки попарного перетину прямих l_A, l_B і l_C, буде концентричним описаному колу трикутника ABC, а радіус кола Ω_A становить $\left|R - \frac{\rho_A}{2}\right|$ (R— радіус описаного кола вихідного трикутника, ρ_A — радіус відповідного зовнівписаного кола).*

Доведення цього факту аналогічне доведенню теореми 2.2.

4. Розв'язання задачі І. П. Нагеля [6]

У цьому розділі через ω позначатимемо вписане коло трикутника ABC.

Перше розв'язання (автор задачі І. П. Нагель).

Доведемо спочатку таке допоміжне твердження.

Твердження. *Нехай коло $\omega_0\,(O;r)$ дотикається в точках K і N до сторін кута з вершиною в точці A, точка F — середина відрізка AK, точка E — середина відрізка AN. Через точку $Q \in \omega_0$ проведено дотичну до кола, котра перетинає пряму FE в точці P. Тоді $AP = PQ$.*

Доведення. Нехай $D = AO \cap FE$. Тоді маємо рівності:

$$PO^2 - PD^2 = OF^2 - FD^2, \qquad PA^2 - PD^2 = AF^2 - FD^2,$$
$$PO^2 - PA^2 = OF^2 - AF^2, \qquad OF^2 - AF^2 = OF^2 - FK^2 = OK^2 = r^2,$$
$$AP^2 = PO^2 - r^2 = PQ^2.$$

Перейдемо тепер до розв'язання задачі.

Нехай L — друга точка перетину прямої PN з колом ω. За доведеним вище *допоміжним твердженням* довжина кожного з відрізків AP і CP дорівнює довжині відрізка дотичної, проведеної з точки P до кола ω. Отже, $AP = CP$. Крім того, $AP^2 = LP \cdot PN$, $AP : PL = PN : AP$, а тому $APL \sim NPA$. Таким чином, $\angle ALP = \angle CAP = \angle ACP$. Ми встановили, що навколо чотирикутника $APCL$ можна описати коло (позначатимемо його через ω_1). Нехай L_1 — друга точка перетину кола ω з колом ω_1. Проведемо спільну хорду LL_1, січну LN, яка перетинає коло ω_1 в точці P_1 та хорду PP_1 кола ω_1. Без обмеження загальності L_1 належить дузі $\smile AL$, яка не містить точки C. Тоді $\angle NL_1L = \angle LNC = \frac{1}{2} \smile NL$, $\angle LNC = \angle NPP_1 = \frac{1}{2} \smile LCP_1$. Звідси $AC \parallel PP_1$, але тоді $\smile AP = \smile CP_1$. Це означає, що точки P і P_1, а отже й точки L і L_1, збігаються. Точка L є шуканою точкою дотику.

Друге розв'язання (І. М. Мітельман).

Нехай L — друга точка перетину прямої PN з колом ω, і нехай промінь LA вдруге перетне коло ω в точці Q, а промінь LC — в точці W. Методом координат доведемо, що $AP = CP$ і $NQ \parallel PA$, $NW \parallel PC$.

Будемо вважати, що ω — коло одиничного радіуса з центром I. Вводимо прямокутну систему координат таким чином, щоб її початком була точка N, вісь x була напрямлена вздовж променя NC, а вісь y — вздовж променя NI. Нехай $C(2m;\,0)$, $A(-2n;\,0)$ $(m, n > 0)$. Оскільки $tg\frac{A}{2} = \frac{1}{2n}$, то рівняння прямої, що містить середню лінію трикутника AKN, паралельну стороні KN, має, як нескладно переконатися, вигляд $y = -2n(x + n)$. Точка T перетину цієї прямої з серединним перпендикуляром $x = m - n$ відрізка AC має ординату $y_T = -2mn$. Зауважимо, що до останньої формули m і n входять симетрично, а тому таку ж саму ординату має й точка перетину прямої $x = m - n$ з прямою, що містить потрібну середню лінію трикутника CMN. Отже, цим доведено, що точка T збігається з точкою P і, значить, $AP = CP$.

Для доведення паралельності прямих NQ і PA встановимо, що $\frac{AQ}{AL} = \frac{PN}{PL}$. Остання рівність з урахуванням того, що $AQ \cdot AL = AN^2$, буде еквівалентною рівності $\frac{PL}{PN} = \frac{AL^2}{AN^2}$, тобто

$$\frac{AL^2}{4n^2} = \frac{x_P - x_L}{x_P}. \qquad (*)$$

Пряма LP має рівняння $(m - n)y = -2mnx$, коло ω — рівняння $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Звідси знаходимо, що

$$x_L = \frac{4mn(n-m)}{4m^2n^2 + (m-n)^2}, \qquad y_L = \frac{8m^2n^2}{4m^2n^2 + (m-n)^2}.$$

Далі, оскільки $AL^2 = (x_L - x_A)^2 + (y_L - y_A)^2$, то, враховуючи відповідні перетворення й спрощення, доведення рівності $(*)$ зводиться до перевірки рівності

$$\frac{\left(2m(n-m) + 4n^2m^2 + (m-n)^2\right)^2 + 16m^4n^2}{\left(4n^2m^2 + (m-n)^2\right)^2} = 1 + \frac{4mn}{4n^2m^2 + (m-n)^2}.$$

Те, що $NW \parallel PC$, встановлюється аналогічно.

Таким чином, рівнобедрені трикутники QNW і APC будуть гомотетичними з центром гомотетії в точці L, а тому — гомотетичними з центром у точці L будуть і кола, описані навколо даних трикутників. Твердження задачі випливає з того, що центр гомотетії L належить колу ω.

Третє розв'язання (А. О. Туманян).

Нехай точка I — центр вписаного кола трикутника ABC, $AN = n$, $CN = m$, $IN = r$. Проведемо через точку A пряму $l_1 \perp AC$, а через точку C — пряму $l_2 \perp AC$. Нехай $X = l_1 \cap MN$, $Y = l_2 \cap KN$. Оскільки $\angle ANK = \angle AIN = \angle YNC$, то трикутники YNC і AIN подібні. Звідси $CY = \frac{mn}{r}$. Аналогічно, $AX = \frac{mn}{r}$. Таким чином, $ACYX$ — прямокутник. Продовження середньої лінії трикутника AKN, паралельної KN, проходить через середину відрізка AY, аналогічно — продовження середньої лінії трикутника CMN, паралельної MN, проходить через середину відрізка CX. Отже, точка P є центром прямокутника $ACYX$.

Позначимо через O центр описаного кола трикутника APC. Нехай $Z \in AY$, $OZ \perp AY$, $T = AC \cap OP$, $AP = q$, $OP = R$. Тоді $ZPO \sim TPA$, а тому $\frac{AP}{TP} = \frac{OP}{ZP}$, тобто $\frac{q}{mn/(2r)} = \frac{R}{q/2}$, $q^2 = \frac{mnR}{r}$. Залишається показати, що $OI = R - r$. Дійсно, помітимо, що $q^2 = AP^2 = AT^2 + TP^2 = \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{mn}{2r}\right)^2$. Нехай $PTNQ$ — прямокутник. Тоді

$$\begin{aligned} OI^2 &= (IQ - OP)^2 + TN^2 = \left(r + \frac{mn}{2r} - R\right)^2 + \left(\frac{m-n}{2}\right)^2 \\ &= (R-r)^2 - \frac{mnR}{r} + \left(\frac{m+n}{2}\right)^2 + \left(\frac{mn}{2r}\right)^2 = (R-r)^2 - q^2 + q^2 \\ &= (R-r)^2. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $2R \geq AC > 2r$, а тому $R > r$.

Література

1. Г. С. М. Коксетер, *Введение в геометрию*, "Наука", Москва, 1966.
2. Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер, *Новые встречи с геометрией*, "Просвещение", Москва, 1978.
3. С. И. Зетель, *Новая геометрия треугольника*, "Учпедгиз", Москва, 1962.
4. З. А. Скопец, *Геометрические миниатюры*, "Просвещение", Москва, 1990.
5. И. Ф. Шарыгин, *Задачи по геометрии*, "Просвещение", Москва, 1986.
6. В. О. Борисова, В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. А. Ясінський, *Змагання юних математиків: 2003 рік*, ВГ "Основа", Харків, 2004.
7. В. Данхем, *Ейлер та геометрія*, У світі математики **9** (2003), № 3, 13–29.
8. І. А. Кушнір, *Трикутник і тетраедр у задачах*, "Радянська школа", Київ, 1991.

Методи доведення планіметричних нерівностей

В. М. Радченко

В даній статті проводиться стислий огляд основних методів доведення нерівностей, пов'язаних з фігурами на площині.

1. Нерівність трикутника

Добре відомо, що для будь-яких трьох точок площини A, B, C має місце нерівність $AB \le AC + CB$ (якщо C не лежить на відрізку AB, нерівність буде строгою). Звідси отримуємо, що довжина ламаної не менша за відстань між її кінцями. Ці елементарні міркування часто є ключовими в доведенні нерівностей для відстаней.

Приклад 1. Довести, що довжини медіан m_a, m_b, m_c та периметр P довільного трикутника задовольняють нерівності $3P/4 < m_a + m_b + m_c < P$.

Розв'язання. Нехай медіани m_a, m_b, m_c проведено до сторін довжини a, b, c відповідно. Розглянувши половинки сторін та відповідні середні лінії, отримуємо, що $m_a < (b+c)/2$, $m_b < (c+a)/2$, $m_c < (a+b)/2$. Сума цих нерівностей показує, що сума довжин медіан менша за периметр. Оскільки відрізки від точки перетину медіан до вершин трикутника дорівнюють $2m_a/3$, $2m_b/3$, $2m_c/3$, маємо нерівності $a < 2(m_b + m_c)/3$, $b < 2(m_c + m_a)/3$, $c < 2(m_a + m_b)/3$. Додавши, отримаємо ліву частину нерівності задачі.

Вправа 1. В чотирикутнику $ABCD$ кут A тупий, F — середина сторони BC. Довести, що $2AF < BD + CD$.

Інколи для використання вказаного підходу спочатку треба провести геометричні перетворення.

Приклад 2. На сторонах AB, BC, CD, DA прямокутника $ABCD$ взято відповідно відмінні від вершин точки M, N, P, Q (по одній на кожній стороні). Довести, що периметр чотирикутника $MNPQ$ не менший за $AC + BD$.

Розв'язання. Відобразимо прямокутник $ABCD$ симетрично відносно сторони BC, отримаємо прямокутник $A'BCD'$. Його, в свою чергу відобразимо відносно CD' в прямокутник $A''B''CD'$, який відносно $D'A''$ відобразимо в $A''B'''C'''D'$. Для довільної точки X прямокутника $ABCD$ її образи при вказаних перетвореннях будемо позначати через X', X'', X''' відповідно. Тоді периметр чотирикутника $MNPQ$ буде дорівнювати довжині ламаної $MNP'Q''M'''$, що не менше за MM'''. Відрізок MM''' отримується паралельним переносом з AA'', а тому $MM''' = AA'' = AC + BD$.

Вправа 2. Дано гострий кут і точку C всередині кута. Знайти на сторонах кута такі точки A і B, щоб периметр трикутника ABC був найменшим можливим.

2. Використання векторів

Нерівність трикутника можна сформулювати і у векторному вигляді — довжина суми векторів не перевищує суми їх довжин. Інколи обгрунтування нерівності для відстаней зручно проводити, розглядаючи вектори.

Приклад 3. На площині дано два відрізки AB і CD. Довести, що довжина відрізка, що сполучає їх середини, не більша за півсуму довжин відрізків AC і BD.

Розв'язання. Нехай точки K і L — це середини AB і CD відповідно. Тоді, очевидно,

$$2\vec{KL} = \left(\vec{KA} + \vec{AC} + \vec{CL}\right) + \left(\vec{KB} + \vec{BD} + \vec{DL}\right) = \vec{AC} + \vec{BD},$$

звідки і маємо потрібну нерівність.

Вправа 3. На площині розташовані трикутники $A_1B_1C_1$ та $A_2B_2C_2$, їх точки перетину медіан позначимо через M_1 та M_2 відповідно. Довести, що $3M_1M_2 \le A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$.

3. Оцінка площі через добуток довжин відрізків

Добре відомо, що площа трикутника не перевищує половини добутку його двох сторін, площа опуклого чотирикутника не більша за половину добутку його діагоналей.

Приклад 4. Нехай a, b, c, d — довжини послідовних сторін опуклого чотирикутника. Довести, що його площа не перевищує $(ac + bd)/2$.

Розв'язання. Проведемо діагональ чотирикутника, по один бік від якої будуть сторони довжини a і b, по інший — c і d. Утворений трикутник зі сторонами довжини a і b відобразимо симетрично відносно серединного перпендикуляра проведеної діагоналі. Отримаємо чотирикутник тієї ж площі з довжинами послідовних сторін a, c, d, b. Друга діагональ чотирикутника розділяє трикутні частини, площа однієї з яких не перевищує $ac/2$, а другої — $bd/2$.

Вправа 4. Периметр опуклого чотирикутника дорівнює 4. Довести, що його площа не перевищує 1.

Приклад 5. В коло радіуса R вписано n-кутник площі S. На кожній стороні n-кутника відмічено по точці. Доведіть, що периметр n-кутника з вершинами у відмічених точках не менший за $2S/R$.

Розв'язання. Введемо наступні позначення: O — центр даного кола, многокутник$A_1A_2\ldots A_n$ — даний вписаний n-кутник, $B_1B_2\ldots B_n$ — n-кутник з вершинами у відмічених точках (точка B_i лежить на стороні A_iA_{i+1}, тут і далі $A_{n+k} = A_k$, $B_{n+k} = B_k$), P — периметр останнього n-кутника. Площа кожного чотирикутника $OB_iA_{i+1}B_{i+1}$ не перевищує половини добутку його діагоналей $R\cdot B_iB_{i+1}/2$. Додавши ці нерівності по всім $1 \le i \le n$, отримаємо, що $S \le RP/2$.

4. Використання площі в оцінках відстаней

Приклад 6. Довести, що в колі радіуса 10 не можна відмітити 450 точок так, щоб відстань між будь-якими двома з них була більшою за 1.

Розв'язання. Припустимо, що такі 450 точок відмітити можна. Проведемо кола радіуса $1/2$ з центрами у всіх відмічених точках. Оскільки відстані між відміченими точками більші за 1, кола перетинатися не будуть. Всі 450 проведених "маленьких" кіл будуть міститися у "великому" колі з радіусом $21/2$ та центром, що співпадає з центром даного в умові кола. Тому сума площ "маленьких" кіл не повинна перевищувати площі "великого". Але нерівність $450(1/2)^2\pi \leq (21/2)^2\pi$ не виконується. Отримано суперечність.

Вправа 5. В квадраті зі стороною 15 довільним чином розміщено 20 квадратиків зі стороною 1. Довести, що в квадраті ще можна розмістити коло радіуса 1, що не буде мати спільних точок з даними квадратиками.

5. Принцип Дірихле

Якщо в об'єднанні n фігур відмічено $n+1$ точку, то знайдеться фігура, в якій відмічено не менше 2 точок. При використанні цієї простої ідеї головною складністю розв'язання може бути пошук вдалого вибору цих фігур.

Приклад 7. В прямокутнику 3×4 дано 6 точок. Довести, що серед них знайдуться дві, відстань між якими не перевищує $\sqrt{5}$.

Розв'язання. Припустимо, що даний прямокутник розташовано на координатній площині, і його вершини мають координати $(0;0)$, $(4;0)$, $(4;3)$, $(0;3)$. Відмітимо точки $(0;1)$, $(1;2)$, $(1;3)$, $(2;0)$, $(2;1)$, $(3;2)$, $(3;3)$, $(4;1)$ і проведемо всі можливі відрізки довжини 1 та $\sqrt{2}$ між ними. Так ми отримаємо розбиття прямокутника на 5 опуклих многокутників. Деякі дві з даних точок будуть належати одному многокутнику, а відстань між будь-якими точками кожного з цих многокутників не перевищує $\sqrt{5}$.

В попередньому прикладі ми неявно скористалися наступним фактом. Відстань між будь-якими точками опуклого многокутника не перевищує найбільшої з відстаней між його вершинами (спробуйте це довести!). Тому, щоб обгрунтувати, що відстань між будь-якими точками многокутника не більша за $\sqrt{5}$, досить було перебрати відстані між його вершинами.

Вправа 6. На газоні, що має форму правильного трикутника зі стороною 3 метри, ростуть 10 гвоздик. Довести, що знайдуться дві гвоздики, відстань між якими не перевищує 1 метра.

Вправа 7. На площині відмічено 2005 точок, причому серед будь-яких трьох з них знайдуться дві, відстань між якими не перевищує 1. Довести, що знайдеться коло, яке містить не менше 1003 відмічених точок.

6. Правило крайнього

В деяких ситуаціях корисно починати розв'язання, розглядаючи найбільший або найменший в деякому сенсі елемент.

Приклад 8. На площині дано кілька точок, будь-які три з яких не лежать на одній прямій. Відомо, що площа будь-якого трикутника з вершинами в даних точках не перевищує 1. Довести, що всі ці точки можна помістити в трикутник площі 4.

Розв'язання. Серед всіх трикутників, утворених трійками даних точок, виберемо трикутник ABC, площа якого S — найбільша. Проведемо три прямі: через A паралельну BC, через B паралельну CA, через C паралельну AB. Вони утворять новий трикутник площі $4S \le 4$. Всі дані точки будуть міститися в цьому новому трикутнику. Адже якщо деяка точка D лежить зовні нього, то площа одного з трикутників ABD, BCD, CAD буде більшою за площу ABC.

Вправа 8. В колі радіуса 1 відмічено 6 точок. Довести, що серед них знайдуться дві, відстань між якими не перевищує 1.

7. Використання алгебраїчних методів

Інколи вирази з геометричними елементами варто дослідити алгебраїчними методами, використати класичні нерівності.

Приклад 9. Яке найменше значення може приймати відношення площ двох рівнобедрених прямокутних трикутників, три вершини одного з яких лежать на трьох різних сторонах іншого?

Розв'язання. Позначимо дані трикутники через $T = ABC$ та $T_1 = A_1B_1C_1$, де кут C — прямий, $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$. Нехай довжина катета трикутника T дорівнює 1, T_1 — a. Якщо в T_1 прямим буде кут C_1, то точка C_1 буде на відстані не меншій $1/2$ від одного з катетів в T, і тому $a \ge 1/2$, вказане відношення площ не менше за $1/4$. Припустимо, що в T_1 прямим буде кут A_1. Опустимо перпендикуляр C_1C_2 на сторону BC. Нехай $BC_2 = x$, $C_2A_1 = y$. Тоді $C_1C_2 = x$, також трикутники $C_1C_2A_1$ та A_1CB_1 рівні, $A_1C = C_1C_2 = x$, $BC = 1 = 2x + y$. Розглядуване відношення площ дорівнює $a^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (1 - 2x)^2$. Найменше значення функції $f(x) = x^2 + (1 - 2x)^2$ досягається при $x = 2/5$ і дорівнює $1/5$. Відповідь: $1/5$.

Приклад 10. Довести, що правильний n-кутник має найбільшу площу серед всіх вписаних в дане коло n-кутників.

Розв'язання. Нехай дане коло має центр O і радіус R, довільний вписаний n-кутник позначимо через $A_1A_2 \dots A_n$, $\angle A_iOA_{i+1} = \alpha_i$, $1 \le i \le n$. Тоді $\sum_{i=1}^n \alpha_i \le 360^\circ$ (строга нерівність має місце, якщо центр кола лежить зовні n-кутника), $0 < \alpha_i \le 180^\circ$, площа n-кутника дорівнює $\frac{1}{2}R^2 \sum_{i=1}^n \sin\alpha_i$. Функція $\sin x$ на вказаній множині значень опукла вгору. З нерівності Єнсена отримуємо, що

$$\frac{1}{2}R^2 \sum_{i=1}^n \sin\alpha_i \le \frac{n}{2}R^2 \sin\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i}{n} \le \frac{n}{2}R^2 \sin\frac{360^\circ}{n},$$

а саме останньому значенню дорівнює площа вписаного правильного n-кутника.

Відмітимо, що цілком аналогічно доводиться, що правильний n-кутник буде мати і найбільший периметр серед всіх вписаних в дане коло n-кутників.

Вправа 9. Дано трикутник ABC і точку M всередині нього. Позначимо через h_a, h_b, h_c довжини висот трикутника, проведених з вершин A, B, C відповідно, u, v, w — відстані від точки M до сторін BC, CA, AB відповідно. Довести, що

$$\frac{h_a}{u} + \frac{h_b}{v} + \frac{h_c}{w} \geq 9.$$

8. Екстремальна властивість центру ваги

Для точок A_1, A_2, ..., A_n на площині їх центром ваги будемо називати таку точку M, що $\vec{MA}_1 + \vec{MA}_2 + \cdots + \vec{MA}_n = \vec{0}$. Така M існує і єдина. Адже для довільно обраної точки B ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} \vec{BA}_1 + \vec{BA}_2 + \cdots + \vec{BA}_n &= \vec{BM} + \vec{MA}_1 + \vec{BM} + \vec{MA}_1 + \cdots + \vec{BM} + \vec{MA}_n \\ &= n\vec{BM}. \end{aligned}$$

Записана рівність однозначно визначає M. Відмітимо, що центром ваги трьох вершин трикутника буде точка перетину медіан цього трикутника.

Вказане математичне поняття узгоджується з фізичним, якщо розмістити в точках A_1, A_2, ..., A_n маси однакової величини.

Центр ваги має наступну екстремальну властивість. Для будь-якої точки B площини буде

$$MA_1^2 + MA_2^2 + \cdots + MA_n^2 \leq BA_1^2 + BA_2^2 + \cdots + BA_n^2.$$

Обґрунтуємо цю нерівність, використовуючи скалярний добуток векторів:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} BA_k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{BA}_k, \vec{BA}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\vec{BM} + \vec{MA}_k, \vec{BM} + \vec{MA}_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\vec{BM}, \vec{BM}\right) + 2\left(\vec{BM}, \vec{MA}_k\right) + \left(\vec{MA}_k, \vec{MA}_k\right)\right) \\ &= nBM^2 + 2\left(\vec{BM}, \sum_{k=1}^{n} \vec{MA}_k\right) + \sum_{k=1}^{n} MA_k^2 \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} MA_k^2. \end{aligned}$$

В останній нерівності ми використали, що $\sum_{k=1}^{n} \vec{MA}_k = \vec{0}$.

Приклад 11. Довести нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, де a, b, c — довжини сторін деякого трикутника, R — радіус його описаного кола.

Розв'язання. Сума квадратів відстаней від центра описаного кола до вершин трикутника дорівнює $3R^2$. Сума квадратів відстаней від точки перетину

медіан до вершин рівна $4\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)/9$ (через m_a, m_b, m_c ми, як звичайно, позначили довжини медіан). Використовуючи відмічену властивість центру ваги та формулу довжини медіани, маємо

$$3R^2 \geq \frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right) = \frac{4}{9}\left(\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

9. Використання інтеграла

Зафіксуємо на площині деякий промінь, від якого до прямих в додатному напрямку будемо відраховувати кут $\alpha \in [0,\pi)$. Для заданого відрізка довжини a позначимо через $f(\alpha)$ довжину його проекції на пряму, що утворює з фіксованим напрямком кут α. Легко бачити, що $f(\alpha)=a\,|\cos(\alpha-\varphi)|$, де φ — кут між відрізком і фіксованим напрямком. Нескладні підрахунки дають, що

$$\int_0^\pi f(\alpha)\,d\alpha = 2a. \tag{1}$$

Приклад 12. Нехай опуклий многокутник F_1 лежить всередині опуклого многокутника F_2. Довести, що периметр F_1 не перевищує периметра F_2.

Розв'язання. Позначимо через $f_1(\alpha)$ та $f_2(\alpha)$ довжини проекцій на пряму, що проходить під кутом α, многокутників F_1 та F_2 відповідно. Оскільки F_1 лежить всередині F_2, для всіх α буде $f_1(\alpha)\leq f_2(\alpha)$. Тому

$$\int_0^\pi f_1(\alpha)\,d\alpha \leq \int_0^\pi f_2(\alpha)\,d\alpha. \tag{2}$$

Многокутник F_1 опуклий, тому будь-яка його проекція складається з проекцій сторін, розташованих в два шари, і тому $f_1(\alpha)$ дорівнює половині суми довжин проекцій сторін цього многокутника на пряму в напрямку α. Враховуючи (1), отримуємо, що $\int_0^\pi f_1(\alpha)\,d\alpha$ дорівнює периметру F_1. Аналогічно $\int_0^\pi f_2(\alpha)\,d\alpha$ рівний периметру F_2. Залишається використати (2). (Заради математичної строгості відмітимо, що $f_1(\alpha)$ та $f_2(\alpha)$ є лінійними комбінаціями косинусів із зсувом аргументу, отже є неперервними функціями і тому відповідні інтеграли існують.)

Вправа 10. Всередині трикутника ABC, периметр якого дорівнює P, взято довільну точку O. Довести, що $P/2 < AO+BO+CO \leq P$.

Вправа 11. Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ на площині таких, що $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$, довести нерівність

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|+|\vec{d}| \geq |\vec{a}+\vec{d}|+|\vec{b}+\vec{d}|+|\vec{c}+\vec{d}|.$$

Вказівки до вправ

1. Нехай O — середина BD. Тоді $AO < BD/2$ (оскільки кут A тупий), $OF = CD/2$ (як середня лінія), $AF \le AO + OF$.

2. Розгляпемо точки C_1 та C_2, симетричні точці C відносно сторін даного кута. Тоді відрізок C_1C_2 перетне сторони кута в шуканих точках A і B. (Подумайте, чому C_1C_2 перетне саме сторони кута, а не їх продовження.)

3. Маємо рівності $A_1\vec{A}_2 = A_1\vec{M}_1 + M_1\vec{M}_2 + M_2\vec{A}_2$, $B_1\vec{B}_2 = B_1\vec{M}_1 + M_1\vec{M}_2 + M_2\vec{B}_2$, $C_1\vec{C}_2 = C_1\vec{M}_1 + M_1\vec{M}_2 + M_2\vec{C}_2$. Додавши їх, отримаємо, що $A_1\vec{A}_2 + B_1\vec{B}_2 + C_1\vec{C}_2 = 3M_1\vec{M}_2$, звідки і випливає твердження задачі.

4. Позначимо через S площу чотирикутника, a, b, c, d — довжини його послідовних сторін. В прикладі 4 отримано оцінку $S \le (ac + bd)/2$. Також легко бачити, що $S \le (ab + cd)/2$. Тому

$$4S \le ac + bd + ab + cd = (a + d)(b + c) \le (a + d + b + c)^2/4 = 4.$$

Відмітимо, що фактично ми довели, що серед всіх опуклих чотирикутників заданого периметра найбільшу площу має квадрат.

5. Будемо шукати положення для центру кола. Центр має знаходитись на відстані не меншій за 1 від сторін даного квадрата (тобто всередині квадрата зі стороною 13) і від точок квадратиків. Для кожного квадратика множина точок, що знаходиться на відстані меншій за 1 від нього, складається з самого квадратика, чотирьох квадратиків "по боках" від нього та чотирьох чвертей кіл радіуса 1 з центрами у вершинах квадратика. Площа такої множини точок дорівнює $5 + \pi$. Оскільки сума всіх цих площ дорівнює $20(5 + \pi) < 13^2$, в квадраті 13×13 знайдеться точка, що не входить до жодної такої множини. Її беремо за центр шуканого кола.

6. Поділимо кожну сторону газона-трикутника на три рівні частини і проведемо через точки поділу прямі, паралельні сторонам. Так ми отримаємо розбиття газона на 9 правильних трикутничків зі стороною 1. Якісь дві гвоздики потраплять до одного трикутничка, і відстань між цими квітами буде не більшою за 1. (Див. зауваження після прикладу 7.)

7. Нехай A — одна з даних точок. Якщо всі інші точки лежать в колі S_1 радіуса 1 з центром в A, то твердження задачі виконується. Нехай якась з даних точок B лежить зовні S_1, тобто $AB > 1$. Розглянемо коло S_2 радіуса 1 з центром в B. З умови задачі випливає, що для будь-якої точки C з даних буде $AC < 1$ (і тоді C лежить в S_1) або $BC < 1$ (і тоді C лежить в S_2). Два кола S_1 і S_2 містять 2005 точок, хоча б одне з них буде містити не менше 1003 точок.

8. Позначимо центр даного кола через O. Якщо деяка з даних точок співпадає з O, відстань від неї до будь-якої іншої не більша за 1. Нехай всі дані точки відмінні від O. Розглянемо найменший серед кутів, утворених відрізками від O до даних точок. Нехай це відрізки OA і OB, тоді їх довжини не перевищують 1, $\angle AOB \le 60°$. В трикутнику AOB проти одного з відрізків

OA і OB буде лежати кут не менший за $60°$, тобто не менший за $\angle AOB$. Тому довжина AB не перевищує довжини хоча б одного з відрізків OA і OB, і, значить, не більша за 1.

9. Використовуючи стандартні позначення для площ трикутників, маємо, що

$$\frac{h_a}{u} = \frac{S_{ABC}}{S_{MBC}}, \quad \frac{h_b}{v} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMC}}, \quad \frac{h_c}{w} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABM}}, \quad \frac{u}{h_a} + \frac{v}{h_b} + \frac{w}{h_c} = 1.$$

Тому з допомогою нерівності Коші отримуємо,що

$$\begin{aligned}\frac{h_a}{u} + \frac{h_b}{v} + \frac{h_c}{w} &= \left(\frac{h_a}{u} + \frac{h_b}{v} + \frac{h_c}{w}\right)\left(\frac{u}{h_a} + \frac{v}{h_b} + \frac{w}{h_c}\right) \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{h_a h_b h_c}{uvw}} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{uvw}{h_a h_b h_c}} = 9.\end{aligned}$$

10. Маємо, що $AB < AO + BO$, $BC < BO + CO$, $CA < CO + AO$. Додавши, отримаємо ліву частину нерівності. Оскільки трикутник AOB лежить всередині трикутника ABC, ці фігури опуклі, приклад 12 нам дає, що $AO + OB + AB \leq AB + BC + AC$, $AO + OB \leq AC + BC$. Аналогічно $BO+CO \leq AB+AC$, $AO+CO \leq AB+BC$, і тепер додаємо ці три нерівності.

11. Нехай індекс α вказує на те, що ми беремо проекцію відповідного вектора на пряму в напрямку α. З (1) випливає, що нам досить для всіх α обгрунтувати нерівність

$$|\vec{a}_\alpha| + |\vec{b}_\alpha| + |\vec{c}_\alpha| + |\vec{d}_\alpha| \geq |\vec{a}_\alpha + \vec{d}_\alpha| + |\vec{b}_\alpha + \vec{d}_\alpha| + |\vec{c}_\alpha + \vec{d}_\alpha|.$$

Для цього показуємо, що для будь-яких чисел x, y, z, u таких, що $x + y + z + u = 0$, виконується нерівність

$$|x| + |y| + |z| + |u| \geq |x + u| + |y + u| + |z + u|.$$

Не втрачаючи загальності, вважаємо $u \geq 0$ і розглядаємо випадки, коли серед інших чисел одне, два або три від'ємних.

Література

1. Н. В. Горбачев, *Сборник олимпиадных задач по математике*, МЦМНО, Москва, 2004.
2. В. В. Прасолов, *Задачи по планиметрии*, Москва, МЦМНО, 2001.
3. О. А. Сарана, *Математичні олімпіади: просте і складне поруч*, Навч. посібн., А.С.К., Київ, 2004.
4. И. Ф. Шарыгин, *Задачи по геометрии. (Планиметрия)*, "Наука", Москва, 1986.
5. В. А. Ясінський, *Геометричні задачі: Готуємося до математичної олімпіади*, "Каменяр", Львів, 2003.

Про вступний іспит з математики на фізико-математичному факультеті Житомирського державного університету ім. І. Франка в 2003–2004 роках

О. Ф. Герус, І. Г. Ленчук, О. А. Сарана

Вступний іспит з математики в 2003 році відбувався в усній формі. Кожен білет до усного вступного іспиту з математики складався з чотирьох питань: перше — теоретичне з алгебри і початків аналізу або з геометрії, друге, третє та четверте — практичні завдання. Відповіді абітурієнтів на питання білета оцінювались за 5-бальною системою.

Критерії оцінювання відповіді на теоретичне питання виходять з того, що ця відповідь повинна бути побудована не як переказ відповідного параграфу шкільного підручника, а як викладення всіх відомостей з шкільного курсу, пов'язаних з цим питанням. Розглянемо це на прикладі питання "Коло, описане навколо трикутника". Часто відповідь абітурієнта складається лише з формулювання та доведення теореми про те, що навколо довільного трикутника можна описати коло, центр якого є точкою перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через середини цих сторін. Відповідаючи на це питання, абітурієнт повинен також вивести формули для знаходження радіуса описаного кола такі, як $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$ та $R = \frac{abc}{4S}$ та показати, як за допомогою циркуля та лінійки побудувати описане коло. При цьому абітурієнт може отримати додаткові запитання, наприклад, чи можна описати коло навколо довільного чотирикутника?

Практичні завдання охоплюють курс математики не тільки за 10–11 класи, а й за 7–9 класи. Не знаючи про це, деякі абітурієнти вважають, що хорошої підготовки до випускного екзамену з математики на атестат про середню освіту достатньо і для вступного екзамену. Тому часто найбільші труднощі в таких абітурієнтів викликають задачі на побудову, які вони вчаться розв'язувати в 7–9 класах, задачі на доведення та інші питання з розділу "Планіметрія".

Часто при розв'язуванні задач з алгебри та початків аналізу абітурієнт користується відомими схемами, які сам не в змозі пояснити. Такі схеми повинні бути обґрунтовані посиланнями на відповідні теореми, на властивості відповідних функцій, логічними міркуваннями тощо.

Подаємо для зразку завдання деяких білетів.

Білет 1

1. Властивості числових нерівностей.

2. Радіуси вписаного і описаного кола прямокутного трикутника відповідно рівні 2 см і 5 см. Знайти катети трикутника.

3. В основі похилої призми лежить правильний трикутник зі стороною, рівною a. Бічні ребра рівні b і утворюють з площиною основи кут β. Знайти об'єм призми.

4. Розв'язати рівняння $1 + \sin x \cos 2x = \sin x + \cos 2x$.

Білет 2

1. Ознака паралельності прямої і площини.

2. Розв'язати рівняння $\log_3 8^{x-1} \cdot \log_2 27 = x + 7$.

3. Розв'язати рівняння: $\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x$.

4. Більша основа трапеції має довжину 24 см. Знайти довжину її меншої основи, якщо віддаль між серединами діагоналей трапеції рівна 4 см.

Білет 3

1. Функція $y = ax^2 + bx + c$, її властивості і графік.

2. Побудувати прямокутний трикутник за даними гіпотенузою і висотою, опущеною з вершини прямого кута на гіпотенузу.

3. В основі трикутної піраміди лежить рівнобедрений трикутник, у якого площа рівна S, а кут при вершині - α. Знайти об'єм піраміди, якщо кут між кожним бічним ребром і висотою піраміди рівний β.

4. Розв'язати рівняння: $\log^2_{0,5}(4x) - \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8$.

Білет 4

1. Залежність між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу.

2. Навколо трикутника ABC описано коло. Через точку B проведено дотичну до кола, яка перетинає продовження сторони CA в точці D за точкою A. Знайти периметр трикутника ABC, якщо $AB + AD = AC$, $CD = 3$, $\angle BAC = 60°$.

3. Розв'язати нерівність $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6} \geq 2$.

4. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 3 см і 9 см. Знайти сторони трапеції.

Білет 5

1. Рівняння дотичної до графіка функції.

2. Бічні сторони трапеції, описаної навколо круга, утворюють з її більшою основою гострі кути α і β. Площа трапеції дорівнює S. Знайти площу круга.

3. Довести, що сума квадратів всіх сторін чотирикутника дорівнює сумі квадратів його діагоналей та чотирьох квадратів відрізка, що сполучає середини його діагоналей.

4. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x - x^2} > 5 - x$.

Вступний іспит з математики в 2004 році відбувався в усній формі. Кожен білет до усного вступного іспиту з математики складався з чотирьох питань: перше — теоретичне з алгебри і початків аналізу, друге — теоретичне з геометрії, третє та четверте — практичні завдання. Відповіді абітурієнтів на питання білета оцінювались за 12-бальною системою наступним чином:

питання	1	2	3	4
Максимальна кількість балів	3	3	4	2

Оцінювання відповідей на теоретичні питання

Зміст	Оцінка
Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював і повністю довів усі необхідні твердження по даному питанню.	3
Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював усі необхідні твердження по даному питанню, довів їх, але окремі частини доведень недостатньо обгрунтовані.	2
Абітурієнт правильно сформулював відповідні означення, правильно сформулював і усі необхідні твердження по даному питанню, правильно почав їх доводити, але не закінчив жодного доведення.	1
Абітурієнт сформулював означення і твердження з незначними неточностями, не починав доводити жодне з тверджень, але правильно відповів на додаткові питання.	0.5
Абітурієнт не приступив до відповіді на питання або відповів на інше питання, або його відповідь неправильна.	0

Оцінювання відповідей на практичні питання

Зміст	Оцінка	
	3 питання	4 питання
Вірне, повне, цілком обґрунтоване розв'язання задачі.	4	2
Хід розв'язування в цілому вірний, але допущена одна не груба помилка, або окремі висновки в розв'язанні недостатньо обгрунтовані.	3	1,5
Абітурієнт не закінчив розв'язання, але правильно виконав не менше половини логічних кроків, які ведуть до розв'язку.	2	1
Абітурієнт правильно почав розв'язання.	1	0.5
Інші випадки.	0	0

Якщо сума балів, яку набрав абітурієнт, не виражається цілим числом, то вона заокруглюється в бік збільшення до цілого числа.

Подаємо для зразку завдання деяких білетів.

Білет 1

1. Функція $y = ax + b$, її властивості і графік.
2. Коло, описане навколо трикутника.
3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2} = 0$.
4. Розв'язати нерівність $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$.

Білет 2

1. Формула коренів квадратного рівняння.
2. Формули площ паралелограма, трикутника, трапеції.
3. Розв'язати нерівність $0,5^{2\sqrt{x}} + 2 > 3 \cdot 0,5^{\sqrt{x}}$.
4. Розв'язати рівняння $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

Білет 3

1. Функція y = sinx, її означення, властивості і графік.
2. Вимірювання кута, вписаного в коло.
3. Розв'язати нерівність $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x-10} < 0$.
4. В рівнобедреному трикутнику з бічною стороною, рівною 4 см, проведена медіана бічної сторони. Знайти основу трикутника, якщо довжина медіани рівна 3 см.

Білет 4

1. Функція $y = \operatorname{tg} x$, її означення, властивості і графік.
2. Теорема про перпендикулярність прямої і площини.
3. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.
4. В рівнобедреному трикутнику основа рівна 16, а бічна сторона 10. Визначити радіуси вписаного і описаного кіл та відстань між їх центрами.

Білет 5

1. Розв'язки рівняння $\sin x = a$.
2. Перпендикулярність двох площин.
3. Розв'язати рівняння $\log_{4x+1} 7 - \log_{9x} 7 = 0$.
4. Навколо кола діаметром 15 см описана рівнобічна трапеція з бічною стороною 17 см. Знайти основи трапеції.

Олімпіада Київського Національного університету імені Тараса Шевченка: механіко-математичний факультет

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на механіко-математичний факультет. Олімпіада проходитиме в два тури. Перший — заочний, другий — очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Переможці другого туру олімпіади зараховуються до університету за результатами співбесіди.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату механіко-математичного факультету не пізніше 20 березня 2006 року розв'язки задач першого туру у тонкому зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

Анкета учасника олімпіади

Прізвище_____

Ім'я_____

По-батькові_____

Область_____

Місто, село_____

Номер школи, клас_____

Адреса школи, телефон_____

Домашня поштова адреса, телефон_____

Зошити надсилаються за адресою:

01033, Київ-33,
Володимирська, 64,
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка,
журі олімпіади з математики,
механіко-математичний факультет

Завдання заочного туру олімпіади з математики механіко-математичного факультету в 2006 році

1. Скількома способами можна провести пряму, яка ділить навпіл як площу, так і периметр трикутника зі сторонами 9 см, 10 см, 11 см?

2. Знайти усі пари цілих чисел (x, y), для яких $\sqrt{xy} - \sqrt{x} = \sqrt{87 - 6\sqrt{y}}$.

3. В прямокутнику $ABCD$ сторона $BC = 3AB$. В середині прямокутника знаходиться така точка N, що $CN = \sqrt{2}$, $BN = \sqrt{17}$, $DN = 1$. Знайти $\cos \angle DCN$.

4. Знайти всі натуральні числа n, для яких число $n^4 - 3n^2 + 9$ є простим.

5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ виконуються рівності $AB = BD$, $\angle BAC = 30°$, $\angle DBC = 3°$, $\angle BCA = 31°$. Знайти $\angle BDC$.

6. Довести, що

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \geq 3$$

при умові

$$\pi k - \frac{\pi}{4} < \alpha < \pi k + \frac{\pi}{4},$$

де $k \in Z$.

7. Нехай A, B, C, D, E — довільні точки простору, точки K, L, M, N, P, Q лежать на відрізках AB, BC, CD, DE, KM, LN відповідно, $AK : KB = 2 : 1$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 1 : 1$, $DN : NE = 1 : 6$, $KP : PM = 4 : 1$, $LQ : QN = 7 : 8$. Довести, що відрізок PQ паралельний AE і знайти $PQ : AE$.

8. Довести, що число $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ цифр}}21\underbrace{55\ldots5}_{n-1 \text{ цифра}}801$ є квадратом цілого числа.

9. Нехай S — вершина піраміди, основою якої є трапеція $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Кути між гранями BCS, ADS і основою дорівнюють відповідно $70°$ і $50°$. Знайти величину кута між гранями BCS і ADS.

10. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + yz = 1, \\ z^2 - xy = 3, \\ y^2 + zx = 2. \end{cases}$$

11. Зобразити в прямокутній системі координат Oxy множину точок (x, y), координати яких задовольняють умову $|x - y| + xy \leq 0$.

12. Нехай для внутрішніх кутів α, β, γ трикутника справджується рівність

$$\sin\frac{3\alpha}{2} + \sin\frac{3\beta}{2} - \sin\frac{3\gamma}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} - \cos\frac{3\beta}{2} - \cos\frac{3\gamma}{2} = 1.$$

Довести, що один із кутів трикутника дорівнює $60°$ або $120°$.

13. У якому відношенні ділить об'єм куба площина, що проходить через середини його трьох попарно мимобіжних ребер?

14. Знайти найменше і найбільше значення виразу

$$L = \frac{2x + y - 5}{x + 5y - 9},$$

де $3 \leq x \leq 4$, $2 \leq y \leq 5$.

15. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння

$$(a + 1)\operatorname{tg}^2 x - \frac{2a + 4}{\cos x} - 7a + 1 = 0$$

має більше одного розв'язку на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Олімпіада Київського Національного університету імені Тараса Шевченка: факультет кібернетики

В олімпіаді можуть брати участь учні випускних класів середніх шкіл, ліцеїв та гімназій України, які бажають вступити на факультет кібернетики. Олімпіада проходитиме в два тури. Перший – заочний, другий – очний.

Переможці першого туру запрошуються до участі в другому турі.

Переможці другого туру олімпіади зараховуються до університету за результатами співбесіди.

Усі учасники олімпіади повинні надіслати або передати особисто до деканату факультету кібернетики не пізніше 1 березня 2006 року розв'язки задач першого туру у зошиті, а також поштовий конверт із маркою та своєю зворотною адресою. Анкета учасника наклеюється на обкладинку зошита.

Анкета учасника олімпіади

Прізвище_____

Ім'я_____

По-батькові_____

Область_____

Місто, село_____

Номер школи, клас_____

Адреса школи, телефон_____

Домашня поштова адреса, телефон_____

Зошити надсилаються за адресою:

```
01033, Київ-33,
Володимирська, 64,
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка,
журі олімпіади--2006,
факультет кібернетики
```

Заочний тур олімпіади факультету кібернетики (2006)

Увага! Для вступників на спеціальність "Прикладна математика" задачі групи "В" не є обов'язковими!

Група "А"

1. Розв'язати рівняння в цілих числах

$$k^4 + (k+1)^4 + (k+2)^4 = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2.$$

2. На основі BC рівнобедреного трикутника $\triangle ABC$ взяли точку D. Півколо з діаметром CD та центром в точці O дотикається сторони AB та перетинає сторону AC в точці M. Знайти довжину бісектриси OL трикутника $\triangle BOA$, якщо $AM = 1$ і $BD = 2/\sqrt{7}$.

3. Знайти найменшу можливу сторону правильного трикутника, всередині якого можна розмістити п'ять однакових трикутників зі стороною 1 таким чином, щоб вони не мали спільних внутрішніх точок.

4. Знайти усі натуральні n, при яких для всіх дійсних чисел x має місце рівність

$$\sin^n x + \sin^{n-1} x \cos x + \sin^{n-2} x \cos^2 x + \cdots + \cos^n x = \sin x + \cos x.$$

5. Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — довільні дійсні числа такі, що $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Довести нерівність:

$$\sqrt{\max\{x_1, 0\}} + \cdots + \sqrt{\max\{x_n, 0\}} \le (\min\{x_1, 0\})^2 + \cdots + (\min\{x_n, 0\})^2 + \frac{n}{4}.$$

6. При усіх значення параметра a розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 2x^2 - 6x - 1 \le a \le -x^2 + 6x - 1, \\ a \le 3x - 1. \end{cases}$$

7. Знайти усі значення параметра a, при яких система рівнянь має рівно 3 розв'язки

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz + 9, \\ xyz = a. \end{cases}$$

8. На декартовій площині відмітили точки $A(-2, 0)$, $B(6, 0)$, а також коло, що задається рівнянням $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 4$. Знайти на цьому колі точку C, для якої кут $\angle ACB$ мінімальний.

9. Знайти найменше натуральне число, що починається з цифри 9 і зменшується в 4 рази, якщо цю цифру переставити в кінець числа, не змінюючи порядок інших цифр.

10. На ребрах правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ з вершиною в точці S задані точки $M \in SA$, $N \in SB$, $K \in SD$ так, що $SM : MA = 3 : 1$, $SN = NB$, $SK : KD = 1 : 3$. Площина MKN перетинає ребро SC в точці L. Знайти відношення $SL : LC$.

Група "В"

Скласти алгоритм у вигляді блок-схеми або програми мовами Паскаль, С, Бейсик. Алгоритм повинен бути відкоментованим щодо виконуваних дій та використаних даних. Дозволяється застосовувати лише власноруч написані підпрограми.

1. Точки перетину. Є дві паралельні прямі лінії. На першій з них вибрано a точок, а на другій b точок. Будь-які дві точки з різних прямих з'єднані відрізком. Точки на прямих вибрані так, що кількість точок перетину утворених відрізків є найбільшою можливою. Обчислити цю кількість. На вході задаються два числа a та b ($0 \le a \le 20000$, $0 \le b \le 20000$.)

2. Діагональ. Кількість діагоналей опуклого n-кутника не менша за N. Чому дорівнює найменше можливе значення n? На вході задається ціле число N ($N \le 10^{15}$) — кількість проведених діагоналей, а вивести треба кількість кутів n-кутника.

3. Просте число. По заданому натуральному числу n знайти максимальний степінь числа m (не обов'язково простого) x, при якому m^x ділить $n!$. На вході задаються числа m та n, x виводиться.

4. Пошук. У кімнаті є n дверей. Якщо відкрити двері з номером i, то або через x_i годин ви попадете в безпечне місце, або через x_i годин знову повернетесь в цю ж кімнату. Обчислити очікуваний час P (в годинах), через який можна вибратися з кімнати в безпечне місце. На вході задається число дверей n ($1 < n < 100$), а далі — n пар чисел x_i, $0 < |x_i| < 25$ (якщо x_i додатне, то це час, за який можна попасти в безпечне місце, якщо ж x_i від'ємне, то $|x_i|$ — час, через який ви знову попадете в кімнату) та p_i — ймовірність відкрити i-ті двері. Сума всіх p_i дорівнює 1. Вивести необхідно P — час виходу в безпечне місце або повідомлення, що це зробити неможливо.

46 Міжнародна математична олімпіада

В. Лейфура,[1] *В. Борисова,*[2] *О. Литвиненко*[3]

Черговий, сорок шостий за порядковим номером, форум найкращих юних математиків планети відбувався з 8 по 19 липня 2005 року в Мексиці у місті Меріді, столиці штату Юкатан. Сюди прибули команди з 91 країни. Команда України складалася з шести учасників:

- Чепляка Роман, випускник Рішельєвського ліцею м. Одеси,
- Чуклін Олександр, учень 10 класу гімназії № 1 м. Севастополя,
- Кравець Олександр, випускник Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" м. Києва,
- Кузнєцов Василь, випускник Києво-Печерського ліцею № 171 "Лідер" м. Києва,
- Слободянюк Сергій, випускник Українського фізико-математичного ліцею при КНУ ім. Тараса Шевченка,
- Апостол Роман, випускник Українського фізико-математичного ліцею при КНУ ім. Тараса Шевченка.

Науковим керівником команди України був професор, завідувач кафедри Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили комплексу "Києво-Могилянська академія" В. М. Лейфура. Керівником команди була О. О. Литвиненко, методист Науково-методичного центру середньої освіти МОНУ. Наукові керівники команд, які і складають міжнародне журі олімпіади, розпочали свою роботу 8 липня.

Журі ММО-46 протягом перших п'яти днів працювало поблизу міста Меріди на узбережжі Мексиканської затоки. На обговорення було винесено 27 задач, серед яких була і задача з геометрії, запропонована доцентом Вінницького державного педагогічного університету В. А. Ясінським. За внесок у формування попереднього списку завдань олімпіади Оргкомітет відзначив В. А. Ясінського спеціальним Сертифікатом.

З цих 27 задач було обрано 6 задач, причому дві з них класифікувалися як нескладні, дві — середнього рівня складності і дві — як складні. Після цього були сформовані варіанти першого та другого дня і запропоновані схеми оцінювання для кожної задачі. 11 липня в Меріду прибували команди країн-учасниць. 12 липня в міському театрі відбулася урочиста церемонія

[1]Валентин Лейфура — заслужений вчитель України, професор, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Миколаївського державного гуманітарного університету імені Петра Могили комплексу "Києво-Могилянська академія".

[2]Валентина Борисова — Завідуюча сектором Науково-методичного центру середньої освіти МОН України.

[3]Ольга Литвиненко — Методист Науково-методичного центру середньої освіти МОН України.

відкриття 46-ї Міжнародної математичної олімпіади. 13 і 14 липня учасники виконували завдання олімпіади. 15 і 16 липня проходила перевірка й координація робіт учасників.

Особливість перевірки робіт полягає в тому, що вона є подвійною. З одного боку, роботи перевіряє науковий керівник команди. З іншого боку, фотокопії робіт перевіряють координатори. Група координаторів формується країною-організатором. Здебільшого цього року це були математики з різних університетів Мексики. Декілька фахівців були запрошені з інших країн. Приємно відзначити, що вже другий рік поспіль до роботи координатором залучається відомий науковець і викладач з міста Одеси доцент, кандидат фізико-математичних наук І. М. Мітельман. З числа координаторів ство-



Чепляка Роман



Чуклін Олександр



Кравець Олександр

рюється шість груп — за кількістю задач. Кожну таку групу очолює старший координатор. Проведення координації очолював Омар Антолин Камарена. Науковий керівник команди повинен відповісти на всі запитання коор-



Кузнецов Василь



Слободянюк Сергій



Апостол Роман

динаторів, на їхню вимогу перекласти англійською мовою окремі фрагменти робіт, обґрунтувати наявність повного розв'язку, певних просувань тощо. Після доброзичливої, але завжди вимогливої дискусії, науковий керівник і координатори узгоджують остаточну оцінку учасника за кожну задачу. Це оформляється спеціальним протоколом, який з одного боку підписує науковий керівник команди, а з іншого — координатори відповідної групи.

Після опрацювання всіх таких протоколів Оргкомітет розташував усіх учасників за кількістю набраних балів, після чого журі на своєму заключному засіданні 17 липня визначило переможців.

Команда України виступила впевнено і головне своє завдання виконала: усі учасники вибороли медалі. Учасники, які набрали від 35 до 42 балів, отримали золоті медалі. Золоті медалі поїхали до 18 країн світу, дві з них — до України. Киянин Сергій Слободянюк показав абсолютний результат — 42 бали із 42 можливих. Другу золоту медаль для України здобув одесит Роман Чепляка (38 балів). Таким чином, Роман поміняв афінське срібло на мексиканське золото. Учасники змагань, які набрали від 23 до 34 балів, нагороджені срібними медалями. Серед них наші Апостол Роман (32 бали) і Кузнєцов Василь (30 балів). Василь отримав срібну медаль удруге поспіль. Олександр Кравець (22 бали) та Олександр Чуклін (17 балів) отримали бронзові медалі. Крім кількісних показників, хотілося б звернути увагу і на творчі. Наші юні математики запропонували багато цікавих, різноманітних і вишуканих розв'язань. Найскладнішу задачу № 3 розв'язали три українські учні — Сергій Слободянюк, Роман Чепляка і Роман Апостол. У неофіційному командному заліку команда України набрала 181 бал — дев'ятий за рейтингом результат. Це означає, що команда України увійшла до десятки найсильніших команд світу. Серед європейських команд ми — треті. Це, безперечно, високі показники. Варто звернути увагу на певні обставини, що відбилися на результатах українських школярів. Через непередбачену затримку при авіаперельоті Мехіко–Меріда наша команда прибула до Меріди не 11 липня, а вже вночі 13 липня — за декілька годин до початку першого туру, не потрапивши на превеликий жаль на урочисте відкриття ММО. А тому часу для відпочинку й акліматизації не залишилося. Але наша команда, попри всі негаразди, змагалась самовіддано, хоча характер помилок деяких учасників свідчив про ознаки втоми. Виступ команди України на Міжнародній математичній олімпіаді 2005 року, творчі досягнення юних математиків нашої країни при розв'язуванні задач цієї олімпіади заслуговують на високу оцінку.

Зауважимо, що вночі з 17 на 18 липня місто Меріда очікувало на навалу урагану "Емілі". Влада штату Юкатан оголосила надзвичайний стан: з другої половини дня 17 липня було припинено транспортний рух на вулицях Меріди, роботу всіх магазинів і установ. Навіть вікна в готелях було заклеєно за допомогою спеціальних стрічок, і виходити з готелів заборонялося. Уряд скасував усі масові заходи. Оргкомітет готувався до можливого нагородження учасників медалями в робочому порядку — без належної урочистої церемонії. Утім, у другій половині дня 18 липня метеослужби повідомили, що основний удар стихії минув. Таким чином, урочистості з нагородження переможців олімпіади відбулися, хоча й за дещо скороченим сценарієм.

На закритті 46 Міжнародної математичної олімпіади всі члени нашої делегації були одягнені в красиву форму кольорів державного прапора України, яку виготовило в подарунок спеціально для нашої команди одеське об'єднання "Нова реальність" за ініціативою його директора Івана Сергійовича Давиденка. Команда привезла з собою велике шовкове полотнище прапора України, з яким наші учні виходили отримувати високі нагороди Міжнародної олімпіади. Ми щиро вдячні І. С. Давиденку за благодійну допомогу, а успіх кожного члена команди повною мірою розділяють ліцеї та гімназії, в

яких вони навчалися, учителі і всі ті, хто готував юних математиків України до ММО 2005 року.

В таблицях 1–2 наведено підсумкові результати.

Таблиця 1. Результати учасників команди України

Учасник	Задачі						Сума	Відзнака
	1	2	3	4	5	6		
Чепляка Роман	7	7	7	7	7	3	38	Золота медаль
Чуклін Олександр	7	1	0	2	7	0	17	Бронзова медаль
Кравець Олександр	0	7	1	7	7	0	22	Бронзова медаль
Кузнєцов Василь	7	7	0	7	7	2	30	Срібна медаль
Слободянюк Сергій	7	7	7	7	7	7	42	Золота медаль
Апостол Роман	7	4	7	7	7	0	32	Срібна медаль

Таблиця 2. Результати неофіційного командного заліку першої десятки країн–учасниць ММО-2005

Місце	Країна	Медалі			Бали
		Золоті	Срібні	Бронзові	
1	Китай	5	1	0	235
2	США	4	2	0	213
3	Російська Федерація	4	2	0	212
4	Іран	2	4	0	201
5	Республіка Корея	3	3	0	200
6	Румунія	4	1	1	191
7	Тайвань	3	2	1	190
8	Японія	3	1	2	188
9–10	Україна	2	2	2	181
9–10	Угорщина	2	3	1	181

Наступна 47 Міжнародна математична олімпіада відбудеться в липні 2006 року в Словенії.

Умови задач

Перший день

Задача 1. (*Румунія*) На сторонах рівностороннього трикутника ABC відмічено шість точок: A_1, A_2 на BC, B_1, B_2 на CA і C_1, C_2 на AB. Ці точки є вершинами опуклого шестикутника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, сторони якого мають

однакову довжину. Доведіть, що прямі A_1B_2, B_1C_2 та C_1A_2 перетинаються в одній точці.

Задача 2. (*Нідерланди*) Нехай $a_1, a_2, \ldots$ — послідовність цілих чисел, яка містить безліч як додатних, так і від'ємних членів. Відомо, що для кожного натурального n числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дають n різних остач від ділення на n. Доведіть, що кожне ціле число зустрічається в цій послідовності рівно один раз.

Задача 3. (*Республіка Корея*) Нехай x, y, z — такі додатні числа, що $xyz \geq 1$. Доведіть, що

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

Другий день

Задача 4. (*Польща*) Знайдіть усі натуральні числа, які є взаємно простими з усіма членами нескінченної послідовності $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, $n \geq 1$.

Задача 5. (*Польща*) Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, сторони BC і AD якого є рівними, але непаралельними. Нехай E і F — такі внутрішні точки на сторонах BC і AD відповідно, що $BE = DF$. Відомо, що прямі AC і BD перетинаються в точці P, прямі BD і EF перетинаються в точці Q, прямі EF і AC перетинаються в точці R. Розглянемо трикутники PQR, які утворені для всіх таких точок E і F. Доведіть, що кола, описані навколо всіх цих трикутників, мають спільну точку, відмінну від точки P.

Задача 6. (*Румунія*) Учасникам математичної олімпіади було запропоновано 6 задач. Виявилося, що будь-які дві задачі розв'язали більше за $2/5$ від загальної кількості учасників, але жоден учасник не розв'язав усі 6 задач. Доведіть, що знайдуться принаймні два учасника, кожен з яких розв'язав рівно 5 задач.

Розв'язання задач

Задача 1. *Розв'язання 1.* Нехай P — така внутрішня точка трикутника $\triangle ABC$, що трикутник $\triangle A_1A_2P$ є рівностороннім. Оскільки $A_1P \parallel C_1C_2$ і $A_1P = C_1C_2$, то $A_1PC_1C_2$ — ромб. Аналогічно $A_2PB_2B_1$ також є ромбом. Отже, трикутник $\triangle C_1PB_2$ рівносторонній.

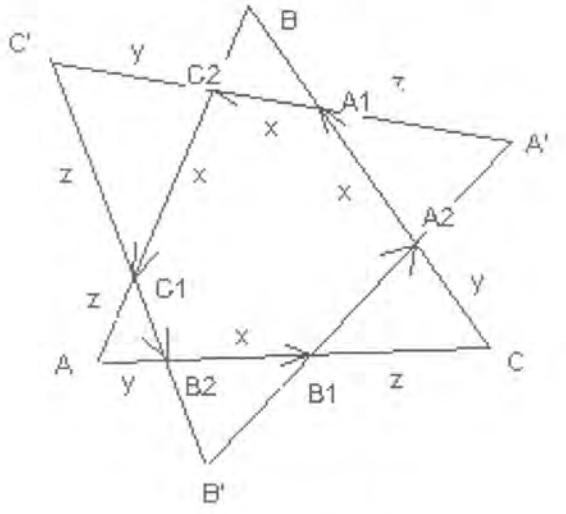
Позначимо $\alpha = \angle B_2B_1A_2$, $\beta = \angle B_1A_2A_1$, $\gamma = \angle C_1C_2A_1$. Тоді α і β є зовнішніми кутами трикутника $\triangle CB_1A_2$ з $\angle C = 60^\circ$, а тому $\alpha + \beta = 240^\circ$. Легко бачити, що $\angle B_2PA_2 = \alpha$ і $\angle C_1PA_1 = \gamma$. Отже, $\alpha + \gamma = 360^\circ - (\angle C_1PB_2 + \angle A_1PA_2) = 240^\circ$, звідки $\beta = \gamma$. Зауважимо, що $\angle C_1B_2B_1 = \beta$. Таким чином, трикутники $\triangle A_1A_2B_1$, $\triangle B_1B_2C_1$, $\triangle C_1C_2A_1$ є рівними, а тому трикутник $\triangle A_1B_1C_1$ є рівностороннім. Звідси випливає, що B_1C_2, A_1B_2, C_1A_2 є серединними перпендикулярами до сторін A_1C_1, C_1B_1, B_1A_1 трикутника $\triangle A_1B_1C_1$, а тому перетинаються в одній точці.

Розв'язання 2. (Роман Апостол) Розглянемо 6 векторів однакової довжини, сума яких дорівнює нуль-вектору:

$$\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1C_2} + \overrightarrow{C_2C_1} + \overrightarrow{C_1B_2} + \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_1A_2} = \vec{0}.$$

Але $\overline{A_2A_1} + \overline{C_2C_1} + \overline{B_2B_1} = \bar{0}$, бо $A_2A_1 = C_2C_1 = B_2B_1$ і кути між парами прямих B_2B_1 і A_2A_1, B_2B_1 і C_2C_1, A_2A_1 і C_2C_1 дорівнюють $60°$.

Отже, $\overline{A_1C_2} + \overline{C_1B_2} + \overline{B_1A_2} = \bar{0}$. Звідси $\overline{A_1C_2} + \overline{C_1B_2} = -\overline{B_1A_2}$. Сума двох векторів однакової довжини є вектором такої самої довжини тільки тоді, коли вони утворюють кут $120°$. Тому три прямі A_1C_2, B_2C_1, B_1A_2 будуть визначати рівносторонній трикутник $\triangle A'B'C'$.



Далі легко бачити, що всі шість трикутників

$$\triangle A_1BC_2, \quad \triangle C_2C'C_1, \quad \triangle C_1AB_2, \quad \triangle B_2B'B_1, \quad \triangle B_1CA_2, \quad \triangle A_2A'A_1$$

є рівними за стороною та двома прилеглими до неї кутами.

Розглянемо чотирикутник AC_2A_1C. Маємо

$$AC_2 + A_1C = (z + x) + (x + y) = 2x + z + y,$$
$$C_2A_1 + AC = x + (y + z + x) = 2x + z + y.$$

Отже, $AC_2 + A_1C = C_2A_1 + AC$, тобто чотирикутник AC_2A_1C є описаним. Звідси випливає, що вписане в трикутник $\triangle ABC$ коло дотикається до A_1C_2.

Аналогічно розглянувши чотирикутники ABA_2B_1 і CBC_1B_2 маємо, що коло, вписане в трикутник $\triangle ABC$, дотикається до B_1A_2 і B_2C_1.

Тим самим доведено, що шестикутник $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ є описаним навколо кола, вписаного в трикутник $\triangle ABC$. За теоремою Бріаншона, головні діагоналі такого шестикутника перетинаються в одній точці.

Зауваження. Після того, як доведено рівність шести трикутників, досить було помітити, що вся отримана конструкція не змінюється при повороті на $120°$ відносно точки O, яка є центром трикутника $\triangle ABC$. Тоді оскільки $\angle B_2C_1C_2 = \angle C_2A_1A_2$ і $\angle A_1A_2B_1 = \angle B_1B_2C_1$, то пряма B_1C_2 є віссю симетрії шестикутника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, а отже проходить через центр повороту O. А тому всі три зазначені прямі проходять через точку O.

Задача 2. *Розв'язання.* (Олександр Кравець) Очевидно, що всі числа даної послідовності різні. Якщо це не так, тобто $a_i = a_j$ при деяких $i < j$, то $a_j \equiv a_i \pmod{j}$. Суперечність, бо за умовою числа $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j$ дають різні остачі за модулем j.

Тепер доведемо індукцією по n, що множина чисел $a_1, \ldots, a_n$ збігається з деякою множиною послідовних n цілих чисел, тобто

$$\max_{1\le i\le n} a_i - \min_{1\le i\le n} a_i = n-1$$

та множина $\{a_1, \ldots, a_n\}$ містить всі числа між

$$\min_{1\le i\le n} a_i \quad \text{і} \quad \max_{1\le i\le n} a_i$$

переставлені в деякому порядку.

База індукції для $n = 1$ є очевидною.

Нехай твердження доведено для $n = k$, тобто множина чисел $a_1, \ldots, a_k$ є деякою перестановкою множини

$$\{b, b+1, b+2, \ldots, b+k-1\},$$

де $b = \min_{1\le i\le k} a_i$. Доведемо тепер, що $a_{k+1} = b-1$ або $a_{k+1} = b+k$. Якщо $a_{k+1} < b-1$ або $a_{k+1} > b+k$, то покладемо

$$n = \max\{|a_{k+1} - (b+k-1)|, |a_{k+1} - b_k|\}.$$

Легко бачити, що $n \ge k+1$. Нехай l і m — такі індекси, що $a_l = b$, $a_m = b+k-1$, $1 \le l, m \le k$. Оскільки $a_{k+1} - a_m$ ділиться на $|a_{k+1} - a_m|$ та $a_{k+1} - a_l$ ділиться на $|a_{k+1} - a_l|$, то за вибором n серед n чисел $a_1, \ldots, a_n$ є два, які при діленні на n дають однакові остачі. Суперечність.

Таким чином, a_{k+1} може набувати лише двох значень: $a_{k+1} = b-1$ або $a_{k+1} = b+k$, що й треба було довести. Нехай тепер x — довільне ціле число. Оскільки $a_k < 0$ для безлічі k і члени послідовності є різними, то знайдеться індекс i такий, що $a_i < x$. Аналогічно знайдеться такий індекс j, що $x < a_j$. Отже, якщо $n > \max\{i, j\}$, то кожне число x, яке задовольняє умову $a_i < x < a_j$, міститься в множині $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Тим самим доведено, що кожне ціле число зустрічається в послідовності, причому рівно один раз.

Задача 3. *Розв'язання 1.* (Сергій Слободянюк) Дана нерівність є еквівалентною наступній нерівності:

$$\frac{3}{x^2+y^2+z^2} \ge \frac{1}{x^5+y^2+z^2} + \frac{1}{x^2+y^5+z^2} + \frac{1}{x^2+y^2+z^5}. \qquad (*)$$

Зауважимо, що коли ми доведемо нерівність $(*)$ для всіх $x, y, z > 0$ при $xyz = 1$, то ми розв'яжемо нашу задачу і для випадку, коли $xyz = a^3 \ge 1$. Справді, якщо $xyz = a^3 \ge 1$, то покладемо $x = ax_1$, $y = ay_1$, $z = az_1$. Тоді

x_1, y_1, z_1 — дійсні числа, для яких $y_1 x_1 z_1 = 1$. Залишилось зауважити, що, наприклад,

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} = \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1^5 a^3+y_1^2+z_1^2} \le \frac{x_1^2+y_1^2+z_1^2}{x_1^5+y_1^2+z_1^2}.$$

Тому надалі не зменшуючи загальності міркувань будемо доводити нерівність $(*)$ при умові $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Нерівність $(*)$ можна переписати ще так:

$$\begin{aligned} 3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^5+z^2)(x^2+y^2+z^5) \\ \ge (x^2+y^2+z^2)((x^5+y^2+z^2)(x^2+y^5+z^2) \\ + (x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^5) + (x^2+y^5+z^2)(x^2+y^2+z^5)). \end{aligned}$$

Остання нерівність, після розкриття дужок і виконання очевидних перетворень, набуває вигляду

$$\begin{aligned} x^9+y^9+z^9+x^3+y^3+z^3+2(x^7y^5+x^5y^7+z^7y^5+y^7z^5+x^7z^5+z^7x^5) \\ \ge x^6+y^6+z^6+x^3y^3+z^3y^3+x^3z^3 \\ + (x^4y^2+y^4x^2+x^4z^2+z^4x^2+z^4y^2+y^4z^2) \\ + (x^4y^5+y^4x^5+x^4z^5+z^4x^5+z^4y^5+y^4z^5). \end{aligned} \tag{1}$$

Позначимо

$$\begin{aligned} A = x^9+y^9+z^9+x^3+y^3+z^3,\ B = x^6+y^6+z^6+x^3y^3+z^3y^3+x^3z^3, \\ C = x^7y^5+x^5y^7+z^7y^5+y^7z^5+x^7z^5+z^7x^5, \\ D = x^4y^2+y^4x^2+x^4z^2+z^4x^2+z^4y^2+y^4z^2, \\ E = x^4y^5+y^4x^5+x^4z^5+z^4x^5+z^4y^5+y^4z^5. \end{aligned}$$

Тоді нерівність (1) набуває вигляду

$$A + 2C \ge B + D + E. \tag{2}$$

Доведемо наступні нерівності:

$$A \ge B, \tag{3}$$

$$C \ge D, \tag{4}$$

$$C \ge E. \tag{5}$$

Застосувавши нерівність Коші та нерівність трьох квадратів, дістанемо

$$\begin{aligned} A = x^9+x^3+y^3+y^9+z^9+z^3 \ge 2(x^6+y^6+z^6) \\ = x^6+y^6+z^6+(x^3)^2+(y^3)^2+(z^3)^2 \\ \ge x^6+y^6+z^6+(xy)^3+(yz)^3+(zx)^3. \end{aligned}$$

Таким чином, нерівність (3) є правильною. Для доведення нерівності (4) скористаємось ваговою нерівністю Коші:

$$5(x^7y^5 + x^5y^7) + x^7z^5 + x^5z^7 \geq 12\sqrt[12]{x^{72}y^{60}z^{12}} = 12x^6y^5z = 12x^5y^4.$$

Додаючи цю нерівність та п'ять інших, які отримуються з неї всілякими перестановками чисел x, y, z, одержимо шукану нерівність (4). Аналогічно доводиться і нерівність (5): застосувавши вагову нерівність Коші, маємо

$$2(x^7y^5 + x^5y^7) + x^7z^5 + x^5z^7 \geq 6x^6y^4z^2 = 6x^4y^2.$$

Додаючи цю нерівність та п'ять інших, які отримуються з неї всілякими перестановками чисел x, y, z, дістанемо нерівність (5). Таким чином, з нерівностей (3)–(5) випливає нерівність (1), а отже і нерівність $(*)$, яка є еквівалентною вихідній нерівності.

Розв'язання 2. (Роман Чепляка) Застосуємо нерівність Коші–Буняковського для векторів $(x^{\frac{5}{2}}, y, z)$, та $(\sqrt{yz}, \sqrt{y^3zx}, \sqrt{z^3xy})$. Отримаємо

$$(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^3zx + z^3xy) \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2)^2. \tag{1}$$

Аналогічно отримуємо наступні нерівності:

$$(x^2 + y^5 + z^2)(xz + x^3zy + z^3xy) \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2)^2, \tag{2}$$

$$(x^2 + y^2 + z^5)(yx + x^3zy + y^3xz) \geq xyz(x^2 + y^2 + z^2)^2. \tag{3}$$

З нерівностей (1)–(3) випливає, що

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \\
&\quad\leq \frac{yz + y^3zx + z^3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)xyz} + + \frac{xz + x^3zy + z^3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)xyz} + \frac{yx + y^3zx + x^3zy}{(x^2 + y^2 + z^2)xyz} \\
&\quad= \frac{(xy + yz + xz) + 2xzy(xy + xz + yz)}{(x^2 + y^2 + z^2)xyz} = \frac{\frac{xz+yz+xy}{xyz} + 2(xz + yz + xy)}{(x^2 + y^2 + z^2)} \\
&\quad\leq \frac{3(xz + xy + yz)}{(x^2 + y^2 + z^2)} \leq 3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 3.
\end{aligned}$$

Отже, ми довели справедливість нерівності $(*)$, а отже й вихідної нерівності, бо

$$\left(1 - \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2}\right) + \left(1 - \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2}\right) + \left(1 - \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5}\right) \leq 3.$$

Розв'язання 3. (Юрій Борейко, Республіка Молдова) Оцінивши різницю між правою та лівою частинами, легко довести справедливість нерівностей:

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geq \frac{x^5 - x^2}{x^3(x^2 + y^2 + z^2)}, \qquad \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} \geq \frac{y^5 - y^2}{y^3(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$\frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq \frac{z^5 - z^2}{z^3(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Додаючи отримані нерівності, дістанемо:

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{x^2+y^5+z^2}+\frac{z^5-z^2}{x^2+y^2+z^5} &\geq \frac{x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}}{x^2+y^2+z^2}\\ &\geq \frac{x^2-yz+y^2-xz+z^2-xy}{x^2+y^2+z^2}\\ &\geq 0\end{aligned}$$

бо $-\frac{1}{x}\geq -yz$, $-\frac{1}{y}\geq -xz$, $-\frac{1}{z}\geq -xy$, $x^2+y^2+z^2\geq xy+zy+xz$.

Це розв'язаня виявилося настільки вишуканим та несподіваним, що журі олімпіади присудило Юрію Борейку спеціальний приз, чого не траплялося вже чимало років.

Задача 4. *Розв'язання 1* (Василь Кузнєцов) Доведемо, що єдиним таким числом є 1. Зрозуміло, що 1 задовольняє умову задачі. Для будь-якого іншого натурального числа $m>1$ візьмемо якийсь його простий дільник p і доведемо, що в послідовності знайдеться число a_n, яке ділиться на p. Тоді m не буде взаємно простим з a_n, тобто для $m>1$ умова не буде виконуватись. Таким чином, розв'язання задачі звелося до розгляду простих чисел. Якщо $p=2$ або $p=3$, то можна взяти $a_2=48$. Нехай тепер p — просте число та $p>3$. За малою теоремою Ферма маємо

$$2^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)\quad \text{і}\quad 3^{p-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p).$$

Звідси $(2^{p-1}+2)(3^{p-1}+3)\equiv (1+2)(1+3)\equiv 12\,(\mathrm{mod}\,p)$,

$$6(2^{p-2}+1)(3^{p-1}+1)\equiv 12\,(\mathrm{mod}\,p),$$
$$6((2^{p-2}+1)(3^{p-1}+1)-2)=6(6^{p-2}+2^{p-2}+3^{p-2}-1)\text{ ділиться на }p.$$

Оскільки 6 та p взаємно прості, то звідси число $a_{p-2}=2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$ ділиться на p.

Таким чином, ми довели, що для будь-якого простого числа p існує член послідовності, що ділиться на p.

Розв'язання 2. (Сергій Слободянюк) Будемо розглядати послідовність $a_n=6^n+3^n+2^n-1$ для $n\geq -1$. Легко перевірити, що послідовність задовольняє рекурентне співвідношення

$$a_{n+4}=12a_{n+3}-47a_{n+2}+72a_{n+1}-36a_n$$

з початковими умовами $a_{-1}=0$, $a_0=2$, $a_1=10$, $a_2=48$. Це випливає з того, що кожне з чисел 6, 3, 2 та 1 задовольняє співвідношення

$$a^4=12a^3-47a^2+72a-36.$$

Таким чином, знаючи перші чотири члени послідовності, ми можемо визначити і решту. Доведемо, що для будь-якого простого p існує такий номер $i\in\mathbb{N}$, що a_i ділиться на p. Це буде означати, що 1 — єдине шукане число.

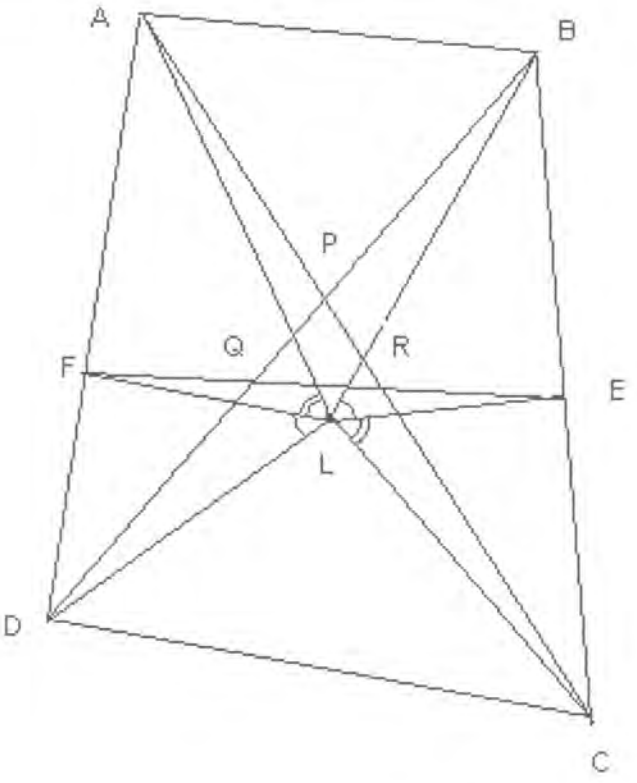
Якщо $p = 2$ або $p = 3$, то візьмемо $a_2 = 48$. Нехай $p \geq 5$ — просте. Замінимо всі члени послідовності на їхні остачі при діленні на p. Розглянемо у полі лишків $\mathbb{Z}_p$ четвірки послідовних остач

$$\{(\overline{a}_i, \overline{a}_{i+1}, \overline{a}_{i+2}, \overline{a}_{i+3}),\ i \geq -1\}. \tag{1}$$

Оскільки різних четвірок не більше за p^4, то деяка четвірка остач повториться і далі послідовність (1) буде періодичною. Але p та 36 взаємно прості та $36a_n = -a_{n+4} + 12a_{n+3} - 47a_{n+2} + 72a_{n+1}$, тому знаючи якусь четвірку можемо визначити й попередню. Отже, перша четвірка остач вигляду $(\overline{0}, \overline{2}, \overline{10}, \overline{48})$ буде повторюватись в послідовності безліч разів.

Отже, для кожного простого числа $p \geq 5$ в послідовності $\{\overline{a}_n, n \geq -1\}$ нульова остача зустрічається безліч разів, що й завершує доведення.

Задача 5. *Розв'язання.* (Роман Чепляка) Позначимо через L точку перетину серединних перпендикулярів до відрізків AC і BD.



Доведемо, що описане коло трикутника $\triangle PQR$ проходить через точку L. Оскільки $LA = LC$, $LB = LD$ і за умовою $AD = BC$, то $\triangle ADL = \triangle BLC$. Звідси $\angle ALD = \angle CLB = \varphi$. Розглянемо такий поворот навколо точки L, що переводить A в C та D в B, тобто переводить $\triangle ALD$ в $\triangle CLB$. Такий поворот існує, бо трикутники рівні й однаково орієнтовані. Тоді AD перейде в CB і оскільки $DF = BE$, то F перейде в E. Звідси $\triangle LFD = \triangle LEB$ та зокрема $LF = LE$.

Оскільки $\angle ELB = \angle FLD$, то $\angle ELF = \angle DLB - \angle FLD + \angle BLE = \angle DLB$. Оскільки $AD = BC$, $DF = BE$, то $AF = EC$. Звідси $\triangle AFL = \triangle CEL$ за трьома сторонами. Маємо $\angle ALF = \angle CLE$, $\angle FLE = \angle ALC - \angle ELC + \angle ALF = \angle ALC$. Отже, $\angle ELF = \angle ALC = \angle DLB$.

Звідси випливає, що рівнобедрені трикутники $\triangle ELF$, $\triangle BLD$, $\triangle ALC$ є подібними, а тому $\angle LCA = \angle FEL = \angle LBD$. Легко бачити, що точки L, R, E, C лежать на одному колі, а тому $\angle LRC = \angle LEC$. Аналогічно чотири точки Q, B, E, L також лежать на одному колі, звідки $\angle LEC = \angle LQB$. Отже, $\angle LRC = \angle LEC = \angle LQB = \angle LQP$. Це означає, що точки P, Q, R, L лежать на одному колі, що й треба було довести.

Зауваження. Точку, про яку йдеться в умові задачі, можна ідентифікувати як другу спільну точку кіл, описаних навколо трикутників $\triangle BCP$ та $\triangle DAP$.

Задача 6. *Розв'язання.* (Сергій Слободянюк) Зведемо нашу задача до випадку, коли кожен з учасників розв'язав принаймні 4 задачі. Для цього просто до розв'язків кожного з тих, хто розв'язав менше 4 задач, додамо необхідну кількість, щоб стало рівно 4. Умова задачі при цьому тим більш буде виконуватись.

Нехай кількість учасників становить n. Розглянемо випадок, коли не існує учасника, який розв'язав 5 задач. Підрахуємо кількість пар задач, що розв'язали всі учасники разом. З одного боку, вона дорівнює $6n$, бо кожен учасник розв'язав $C_4^2 = 6$ пар задач, а з іншого боку ця кількість більша за $6n$, оскільки кожна з $C_6^2 = 15$ пар задач була розв'язана більше, ніж $\frac{2n}{5}$ учасниками, тобто загалом пар більше, ніж $15 \cdot \frac{2n}{5} = 6n$. Отже, цей випадок неможливий.

Нехай є лише один учасник (назвемо його X), який розв'язав 5 задач, а їх номери (не обмежуючи загальності) — 2, 3, 4, 5, 6. Введемо наступні позначення: $A_{i,j}$ — множина учасників, що не розв'язали i-ту та j-ту задачі, $B_i = A_{i,i}$, $C_{i,j}$ — множина тих, хто не розв'язав i-ту або j-ту задачу,

$$T_i = \sum_{j \neq i} |C_{i,j}|$$

(тут $|M|$ — кількість елементів множини M). Кожен учасник крім X міститься рівно в одній з множин $A_{i,j}$, а тому $\sum_{i<j} |A_{i,j}| = n - 1$. За умовою $|C_{i,j}| < \frac{3n}{5}$, тому $|C_{i,j}| \leq \frac{3n-1}{5}$, звідки

$$\sum_{i<j} |C_{i,j}| \leq C_6^2 \cdot \frac{3n-1}{5} = 9n - 3.$$

Але оскільки кожен учасник крім X входить в 9 множин $C_{i,j}$, а X входить в 5 множин $C_{i,j}$, то $\sum_{i<j} |C_{i,j}| = 9n - 4$.

Якщо $3n - 1$ не ділиться на 5, то при всіх i, j буде $|C_{i,j}| \leq \frac{3n-2}{5}$ і $\sum_{i<j} |C_{i,j}| \leq 9n - 6$, що неможливо. Отже, $3n - 1$ ділиться на 5 і для всіх пар індексів i, j крім однієї — позначимо її i_1, j_1 — $|C_{i,j}| = \frac{3n-1}{5}$, а $C_{i_1,j_1} = \frac{3n-1}{5} - 1$.

Покажемо, що при $i \neq 1$ виконується рівність $T_i = 3|B_i| + 2n - 1$. Справді, при $i \neq 1$ маємо

$$|C_{i,j}| = \begin{cases} \sum_{k\neq i, k\neq j} (|A_{i,k}| + |A_{k,j}|) + |A_{i,j}|, & j \neq 1, \\ \sum_{k\neq i, k\neq j} (|A_{i,k}| + |A_{k,j}|) + |A_{i,j}| + 1, & j = 1. \end{cases}$$

Тому для $T_i = \sum_{j\neq i} |C_{i,j}|$ за останньою формулою маємо, що кожен доданок $|A_{k,l}|$, де $k \neq i, l \neq i$, входить у T_i двічі, а кожен доданок $|A_{i,k}|$, де $k \neq i$, — п'ять разів. Зважаючи, що при $i \neq 1$ маємо $|B_i| = \sum_{i\neq j} |A_{i,j}|$, $i \neq 1$ та $\sum_{i<j} |A_{i,j}| = n - 1$, маємо шукану рівність.

Оскільки $i_1 \neq j_1$, то принаймні одне з чисел i_1, j_1 не дорівнює одиниці. Нехай це i_1. Тоді при $k \neq i_1, k \neq j_1, k \neq 1$ будемо мати

$$T_k = \sum_{j\neq k} |C_{k,j}| = 3n - 1 = 3|B_k| + 2n - 1,$$

$$T_{i_1} = \sum_{j\neq i_1} |C_{i_1,j}| = 3n - 2 = 3|B_{i_1}| + 2n - 1.$$

Звідси мають одночасно виконуватись рівності

$$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3), \qquad n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3),$$

суперечність. Отже, і цей випадок неможливий. Тому існують принаймні два учасники, що розв'язали по 5 задач.

Команда України щиро вдячна посольствам України на Кубі та в Мексиці, які доклали максимум зусиль, щоб зберегти сили учасників олімпіади для їх успішного виступу. В Гавані — тепло зустріли, надали допомогу при поселенні в готель, провели оглядову екскурсію по столиці, супроводжували до аеропорту. В Мехіко члени команди отримали багато практичних порад щодо безпечного перебування в Мексиці та значну допомогу в організаційних питаннях.

Автори висловлюють щиру вдячність студенту IV курсу Київського Національного університету імені Тараса Шевченка Андрію Анікушину за допомогу при підготовці до друку цієї статті.

X Всеукраїнська заочна математична олімпіада

Олімпіаду проводять журнал "У світі математики", газета "Математика", журнал "Математика в школі", Українське математичне товариство та Мала Академія Наук. В олімпіаді може взяти участь кожен учень 5–11 класів.

Цього року ми не маємо можливості запросити переможців заочної олімпіади на заключний тур Всеукраїнської математичної олімпіади, але наполегливо радимо потренуватись та випробувати свої здібності всім претендентам на участь в обласних та Всеукраїнській олімпіадах, а також відбіркових змаганнях на Міжнародну математичну олімпіаду.

Розв'язання задач слід надсилати до 15 лютого 2006 року (за поштовим штемпелем) на адресу:

```
01033, Київ-33,
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка,
механіко-математичний факультет,
кафедра теорії ймовірностей та математичної статистики,
''Олімпіада 5--11''
```

Умови задач

1. Сашко та Тарас знайшли в лісі галявину, навколо якої росло багато дубів. Вони почали рахувати дуби рухаючись в одному напрямку, але кожен зі свого місця. Тому дуб, який Сашко порахував восьмим, Тарас порахував дев'ятнадцятим, а дуб, який Тарас порахував восьмим, Сашко порахував двадцять сьомим. Скільки дубів росло навколо галявини?

2. Рівносторонній трикутник зі стороною 8 поділили на рівносторонні трикутники зі стороною 1. Яку найбільшу кількість цих трикутників можна пофарбувати так, щоб жодні два пофарбовані трикутники не мали спільних вершин?

3. Довести, що існує нескінченно багато парних натуральних чисел k таких, що для кожного простого числа p число $p^2 + k^3$ є складеним.

4. Бісектриси кутів A та B трикутника $\triangle ABC$ перетинають сторони BC та AC в точках D та E. Відомо, що $AE + BD = AB$. Знайти кут $\angle C$.

5. Розкласти на множники вираз

$$x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 - xyz(x^3 + y^3 + z^3).$$

6. Серед 13 зовні однакових монет є одна фальшива, яка відрізняється вагою від справжніх. Чи можливо за три зважування на терезах знайти фальшиву монету та дізнатись легша чи важча вона за справжню?

7. Нехай O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ з основами AB та CD. Відомо, що $\angle AOB = \angle DAB = 90°$. На бічних сторонах AD та BC взяли точки E та F так, що $EF \parallel AB$ та $EF = AD$. Знайти кут $\angle AOE$.

8. Для довільних додатних чисел a, b, c довести нерівність

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

9. Довести, що існує послідовність натуральних чисел $\{a_n, n \geq 1\}$ така, що $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 12$ та $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 \pm 1$ при всіх $n \geq 1$.

10. В кожній з клітинок нескінченної клітчастої дошки стоїть плюс або мінус, причому мінусів лише скінченна кількість. Дозволяється одночасно міняти всі знаки на протилежні у довільному прямокутнику зі сторонами 2 та 5 або 3 та 7. Чи завжди можна за допомогою таких змін отримати дошку, заповнену лише плюсами?

11. Нехай коло ω описане навколо трикутника $\triangle ABC$ з прямим кутом $\angle A$. Дотична до кола ω в точці A перетинає пряму BC в точці D. Точка E симетрична до A відносно прямої BC. Позначимо K основу перпендикуляра, опущеного з точки A на BE, L — середину AK. Пряма BL вдруге перетинає коло ω в точці M. Довести, що пряма BD є дотичною до кола, описаного навколо трикутника $\triangle ADM$.

12. Чи існують такі додатні числа α, β, γ, що серед чисел $[a\alpha]$, $[b\beta]$, $[c\gamma]$, де кожне з чисел a, b, c пробігає множину натуральних чисел, немає однакових? (Тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.)

До 80-річчя академіка НАН України В. С. Королюка

19 серпня виповнилося 80 років Володимиру Семеновичу Королюку — видатному математику, лауреату Державної премії України з науки і техніки (2003 р.), Державної премії УРСР (1978 р.), премії НАН України імені М. М. Крилова (1976 р.), премії НАН України імені В. М. Глушкова (1988 р.), премії НАН України імені М. М. Боголюбова (1995 р.) та премії НАН України імені В. М. Остроградського (2002 р.).

Народився В. С. Королюк в місті Києві. В 1947 році вступив до Київського університету ім. Т. Г. Шевченка на третій курс механіко-математичного факультету (два перших курси він закінчив заочно при Харківському університеті, перебуваючи на військовій службі).

Відпрацювавши рік викладачем в Артемівському вчительському інституті, В. С. Королюк вступає до аспірантури при Інституті математики НАН України, де під керівництвом Б. В. Гнєденка розпочинає студії непараметричних критеріїв Колмогорова-Смирнова. Після переведення до аспірантури при МДУ він під керівництвом А. М. Колмогорова розвиває асимптотичний аналіз непараметричних статистик для умовних випадкових блукань у схемах Бернуллі та Пуассона.

Після захисту в 1954 році кандидатської дисертації постійно працює в Інституті математики НАН України. В 1960 році В. С. Королюк очолює відділ теорії ймовірностей та математичної статистики цієї установи і продовжує розвивати асимптотичні методи дослідження граничних задач для випадкових блукань. Через три роки на основі цих результатів захищає докторську дисертацію. З 1966 року по 1988 рік він обіймає посаду заступника директора Інституту математики. Нині вчений є головним науковим співробітником цієї установи.

Під впливом ідей А. А. Ляпунова та Б. В. Гнєденка В. С. Королюк зацікавився проблемами кібернетики і опублікував низку робіт з програмування, а також підручник "Елементи програмування" (співавтори Б. В. Гнєденко, К. Л. Ющенко), який неодноразово перевидавався різними мовами.

В. С. Королюк розробив методи, на основі яких ефективно досліджуються граничні задачі теорії масового обслуговування, теорії надійності та теорії зберігання запасів.

З 1965 року під керівництвом В. С. Королюка проводяться студії з теорії напівмарківських процесів, на основі яких побудовано теорію фазового укрупнення та усереднення стохастичних систем. Ці результати підсумовані в низці монографій (у співавторстві з А. Ф. Турбіним). Деякі з них перекладені англійською мовою.

В 80-х роках В. С. Королюк розвиває теорію еволюції стохастичних систем у марківському та напівмарківському середовищах, викладену в монографіях "Полумарковские случайные эволюции" (співавтор А. В. Свіщук)

та "Стохастичні моделі систем", які видані англійською мовою.

Список праць, вченого налічує більш, ніж 350 найменувань, серед яких близько 30 монографій. Під його редакцією в 1978 році надруковано "Справочник по теории вероятностей и математической статистике", який неодноразово видавався різними мовами.

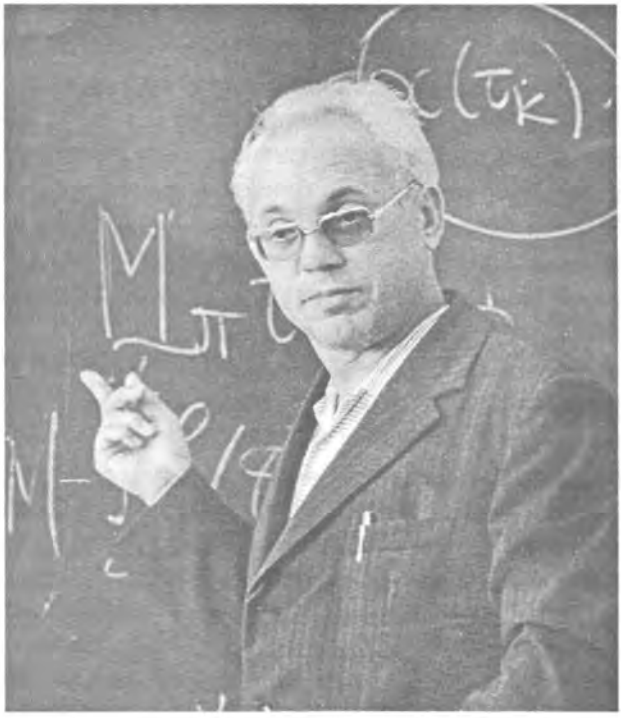
Плідну наукову роботу В. С. Королюк поєднує з педагогічною та науково-організаційною. Багато років він викладає в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка. Під його керівництвом понад 40 математиків захистили кандидатські і 10 — докторські дисертації.

У свої 80 років В. С. Королюк продовжує активну наукову, педагогічну й організаційну діяльність, постійно живе у творчих пошуках і планах. Творчу діяльність поєднує з читанням лекцій та доповідями на різних міжнародних конференціях, а також в наукових центрах Італії, Іспанії, Голландії, Німеччини, Франції, Швейцарії та Швеції, бере активну участь в організації та проведенні міжнародних наукових конференцій. Він — член редколегій "Українського математичного журналу", журналів "Кибернетика и системный анализ", "Теорія ймовірностей та математична статистика", "Theory of Stochastic Processes", "Applied Stochastic Models and Data Analysis".

Щиро вітаємо Володимира Семеновича Королюка з ювілеєм і зичимо йому доброго здоров'я, щастя, творчого натхнення та нових успіхів на благо України!

До 75-річчя з дня народження Анатолія Володимировича Скорохода

10 вересня цього року виповнилося 75 років з дня народження Анатолія Володимировича Скорохода, одного з найвидатніших і найавторитетніших математиків нашого часу, засновника цілого ряду нових напрямів досліджень в теорії ймовірностей.



В минулому столітті теорія ймовірностей — порівняно нова математична наука, яка вивчає об'єкти, що зазнають дії деяких випадкових збурень, – переживала значне піднесення у своєму розвитку. Саме в цей час в окрему науку виділилися дослідження випадкових процесів, тобто деяких функцій від часу і випадкового впливу. Починаючи з 60-х років Київ став одним з провідних наукових центрів світу з цих досліджень. Роботи Скорохода значною мірою сприяли подальшому розвиткові теорії ймовірностей, визначили фундаментальні напрями досліджень у цій теорії не тільки в Україні, але й у всьому світі. Наукова і педагогічна діяльність Скорохода мала і має значний вплив на розвиток всієї математичної культури в Україні у другій половині XX століття, а в теорії ймовірностей його вплив значною мірою став визначальним.

Анатолій Володимирович Скороход народився 10 вересня 1930 року в місті Нікополі — індустріальному центрі Дніпропетровської області на півд-

ні України. Батько, Володимир Олексійович, — учитель, викладав у школі математику, фізику і астрономію. Мати, Надія Андріївна, крім математики, навчала також історії, літературі, музиці. За свідченням Надії Андріївни, діти (у них було два сини) росли в атмосфері різноманітних зацікавлень батьків, з любов'ю до книг і природи. Ставлення до дітей в сім'ї завжди було уважним і серйозним. Мабуть, не випадково, і молодший син, Валерій, який з раннього дитинства дуже шанобливо ставився до старшого брата, також обрав для себе наукову кар'єру (фізика) і досяг у ній рівня академіка.

Батьки працювали переважно в невеличких селах або шахтарських містечках, сім'я часто переїжджала на нове місце роботи. У 1935 році сім'я переїхала до міста Марганець. Тут Анатолій пішов до школи. Шкільне навчання було перерване в роки війни, довелося здобувати освіту вдома.

У 1946 році, рятуючись від голоду на Наддніпрянщині, сім'я Скороходів тимчасово переїхала на Волинь у місто Ковель. Знайомий з дитинства випалений гарячим сонцем безкраїй степ з плантаціями кукурудзи і баштанами змінився на мальовничі ліси і гаї. Особливо вражав контраст у життєвому укладі людей. Тут, на Волині, збереглися народні звичаї і традиції. Особливо велике враження справляли багатоголосі хори, в яких поряд із дорослими справно виводили свої партії діти. І хоча жити в Ковелі довелося недовго, але природа цього краю, особливо національний дух людей, залишили глибокий слід в душі Анатолія. В ті роки майбутнє уявлялось йому в романтичному ореолі капітана далекого плавання. Однак через виявлену короткозорість від цієї мрії довелося відмовитися.

У 1948 році Анатолій Скороход закінчує з золотою медаллю середню школу в Ковелі і поступає в Київський університет імені Тараса Шевченка на механіко-математичний факультет. Учитися йому було легко і цікаво. На старших курсах під керівництвом академіка Бориса Володимировича Гнєденка і доцента Йосипа Ілліча Гіхмана (згодом — члена-кореспондента Академії наук України, близького друга і колеги Скорохода по спільній роботі) юнак активно включається в наукову роботу в області теорії ймовірностей. Він одночасно працює над розв'язанням декількох проблем. Закінчуючи університет (1953 рік), Скороход був автором п'яти наукових праць, три з них були опубліковані в провідних журналах "Успехи математических наук", "Доклады АН УРСР", дві — у збірнику наукових праць студентів Київського університету. Варто також зауважити, що дві з цих ранніх робіт Скорохода вже у 1961 році було перекладено англійською мовою і видано у США в збірнику "Selected Translations on Mathematical Statistics and Probability".

Того ж 1953 року Скороход вступає до аспірантури при Київському університеті, звідки його відряджають до Московського університету навчатися під керівництвом професора Є. Динкіна (1953–56 роки). Це був час розквіту досліджень з теорії ймовірностей в Московському університеті, коли закладалися основи теорії випадкових процесів. Навколо Андрія Миколайовича Колмогорова склалася велика група талановитої молоді. В цій групі швидко стала вирізнятися постать молодого київського науковця Анатолія Скорохода, його глибокі знання і безліч нових цікавих ідей привертали до себе увагу. Кажуть, що молоді колеги цінували кожну можливість (наприклад, стоячи в

довжелезній черзі в їдальні університету) поспілкуватися із Скороходом і, як правило, одержували відповідь на своє запитання з тієї чи іншої проблеми.

Роботи Скорохода вже цього періоду рясніли оригінальними підходами до вирішень проблем і нестандартними асоціаціями. Він починає з вивчення широкого класу випадкових процесів, які не є неперервними, але не мають розривів другого роду, і знаходить основний інструмент для вивчення таких процесів, який зараз широко відомий у світовій літературі і має назву "*топології Скорохода*". У 1956 році в Москві починає видаватися журнал "Теория вероятностей и ее применения" і в першому томі цього журналу була надрукована стаття А. В. Скорохода "Предельные теоремы для случайных процессов", в якій і було викладено його новий підхід до вивчення цих процесів, що став уже класичним, а також принципово новий, також нині широко відомий підхід до доведень граничних теорем — "*метод одного ймовірнісного простору*", — метод дослідження, об'єктом якого стали випадкові величини, а не їхні функції розподілу, як це було прийнято раніше. Отже, вже перші кроки в науці виявили неабиякі здібності молодого вченого.

Повернувшись у 1957 році з Москви, Скороход почав викладати в Київському університеті. З самого початку викладацької роботи Скороход вирізнявся неординарністю побудови лекцій, його неперервна творча думка часто спонукала його до експромтів у доведеннях, що робило слухачів співучасниками творчого процесу. Зацікавлені студенти навіть відвідували його лекції в інших групах або на іншому курсі, тому що виклад матеріалу у нього завжди був інший, і це допомагало їм глибше, рельєфніше відчути суть викладеного питання.

З поверненням Скорохода до Києва активізувалася робота наукового семінару з теорії ймовірностей при Київському університеті. Його діалоги з доповідачами, вміння збагнути внутрішню суть проблеми, узагальнити її, визначити можливі слабкі місця в доведенні, побачити несподівані зв'язки з іншими проблемами — перетворили засідання семінару у справжню творчу лабораторію, і кожен, хто прагнув наукової діяльності, намагався виступити на семінарі перед Скороходом. Таким чином, київська школа теорії ймовірностей, яка творилась на цьому семінарі і зараз налічує понад сотню науковців, — є значною мірою результатом творчої активності Скорохода.

Анатолій Володимирович завжди відрізнявся організованістю, вмінням зосередитись. Відгуки, рецензії він писав одразу, одним присідом, без виправлень. Він завжди був готовий поспілкуватися з учнями, ніколи не відмовляв у консультації, ніколи не жалівся на брак часу. За свідченням близьких, основну денну роботу він виконував із 6 до 8 ранку, ніколи не дозволивши собі відмовитись від цією ранішньої праці. Дивним чином він міг одночасно розмірковувати над кількома проблемами. Забігаючи вперед, наведемо такий приклад. У 1986 році Скороход був запрошений до США (у Берклі) на Міжнародний математичний конгрес з пленарною доповіддю. Трапилося так, що під час перельоту його валізу з доповіддю було загублено. Це аніскільки не збентежило Анатолія Володимировича, він сів і написав нову (свідком тому був Ю.О. Митропольський, який летів разом з ним до США). Тут доречно згадати вислів М.Монтеня про те, що велич душі визначається

не здатністю високо підноситись, а вмінням бути упорядкованою завжди і в усьому.

Один з університетських викладачів заохочував студентів бути рішучими, самовпевненими. Бо, на його думку, тільки така людина може створити щось своє, нове. Анатолій Володимирович завжди був надзвичайно скромною людиною, але його ніколи не полишало відчуття внутрішньої свободи. І таку внутрішню свободу, незалежність він намагався виховати у своїх учнях, своїх підлеглих. І неодноразово підкреслював, що важливо бути не тільки хорошим фахівцем, але в першу чергу людиною.

Анатолій Володимирович завжди вирізнявся незалежністю своїх суджень, хоча в роки тоталітарного режиму це було досить небезпечно. У 1961 році студенти-випускники запросили Скорохода – свого першого викладача, — виступити на церемонії останнього дзвоника з напутньою лекцією. У великій фізичній аудиторії зібралися і студенти, і викладачі. Промова Скорохода була дуже яскравою і продуманою, яку варто нагадати тепер. Він говорив про сутність математики, про її відміну від інших наук. Математика не має авторитетів. Математик ніколи не скаже: "Це правильно, тому що так вважає такий-то". В математиці кожне твердження має бути логічно доведено. Математика розвиває логічне мислення, тому, незалежно від необхідності її прямого застосування, математику повинні вивчати всі, кому потрібне вміння логічно мислити. Недаремно президент Сполучених Штатів Америки А. Лінкольн вже на посту президента країни вивчав "Геометрію" Евкліда. Математика сприяє розвитку науки в цілому, розвитку техніки, розвитку людства. В своєму поступальному русі ми йдемо до кращої побудови суспільства, і в цьому не останню роль відіграє математика. Математика захоплює, вона має свої закони розвитку, свою неповторність. "Поки ви молоді, — звернувся він до слухачів, — не обтяжені необхідністю дбати про заробітки для утримання сім'ї, намагайтеся глибше проникнути в суть математики, відчути її красу."

Ця промова була явно не на часі і викликала різкий осуд офіційних представників факультету, бо доповідач зовсім не згадав про переваги нашого суспільного ладу перед капіталістичним, а, говорячи про краще майбутнє, навіть не вимовив слова "комунізм". Таку промову міг би виголосити і викладач капіталістичної країни, скажімо США. Урочисте засідання було припинено, за Скороходом серед офіційних кіл закріпилася репутація аполітичної людини, а серед колег і учнів — людини незалежної думки, сміливої у висловлюванні, принципової та нетерпимої до пристосуванства. Це стало підґрунтям надзвичайної популярності та авторитету Скорохода.

Наукова кар'єра Скорохода складалась досить успішно. У 1961 році вийшла в світ у видавництві Київського університету його перша книга "Исследования по теории случайных процессов", вже в 1965 році ця книга була перевидана в США. У 1964 році в московському видавництві "Наука" виходить в світ його друга книга "Случайные процессы с независимыми приращениями". У 1965 році разом з І. І. Гіхманом він видає ще одну книгу — "Введение в теорию случайных процессов" (656 стр.), яка у 1968 році була перекладена польською мовою і видана у Варшаві, а наступного, 1969 року

вийшла в англійському перекладі у США.

З 1964 року Скороход перейшов працювати завідувачем відділу теорії випадкових процесів в Інституті математики НАН України (в той час назва цієї установи: Академія наук Української РСР), одночасно продовжуючи викладацьку роботу в університеті. Подальші етапи його наукової кар'єри такі: доктор фізико-математичних наук, професор (1963 рік), член-кореспондент НАН України (1967 рік), академік НАН України (1985 рік), член Американської академії мистецтв і наук (2000 рік), лауреат Державних премій України в галузі науки і техніки (1982 і 2003 роки). При цьому зазначимо, що наукова кар'єра Скорохода ніколи не ставала на заваді його моральним принципам.

У 1968 році за участь у виступі групи представників української інтелігенції на захист конституційних прав громадян Скороходу було заборонено читати лекції студентам, керувати аспірантами. Всіх учасників цієї акції було покарано. Півтора десятка років йому відмовляли у виїзді за кордон для участі в наукових конференціях. Анатолій Володимирович з гідністю переніс вимушене обмеження своїх прав. В ті роки він зізнавався, що математика рятує його від життєвих негараздів. Справді, в період своєї п'ятнадцятирічної опали він працював особливо плідно.

Одним з найважливіших розділів теорії випадкових процесів є теорія стохастичних диференціальних рівнянь. Звернення Скорохода до цієї теорії і використання розроблених ним же методів дослідження (прямі ймовірнісні методи) ознаменувалося відразу кількома визначними досягненнями, які вивели його в лідери в цьому напрямі. У 1968 році виходить його (спільна з І. І. Гіхманом) монографія "Стохастические дифференциальные уравнения", згодом вона була перекладена закордоном англійською і німецькою мовами. У 1970 році виходить в світ (написана спільно із М. П. Слободенюком) книга "Предельные теоремы для случайных блужданий". У 1971–75 роках Скороход спільно з І. І. Гіхманом видає тритомник "Теория случайных процессов" — фундаментальну монографію, що охоплює тогочасний стан більшості розділів теорії випадкових процесів. Кожен том цієї праці об'ємом більш як 600 стор. Ці книги також негайно були надруковані в англійському перекладі. У 1974 і 1975 роках вийшли майже одночасно англійський і російський варіанти книги Скорохода "Інтегрирование в гильбертовом пространстве". У 1977 році надруковано друге, розширене і перероблене видання книги "Введение в теорию случайных процессов" (568 стор.), і в цьому ж році — нова монографія "Управляемые случайные процессы"; у 1978 році — "Случайные линейные операторы", і в тому ж 1978 році (в співавторстві) "Справочник по теории вероятностей и математической статистике" (584 стор.). При цьому Скороход бере активну участь у популяризації математичних знань, за період 1969 — 79 років виходить в світ 11 його (частково в співавторстві) науково-популярних книжок. Недаремно відсутність Анатолія Володимировича на міжнародних наукових форумах породила думку серед зарубіжних вчених, що "Скороход" — це псевдонім. У 1980 році в Київ приїздив відомий французький математик Поль Малявен. Він казав, що радий упевнитися в тому, що така людина насправді існує, бо серед французьких математиків поширена думка, що "Скороход" — це зібране ім'я радянських фахівців, які

працюють в області теорії випадкових процесів, подібно до того, як група французьких учених об'єдналася під іменем Бурбакі.

Серед понять, які в ті роки ввів Скороход і які тепер стали робочим інструментом не тільки математиків, а й фізиків, *розширений стохастичний інтеграл, сильний (слабкий) випадковий лінійний оператор, стохастична напівгрупа.* Перше із згаданих понять тепер надзвичайно популярне і часто фігурує в роботах математиків (і фізиків!) як *інтеграл Скорохода.*

Значну увагу приділяв Скороход популяризації математичних знань серед молоді. Він виступав з численними науково-популярними лекціями, в тому числі і по телебаченню, завжди відкривав своєю лекцією новий навчальний рік Університету юних математиків, що певний час працював при Інституті математики, у 80-х роках здійснив разом із співробітниками свого відділу ряд подорожей по Україні з метою популяризації математичних знань та імен видатних українських математиків. Написані ним підручники і науково-популярні книжки (всього ним видано 16 популярних книжок), виховували смак до математики і до творчої наукової діяльності молоді.

З початку виникнення (наприкінці 80-х років) широкого демократичного руху Анатолій Володимирович активно підтримував його, і авторитет академіка Скорохода значною мірою сприяв успіху всієї справи. Згадаймо, скажімо, його підтримку письмового звернення до міської адміністрації за дозволом на проведення першого екологічного мітингу (1988 рік), участь у висуненні перших альтернативних кандидатів в депутати Верховної Ради СРСР, в дискусії, що її організував тодішній ідеологічний відділ ЦК КПУ на чолі із Л. Кравчуком з приводу ідеї утворення Руху, тощо.

З 1993 року Скороход працює в Мічіганському університеті (м. Лансінг, штат Мічіган, США), не пориваючи наукових зв'язків з Інститутом математики НАН України. Його наукові праці останніх років пов'язані з дослідженням асимптотичної поведінки динамічних систем, які перебувають під впливом випадкових збурень.

Протягом багатьох років Скороход виробив у собі звичку до щоденного напруженого розмірковування над тією чи іншою проблемою. Саме цією щоденною працею він роздмухав дану йому від Бога іскру математичного таланту — і тепер вона сяє зіркою першої величини на математичному небосхилі.

Важко переоцінити вклад А. В. Скорохода в процес становлення української школи теорії ймовірностей. Під безпосереднім керівництвом Скорохода понад п'ятдесят молодих науковців захистили кандидатські дисертації, серед його учнів — 17 докторів наук. Лекції в університеті з усіх розділів сучасної теорії випадкових процесів, видання науково-популярної та учбової літератури, популяризація математики серед школярів — ось короткий перелік граней його педагогічної діяльності. А ще — 23 наукові монографії (разом з перекладами — 45), написані як самостійно, так і в співавторстві з колегами та учнями, понад 300 публікацій журнального типу, керівництво роботою наукових семінарів — такий його науковий доробок за півстоліття.

Побажаймо ж йому в цей ювілейний рік нових творчих злетів. Нехай ще не раз світ буде знову зачарований новими ідеями Скорохода.

До 70-річчя з дня народження Ігора Миколайовича Коваленка

16 березня 2005 року виповнилося 70 років видатному математику Коваленку Ігору Миколайовичу.

Коваленко І. М. народився в 1935 році у м. Києві. Закінчив у 1957 році Київський університет імені Тараса Шевченка, а в 1961 — аспірантуру. У 1962–71 рр. працював в оборонному інституті в Москві, а за сумісництвом керував кафедрою теорії ймовірностей Московського інституту електронного машинобудування та був редактором математичного відділу РЖ "Математика". З червня 1971 року працює завідуючим відділом Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України. До 1993 працював професором-сумісником, послідовно, у Київському державному університеті імені Тараса Шевченка, Київському вищому інженерному радіотехнічному училищі Протиповітряної оборони та Київському політехнічному інституті.

Доктор технічних наук (1964), доктор фізико-математичних наук (1970), професор (1965), член-кореспондент НАН України (1972), академік НАН України (1978) Коваленко І. М. є заслуженим діячем науки і техніки України, нагороджений Державною премією СРСР (1979), Державними преміями України (1978, 2001), преміями імені В. М. Глушкова та імені В. С. Михалевича.

Основні наукові роботи — з теорії масового обслуговування, математичної теорії надійності, ймовірнісної комбінаторики з застосуванням до криптографії, стохастичної геометрії. На його рахунку понад 20 монографій. Більше 30-ти його учнів захистили кандидатські дисертації під його керівництвом.

Бажаємо ювіляру довгих років життя, міцного здоров'я, творчого натхнення. Щастя Вам та Вашій родині!

Про красу математики

Н. Вірченко[1]

Частина 2[2]
Контрприклади в аналізі

Приклади беремо з книги [20]. У вступі до неї вказано, що основна мета цих прикладів полягає в тому, щоб звернути увагу студентів, які вивчають математичний аналіз і теорію функцій, на "небезпечні" питання та моменти, при зустрічі з якими можна дати неправильні відповіді. Окрім того, автори пишуть: "Наш власний досвід дає нам право стверджувати, що математична задача, розв'язана за допомогою контрприкладу, така ж захоплива, як гостросюжетна п'єса. На нашу думку, багато з найглибших та найвитонченіших відкриттів відносяться до цього жанру" [20, с. 9].

А) Функція, неперервна лише в одній точці.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Точка $x = 0$ — єдина точка неперервності цієї функції.

Функція

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in B, \\ 0, & x \notin B, \end{cases}$$

є прикладом функції, точки розриву якої утворюють довільну задану замкнену множину. Тут множину B визначено так:

$$x \in B, \quad \text{якщо } x \in F(A) \quad \text{або } x \in I(A) \cap \mathbb{Q},$$

де A — замкнена множина, $F(A)$ — межа множини, $I(A)$ — множина всіх внутрішніх точок, $\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел.

Якщо $c \in A$, то f — розривна в цій точці. Справді, якщо $c \in F(A)$, то $f(c) = 1$, у той же час як c — гранична точка множини $\mathbb{R} \setminus A$, на якій f тотожно дорівнює 0. Якщо $c \in I(A) \cap \mathbb{Q}$, то $f(c) = 1$, причому c — гранична точка множини $I(A) \setminus \mathbb{Q}$, якій f дорівнює 0. Якщо $c \in I(A) \setminus \mathbb{Q}$, то $f(c) = 0$, в той же час c — гранична точка множини $I(A) \cap \mathbb{Q}$, на якій f тотожно дорівнює 1. Зауважимо, що на $\mathbb{R} \setminus A$ функція f — неперервна, оскільки ця множина — відкрита і функція f — стала на ній.

---

[1] Доктор фізико-математичних наук, професор, академік АН ВШ України.

[2] Див. Н. Вірченко "Про красу математики. Частина 1. Роль математики в морально-естетичному вихованні." — "У світі математики", № 3, 2005 р.

Б) Приклад двох рівномірно неперервних функцій, добуток яких не є рівномірно неперервною функцією:

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \sin x.$$

Обидві функції рівномірно неперервні на $\mathbb{R}$, оскільки їх похідні — обмежені, а добуток $x \sin x$ не є рівномірно неперервною функцією на $\mathbb{R}$.

В) Розривна функція $f(x) = \operatorname{sign} x$ має скрізь похідну (не конче — скінченну):

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0. \end{cases}$$

Г) Приклад скрізь неперервної, але ніде не диференційованої функції. "Я з тремтінням жаху відвертаюсь від ваших нещасних клятих функцій, в яких нема похідних", — писав Ш. Ерміт [21, с. 26].

Перший приклад неперервної не диференційованої ніде функції побудував К. Ваєрштрас:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

де $0 < b < 1$, $ab \geq 1$. Нині відомі приклади неперервних функцій, які в жодній точці не мають навіть односторонньої скінченної чи нескінченної похідної.

Розгляньмо простіший приклад, що є деякою варіацією прикладу Б. Ван дер Вардена.

Функція $|x|$ скрізь неперервна, але не диференційовна у точці $x = 0$. За допомогою зсуву цієї функції можна визначити скрізь неперервну функцію, яка не диференційовна в кожній точці довільно заданої скінченної множини. Використаймо нескінченну множину зсувів функції $|x|$.

Нехай $f_1(x) \equiv |x|$ для $|x| \leq \frac{1}{2}$ та продовжимо цю функцію періодично з періодом 1, тобто покладемо $f_1(x + n) = f_1(x)$ для всякого дійсного числа x і всякого цілого n. Для $n > 1$ покладемо $f_n(x) \equiv 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$.

Отже, для всякого натурального n функція f_n є періодичною з періодом 4^{-n+1} та максимальним значенням $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$. Визначимо на $\mathbb{R}$ функцію f так:

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

Оскільки $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot 4^{n+1}$, то за ознакою Ваєрштраса цей ряд рівномірно збігається на $\mathbb{R}$ і функція f скрізь неперервна.

Нехай a — довільне дійсне число, і нехай для всякого натурального n число h_n, яке дорівнює 4^{-n} або -4^{-n}, вибране так, що

$$|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|.$$

Тоді величина $|f_m(a + h_n) - f_m(a)|$ має однакове значення $|h_n|$ для всіх $m \leq n$ і дорівнює нулеві для $m > n$. В такому разі відношення

$$\frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n}$$

є цілим числом, яке парне при парному n і непарне при непарному n. Звідси випливає, що границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+h_n)-f(a)}{h_n}$$

не існує, а тому не існує і $f'(a)$.

Ґ) Диференційовна функція, для якої теорема про середнє не виконується. Функція $f(x)\equiv\cos x+i\sin x$, де $i^2=-1$, дійсної змінної x скрізь неперервна та диференційовна. Однак не існує такого відрізка $[a;b]$, $(a<b)$, для якого при деякому $\xi\in(a;b)$ була б справедлива така рівність:

$$(\cos b+i\sin b)-(\cos a+i\sin a)=(-\sin\xi+i\cos\xi)(b-a).$$

Справді, нехай ця рівність має місце. У такому разі, зрівнявши квадрати модулів обох його частин, одержимо

$$(\cos b-\cos a)^2+(\sin b-\sin a)=(b-a)^2,$$

або

$$\sin^2\frac{b-a}{2}=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Та не існує додатного числа h такого, що $\sin h=h$, отже ми прийшли до суперечності.

Д) Збіжний невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$, підінтегральна функція якого додатна, неперервна і не прямує до нуля при $x\to+\infty$.

Нехай $g(n)\equiv 1$ для всякого цілого $n>1$, а на замкнених інтервалах $[n-n^{-2};n]$ і $[n;n+n^{-2}]$ функцію g визначимо як лінійну, рівну нулеві в кінцевих нецілих точках. У тих точках $x\geq 1$, де $g(x)$ — ще не визначено, покладемо $g(x)\equiv 0$. Тоді функція $f(x)\equiv g(x)+\frac{1}{x^2}$ — додатна і неперервна для $x\geq 1$. Рівність $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ не має місця, а невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ збігається.

Е) Ряди.

1. Нехай $a_n\geq b_n$, $n=1,2,\ldots$, причому $a_n\equiv 0$, $b_n=-\frac{1}{n}$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ — збігається, але ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ розбігається.

2. Якщо за ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ взяти умовно збіжний знакозмінний гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

а за ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ взяти розбіжний гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то $|a_n|\geq|b_n|$, $n\in\mathbb{N}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ розбігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається.

3. *Контрприклад до інтегральної ознаки Коші.* Нехай $g(n)\equiv 0$, $\forall n>1$, а на замкнених інтервалах $[n-n^{-1};n]$ і $[n;n+n^{-1}]$ визначають функцію як лінійну та рівну одиниці в нелінійних кінцевих точках. У тих точках $x\geq 1$,

в яких функція $g(x)$ ще не визначена, покладемо її рівною 1. Тоді функція $f(x) \equiv g(x) + \frac{1}{x^2}$ — додатна, неперервна при $x \geq 1$. Інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$.

4. *Ряд, для якого ефективна радикальна ознака Коші, але ознака Д'Аламбера — не ефективна.*

а) Розгляньмо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$. Ознака Д'Аламбера не дає відповідь про збіжність ряду, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ у даному разі не існує.

Застосуймо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд збігається.

б) Аналогічно для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-(-1)^n}$. Ознака Д'Аламбера — не застосовна, а ознака Коші встановлює розбіжність розглядуваного ряду.

5. *Два збіжних ряди, добуток яких — розбіжний ряд.* Як відомо, добутком (за Коші) двох рядів $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ називається ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, де

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Згідно з теоремою Мертенса, якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ збігається до A, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ збігається до B, причому принаймні один із цих рядів збігається абсолютно, то їх добуток $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ збігається до AB.

Нехай $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$

Легко переконатись, що згідно з ознакою Лейбніца, ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ збігаються. Покажемо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ розбігається. Справді, використаймо той факт, що функція $\sqrt{(1+x)(n+1-x)}$ на відрізку $[0; n]$ досягає максимуму при $x = \frac{n}{2}$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{1}} \\ &\geq \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

6. *Функція, ряд Маклорена якої збігається скрізь, але зображає функцію лише в одній точці.* Функція

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

нескінченно диференційовна, а всі її похідні при $x = 0$ дорівнюють 0. Отже, її ряд Маклорена

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0$$

збігається при всіх x до функції, яка тотожно дорівнює нулеві, а тому ряд зображує дану функцію f (тобто збігається до неї) лише в одній точці $x = 0$.

7. *Збіжний тригонометричний ряд, який не є рядом Фур'є.* Застосовуючи ознаку Абеля, легко переконатись, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}},$$

де $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, збігається при будь-якому дійсному x. Однак цей ряд не може бути рядом Фур'є ніякої інтегрованої за Ріманом функції $f(x)$. Якби це було не так, то згідно з нерівністю Бесселя ми мали б

$$\frac{1}{1^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx, \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Оскільки $f(x)$ — інтегровна за Ріманом, то $f^2(x)$ також інтегровна за Ріманом. Звідси випливає, що права частина попередньої нерівності — скінченна, в той же час при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ ліва частина цієї нерівності необмежена при $n \to \infty$. Маємо суперечність.

Література

1. Декарт Р., *Избранные произведения*, "Госполитиздат", Москва, 1950.
2. Карно Л., *Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых*, "Технотеоргиз", Москва–Ленинград, 1933.
3. Декарт Р., *Рассуждения о методике*, Изд-во АН СССР, Москва, 1953.
4. Сухомлинский В.А., *Сердце отдаю детям*, "Радянська школа", Киев, 1971.
5. Лапиров-Скобло М. Я., *Эдисон*, Москва, 1960.
6. *Мысли учёных о науке*, "Штиинцы", Кишенев, 1971.
7. *Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях*, Укл. Н. О. Вірченко, "Вища школа", Київ, 1974 ; Рос. мовою, 1983 ; япон. мовою, 1985, 1995.
8. Курант Р., Роббинс Г., *Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов*, "Просвещение", Москва, 1967.
9. Хинчин А.Я., *Педагогические статьи*, Изд-во АПН, Москва, 1963.
10. Математика в школе, Москва.
11. Вісник Київського університету. Серія математики та механіки (1973), № 15.
12. Винер Н., *Кибернетика*, "Советское радио", Москва, 1958.
13. *Математики о математике*, "Знание", Москва, 1965.
14. Прудников В.Е., *Русские педагоги-математики XVIII–XIX в.*, "Учпедгиз", Москва, 1956.
15. Математика серед наук (1927), Львів.
16. Галилей Г., *Избранные труды в 2-х томах*, "Наука", Москва, 1964.
17. Зенкевич И.Г., *Эстетика урока математики*, Пособие для учителей, "Просвещение", Москва, 1981.
18. *Математики о математике*, "Знание", Москва, 1972.
19. *Хрестоматія з історії математики*, Київ, 1976.
20. Гельбаум Б., Олмстед Дж., *Контрпримеры в анализе*, Москва, 1967.
21. Бурбаки Н., *Очерки по истории математики*, ИЛ, Москва, 1963.
22. Мостеллер Ф., *Пятдесят занимательных вероятностных задач*, Москва, 1975.

Життя Олександра Гротендіка[1]

Алайн Джексон

Олександр Гротендік — математик, що мав велетенську математичну чутливість та значну сприйнятливість інтригуючих та елегантних ліній математичної архітектури. Кількох найвищих точок з його біографії — він був одним з засновників Інституту вищих наукових досліджень (ІВНД) і отримав філдсівську медаль в 1966 році — достатньо для того, щоб зайняти гідне місце в пантеоні математики двадцятого сторіччя. Але ці деталі не можуть охопити суть його роботи, яка міститься в чомусь значно більш органічному і скромному. Як він писав у своїй статті: "Те, що надає якості уяві і винахідливості дослідника — це якість уваги його до чуття суті речей." Зараз голос Гротендіка, втілений в його письмових роботах, досягає нас ніби через вакуум: — 76-річний, він більш, ніж десятиріччя, живе усамітнено у віддаленому селищі на півдні Франції.

В молоді роки в житті Гротендіка у великій мірі були присутні драматизм та травматизм, а його освітнє підґрунтя не було найкращим. Як він спромігся з цього повного нестатків початку вирости в одного з провідних математиків світу — це історія, сповнена драматизму.

1. Молоді роки

> Те, що найменше задовольняло мене в наших математичних книжках (для вищої школи) — це відсутність будь-якого серйозного поняття довжини (дуги кривої), площі (поверхні), об'єму (тіла). Я пообіцяв собі, що заповню цю прогалину при нагоді. "*Жнива і сівба*"

Арманд Борель, який помер у серпні 2003 року у віці 80 років, згадує, як він вперше зустрів Гротендіка на семінарі Бурбакі в листопаді 1949 року в Парижі. Під час перерви між лекціями Борель, який досяг на той час середини своїх двадцятих років, розмовляв з Чарльзом Ерзманом, який в свої сорок п'ять років був провідною фігурою у французькій математиці. Як згадує Борель, молодий чоловік підійшов до Ерзмана і без будь-якої преамбули почав вимагати: "Чи є ви спеціалістом з топологічних груп?" Ерзман, який не хотів здатися некомпетентним, відповів, що, так, він знає дещо про топологічні групи. Молодий чоловік наполягав: "Але мені потрібен *дійсно* знавець!" Це був двадцятиоднорічний Олександр Гротендік — зухвалий, імпульсивний, не зовсім аполітичний, але той, що надає мало значення соціальним зв'язкам. Борель пам'ятає запитання, яке поставив Гротендік: "Чи є кожна локальна топологічна група ростком глобальної топологічної

[1] "Notices of the American Mathematical Society", October (2004), v. 51, no. 9, pp. 1038–1055.

групи?" Як виявилось, Борель знав контрприклад. Це запитання показало, що Гротендік уже мислив у дуже загальних масштабах.

Багато деталей про сім'ю та молоді роки Гротендіка уривчасті або невідомі. Батько Гротендіка Олександр Шапіро народився в єврейській сім'ї 11 жовтня 1889 року в Новозибкові в Україні. Шапіро був анархістом і брав участь у різних повстаннях проти царської Росії на початку двадцятого століття. Він був кілька разів заарештованим і провів загалом біля десяти років в тюрмі. В 1921 році Шапіро залишив Росію і був позбавлений батьківщини решту свого життя. Для того, щоб приховати своє політичне минуле, він отримав документи на ім'я Олександр Танаров і решту свого життя жив під цим іменем. Він жив у Франції, Німеччині та Бельгії, де мав зв'язки з анархістами та іншими революційними групами. В радикальних колах Берліна він зустрів матір Гротендіка Йоганну (Ханку) Гротендік. Олександр Гротендік народився 28 березня 1928 року в сім'ї, що складалась з Ханки, Танарова та дочки Ханки від першого шлюбу, Мейді, яка була на чотири роки старшою за Олександра.

Коли до влади прийшли нацисти, в 1933 році, Шапіро переїздить з Берліна до Парижу. У грудні цього ж року Ханка вирішує їхати за своїм чоловіком. Тому вона полишає Гротендіка під опіку прийомної сім'ї в Бленкенезі, що розташований біля Гамбурга. Головою прийомної сім'ї був Вільгельм Хейдорн. Окрім власних чотирьох дітей, він та його дружина Дамар, слідуючи своїм поняттям про християнський обов'язок, виховували кількох прийомних дітей, які були відділені від своїх сімей.

Гротендік залишався в сім'ї Хейдорна протягом п'яти років — з п'яти до одинадцяти років, і відвідував школу. В своїй статті Дамар Хейдорн згадує Гротендіка як дуже вільного, абсолютно чесного і нестриманого.

Близько 1939 року, коли насувалась війна, політичний тиск на Хейдорнів посилився, і вони вже не могли утримувати прийомних дітей. Особливих турбот завдавав Гротендік, оскільки був схожий на єврея. Як тільки було встановлено контакт з батьками Гротендіка, його, у віці одинадцяти років, посадили в поїзд з Гамбурга до Парижу. В травні 1939 року Олександр Гротендік возз'єднався зі своїми батьками і прожив разом з ними недовгий час до початку війни.

Невідомо точно, що робили його батьки в той час, коли він перебував у Гамбурзі, проте вони залишались політично активними. Вони поїхали до Іспанії, щоб взяти участь в іспанській громадянській війні, і були серед тих, хто втік до Франції, коли встановився режим Франко. В силу своєї політичної активності, Ханка та її чоловік вважались у Франції небезпечними іноземцями. Невдовзі по тому, як Гротендік приєднався до них, Шапіро був поміщений в табір для інтернованих. В серпні 1942 року він був депортований французькою владою до Аушвітцу, де і був вбитий.

В 1940 році Ханку та її сина помістили в табір для інтернованих. Одного разу він втік з табору з наміром здійснити теракт по відношенню до Гітлера, але був спійманий.

Через два роки мати і сина розлучили. Ханку відіслали до іншого табору для інтернованих. Гротендіка взяли до дитячого будинку, який підтримува-

ла швейцарська організація. Він відвідував коледж, отримав звання бакалавра. Гротендік згадує про періодичні облави на євреїв, які змусили його та його друзів студентів рятуватись в лісі декілька днів.

Очевидно, що попри всі складності і негаразди своєї молодості, він мав сильний внутрішній компас з ранніх років. У вивченні математики він не залежав від думки вчителів про те, що було глибоким, а що неістотнім, що було правильним, а що невірним. Коли задача захоплювала його, він повністю присвячував себе їй, не рахуючись з тим, скільки часу він на неї витрачає.

2. Від Монпельє до Парижу та Нансі

> Містер Соуле (мій викладач математичного аналізу) запевнив мене, що остаточні проблеми, поставлені двісті або триста років тому, перерозв'язані Лебегом. Він точно розробив теорію міри та інтегрування, яка була наріжним каменем математики. "*Жнива і сівба*"

На той час, коли скінчилась війна в Європі, Олександр Гротендік був сімнадцятирічним. Він переїхав жити з матір'ю в Мейсаргес, селище в виноробному районі біля Монпельє. Він вступив до університету Монпельє. Вони з матір'ю жили на його студентську стипендію та гроші, які вони заробляли сезонними роботами зі збору винограду. Мати також працювала прибиральницею. З часом, коли він зрозумів, що викладачі просто повторюють те, що було в книжках, він став відвідувати університетські лекції все менше й менше. Як писав Дьєдонне, на той час Монпельє "займав самі останні місця у Франції з викладання математики."

В цьому ненадихаючому оточенні Гротендік присвятив більшу частину трьох років, які він провів в Монпельє, щоб заповнити прогалину, яку він відчував у підручниках з вищої школи, про те, як дати задовільне означення довжини, площі та об'єму. Самотужки він істотно перевідкрив теорію міри та інтеграла Лебега.

В 1948 році, завершивши курс в Монпельє, Гротендік їде до Парижу, основного математичного центру Франції. Викладач Гротендіка з математичного аналізу месьє Соуле рекомендував йому поїхати до Парижу та звернутись до Картана, який був його вчителем. Чи ім'я Картана відносилось до батька, Еллі Картана, якому було близько восьмидесяти, чи до сина, Анрі Картана, якому було сорок з лишком років, Гротендік не знав. Приїхавши до Парижу восени 1948 року, він показав математикам роботи, які він зробив в Монпельє. Як і казав Соуле, результати були вже відомими. Але Гротендік не був розчарованим. Дійсно, ці спроби були критичними для становлення його як математика. Він згадує про цей час: "Не знаючи цього, я навчився наодинці тому, що було істотним в професії математика – чомусь тому, чому жоден вчитель не міг навчити."

Він почав відвідувати легендарні семінари Анрі Картана в Еколь Нормаль. На цих семінарах розглядалась тематика, яку Гротендік дуже енергійно розвивав пізніше. Тема досліджувалась на лекціях протягом курсу,

що тривав рік. Лекції систематично записувались і публікувались. Тематикою семінару Картана в 1948–1949 роках була симпліціальна алгебраїчна топологія і теорія пучків — пізніше відрізана тематика, яка не розглядалась більше ніде у Франції. На семінарі Картана Гротендік вперше зустрівся з багатьма видатними математиками того часу, а саме, з Клодом Шевальє, Жаном Дельсартом, Жаном Дьєдонне, Роджером Годеменом, Лораном Шварцем та Анрі Вейлем. Серед студентів Картана на той час був Жан-Пьер Сьєр. На додачу до відвідування семінару Гротендік відвідував курс з нового тоді поняття локально опуклих просторів, що проводив Лєре в Колледж де Франс.

Як син геометра Еллі Картана, як визначний математик сам по собі, як професор Еколь Нормаль, Анрі Картан представляв собою з багатьох точок зору центральну фігуру паризької математичної еліти. Він був також одним з небагатьох математиків, які робили спроби після війни встановити зв'язок з німецькими колегами. Картан та багато визначних математиків того часу — такі як Ерзман, Лєре, Шевальє, Дельсарт, Дьєдонне та Вейль — були горді тим, що вони були "нормальниками", тобто випускниками Еколь Нормаль, найбільш престижного вищого учбового закладу Франції.

Коли Гротендік приєднався до семінару Картана, він був аутсайдером: не тільки тому, що був німецькомовним, а ще й тому, що його освітня база різко контрастувала з освітньою базою цієї групи. Але Гротендік згадує, що він ніколи не відчував себе стороннім, а завжди відчував тепло доброзичливості. Гротендік відчував себе вільним ставити запитання, проте, як він пише, він усвідомлював себе прагнучим зрозуміти речі, які всі схоплювали миттєво і "оперували ними так, ніби були знайомі з ними з колиски". Можливо це було однією з причин, за якою Гротендік за порадою Картана і Вейля переїхав в жовтні 1949 року до Нансі. Як писав Дьєдонне, Гротендік також на той час більше цікавився топологічними векторними просторами, ніж алгебраїчною геометрією, тому переїзд до Нансі був цілком природнім.

3. Учнівство в Нансі

> Любов циркулювала з самого моменту моєї появи в Нансі в 1949 році в будинку Лорана та Хелен Шварц (де я був кимось на кшталт члена сім'ї), в будинку Дьєдонне, в будинку Годемена (який на той час став одним з моїх найулюбленіших місць). *"Жнива і сівба"*

Наприкінці 1940-х Нансі був одним із найсильніших математичних центрів у Франції. Школа в Нансі включала в себе Дельсарта, Годемена, Дьєдонне та Шварца. Гротендік мав дуже мало книг, він намагався відновити все самостійно, а не читати в книжках. І він дуже багато працював.

Дьєдонне та Шварц проводили в Нансі семінари з топологічних векторних просторів. Як пояснював Дьєдонне, на той час банахові простори були добре вивчені, а локально опуклі простори були тільки нещодавно введені. Працюючи в цій області, Дьєдонне та Шварц наштовхнулись на серйозні проблеми, які вони вирішили передати Гротендіку. Дьєдонне писав: "Коли,

в 1953 році, настав момент присудити Гротендіку ступінь доктора, довелось обирати серед шести статей, і кожна була варта докторської дисертації."

Роботи Гротендіка з функціонального аналізу були "просто чудовими", коментував Едвард Еффрос з Каліфорнійського університету в Лос Анжелесі. "Він був практично першим, хто зрозумів, що алгебраїчні/категоріальні методи, які розцвіли після Другої світової війни, можуть бути використані в цій високо аналітичній гілці функціонального аналізу."

В деякому розумінні Гротендік випереджав час. Еффрос відзначає, що пройшло принаймні п'ятнадцять років перш, ніж роботи Гротендіка були повністю втягнені в основну течію теорії банахових просторів, частково як наслідок небажання визнати їх більш алгебраїчну перспективу. За останні роки з "квантизацією" теорії банахових просторів, до якої Гротендиків категоріальний підхід дуже добре пристосований, вплив його робіт виріс, стверджує Еффрос.

Хоча математична робота Гротендіка підійшла до багатообіцяючого старту, його особисте життя було невлаштованим. Він жив в Нансі зі своєю матір'ю, яка була прикута до ліжка туберкульозом. Вона підхопила хворобу в таборі для інтернованих. В результаті зв'язку між Гротендіком та старшою за нього жінкою, яка утримувала будинок, де знімали кімнати Гротендік та його мати, народився його перший син Серж. Після того, як він одержав ступінь доктора філософії, перспективи отримати постійну роботу були жалюгідними: він не мав громадянства, а на той час отримати постійну роботу у Франції не громадянину Франції було складно. Ставши громадянином Франції, треба було б піти на військову службу, що Гротендік відмовився зробити. З 1950 року він мав посаду в Національному центрі наукових досліджень (НЦНД), але це було більше схоже на членство, ніж на постійну роботу.

Лоран Шварц, відвідавши Бразилію, розповів там про свого блискучого учня, у якого були труднощі з пошуком роботи у Франції. В результаті Гротендік отримав запрошення на посаду професора в університеті в Сан Пауло, яку він займав протягом 1953 та 1954 років. Гротендік згадує 1954 рік як "нудний рік". Протягом всього року він намагався досягти успіху в проблемі апроксимації в топологічних векторних просторах, проблемі, яка було розв'язана двадцятьма роками пізніше методами, які відрізнялись від тих, які намагався використати Гротендік. Він писав, що це був єдиний період в його житті, коли заняття математикою були йому обтяжливими. Ця подавленість дала йому урок: завжди мати декілька математичних "заготовок у вогні", так що коли одна з проблем здасться занадто непіддатливою, щоб було дещо інше, над чим можна було б працювати.

Хайм Хоніг був асистентом на математичному факультеті тоді, коли там був і Гротендік, і вони стали добрими друзями. Хоніг казав, що Гротендік вів дещо спартанське і відлюдькувате існування, живучи на молоці та бананах і повністю заглибившись у математику. Одного разу Хоніг запитав Гротендіка, чому він зайнявся математикою. Гротендік відповів, що він мав два захоплення — математику і фортепьяно, проте обрав математику тому, що вважав, що так буде легше себе прогодувати. Його талант до математики

був настільки очевидним, сказав Хоніг, що він "був здивований, що Гротендік міг обирати між математикою і музикою." Гротендік прочитав у Сан Пауло курс з топологічних векторних просторів і написав записки, які поступово були опубліковані університетом. "Він був дуже, дуже амбіційним," казав Баррос-Нетто. "Можна було відчувати цю енергію — він повинен був зробити щось фундаментальне, важливе, базове."

4. Зірка, що сходить

Полишивши Бразилію, Гротендік провів 1955 рік в університеті Канзасу. Там він починає заглиблюватись у гомологічну алгебру. Перебуваючи в Канзасі, Гротендік написав "Загальну теорію розшарованих просторів з структурою пучка", в якій він розвинув свої початкові ідеї про неабелеву когомологію — предмет, до якого він пізніше повернувся в контексті алгебраїчної геометрії.

В цей час Гротендік починає листуватися з Жан Пьєром Сьєром з Коледж де Франс, з яким він зустрівся в Парижі і пізніше зустрічався в Нансі. Листи демонструють глибокий і чутливий математичний зв'язок між двома дуже різними математиками. Гротендік демонстрував високий політ уяви, який Сьєр часто повертав на землю своїм проникливим розумінням та великими знаннями. Гротендік писав, що більшість з того, що він дізнався з геометрії, крім того, що він вивчив сам, він дізнався від Сьєра. Але Сьєр не просто передавав Гротендіку знання; він був здатен засвоювати ідеї і обговорювати їх у спосіб, який Гротендік знаходив особливо надзвичайним. Гротендік називав Сьєра "детонатором", тим спалахом, який надавав істинного горіння ідеї.

Після повернення до Франції в 1956 році, більшу частину часу Гротендік проводив в Парижі. В цей час він почав більш глибоко займатись топологією і алгебраїчною геометрією. Він "був переповнений ідеями", згадує Армад Борель. "Я був переконаний, що він повинен був дати щось першорядне. Але те, що він давав, перевищувало мої сподівання. Це була фантастична версія теореми Рімана–Роха. Це дійсно математичний шедевр."

В класичній формі теорема Рімана–Роха була доведена в середині дев'ятнадцятого сторіччя. Вона ставила таке запитання: якою є розмірність простору мезоморфних функцій на компактній рімановій поверхні, що має полюси даного порядку в певній скінченній множині точок? Відповіддю є формула Рімана–Роха, яка виражає розмірність в термінах інваріантів поверхні — таким чином встановлюючи глибокий зв'язок між аналітичними і топологічними властивостями поверхні. Далекосяжне узагальнення теореми Рімана–Роха з'явилось у 1963 році з доведенням Майклом Атья та Айседором Зінгером теореми індекса Атья–Зінгера. В процесі свого доведення Гротендік ввів поняття, яке зараз називається групами Гротендіка. Ці групи дають новий тип топологічного інваріанта. Гротендік сам назвав їх K-групами, і вони стали початковою точкою у розвитку топологічної K-теорії Атья і Хірзебруха. Далі топологічна K-теорія дала поштовх для алгебраїчної K-теорії, і обидві стали полем для активних досліджень.

Це було не востаннє, коли Гротендік революціонізував точку зору на пев-

ний предмет. "Це траплялось знову і знову: коли він наштовхувався на проблему, над якою люди думали інколи сотні років, він відразу повністю трансформував існуючі уявлення про неї," — зауважував Кац. Гротендік не тільки розв'язував визначні проблеми, а ще й опрацьовував всі пов'язані з ними питання.

5. Відкриття нового світу

Друзі і колеги кажуть, що Гротендік говорив з великим захопленням, майже низькопоклонництвом, про обох своїх батьків. В "Жнивах і сівбі" він виражає глибоку і щиру любов до них. Протягом багатьох років він тримав в своєму офісі портрет батька, написаний художником-аматором в таборі для інтернованих. Як описував Картьє, на портреті був зображений чоловік з бритою головою і "полум'яним поглядом". Протягом багатьох років Гротендік теж брив голову. За свідченням Рібенбойма, Ханка Гротендік дуже пишалася своїм знаменитим сином, і він, в свою чергу, був надзвичайно глибоко прив'язаний до матері.

Після її смерті Гротендік пройшов через період духовних пошуків, під час якого припинив будь-яку математичну діяльність і думав стати письменником. Після кількох місяців пошуків він вирішив повернутись до математики, щоб закінчити роботу над деякими ідеями. Це був 1958 рік, який за свідченням Гротендіка став одним із самих плідних років у всьому його математичному житті. В цей час він жив з жінкою на ім'я Мірей, з якою одружився через декілька років і мав трьох дітей — Йоганну, Метью і Олександра. Мірей була близькою з матір'ю Гротендіка і, за свідченням кількох людей, які знали їх, була трохи старшою за нього.

Джон Тейт та його дружина Карін Тейт провели 1957–58 роки в Парижі, де вони зустрічалися з Гротендіком. "Він був приязним і наївним, як дитина," — згадує Джон Тейт. "Багато математиків поводяться, як діти, але Гротендіку це було більш властиво, ніж іншим. Він здавався простодушним — не втаємниченим в житейські справи, без претензійності, без удаваності. Він думав дуже ясно і пояснював все настійливо, без будь-якої зверхності. Він не був зіпсований цивілізацією або владою." Карін Тейт згадує, що Гротендік мав велике почуття гумору, любив посміятися. Але він міг бути також дуже напруженим, таким, що бачить речі в чорно-білих тонах, без будь-яких відтінків сірого. І він був чесним: "Завжди можна було знати, коли він з вами заодно," — каже вона, — "Він був прямий."

"Гротендік мав неправдоподібно ідеалістичні риси характеру," – згадує Карін Тейт. Наприклад, він відмовлявся мати в будинку килими, тому що вважав, що килими — це просто предмети декоративної розкоші. Через свій ідеалізм він був дуже непрактичним.

6. Народження нової геометрії

В серпні 1958 року Гротендік зробив пленарну доповідь на Міжнародному конгресі математиків в Единбурзі. В доповіді були намічені з чудовим передбаченням основні теми, над якими він працював в наступні декілька

десятків років. На той час було зрозумілим, що він планує довести знамените припущення Анрі Вейля, яке намітило глибоку єдність між дискретним світом алгебраїчних многовидів і неперервним світом топології.

На той час швидко розвивалась алгебраїчна геометрія, в якій було багато відкритих запитань, які не вимагали великого обґрунтування. Звичайно основними об'єктами вивчення були многовиди над комплексними числами. На початку двадцятого сторіччя ця область була спеціалізацією італійських математиків, таких як Гвідо Кастельново, Федеріко Енрікес і Франсеско Севері. Хоча вони і запропонували багато цікавих ідей, не всі їх результати були доведені точно. В 1930-х та 1940-х роках інші математики, серед них Б.Л.ван дер Варден, Анрі Вейль і Оскар Заріскі захотіли працювати над довільними полями, зокрема, з многовидами над полями характеристики p, які відіграють важливу роль в теорії чисел. Але в силу браку строгості італійської школи алгебраїчної геометрії необхідно було побудувати нові обґрунтування для поля. Саме це зробив Вейль в 1946 році в книзі "Обґрунтування алгебраїчної геометрії".

Наприкінці 1958 року Гротендік здійснив свій перший з кількох візитів до математичного факультету Гарварда. Тейт був там професором, а деканом був Оскар Заріскі. На той час Гротендік передовів нещодавно розробленими методами когомологій зв'язуючу теорему, яка була одним з найвизначніших результатів Заріскі, доведеним в 1940-х роках. Заріскі ніколи не переймав нові методи сам, але він розумів їх силу і хотів прилучити до них студентів. Тому він запросив Гротендіка до Гарварда.

7. Героїчні роки

В Сорбонні в Парижі в червні 1958 року був сформований на зборах спонсорів ІВНД — Інститут вищих наукових досліджень (Institut des Hautes Etudes Scientifiques). Засновник, Леон Мошан, бізнесмен зі ступенем доктора наук в області фізики, уявляв собі встановлення у Франції незалежного центру досліджень на кшталт Інституту удосконаленого навчання (Institute for Advanced Study) в Прінстоні. В плані ІВНД було сконцентрувати фундаментальні дослідження в трьох областях: математика, фізика і методологія природничих наук. Протягом десятиліть ІВНД став одним із світових наукових центрів з досліджень у галузі математики та теоретичної фізики, з невеликим, але сильним факультетом і активною програмою візитів. В 1958 році Мошан запросив Дьєдонне та Гротендіка зайняти посади професорів в ІВНД. Два професори зайняли посади в березні 1959 року, і Гротендік почав проводити семінари з алгебраїчної геометрії в травні цього року. Інститут почав видавати серію робіт "Елементи алгебраїчної геометрії", відому своєю абревіатурою EGA.

Не випадково, що назва EGA є відголоском серії Ніколя Бурбакі "Начала математики" ("Éléments de Mathématique"). Гротендік входив до Бурбакі протягом кількох років, починаючи з кінця 1950-х, і був близьким з багатьма іншими членами. Бурбакі був псевдонімом групи математиків, більшість з яких була французькими математиками, які співробітничали у написанні серії фундаментальних досліджень з математики. Засновником групи Бур-

бакі був Дьєдонне разом з Анрі Картаном, Клодом Шевальє, Жаном Дельсартом та Анрі Вейлем. Як правило, група налічувала біля десяти членів, і склад її з часом змінювався. Перша книга Бурбакі з'явилась у 1939 році, а найбільшого впливу група набула протягом 1950-х та 1960-х. Метою книг було дати аксіоматичний виклад основних областей математики на рівні загальності, який зробив би книги більш зрозумілими широкому колу математиків. Книги народжувались у тяжких випробуваннях жвавої і часом гарячої дискусії групи математиків, багато з яких були сильними особистостями і мали індивідуальні точки зору. Борель, який був членом Бурбакі протягом 25-ти років, писав, що це був випадок співробітництва "можливо, єдиний в історії математики". Книги надали великого імпульсу розвитку математики. В 1970-х та 1980-х Бурбакі мали дуже великий вплив. Деякі також критикували стиль книг як занадто абстрактний і загальний.[1]

Роботи Бурбакі і Гротендіка схожі за рівнем загальності і абстракції а також за метою, яка полягає в тому, щоб бути фундаментальними, повними і систематичними. Основна різниця полягала в тому, що Бурбакі охоплювали багато математичних областей, в той час як Гротендік зосередився на розвитку нових ідей в алгебраїчній геометрії. До того ж його робота у великій мірі сконцентрована на його власному внутрішньому баченні, в той час як роботи Бурбакі були результатом синтезу точок зору членів групи. "Я не думаю, що йому дуже подобалась система Бурбакі, за якою ми повинні були обговорювати в деталях плани і критикувати їх. Це не було його способом заняття математикою. Він хотів займатись нею самостійно," — згадує Сьєр. Гротендік залишив Бурбакі в 1960 році, хоча він залишався близьким до багатьох членів групи.

Крім EGA, іншою важливою роботою Гротендіка в області алгебраїчної геометрії були семінари. Записи лекцій, представлених на цих семінарах, відомі як "Семінари з алгебраїчної геометрії" (SGA). SGA 1 датуються семінарами 1960-1961 років, а останні в серії, SGA 7, датуються 1967-1969 роками. SGA описують поточні дослідження так, як вони були представлені на семінарі Гротендіка. Він представив багато своїх результатів на семінарі Бурбакі в Парижі, і вони зібрані в FGA, "Основи алгебраїчної геометрії" ("Fondements de la Géométrie Algébrique"), які з'явились в 1962 році. EGA, SGA і FGA складають разом близько 7 500 сторінок.

8. Чарівне віяло

> Якщо і існує в математиці щось, що зачаровує мене більше, ніж будь-що інше (і без сумніву завжди зачаровувало), то це не "число", не "розмір", а завжди форма. І серед тисячі і одного обличчя, через які форма виявляє себе нам, одне, яке зачаровує мене більше, ніж інші, і продовжує зачаровувати, це структура, прихована в математичних об'єктах. "*Жнива і сівба*"

В першому томі книги "Жнива та сівба" Гротендік представляє огляд своєї роботи, спрямований на те, щоб бути доступним нематематику. Він

[1]Основні роботи Бурбакі перекладені російською мовою. (Прим. перекладача)

там пише, що на своєму найбільш фундаментальному рівні ця робота шукає об'єднання двох світів: "*арифметичного* світу, в якому живуть (так звані) "простори", в яких нема поняття неперервності, і світ *неперервного розміру*, в якому живе "простір" у власному розумінні цього слова, доступний методам аналітика." Гротендік дуже узагальнив припущення Вейля, а не намагався розв'язати його. Це дозволило йому відчути більші структури, в яких припущення справедливі.

В основному схема є узагальненням поняття алгебраїчного многовиду. Для даного ряду скінченних полів простої характеристики схема дає в свою чергу ряд многовидів, кожне з своєю точною геометрією. "Ряд цих різних многовидів різних характеристик можна уявити собі як дещо на кшталт "нескінченного віяла многовидів" (одного для кожної характеристики)," — писав Гротендік. "Схемою є це чарівне віяло, яке з'єднане подібно багатьом різним "гілкам", "втіленням" або "реінкарнацією" всіх можливих характеристик." Узагальнення такої схеми дозволяє уніфіковано вивчати всі різні "реінкарнації" многовиду.

9. Школа Гротендіка

> Після моменту першої "появи" в 1970 році відносини зі студентами так само, як і моє відношення до власної роботи, були джерелом задоволення і радості, однією з непохитних основ гармонії в моєму житті, яка продовжує наповнювати його смислом ... "*Жнива і сівба*"

Під час свого візиту до Гарварду наприкінці 1961 року Гротендік писав Сьєру: "Математична атмосфера в Гарварді чудова, справжній подих свіжого повітря порівняно з Парижем, який стає все похмурішим з кожним роком. Тут є багато розумних студентів, які починають знайомитись з мовою схем, і не вимагають нічого, крім цікавих проблем."

Можна не погоджуватись з припущенням Гротендіка про "похмурість" паризької математичної сцени початку 1960-х, але немає сумніву в тому, що була велетенська підтримка його поверненню в ІВНД в 1961 році і відновленню його семінарів. Атмосфера була "фантастичною", згадує Артін. Семінари були широко популярними серед провідних світил паризької математики, а також серед математиків, що приїхали з інших місць. Група яскравих і талановитих студентів почала збиратись навколо Гротендіка і писати дисертації під його керівництвом (ІВНД не присуджував ступенів, тому формально ці студенти вчились в університетах в Парижі та навколо нього). "Семінари були дуже інтерактивними," — згадує Хайман Басс, який відвідав ІВНД в 1960-і роки, — "але Гротендік домінував незалежно від того, чи був він доповідачем, чи ні." Він був дуже суворим і міг бути досить впертим на людях.

Гротендік розробив певні моделі роботи зі студентами. Типовим прикладом є робота з Люком Іллазі, який став студентом Гротендіка в 1964 році. Іллазі приймав участь в паризькому семінарі Анрі Картана і Лорана Шварца, і саме Картан запропонував Іллазі зробити дисертацію під керівництвом Гротендіка. Іллазі, який до цього часу працював тільки в топології, високо

оцінив можливість зустрітися з цим "богом" алгебраїчної геометрії. Як виявилось, Гротендік був дуже добрим і дружнім і попросив Іллазі пояснити, над чим він працював. Після того, як Іллазі трохи поговорив, Гротендік підійшов до дошки і розпочав дискусію про пучки, умови скінченності, псевдокогерентність і тому подібне. "Це було подібне морю, подібне неперервному струменю математики за бортом," — згадує Іллазі. Наприкінці Гротендік сказав, що в наступному році він присвятить свої семінари L-функціям і l-адичній когомології і що Іллазі повинен буде допомогти у написанні записок. Коли Іллазі сказав, що він нічого не знає про алгебраїчну геометрію, Гротендік сказав, що це не має значення: "Ви швидко навчитесь."

І Іллазі дійсно навчився. "Його лекції були настільки зрозумілими, і він давав стільки можливостей нагадати, що було необхідним, всі припущення," — відзначає Іллазі. Гротендік був чудовим учителем, дуже уважним, і пояснював все зрозуміло. "Він обирав час, щоб пояснити на простих прикладах, як все працює," – говорить Іллазі.

Баррі Мазур з Гарвардського університету згадує , що Гротендік мав істинний талант "наділяти людей відкритими проблемами. Він міг схопити вас і дати проблему, яка просто освітила б вам світ. Це був воістину чудовий і рідкісний тип прийнятності."

На додачу до роботи зі студентами та колегами Гротендік мав велике листування з математиками поза Парижем, з деякими, які працювали над частинами його програми.

Протягом своєї роботи в ІВНД Гротендік повністю присвятив себе математиці. Його велетенська енергія і здатність до роботи, поєднана з міцною якістю внутрішнього бачення, продукували потік ідей. Він не ухилявся від програм, що могли злякати, які він намітив для себе, а втягувався в них, беручи задачі великі і малі. Він багато роботи покладав на своїх студентів та співробітників, в той же час також багато брав на себе. Як він пояснював сам, його мотивом було просто бажання зрозуміти, і дійсно ті, хто його знав, говорили, що він ніколи не керувався поняттям змагання. "Він ніколи не думав про те, щоб зрозуміти щось раніше кого-небудь іншого," — пояснював Сьєр. — "І він ніколи не міг бути у змаганні з будь-ким, тому що він хотів зробити все у свій власний спосіб, і ніхто інший не міг хотіти зробити те ж саме."

Багато ідей Гротендіка вплинули на людей на віддалі, зокрема на американських, японських та російських математиків. Пьєр Картьє бачить спадок Гротендіка в роботах таких російських математиків як Володимир Дрінфельд, Максим Концевіч, Юрій Манін і Володимир Воєводський.

З англійської переклала Ольга Ядренко

Задачі 262–267

Розділ ведуть
Володимир Брайман, Сергій Горовий, і Володимир Некрашевич

262. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кола, вписані в трикутники $\triangle ABC$ та $\triangle ABD$, дотикаються AB в точках M та N, а кола, вписані в трикутники $\triangle BCD$ та $\triangle ACD$, дотикаються CD в точках K та L. Довести, що $MN = KL$. *(А. Примак, Київ)*

263. Про дійсні числа x, y, z відомо, що

$$\begin{cases} |x+y+z| \le 1, \\ |x-y+z| \le 1, \\ |4x+2y+z| \le 8, \\ |4x-2y+z| \le 8. \end{cases}$$

Довести, що $|x| + 3|y| + |z| \le 7$. *(В. Ясинський, Вінниця)*

264. Гострокутний трикутник $\triangle AKN$ вписано в коло з центром в точці O. На стороні KN взяли довільну точку H та провели $HI \perp NA$, $HM \perp KA$. Довести, що ламана MOI ділить площу трикутника $\triangle AKN$ навпіл. *(І. Нагель, Євпаторія)*

265. Знайти всі прості числа p такі, що $2^{p^s} + 1$ ділиться на p^{s+1} для будь-якого натурального s. *(О. Манзюк, А. Примак, Київ)*

266. Нехай $ABCD$ — опуклий чотирикутник. Промені AB та DC, BC та AD перетинаються в точках E, F відповідно. Бісектриси кутів $\angle AED$ та $\angle BFA$ перетинаються в точці K під прямим кутом. Довести, що

$$S_{\triangle AKB} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle BKC} + S_{\triangle AKD}.$$

(О. Макарчук, Добровеличківка, Кіровоградська обл.)

267. Знайти всі натуральні значення $n > 1$, для яких виконується рівність

$$\left[\frac{\sqrt[n]{1}}{1} + \frac{\sqrt[n]{2}}{2} + \frac{\sqrt[n]{3}}{3} + \ldots + \frac{\sqrt[n]{2^n}}{2^n} \right] = 2005.$$

(Тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.) *(В. Ясинський, Вінниця)*

262. Let $ABCD$ be a convex quadrangle. The incircles of triangles $\triangle ABC$ and $\triangle ABD$ touch AB at M and N. The incircles of triangles $\triangle BCD$ and $\triangle ACD$ touch CD at K and L. Prove that $MN = KL$. *(A. Prymak, Kyiv)*

263. Let x, y, z be real numbers such that

$$\begin{cases} |x+y+z| \le 1, \\ |x-y+z| \le 1, \\ |4x+2y+z| \le 8, \\ |4x-2y+z| \le 8. \end{cases}$$

Prove that $|x| + 3|y| + |z| \le 7$. *(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

264. Let O be the circumcenter of acute triangle $\triangle AKN$. The point H is chosen at side KN in arbitrary way. Let I at AN and M at AK be such that $HI \perp NA$ and $HM \perp KA$. Prove that the broken line MOI bissects the area of $\triangle AKN$. *(I. Nagel, Evpatoria)*

265. Find all prime numbers p such that $2^{p^s} + 1$ is divisible by p^{s+1} for every positive integer s. *(O. Manzjuk, A. Prymak, Kyiv)*

266. Let $ABCD$ be a convex quadrangle. The rays AB and DC, BC and AD intersect at points E, F respectively. The angle bisectors of $\angle AED$ and $\angle BFA$ intersect at K in such a way that $\angle EKF = 90°$. Prove that

$$S_{\triangle AKB} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle BKC} + S_{\triangle AKD}.$$

(O. Makarchuk, Dobrovelychkivka)

267. Find all positive integers $n > 1$ such that the equality

$$\left[\frac{\sqrt[n]{1}}{1} + \frac{\sqrt[n]{2}}{2} + \frac{\sqrt[n]{3}}{3} + \ldots + \frac{\sqrt[n]{2^n}}{2^n} \right] = 2005 \quad \text{holds.}$$

(Here $[x]$ denotes the integer part of x.) *(V. Yasinskyy, Vinnytsya)*

Розв'язання задач 226–231

Розділ ведуть
Володимир Брайман, Сергій Горовий, і Володимир Некрашевич

226. Знайти всі натуральні n та k, для яких $3^n + 7 = k^2$.

Розв'язок. Оскільки $3^n + 7$ є парним числом, то k парне, а отже k^2 ділиться на 4. Тому 3^n дає остачу 1 від ділення на 4, звідки n — парне, $n = 2m$. Тепер $7 = k^2 - 3^{2m} = (k - 3^m)(k + 3^m)$, $k - 3^m = 1$ та $k + 3^m = 7$, $k = 4$ та $m = 1$, $n = 2$.

Відповідь: $n = 2$, $k = 4$. *(Розв'язок авторів)*

227. Довести, що існує нескінченно багато функцій f, що визначені на множині натуральних чисел, приймають натуральні значення та задовольняють умову

$$f(nf(k) + kf(n)) = f(n^2 + k^2)f(n + k - 1)$$

для всіх натуральних n та k.

Розв'язок. Розглянемо функцію f, визначену таким чином:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \text{ непарне;} \\ 2a, & \text{якщо } n \text{ парне,} \end{cases}$$

де a — довільне натуральне число. Покажемо, що вона задовольняє умову. Оскільки при всіх n числа n та $f(n)$ мають однакову парність, то число $nf(k) + kf(n) = n(f(k) - k) + k(f(n) - n) + 2nk$ завжди парне. Оскільки при всіх n число $n^2 - n$ парне, то числа $n^2 + k^2$ та $n + k - 1$ завжди мають різну парність, а отже $f(nf(k) + kf(n)) = 2a = f(n^2 + k^2)f(n + k - 1)$ при всіх n, k. Оскільки число a довільне, то отримали нескінченно багато функцій, що задовольняють умову задачі. *(Розв'язок авторів)*

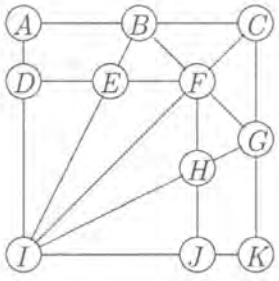
228. В протилежних кутових клітинках поля розміром 2004×2004 стоять комбайни. Двоє гравців по черзі пересувають свої комбайни на одну з сусідніх клітинок (сусідніми є клітинки, що мають спільну сторону). Комбайн, що першим потрапляє у деяку клітинку, збирає там пшеницю. Виграє той з гравців, що збере пшеницю більше ніж з половини клітинок. Чи має хтось з гравців виграшну стратегію? Якщо має, то хто?

Розв'язок. Якщо другий гравець буде повторювати ходи першого симетрично відносно центра поля, то він збере не менше пшениці, ніж перший, і не програє. Але перший гравець також має непрограшну стратегію. Нехай він своїм другим ходом повертається в кутову клітинку, а потім при $k \geq 1$ на $(k+2)$-му ході повторює k-й хід другого гравця симетрично відносно центра поля. Тоді другий гравець збере не більше половини пшениці, бо з кожної пари симетричних відносно центра поля клітинок він першим зможе дістатись щонайбільше до однієї. Справді, якщо на l-му ході другий комбайн

потрапляє на деяку клітинку, то на іншу клітинку цієї пари він міг би потрапити не раніше свого $(l+2)$-го ходу, а перший комбайн потрапить туди вже $(l+2)$-м ходом і збере там пшеницю. Отже обидва гравці мають непрограшну стратегію, а тому жоден з них не має виграшної. (*Розв'язок автора*)

Зауваження. Якщо гравці будуть одночасно дотримуватись цієї стратегії, то жоден з них не програє, але врожай зберуть лише з чотирьох клітинок поля.

229. В кружечках на малюнку



слід замінити літери $A, B, C, \ldots, K$ числами від 1 до 11 так, щоб суми трьох чисел на кожному з десяти відрізків були однаковими. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язок. Позначимо S суму трьох чисел на кожному з відрізків. Тоді розглядаючи п'ять сум, у які входить число I, знаходимо $5S = 4I + (1+2+\cdots+11) = 4I + 66$. З іншого боку, $3I = (I+A+D)+(I+B+E)+(I+C+F)-(A+B+C)-(D+E+F) = S$. Звідси $I = 6$ та $S = 18$.

Зауважимо, що з кожного розміщення чисел можна отримати ще три, застосовуючи симетрію відносно діагоналі, заміну кожного числа n на $12-n$ та композицію цих операцій. Тому знайдемо кількість розміщень чисел з точністю до таких замін та помножимо результат на 4.

Існує 5 способів подати 12 як суму двох чисел: $12 = 1+11 = 2+10 = 3+9 = 4+8 = 5+7$, що відповідає 5 сумам $A+D$, $B+E$, $C+F$, $G+H$, $J+K$, які доповнюють число I до S. Завдяки попередньому зауваженню достатньо розглянути лише три ситуації:

$$1)\quad C=7,\ F=5; \qquad 2)\quad B=7,\ E=5; \qquad 3)\quad A=7,\ D=5.$$

1) Нехай $C=7$, $F=5$. Позначимо $B=x$ та виразимо через x значення інших чисел: $E=12-x$, $A=11-x$, $D=x+1$, $G=13-x$, $H=x-1$, $J=14-x$, $K=x-2$. Тоді з умов $x-2\ge 1$ та $11-x\ge 1$ знаходимо $3\le x\le 10$. Числа 5, 6 та 7 вже використані. При $x=4$ маємо $A=11-x=7=C$, при $x=8$ маємо $H=x-1=7=C$ а при $x=9$ маємо $K=x-2=7=C$, що неможливо. Залишились $x=3$ та $x=10$, що приводять до симетричних відносно діагоналі розміщень чисел. Тому з точністю до симетрії маємо один спосіб, який породжує ще три.

2) Нехай $B=7$, $E=5$. Позначимо $A=x$. Тоді $D=12-x$, $C=11-x$, $E=x+1$, $G=10-x$, $H=x+2$, $J=15-2x$, $K=2x-3$. З умов $2x-3\ge 1$ та $15-2x\ge 1$ маємо $2\le x\le 7$, а отже $2\le x\le 4$. При $x=3$ маємо

$G = 10 - x = 7 = B$, при $x = 4$ маємо $C = 11 - x = 7 = B$, що неможливо, а $x = 2$ приводить до розміщення, з якого отримуємо ще три.

3) Нехай $A = 7$, $D = 5$. Позначимо $C = x$ та знайдемо $B = 11 - x$, $E = x + 1$, $F = 12 - x$, $G = 2x - 5$, $H = 17 - 2x$, $J = 3x - 11$, $K = 23 - 3x$. З умов $23 - 3x \geq 1$ та $3x - 1 \geq 1$ маємо $4 \leq x \leq 7$, а отже $x = 4$. Але тоді $B = 11 - x = 7 = A$.

Ми описали всі можливі розташування чисел. Отже існують 8 шуканих розміщень.

Відповідь: 8 способів. (*Розв'язок авторів*)

230. В трикутнику $\triangle ABC$ $3AC = AB + BC$. Нехай K — точка дотику вписаного в $\triangle ABC$ кола зі стороною AC, а L — діаметрально протилежна точка цього кола. Прямі AL та CL перетинають сторони BC та AB в точках A_1 та C_1 відповідно. Довести, що $AC_1 = CA_1$.

Розв'язок. Нехай $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, ω та ω_1 — вписане в $\triangle ABC$ коло та зовнівписане коло, яке дотикається сторони AC в точці N та продовжень сторін AB та BC, O — центр кола ω_1. Тоді довжина дотичних, проведених з точки B до кіл ω та ω_1, дорівнюють $\frac{c+a-b}{2} = b$ та $\frac{c+a+b}{2} = 2b$ відповідно, а тому радіус кола ω_1 дорівнює діаметру кола ω, $ON = KL$. Також маємо $AK = \frac{b+c-a}{2} = CN$. Отже, прямокутні трикутники $\triangle AKL$ та $\triangle CNO$ рівні за двома катетами, $\angle A_1AC = \angle LAK = \angle NCO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACA_1)$, бо OC — бісектриса кута, суміжного з $\angle ACA_1$. Звідси $\angle AA_1C = \angle A_1AC$, $\triangle AA_1C$ рівнобедрений $A_1C = AC$. Аналогічно $AC_1 = AC = A_1C$. (*Розв'язок автора*)

231. На честь дня святого Валентина n пар закоханих шахістів провели турніри юнаків та дівчат в одне коло, тобто кожні два юнаки та кожні дві дівчини зіграли між собою один раз. Виявилося, що жодна гра не закінчилась внічию, а кожна пара закоханих разом виграла по $n - 1$ партії. Довести, що кількість трійок шахістів (A, B, C), в яких A виграв у B, B виграв у C та C виграв у A співпадає з кількістю трійок шахісток (D, E, F), в яких D виграла у E, E виграла у F та F виграла у D.

Розв'язок. Домовимось рахувати трійки (A, B, C), (B, C, A) та (C, A, B) (відповідно (D, E, F), (E, F, D) та (F, D, E)) один раз, інакше кількості трійок шахістів та шахісток слід просто потроїти. Взагалі існує C_n^3 способів вибрати трьох з n шахістів. Якщо троє шахістів не утворюють шукану трійку, то один з них виграв у двох інших, а один двом іншим програв. Тому щоб знайти кількість зайвих трійок слід знайти для кожного шахіста кількість пар шахістів, у яких він виграв (або яким програв). Отже, нехай шахісти виграли $k_1, k_2, \ldots, k_n$ партій. Тоді кількість шуканих трійок шахістів $C_n^3 - C_{k_1}^2 - \cdots - C_{k_n}^2$ (при $k_i < 2$ $C_{k_i}^2 = 0$). Але тоді шахістки відповідно програли $k_1, k_2, \ldots, k_n$ партій та кількіть шуканих трійок шахісток також дорівнює $C_n^3 - C_{k_1}^2 - \cdots - C_{k_n}^2$. (*Розв'язок автора*)

Список читачів, що надіслали правильні розв'язки

Макарчук О. (*смт. Добровеличівка, Кіровоградська обл.*) 223, 225 (з попереднього номера), 226, 230.

Посібник, який варто перевидати

В. О. Тадеєв

Нікулін О. В., Кукуш О. Г., *Геометрія: Поглиблений курс. 7–9 класи*, "Перун", Київ–Ірпінь, 1999.

Не так часто, на жаль, з'являються добротні навчальні книги, в яких реалізовані оригінальні концепції в доборі та розгортанні змісту елементарної геометрії. Тому радимо читачам журналу з особливою увагою поставитися до рецензованої книги. Посібник схвалений Міністерством освіти і науки України для використання в загальноосвітніх навчальних закладах, в яких математика вивчається на поглибленому рівні. Особливо корисним він буде для учнів та вчителів, які беруть активну участь в олімпіадному русі та гуртковій роботі з математики. Винятковою особливістю посібника є посилена увага до математичної строгості викладу теоретичного матеріалу. А тому він буде корисним і для учнів, які мріють про здобуття фундаментальної вищої математичної освіти, а ще — студентам вищих педагогічних навчальних закладів, що вивчають курси елементарної математики та методики викладання математики, а також проходять практикум з розв'язування математичних задач.

На підтвердження цих рекомендацій найперше відзначимо, що теорема Фалеса, яка є ключовою у побудові теорії подібності і всієї метричної геометрії, а також формули для площі прямокутника і круга доводяться на основі теорії границь, а аксіоматична база курсу включає аксіоми переміщень. На достатньо високому рівні строгості проведено і обґрунтування векторного числення.

Крім цього, в посібнику зібрано багатющий фактичний матеріал, який практикуючому вчителю чи зацікавленому учневі зазвичай доводиться вибирувати з численних посібників з позакласної роботи та журнальних публікацій. У першу чергу це стосується так званої геометрії трикутника і чотирикутника. У посібнику читач зустріне доволі значний обсяг цих відомостей, розпочинаючи від поняття зовнівписаного кола, прямої і кола Ейлера і теореми Птоломея — до аналогів формули Герона для чотирикутників та формул для відстані між цікавими точками трикутника. У посібнику вміщені також і рідкісні для навчальної літератури матеріали, які вельми позитивно впливають на підтримку "зовнішньої" зацікавленості учнів до вивчення геометрії — про золотий переріз і спіральні лінії, про магічні квадрати і трикутники, про правильні многокутники і теорему Гаусса стосовно їх побудови за допомогою за допомогою циркуля та лінійки тощо. Наводяться також відомості про видатних математиків, імена яких закарбовані в назвах формул і теорем, подаються пояснення стосовно походження майже всіх іншомовних геометричних термінів. Шкода тільки, що ці останні матеріали наводяться не в основному тексті, а у вигляді зносок.

Відзначимо, нарешті, й те, що автори посібника ставлять собі за мету підвести читача до сучасних рубежів геометричної науки, пов'язаних з групами перетворень. Узагалі, в посібнику реалізована ідея побудови основ геометрії на базі такого фундаментального поняття, як рух. Хоча ідея руху і є однією з провідних в методиці геометрії, проте її строга аксіоматична реалізація, проведена в даній книзі, є цілком новим явищем в нашій навчальній літературі, і тому заслуговує на особливу увагу. Тому зупинимося на цьому детальніше, маючи на меті в першу чергу прокоментувати окремі "вузькі" місця і тим само допомогти зацікавленому читачеві, — оскільки саме тут він може зустрітися з певними труднощами при першому ознайомленні з книгою.

Аксіоматичну базу даного курсу планіметрії складають 19 аксіом. Нижче наводимо їх повністю з окремими коментарями.

Аксіома 1. Існує безліч точок, які належать даній прямій, і безліч точок, які не належать їй.

Аксіома 2. Через дві різні точки можна провести пряму і притому тільки одну.

Аксіома 3. Будь-яка точка O на прямій ділить цю пряму на дві частини (промені) так, що довільні дві точки одного променя лежать на один бік від точки O, а довільні дві точки різних променів по різні боки від точки O. Точка O, і лише вона, належить обом променям.

Аксіома 4. З трьох різних точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Після аксіоми 4 формулюється означення відрізка — як множини, що складається з двох точок A, B і точок, що лежить між ними.

Аксіома 5. Будь-яка пряма a поділяє площину на дві частини (півплощини), причому точки прямої a і лише вони є спільними точками цих півплощин.

Аксіоми 1–5 фактично збігаються з відповідними аксіомами з найпоширенішого на даний час шкільного підручника "Геометрія 7–11" О. В. Погорєлова (ми й далі будемо проводити порівняння саме з цим підручником).

Основне навантаження наступної аксіоми полягає у введенні поняття кута *як частини площини*:

Аксіома 6. З трьох різних променів, які мають спільний початок і лежать в одній півплощині, один і тільки один лежить між двома іншими.

При цьому відношення *"лежати між"* для променів описується так: Промінь b лежить між двома променями a_1, a_2, якщо усі ці три промені мають спільний початок O, а також: 1) промені a_1, b лежать в одній півплощині відносно прямої, що містить промінь a_2; 2) промені a_2, b лежать в одній півплощині відносно прямої, що містить промінь a_1 (рис. 1). Зокрема, якщо промені a_1, a_2 є доповняльними, то будь-який промінь b з початком в точці O лежить між цими променями (рис. 2).

Два промені a_1, a_2, що виходять зі спільного початку O, розбивають площину на дві частини, і кожна з них називається кутом (рис. 3). Одна з цих

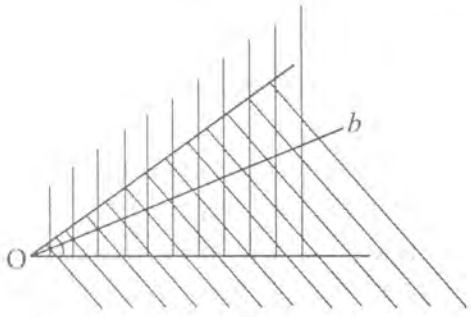


Рис. 1

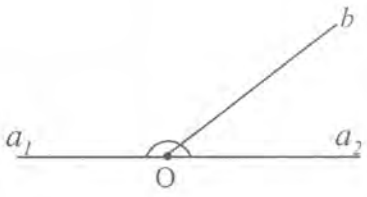


Рис. 2

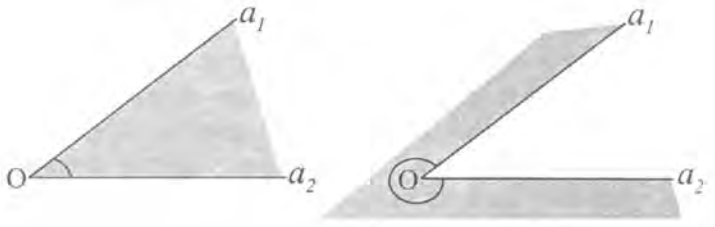


Рис. 3

частин є множиною точок променів a_1, a_2, а також усіх променів, які лежать між ними. Вона називається *кутом, що не перевищує розгорнутого.* Зокрема, якщо промені a_1, a_2 є доповнальними, то кут називається *розгорнутим.* Отже, такі промені утворюють два розгорнуті кути. Якщо ж промені a_1, a_2 не є доповняльними, то інша частина площини, до якої теж долучаються ці промені, називається *кутом, більшим за розгорнутий.* Отже, промені a_1, a_2 є спільними сторонами для двох кутів. Найбільший кут, який охоплює всю площину і для якого, отже, сторони a_1, a_2 збігаються, називається *повним.*

Таке розширене трактування поняття кута суттєво ускладнює його аналіз, порівняно з тим, коли кутом називається лише сукупність двох променів. Проте воно має суттєві переваги. Адже тоді "природнішим" є вимірювання кутів, оскільки зримою стає одиниця вимірювання і в результаті цього сам процес вимірювання кутів стає більш аналогічним до вимірювання відрізків. Крім того, тоді не виникає потреби у додатковому уведенні поняття кута, більшого за розгорнутий, яке є важливим для вимірювання колових дуг, для обґрунтування коректності означення суми кутів, означення перетворення повороту, а також поняття внутрішнього кута у випадку неопуклих многокутників.

Наступні чотири аксіоми стосуються вимірювання відрізків і кутів. Такі аксіоми приймаються і в підручнику О. В. Погорєлова.

Аксіома 7. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він поділяється будь-якою точкою.

Аксіома 8. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він поділяється будь-

яким променем, що лежить всередині кута.

Аксіома 9. Для будь-якого додатного числа існує відрізок, довжина якого дорівнює цьому числу.

Аксіома 10. Для будь-якого додатного числа, яке не перевищує 360, існує кут, градусна міра якого дорівнює цьому числу градусів.

Здається, краще було б, якби аксіоматично вводилася міра розгорнутого кута — 180°. Тоді для вимірювання кутів, менших від розгорнутого, які в шкільному курсі планіметрії посідають ключове місце, не потрібно було б попередньо обґрунтовувати, що повний кут складається з двох рівних розгорнутих кутів, які дорівнюють по 180°. Адже поняття рівності фігур вводиться пізніше.

Наступна найчисельніша група аксіом описує поняття руху і накладання, а через них і фундаментальне поняття *рівності* фігур. *Рухом* називається таке взаємно однозначне відображення площини на себе, яке зберігає відстані між будь-якою парою точок. *Накладанням* фігури Φ на фігуру Φ' (або *суміщенням* фігур Φ і Φ') називається такий рух, при якому фігура Φ взаємно однозначно відображається на фігуру Φ'. Якщо існує накладання однієї з фігур на іншу, то такі фігури називаються *рівними*.

Аксіома 11. Якщо при деякому русі дві різні точки однієї прямої суміщаються з двома різними точками іншої прямої, то даний рух є накладанням, яке суміщає одну пряму з іншою.

Аксіома 12. Відрізки, що мають однакову довжину, рівні.

Аксіома 13. Рівні кути мають однакову градусну міру, і навпаки, кути, які мають однакову градусну міру, рівні.

Аксіома 14. На промені h з початком у точці O існує і притому єдина точка A така, що відрізок OA має задану довжину.

Аксіома 15. У півплощині відносно прямої, що містить промінь OA, існує і притому єдиний промінь OB такий, що кут $\angle BOA$ має дану градусну міру, яка менша від 180°.

Аксіома 16. Будь-який кут $\angle ab$ можна сумістити з рівним йому кутом $\angle a'b'$ двома способами: 1) так, щоб промінь a сумістився з променем a', а промінь b — з променем b'; 2) так, щоб промінь a сумістився з променем b', а промінь b — з променем a'.

Аксіома 17. Нехай кут BOA менший за розгорнутий, а кут $B'O'A'$ дорівнює куту BOA. Якщо при деякому русі f промінь OA сумістився з променем $O'A'$, а промені $f(OB)$ і $O'B'$ лежать в одній півплощині відносно прямої $O'A'$, то промінь OB суміщається при русі f з променем $O'B'$ (рис. 4).

Відносно цих аксіом зауважимо наступне. По-перше, аксіоми 14 і 15 вже добре відомі читачеві за підручником О. В. Погорєлова.

По-друге, якщо приймаються ці аксіоми, то аксіоми 9 і 10 можна вилучити. Справді, аксіомою 14 фактично вказується такий відрізок, який має задану довжину, а аксіомою 15 — такий кут, який має задану градусну міру.

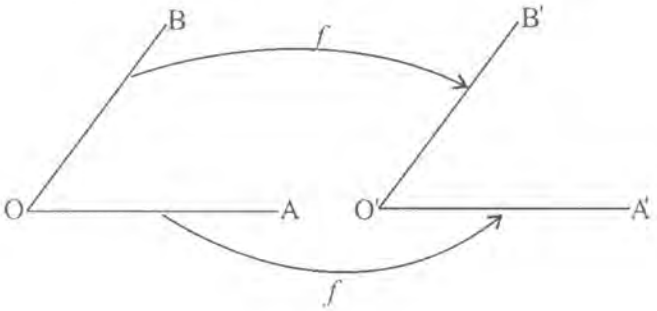


Рис. 4

По-третє, впадає в око "несиметричність" відображення властивостей відрізків і кутів в аксіомах 12 і 13. а також відсутність для відрізків аналогу аксіоми 16. Це варто було б пояснити, наприклад, так. Те, що рівні відрізки мають однакову довжину, випливає із самого означення рівності фігур. Справді, якщо відрізки рівні, то, згідно з означенням, це означає, що існує такий рух, при якому один з відрізків накладається на інший. Але ж при русі зберігаються довжини відрізків. Отже, довжини рівних відрізків однакові.

Аналогом аксіоми 16 для відрізків є таке твердження: *Будь-який відрізок AB можна сумістити з рівним йому відрізком $A'B'$ двома способами:*

1) *так, щоб точка A сумістилася з точкою A', а точка B — з точкою B';*
2) *так, щоб точка A сумістилася з точкою B', а точка B — з точкою A'*

(рис. 5). Це твердження легко довести. Нехай O, O' — середини даних відрізків. Тоді за аксіомою 16 розгорнутий кут AOB (який-небудь один із двох) можна сумістити з розгорнутим кутом $A'O'B'$ двома відповідними способами. Зрозуміло, що при першому суміщенні точки A, B сумістяться, відповідно, з точками A', B', а при другому — з точками B', A'. Щоправда, при цьому слід зіслатися на факти, сформульовані нижче у вправах 1–2. Але і їх, як буде зазначено, теж можна довести.

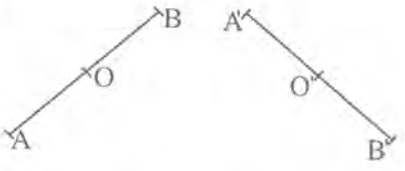


Рис. 5

По-четверте, аксіома 17 є простим наслідком з аксіоми 15 і, отже, може бути сформульована як теорема. Справді, оскільки f — рух, то кут між променями $O'A'$ і $f(OB)$ (див. рис. 4) дорівнює куту BOA. За аксіомою 15, у тій півплощині з граничною прямою $O'A'$, яка містить промінь $f(OB)$, існує *тільки один* промінь $O'B'$, для якого кут $B'O'A'$ дорівнює куту BOA. Отже, промінь $O'B'$ збігається з променем $f(OB)$, тобто промінь OB при русі f суміщається з променем $O'B'$.

По-п'яте, при доведенні декількох ключових теорем у посібнику аксіома 16 застосовується в оберненій формі, тобто з того, що при деякому русі f сторони двох кутів накладаються, робиться висновок про рівність цих кутів, тобто, що накладаються і їхні внутрішні промені. Для правомірності такого висновку у формулюванні аксіоми 16 потрібно додати слово "тільки". Тобто

вказати, що суміщення кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ можливе тільки двома вказаними способами.

І, нарешті, останнє. Після формулювання аксіоми 15 у посібнику пропонується для самостійного розв'язування дві вправи:

Вправа 1. Якщо при деякому русі суміщаються кінці відрізків, то даний рух є накладанням, яке суміщає ці відрізки. Довести це.

Вправа 2. Якщо при деякому русі суміщаються початки двох променів і ще *дві точки* (краще було б сказати: "*і ще по одній точці*" — В.Т.) цих променів, то даний рух є накладанням, що суміщає ці промені. Довести це.

Особливе становище цих вправ полягає в тому, що в наступному розділі сформульовані в них результати використовуються при доведенні теореми, яка, в свою чергу, застосовується при доведенні ознак рівності трикутників. Звичайно, це є суттєвою методичною прогалиною. По-перше, тому, що в кінці кожного розділу посібника спеціально відведене місце для задач для самостійного розв'язування. А по-друге, якщо учень не розв'яже якусь із цих вправ, то він фактично буде позбавлений можливості рухатися далі в засвоєнні теорії.

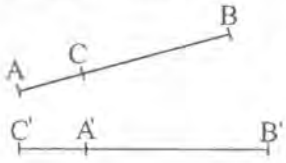


Рис. 6

У зв'язку із цим відзначимо, що для доведення твердження вправи 1 слід довести, що кожна внутрішня точка одного з відрізків переходить у внутрішню точку іншого, і навпаки. Припустимо, що це не так. Нехай внутрішня точка C відрізка AB відобразилася у зовнішню точку C' відповідного відрізка $A'B'$ (рис. 6). Із того, що точка C є внутрішньою для відрізка AB, випливає (за аксіомою 7), що

$$AB = AC + CB, \tag{1}$$

а з того, що точка C' не належить відрізку $A'B'$, випливає, що або A' лежить між B' і C', або B' лежить між A' і C'. Нехай маємо першу ситуацію. Тоді $C'B' = C'A' + A'B'$. Звідси на основі означення руху одержуємо:

$$CB = CA + AB. \tag{2}$$

Додавши рівності (1) і (2) і врахувавши, що $AC = CA$, дістаємо: $AC = 0$, що неможливо. Отже, твердження доведено.

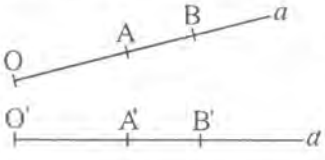


Рис. 7

Як наслідок із вправи 1, легко вивести твердження вправи 2, врахувавши, що за аксіомою 11 пряма в результаті руху відобразиться у пряму. Оскільки початок O променя a лежить зовні будь-якого відрізка AB, що належить цьому променю (рис. 7), то це ж саме буде виконуватися і для образів O' та $A'B'$ даних фігур, одержаних у результаті руху (і навпаки). Отже, образом a' променя a є промінь.

Аксіома рухомості трикутника приймається у такій редакції:

Аксіома 18. Існує таке накладання f трикутника ABC на рівний йому трикутник $A'B'C'$, що точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ є вершинами трикутника $A'B'C'$.

З цієї аксіоми елементарно випливає, що в рівних трикутниках рівними є відповідні сторони і відповідні кути.

Вводячи дану аксіому, варто було б наголосити на тому, що з означення рівності трикутників випливає тільки те, що існує накладання одного з трикутників на інший, але це жодним чином не визначає, як при цьому накладанні відображаються вершини одного з трикутників (на сторони, у вершини, чи й усередину іншого), адже трикутником у посібнику називається *частина площини*, обмежена його сторонами. Тому аксіомою 18 якраз і гарантується існування такого накладання, при якому вершини одного з трикутників суміщаються саме з вершинами іншого. Значно пізніше, в окремому параграфі, присвяченому характеристиці рухів, буде доведено *єдиність* такого руху, а також те, що будь-яке накладання трикутника на рівний йому трикутник тільки таким і може бути, тобто, що при цьому вершини одного трикутника *обов'язково* сумістяться з вершинами іншого.

Зазначимо принагідно, що якщо трикутником назвати фігуру, яка складається лише із вершин і сторін (без внутрішності), як це найчастіше зустрічається в підручниках, то доведення останнього твердження значно спрощується (його легко одержати з нерівності трикутника). Але тоді доводиться приймати "як очевидність", що при переміщенні трикутника (круга тощо) його внутрішність переходить у внутрішність образу. Доведення ж цих фактів у посібнику є одним з проявів підвищеної строгості курсу, про яку йшлося на початку цієї рецензії.

Аксіоматична база курсу завершується аксіомою паралельних у традиційній для сучасних підручників редакції Плейфера. Самá теорія паралельних розпочинається відразу після доведення 1-ї і 2-ї ознак рівності трикутників перед властивостями рівнобедреного трикутника. Доведення ознаки паралельних прямих є нетрадиційним для наших підручників. Тому читачам журналу буде цікаво ознайомитися з ним.

Нехай при перетині прямих a і b січною c рівними є відзначені внутрішні рівносторонні кути (рис. 8; ми дещо видозмінили рисунок оригіналу, аби

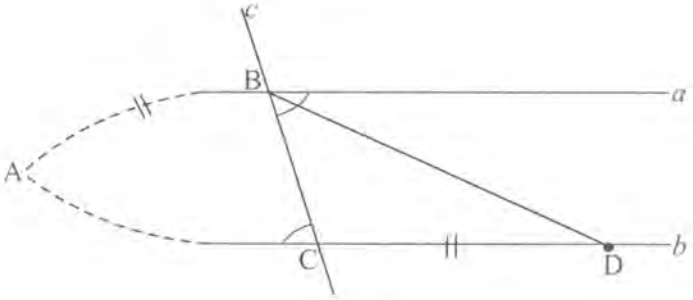


Рис. 8

"підігнати" його під звичний для вчителів образ). Припустимо, що прямі a і b перетинаються в точці A. Нехай B і C — точки перетину січної c із цими

прямими. Відкладемо на прямій b від точки C у протилежний бік від A відрізок $CD = AB$. Оскільки $\angle ABC = \angle BCD$ (як суміжні до рівних кутів), то $BCA = CBD$ (за першою ознакою). Тому $\angle BCA = \angle CBD$. Але це неможливо, оскільки $\angle CBD$ є частиною кута, який рівний куту BCA. Тому $a \parallel b$.

Відразу після доведення ознаки паралельності доводиться теорема про суму кутів трикутника. Лише після цього встановлюються властивості рівнобедреного трикутника. Це дещо спрощує виклад цих питань у порівнянні з більш традиційною послідовністю, особливо доведення обернених тверджень.

Сподіваємося, що наведених відомостей достатньо, аби переконати читачів журналу, що рецензована книга справді варта їхньої уваги.

Водночас слід зазначити й те, що в посібнику, крім уже названих, є й деякі інші деталі, які варто було б удосконалити при підготовці наступних видань.

Найбільше впадає в око те, що в поглибленому курсі планіметрії, розраховану і на учнів, і на вчителів, дуже мало уваги приділяється задачам на побудову. Фактично ця тематика обмежується лише побудовою деяких правильних многокутників за допомогою циркуля та лінійки. Дуже доречно було б вмістити і відомості щодо основних методів розв'язування задач на побудову, а також щодо класичних задач, які не розв'язуються циркулем та лінійкою, можливо, згадати про побудови Штейнера і Мора–Маскероні. Рельєфніше варто було б окреслити й ідейні основи векторно-координатного методу у планіметрії, проілюструвавши їх численнішими і переконливішими прикладами розв'язування змістовних задач з класичною геометричною фабулою.

Інколи в посібнику трапляється передчасне використання понять, які вводяться пізніше, отже, ще невідомих для учнів. А таке важливе поняття як *відстань від точки до фігури* (наприклад, *до сторін кута*) не вводиться зовсім, хоча й дуже активно застосовується, наприклад, у формулюванні теореми про властивість бісектриси. Інший приклад: "кут прямої з додатним напрямом осі OX" — що це таке? Невдалим є термін *ортоцентричний трикутник*. Ортоцентричними називають тетраедри, висоти яких перетинаються в одній точці. В аналогічному сенсі кожний трикутник є ортоцентричним. Може варто зупинитися на назві *трикутник основ висот*?

Добре було б якби в тексті було більше підзаголовків. Це створило б комфортніші умови для учнів, які краще сприймають матеріал, структурований за невеликими змістовими фрагментами. Дуже бажано подати більше задач із розв'язаннями.

Зазначимо, що останні побажання уже реалізовані у чудовому литовському виданні посібника (російською мовою), підготовленому за участю ще одного автора — Ю. С. Татаренка (Вісагінас: "Альфа", 1998). Звичайно, це суттєво збільшило його обсяг. Але результат вартує цих додаткових витрат. Тому дуже сподіваємося, що таке саме, а то й краще видання невдовзі буде здійснено й українською мовою.

Рецензія на книгу Р. П. Ушакова "Комбінаторні тотожності", Серія: Бібліотека журналу "Математика в школах України", "Основа", Харків, 2004 р.

С. І. Доценко[1]

Серед інших розділів математики комбінаторика посідає особливе місце. Сила методів комбінаторики відчувається як в різних інтелектуальних та комерційних іграх, так і в серйозній науковій діяльності в таких розділах, як теорія ймовірностей, теорія графів, генетика тощо.

В книзі Р. П. Ушакова "Комбінаторні тотожності", написаній насамперед для учнів математичних ліцеїв, гімназій і шкіл, зібрана велика кількість цікавих задач, співвідношень, тотожностей.

Запропоновані задачі стимулюють в учнів бажання шукати свої власні методи доведень, накопичувати арсенал засобів розв'язання задач. Вивчаючи комбінаторику, учні безумовно будуть вивчати і оперувати такими поняттями, як похідна і інтеграл, будуть поглиблювати свої знання з алгебри, геометрії та тригонометрії.

Світ комбінаторики захоплює допитливу людину з перших хвилин знайомства з книжкою Р. П. Ушакова "Комбінаторні тотожності".

[1]Доцент факультету кібернетики Київського Національного університету імені Тараса Шевченка.

Український математичний журнал для школярів

том 11 **У світі математики** випуск 4

2005

ЗМІСТ

Обрії математики

О. Г. Зражевський
Кєно, або "як будувалась Велика Китайська Стіна" 1

Математичні повідомлення

Ф. Р. Липченко
У глибинах нескінченних множин 6

Математичний гурток

О. М. Вороний, О. О. Вороний
Нерівність Кі Фана 13

Л. А. Кіношевер, І. М. Мітельман, А. С. Швець
Від олімпіадної задачі — до нових кіл у геометрії трикутника 20

В. М. Радченко
Методи доведення планіметричних нерівностей 29

Сторінка абітурієнта

О. Ф. Герус, І. Г. Ленчук, О. А. Сарана
Про вступний іспит з математики на фізико-математичному факультеті Житомирського державного університету ім. І. Франка в 2003–2004 роках 37

Математичні олімпіади

Олімпіада Київського Національного університету імені Тараса Шевченка: механіко-математичний факультет 41

Олімпіада Київського Національного університету імені Тараса Шевченка: факультет кібернетики 43

В. Лейфура, В. Борисова, О. Литвиненко
46 Міжнародна математична олімпіада 46

X Всеукраїнська заочна математична олімпіада 59

ЗМІСТ

ПРО МАТЕМАТИКУ І МАТЕМАТИКІВ

До 80-річчя академіка НАН України В. С. Королюка 61

До 75-річчя з дня народження Анатолія Володимировича Скорохода 63

До 70-річчя з дня народження Ігора Миколайовича Коваленка 69

Н. Вірченко

Про красу математики 70

Алайн Джексон

Життя Олександра Гротендіка 75

НАШ КОНКУРС

Задачі 262–267 86

Розв'язання задач 226–231 88

КНИЖКОВІ ОБРІЇ

В. О. Тадеєв

Посібник, який варто перевидати 91

С. І. Доценко

Рецензія на книгу Р. П. Ушакова "Комбінаторні тотожності", Серія: Бібліотека журналу "Математика в школах України", "Основа", Харків, 2004 р. 99

Український математичний журнал для школярів

том 11 **У світі математики** випуск 4

2005

Дорогі читачі!

Наш журнал розрахований в першу чергу на школярів і викладачів математики. Проте ми сподіваємось, що і студенти математичних факультетів університетів та педагогічних інститутів, професіональні математики, любителі і шанувальники цієї древньої і вічно молодої науки в кожному числі журналу знайдуть для себе багато цікавого.

В розділі "*Горизонти математики*" ми публікуємо розповіді про новітні досягнення в математиці, про застосування математики в різних областях природознавства, техніки, соціальних наук. Особливу увагу ми будемо приділяти застосуванням математики до розв'язання проблем економіки та фінансової математики. Хотілось би, щоб в Україні з'явилось покоління молодих математиків, які вміють творчо застосовувати математичні методи до розв'язання складних проблем економіки.

Одним з основних завдань журналу редакційна колегія вважає розвиток творчих здібностей читачів, залучення їх до активної творчої роботи. В розділі "*Математичні повідомлення*" ми публікуємо нові результати наших читачів. В розділі "*Проблеми і гіпотези*" мова йде про нерозв'язані математичні проблеми, формулюються теми для самостійних досліджень.

В розділі "*Математичний гурток*" вміщуються короткі статті, кожна з яких може бути матеріалом одного чи двох занять математичного гуртка.

Запрошуємо наймолодших читачів нашого журналу до знайомства з матеріалами розділу "*Сторінки для наймолодших математиків*". Саме в юному віці розкриваються і розвиваються математичні здібності. Редакційна колегія завжди прагне до того, щоб матеріали цього розділу були цікавими і доступними.

Значний обсяг в нашому журналі займають задачі математичних олімпіад (як правило, ми подаємо такі задачі з повними розв'язаннями), задачі з конкурсних екзаменів. В розділі "*Сторінки абітурієнта*" ми вміщуємо короткі розповіді про окремі теми, пов'язані з тими задачами, які часто пропонуються на вступних екзаменах до вищих навчальних закладів.

Розділ "*Математичні ігри та розваги*" адресовано широким колам любителів математики і цього жанру. В ньому вміщуються статті про різні ігри, стратегії, в яких допускають математичний аналіз, інформації про чемпіонати з розв'язання головоломок. Для численних любителів шахів дуже цікавою є "*Шахова сторінка*". В її створенні беруть участь не лише вітчизняні, а й зарубіжні гросмейстери.

Запрошуємо всіх читачів (незалежно від віку, посад, наукових ступенів і звань) до розв'язання задач "*Нашого конкурсу*". В цьому розділі ми публікуємо, як правило, нові задачі. Розв'язання задач "*Нашого конкурсу*" ми публікуємо разом з прізвищами читачів, які правильно розв'язали ту чи іншу задачу.

В розділі "*Новини математичного життя*" ми оперативно подаємо інформацію про з'їзди, конгреси, наради з проблем математичної освіти, інші новини математичного життя. В розділі "*Книжкові обрії*" ми інформуємо наших читачів про нові книги.

Більшість матеріалів нашого журналу реферується в провідних реферативних журналах світу: "Zentrallblatt fur Mathematik", "Zentrallblatt fur Mathematische Didaktik", "Mathematical Reviews", "РЖ Математика".

Чекаємо від читачів зауважень, побажань відносно змісту журналу. Надсилайте нам статті, інформацію про олімпіади, конкурсні екзамени, новини математичного життя, нові задачі, нові книги для рецензування.

Редакційна колегія

Продовжується передплата на журнал на 2006 рік.
Передплата здійснюється в кожному відділенні Укрпошти.
Передплатний індекс журналу 74581.