КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

У СВІТІ МАТЕМАТИКИ

№1, 2024

У світі математики, випуск №1, 2024

Журнал «У світі математики» – єдине українське науково-популярне видання з математики, яке містить науково-популярні, наукові та методичні математичні статті. Покликаний відкривати математичні здібності, усебічно розвивати особистість читача, задовольняти спрагу до математичних знань, привертати увагу до математики як професії.

У журналі містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, та методики навчання математики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, студентів. Адресований у насамперед школярам, водночас буде цікавим студентам, учителям, методистам, викладач, аспірантам і всім, хто не байдужий до математики.

Друкується за рекомендацією вченої ради механіко-математичного факультету.

Редакційна колегія:

головний редактор:

Валентин Собчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

заступники головного редактора:

Юлія Мішура

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Вадим Радченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

члени редакційної колегії:

Orest Artemovych

Cracow University of Technology, Poland;

Sergey Dashkovskiy

University of Würzburg, Germany;

Nataliia Gorban,

Bauhaus University Weimar, Germany;

Ivane Kiguradze,

Tbilisi Mathematical Institute, Georgia;

Konrad Kulakovsky,

AGH University of Krakow, Poland;

Oleksandr Misiats,

Virginia Commonwealth University, USA;

Dariusz Sala

AGH University of Krakow, Poland;

Petro Feketa

Victoria University of Wellington, New Zealand;

Efim Zelmanov,

University of California, San Diego, USA;

Оксана Безущак

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Олена Бахчеджиоглу

Креативна Міжнародна Дитяча Школа, Україна

Інна Вишенська

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна;

Ярослав Віннишин
Київський природничо-науковий ліцей № 145, Україна;
Яніна Гончаренко
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Михайло Городній
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ярослав Жук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Казмерчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Король
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна;
Олександр Курченко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Лавренюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Оксана Литвин
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна;
Тетяна Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Україна;
Ольга Мартинюк
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
Олексій Нестеренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Дмитро Номіровський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Андрій Олійник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Михайло Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Парасюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олег Перегуда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Петравчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Працьовитий
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Богдан Рубльов
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Станжицький
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Катерина Терлецька
Національний центр "Мала академія наук України", Україна;

Григорій Торбін
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Андрій Чайковський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ольга Чашечникова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна;
Михайло Чемерис
Науковий ліцей №208 Дніпровського району м. Києва, Україна;
Ольга Швай
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна;
Ігор Шевчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Школьний
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Ростислав Ямненко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна.

Редакційний відділ:
Світлана Бабич

Відповідальний секретар:
Євгенія Кочубінська

Адреса редакційної колегії:
Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
проспект академіка Глушкова, 4-е, 03127, Україна
тел.: +38 (044) 259-01-35
e-mail: usm@knu.ua
сайт: https://usm.knu.ua
ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Засновник:
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію
KV No 22695-12595ПР від 24.03.2017

Ідентифікатор медіа / Номер ліцензії
R30-04577 від 25.04.2024
DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1

Безкоштовно

Зміст

Про математику і математиків

Грінченко В.Т., Маципура В.Т. *Християн Гюйгенс*…….. 6

Положий Т.М., Федоренко Ю.В. *Лист, який визначив долю наступних поколінь*… 11

Гладун С. *Математична поезія трагічної нескінченності*……... 17

Математичні олімпіади

Борисейко О.В., Перегуда О.В. *Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики*…….. 23

Мисак Д.П. *У світі лінгвістики*…….. 29

Математичний гурток

Вишенський В.А., Печериця О.А., *Ланцюги дільників: комбінаторний аспект*…… 38

Арський Н.О. *Арифметичні функції для ґаусових чисел*…… 63

Обрії математики

Пришляк О.О., Білун С.В. *Геометрія та топологія проєктивної площини*…… 72

УДК 373.31:51(091) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.1**

Віктор ГРІНЧЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID ID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID ID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ХРИСТИЯН ГЮЙГЕНС

Анотація. *У статті, дуже стисло, розповідається про життєвий шлях і наукові досягнення нідерландського вченого Християна Гюйгенса. Зазначено, що сьогодні, віддаючи данину його науковій діяльності, слід зробити такий висновок: видатні наукові праці Гюйгенса заслуговують на пам'ять про нього разом з іменами Галілея і Ньютона.*

Ключові слова: *маятник; телескоп; годинник; хвиля*

1. Вступ

Інтелектуальний рух у світогляді людства, що відбувався в Європі протягом 17-18 століть, часто називають науковою революцією, підкреслюючи цим принципові зміни у світогляді людей, які базувалися на результатах досліджень видатних вчених тих часів. Розуміючи важливість процесів формування нової науки, формування нового методу досліджень, що принципово відрізнявся від методології, сформованої більше 2000 років до цього древніми греками, один із найяскравіших представників нової науки Ісаак Ньютон відмічав визначний вплив своїх попередників, вказуючи на те, що в своїх дослідженнях спирався на "плечі гігантів". Сьогодні, аналізуючи епоху формування нової науки, можна доповнити класика: досягнення епохи зумовлені не лише талановитими попередниками. Не менше значення мало те, що в цей період сформувалася команда видатних сучасників і були розвинені нові форми співпраці науковців різних країн, які суттєво стимулювали інтенсивність наукових досліджень.

Однією із чільних особистостей в когорті сучасників Ньютона був видатний вчений із Нідерландів Християн Гюйгенс (1629-1695). Ілюстрацією, уже сьогоденних оцінок вкладу Гюйгенса у становлення нової науки, є цікава інформація, започаткована енциклопедією "Британіка", перше видання якої мало 54 томи. Із усієї когорти вчених, що визначали зміст наукової революції, в енциклопедії представлені лише Ньютон і Гюйгенс – у 34-ому томі представлено Принципи та Оптику Ньютона і Трактат про світло Гюйгенса (Encyclopedia Britannica, 1952).

2. Дитинство і роки навчання

Гюйгенс народився в аристократичній голландській родині. Християн, другий син, у дитинстві навчався мовам, малюванню та музиці. У тринадцять років він почав вивчати механіку, яка разом з математикою незабаром стала його головним інтересом. Але перш ніж Гюйгенс зміг присвятити всю свою увагу цим наукам, його відправили до

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Лейдена вивчати право у Вінніуса. У 1646 році Гюйгенс переїхав до Бреди, де його батько керував новим університетом, і через два роки отримав ступінь з права. В обох містах він продовжував займатися математикою, зокрема, з голландським математиком Схаутеном, який включив деякі нотатки Гюйгенса до свого видання Геометрії Декарта.

Перші самостійні роботи Гюйгенса, як ті, що з'явилися, так і ті, що не з'явилися у пресі, були написані під впливом Архімеда. Батько, який теж любив Архімеда, називав Християна "своїм Архімедом". У дусі Архімеда двадцятирічний Християн написав книгу про теорію плавання тіл.

Пізніше, в 1654 році, Гюйгенс написав ще один твір у дусі Архімеда, а саме: "Про квадратуру круга". Цей твір відкриває в історії квадратури круга абсолютно новий період, представляючи певний прогрес у порівнянні з твором Архімеда "Вимірювання кола". Справді, свою величину для π, а саме:

$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71},$$

Архімед знайшов за допомогою обчислення периметра 96-кутника, тоді як методом Гюйгенса його можна було отримати з розгляду тільки 12-кутників та 6-кутників.

У 17 років Гюйгенс планував провести експеримент з метою переконатися, що горизонтально кинуте тіло буде рухатися по параболі. Такий намір був ознакою того призначення в науці, яке він мав реалізувати. За висловом Лагранжа долею Гюйгенсу було накреслено "покращувати і розвивати найважливіші відкриття Галілея". На початку реалізації задумки проявилася важлива риса характеру Гюйгенса як науковця. Дізнавшись з книги Галілея про результати дослідження такого руху тіла, він відклав експеримент з коментарем "не хочу писати "Іліаду" після Гомера".

У цей же час французькому математику Мерсену, який протягом першої половини XVII століття був одним із координаторів наукового життя в Європі, були представлені математичні твори Гюйгенса. Він високо оцінив результати, назвавши молодого автора Голландським Архімедом, і організував йому широкі можливості листування з представниками наукової спільноти. Гюйгенс енергійно використовує характерний для свого часу спосіб спілкування. У створеному уже в наш час каталозі його листів представлено їх майже три тисячі.

3. Галілей і Гюйгенс

Наукова спорідненість Гюйгенса і Галілея вражає. Після аналізу робіт Гюйгенса складається враження, що це сам Галілей через кілька десятиліть вдивляється в нічне небо, досліджуючи рух небесних тіл. Покращивши технологію шліфування лінз, Гюйгенс уже мав більш потужний телескоп ніж у Галілея, і зміг виконати нові спостереження, відкривши структуру кілець Сатурна, наявність у нього супутника і наявність туманності в сузір'ї Оріона.

Значну увагу приділяв Гюйгенс дослідженню руху маятника, для якого Галілеєм було встановлено відсутність залежності частоти коливань від амплітуди (властивість ізохронізму). Гюйгенс вказав, що це справедливо лише для малих амплітуд коливань і обчислив поправку в залежності частоти від амплітуди коливань.

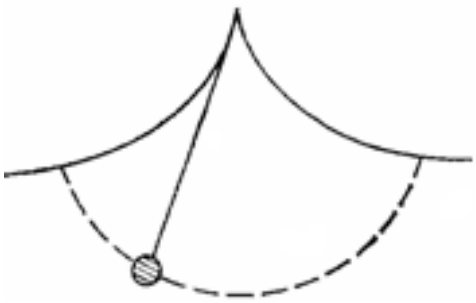


Рис. 1. Конструкція маятника зі змінною довжиною

Для одержання ізохронних коливань Гюйгенс запропонував спеціальну конструкцію маятника зі змінною довжиною. На рисунку 1 показано ідею конструювання такого маятника, у такому маятнику обмежуючі криві є частинами циклоїди.

4. Маятниковий годинник

Спираючись на своє глибоке розуміння процесу коливань маятника, Гюйгенс звертається до проблеми створення маятникового годинника, яка цікавила Галілея в останні роки його життя. Галілею не вдалося створити такий годинник. Він заповідав своєму синові продовжити роботу і довести її до завершення. Однак ні син, ні залучені помічники не змогли вирішити цю проблему. Гюйгенс присвятив цій проблемі майже сорок років свого життя і створив такий годинник. Коментатори діяльності Гюйгенса відмічають цей факт як перший в історії сучасної науки випадок доведення дослідницької роботи до практичного впровадження.

Наступні два рисунки дають уявлення про годинник Гюйгенса у тому вигляді, який він мав 1673 року, коли вийшов його основний твір «Годинник з маятником». На рисунку 2 зліва показано механізм годинника збоку, а справа – загальний вигляд годинника спереду.

Цікаві думки стосовно важливості для людства робіт зі створення годинника належить німецькому історику Освальду Шпенглеру, який писав: "Вдень і вночі незліченні дзвіниці Західної Європи б'ють годину, страшний символ плину часу, найсильніший вираз історичного сприйняття часу. Ви не знайдете нічого подібного в містах стародавніх цивілізацій, де люди не були чутливими до плину часу" (Gindikin, 2000).

Спадкоємці Галілея намагалися претендувати на пріоритет у створенні маятникового годинника. В дискусії з ними Гюйгенс привів цікавий аргумент. Він закидав спадкоємцям звинувачення у тому, що вони своєю невдачею при створенні годинника ганьблять ім'я видатного попередника. По суті Гюйгенс вважав, що його робота є достойним пам'ятником великому вчителю.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

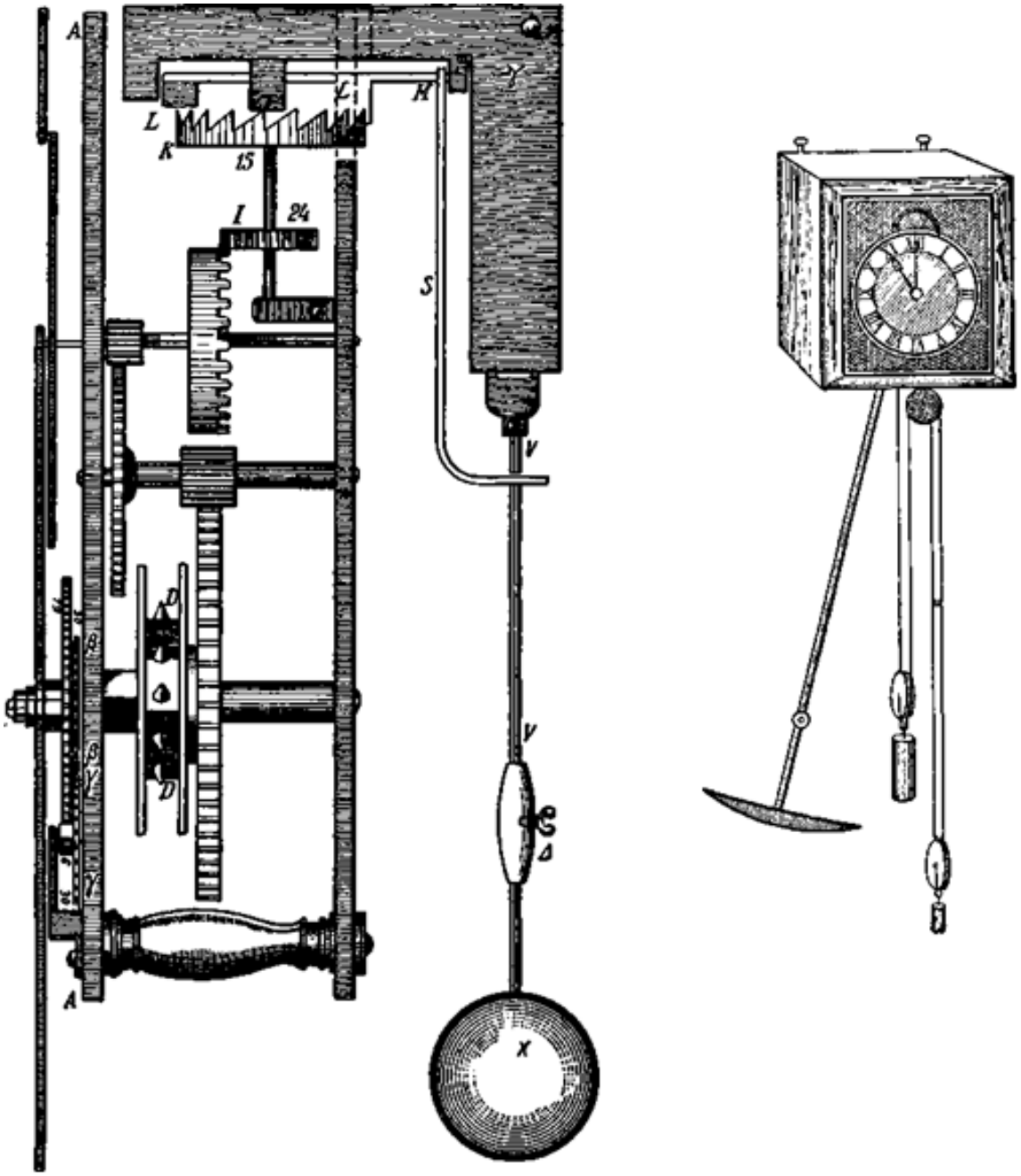


Рис. 2. Годинник з маятником

5. Міжнародне визнання

Наукові досягнення Гюйгенса забезпечили йому широке міжнародне визнання. У 1663 році він був обраний членом Королівської академії Англії (Royal Society). В 1666 році обраний членом Паризької академії і навіть певний час був її президентом.

Немає жодних сумнівів, що Християн Гюйгенс був одним з найбільших наукових геніїв усіх часів. Людина, яка

- перетворила телескоп з іграшки на потужний інструмент дослідження і відкрила кільце Сатурна та супутник Титан;

- звернула увагу на туманність Оріона;
- прийшла до правильних уявлень про вплив відцентрової сили на форму Землі;
- заснувала динаміку систем і прояснила весь предмет складного маятника і таутохронної кривої;
- вирішила проблеми, пов'язані із зіткненням пружних тіл;
- по праву вважається основоположником хвильової теорії світла.

Така людина заслуговує на пам'ять разом з іменами Галілея і Ньютона, і лише історичні випадковості поки що завадили цьому (Bell, 1947).

Список використаних джерел

Great Books of the Western World, vol.34, Newton, Huygens, Encyclopedia Britannica (1952). 619 p.

Gindikin G. (2000). Histories de mathematicians et de physicians, Cassini, Paris. 246 p.

Bell A. E. (1947). Christian Huygens and development science in the seventeenth century, Edvard Arnold, London. 220 p.

Отримано редакцією журналу: 01.05.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Victor GRINCHENKO, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

Volodymyr MATSYPURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

CHRISTIAN HUYGENS

Abstract. *The article briefly tells about the life paths and scientific achievements of the Dutch scientist Christiaan Huygens. It is noted that today, in recognition of his scientific activity, the following summary will be made: Huygens's famous scientific works deserve to be remembered along with the names of Galileo and Newton.*

Keywords: *pendulum; telescope; clock; wave*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Про математику і математиків

УДК 373.31:51(091) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.2**

Тетяна ПОЛОЖИЙ, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.,
ORCID ID: 0009-0002-1841-9312
e-mail: juliamfed@gmail.com

Юлія ФЕДОРЕНКО, аспірант
ORCID ID: 0000-0001-5791-0943
e-mail: juliamfed@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЛИСТ, ЯКИЙ ВИЗНАЧИВ ДОЛЮ НАСТУПНИХ ПОКОЛІНЬ

Анотація. *Стаття присвячена 110 літньому ювілею з дня народження Георгія Миколайовича Положого. Авторами статті є донька та онука великого математика. В роботі викладено короткий життєвий шлях великого математика. Публікуються матеріали сімейного архіву на яскравому прикладі переписки, яка змінила долю усієї родини та мала водночас визначальне значення на розвиток київського математичної школи.*

Ключові слова: *(p,q)-аналітичні функції; метод сумарних зображень.*

1. Вступ

Ми хочемо розповісти про історію нашої сім'ї на долю якої вплинув вчитель нашого батька і діда.

Та почнемо з початку.

Наш батько і дід Георгій Миколайович Положий народився в селищі Новопавлівка Читинської області (колишній 37 роз'їзд Забайкальської залізниці) у родині телеграфіста. У 1924 році родина Георгія Миколайовича переїхала в Астраханську область, селище Нижній Баскунчак.

В 16 років Положий закінчив 8-річну школу в Нижньому Баскунчаку і для продовження навчання був змушений залишити рідних і переїхати до селища Верхній Баскунчак. Так з 1930 року почалося його доросле життя. В 1931 році Георгій Миколайович закінчив Верхньо-Баскунчацьку середню школу і отримав Посвідчення про завершення школи з відміткою: ''За час навчання в школі виявив особливу схильність до фізико-математичних наук''.

2. Освіта

Г.М. Положий був сином службовця, а тому не міг продовжувати навчання в інституті. Спершу він мав отримати робочий стаж, а тому пішов мастільником на електростанцію Баскунчацького заводу по видобутку і обробки солі ''Бассоль''. Отримавши необхідний стаж в лютому 1933р. вступив на другий курс фізико-математичного факультету Саратовського державного університету.

В університеті його зустріли прекрасні викладачі, серед яких був професор Георгій Петрович Боєв, який вплинув на розвиток Георгія Миколайовича як людини, викладача і вченого. Ще будучи студентом Г.М. Положий виявив здібності до науково-дослідної роботи в області математичного аналізу. В грудні 1937 р. закінчив з відзнакою університет за спеціальністю ''математика'' і вступив на роботу асистентом в Саратовський автодорожній інститут на кафедру математики, де пропрацював до

грудня 1938 р. За цей час його роботи привернули увагу таких видатних вчених як академіки М.В. Келдиш і П.Я. Кочина.

В 1938р. почав працювати в Саратовському державному університеті на кафедрі математичного аналізу асистентом, активно продовжуючи наукову діяльність.

3. Війна

В 24 червня 1941 року пішов добровольцем на фронт… 22 лютого 1942р. молодший лейтенант Г.М. Положий – командир стрілецького взводу – був важко поранений в лівий колінний суглоб. І почалася найважча для нього війна за життя. Дві доби Георгій Миколайович пролежав в снігу, поки його не знайшли санітари. Два роки йому по шматочкам відрізали ногу без анестезії, бо гангрена не відступала. Згадуючи ці дні він казав: «Мені було відведене друге життя і тому мені треба відпрацювати і своє, і те чуже життя, що було дароване мені». На початку 1944 року Георгій Миколайович був визнаний непридатним до військової служби і відправлений додому в Нижній Баскунчак для відновлення здоров'я.



Положій Г.М. (1914-1968)

В цей час перед ним постає питання: як повернутися до трудової діяльності? Виникли сумніви: чи повертатися до науково-викладацької діяльності, чи змінити своє життя? З цими питаннями він звернувся до свого вчителя і завідуючого кафедрою математичного аналізу професора Боєва і отримав той самий ЛИСТ, в якому за суворістю вчителя ховалися величезна повага та душевне тепло.

4. Лист Георгія Боєва

Саратов 2 лютого 1944р.

Шановний Георгію Миколайовичу!

1. Перш за все я хочу виказати Вам свою повну повагу, як патріоту, який з перших днів війни пожертвував своїм благополуччям і життям задля захисту нашої Вітчизни. Такими людьми ми повинні пишатися. Я пишу Вам це щиро.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. Але отримавши як інвалід Вітчизняної війни право на повагу і відпочинок, Ви, навряд чи зможете стояти осторонь від трудового життя, адже тільки повноцінна участь в праці і суспільному житті дасть Вам змогу отримати повне душевне задоволення. Ось чому Ваш намір повернутися до роботи цілком природній і законний. Цілком зрозуміло і те, що пізнав життя і людей, Вас приваблює робота з людьми, а також і така робота, яка дає реальну, реальну продукцію. В нашій державі всяка робота почесна і може слугувати джерелом творчості і прикладання найкращих сил людини. Я би не здивувався, якщо б дізнався, що Ви знайшли задоволення в абсолютно новій для Вас області: на заводі, на будівництві, в прокуратурі і т. д.. Проте я вважаю, що найбільш вірним було б вибрати таку роботу, яка базується на раніше набутих навичках, на спеціальній освіті. Іншими словами, Вам доцільно повернитися до ВУЗу, до науково-дослідної роботи, але, можливо, область вибрати більш конкретну і більш багату застосунками до техніки. До цього у Вас є данні і є смак. Отже, будемо думати, що Ви хочете повернутися до Саратовського університету.

3. В якості кого Ви можете повернутися? Є дві можливості: асистентом з виконуючим обов'язки помічника декана або аспірант. В першому випадку Ви отримаєте повне навантаження учбових годин – більш практичних. Ставка 750 руб. (якщо стаж не більше 5 років). Право на робоче забезпечення Ви, очевидно, зберігаєте. Ставка помічника декана дасть Вам ще 400 руб. їжею (обідом) Ви можете бути забезпечені в їдальні наукових робітників з вирізом із картки тих продуктів, які отримають по картці службовці. В другому випадку (у випадку зачислення в аспірантуру) Ви будете отримувати 800 руб. і матимете право на півставки по сумісництву за учбові (але не адміністративні) доручення.

Яку з цих двох пропозицій Вам порекомендувати вибрати? Треба виходити з того що Вам пора оформлювати вчений ступінь, тобто скласти два іспити і написати дисертацію. Будучи аспірантом, Ви зможете це зробити за півтора-два роки. Строк перебування в аспірантурі 3 роки. Але, якщо Ви закінчите її раніше, ніхто заперечувати не буде. Будучи аспірантом, Ви будете матимете набагато більше вільного часу. Вирішуйте, який із двох варіантів Вам більше подобається.

4. Квартирні умови можуть бути представлені наступні. В квартирі А.І. Барабанова є одна вільна кімната, її Ви можете отримати у тимчасове користування до повернення Барабанова. Це буде після закінчення війни. Ясно, що до цього часу намітяться ще якісь квартирні перспективи. Зокрема, з від'їздом ленінградців звільниться наш гуртожиток на Вольській вулиці, а там, звичайно, Вам знайдеться кімната і притому з централізованим опаленням. Зараз квартири з централізованим опаленням немає, а ті хто має централізоване опалення, наприклад Чудаков, опалюються залізними печурками. Кімната у Барабанова має ще ту перевагу, що поруч знаходиться студентський гуртожиток, отже можна буде два рази в місяць мобілізувати наших студентів приносити Вам дрова. Важко, звичайно, одразу серед зими запастися дровами, але наближається весна і не так багато дров знадобиться. Окріп зранку досі є. На хліб прикріпитися до столової.

Труднощів з першочерговим облаштуванням свого господарства звичайно не уникнути.

Взяти хоча б покупку ліжка, стола, шафи, посуду. Але цього не уникнути, всі з цього починають.

5. Є ще одна річ, яка слугує немалою економічною підмогою: індивідуальні городи. Для сімей червоноармійців дирекція в минулому році зорала і посіяла. Думаю, що для самого червоноармійця городній шматок теж буде зораний. А посадити і полоти Ви зможете самі. І нічого, крім задоволення не отримаєте.

6. Хотілося ще б поговорити про наукову область, в якій я б Вам рекомендував працювати в майбутньому. Я сам тепер переключився на теорію ймовірності, як область багату прикладними і ту, яку розвивають найкращі вчені. Але через брак місць залишимо цю тему до особистого спілкування або до наступного листа.

Отже, обміркуйте всі мої пропозиції, надішліть відповідь: коли думаєте переїжджати – зараз, або влітку. Якщо зараз, то одночасно надсилайте і заяву на зарахування Вас на посаду асистента або про бажання тримати вступний іспит в аспірантуру по математичному аналізу. На основі цієї заяви ректорат надішле Вам офіційний виклик в Саратов.

Що стосується вступних іспитів в аспірантури, то вони складаються з предмету по спеціальності, іноземної мови і основ марксизму-ленінизму, до яких Ви зможете підготуватися після приїзду.

Надсилаю Вам найкращі побажання і залишаюсь Ваш Боєв.

Маленький фронтовий трикутник, а скільки в нього вкладено – все продумав вчитель, про все попіклувався і при цьому ніякої показної жалості до учня-інваліда, спокійний діловий тон, а разом із цим чіткий наказ повернутися до роботи.

Цей лист Георгій Миколайович зберігав все життя, і він досі зберігається в архіві нашої родини. Г.М. Положий повернувся до університету в якості асистента. В цьому університеті він познайомився з Тамарою Маркіянівною Бойцовою, яка в 1946 році стала його дружиною, а згодом нашою мамою і бабусею. А 1949 році вони переїхали до Києва, де Положий почав працював в Київському державному університеті (кафедра математичної фізики, 2024).

Завдяки своєму вчителю Георгій Миколайович Положий став великим вченим, вчителем, чоловіком і батьком.

5. Наука

Як вчений Г.М. Положий – створив два нових напрямки в розвитку сучасної математики.

Перший напрямок – теорія і застосування (p,q)-аналітичних функцій комплексної змінної, які є істотним узагальненням аналітичних функцій, Г.М. Положий ввів ще в 1946 р.

Цей напрямок виявився зв'язаним з багатьма прикладними науками: осесиметричною теорією пружності, газовою динамікою, з безмоментною теорією оболонок та ін. Показовим, зокрема, є те, що низку класичних задач теорії осесиметричного потенціалу, які раніше не розв'язувалися у квадратурах, як показав Г.М. Положий, за допомогою p-аналітичних функцій можуть бути розв'язані в

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

квадратурах. Як приклад, можна навести задачу про осесиметричний потенціал сферичного (а не плоского) диска. Останню обставину варто вважати значною, оскільки мова йде про такі задачі, що були предметом уваги багатьох математиків протягом тривалого часу.

Другий напрямок – метод сумарних зображень чисельного розв'язку задач математичної фізики. Основи цього напрямку він заклав у своїх працях 1956 – 1960 рр. Метод Г.М. Положого можна розглядати як дискретний аналог класичних методів математичної фізики – теорії потенціалу, інтегральних перетворень і методу Фур'є відокремлення змінних. Отримані результати значно розширили клас дискретних аналогів багатовимірних задач математичної фізики, що допускають у дискретній постановці розв'язання в явному вигляді.

Також Георгій Миколайович приділяв особливу увагу створенню Обчислювального центру в університеті та практичній реалізації своїх теоретичних розробок.

Г.М. Положий є автором понад 100 наукових праць, серед яких 10 монографій та навчальних посібників, виданих у тому числі українською, англійською, німецькою та польською мовами. Георгій Миколайович написав перший підручник українською мовою з математичної фізики "Рівняння математичної фізики"(1959). Неодноразово видавалися навчальні посібники для університетів: "Математичний практикум" (1960) і "Рівняння математичної фізики" (1964). Монографії: "Числений розв’язок двовимірних і тривимірних крайових задач математичної фізики і функції дискретного аргумента" (1962) (ця монографія зі значними доповненнями перекладена англійською і німецькою мовами), "Узагальнення теорії аналітичних функцій комплексної змінної p – аналітичні і (p,q) –аналітичні функції і деякі їх застосування" (1965 р.) і "Метод сумарних зображень чисельного розв'язання задач математичної фізики і функції дискретного аргументу" (1966 р.)

Вже після його смерті в 1973 р. у видавництві Київського Державного університету вийшла монографія Г.М. Положого "Теорія і застосування p-аналітичних і (p,q)-аналитичних функцій. Узагальнення теорії аналітичних функцій комплексної змінної".

Наукова діяльність Георгія Миколайовича дістала широке міжнародне визнання. Він неодноразово отримував запрошення в різноманітні закордонні університети і на Міжнародні математичні конгреси, але, на жаль, через хворобу не зміг взяти в них участі.

Г.М. Положий – фундатор відомої наукової школи. Під його керівництвом захистили кандидатські, а згодом і докторські дисертації І.І. Ляшко, Б.М. Бублік, А.А. Глущенко, І.М. Ляшенко, О.О. Капшивий, В.Л. Макаров . Серед його учнів 17 кандидатів фізико-математичних наук. Троє з його учнів стали членами Академії наук України – академік І.І. Ляшко, академік В.Л. Макаров, член-кореспондент АН УРСР Б.М. Бублік. Його закордонні аспіранти стали відомими вченими у своїх країнах.

Військові і наукові заслуги Г.М. Положого були відзначені медалями "За перемогу над Німеччиною у Великій Вітчизняній війні 1941-1945рр." (1947 р.) і "За трудову доблесть "(1953 р.), орденом "Знак Пошани" (1961 р.), Почесними Грамотами Президії Верховної Ради Української РСР (1959 і 1964 рр.).

6. Родина

Як батько за своє коротке життя (вчений пішов із життя 26 вересня 1968 року) він зміг вкласти в своїх дітей основні життєві цінності і привити любов до математики.

Його дружина – Тамара Маркіянівна Положая після смерті чоловіка працювала на механіко-математичному факультеті Київського національного факультету імені Тараса Шевченка.

Його донька – Тетяна Георгіївна Положий пов'язала своє життя з математикою, працювала в Інституті математики НАН України, стала кандидатом фізико-математичних наук.

Його онука – Юлія Володимирівна Федоренко, з дитинства перечитуючи цей лист захопилася викладанням, а також можливістю передати цінності родини і минулих поколінь вчителів, які були в нашому житті. Зараз викладає на механіко-математичному факультеті в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Волею долю так склалося, що у всіх нас чоловіки є вихованцями механіко-математичного факультету.

Його праонука – Марія Сергіївна Мясіна (6 років) вважає, що найлегше це математика і залюбки приходить на факультет.

Ось так один лист і любов вчителя визначила долю як мінімум трьох поколінь, а далі буде…

Список використаних джерел

Кафедра математичної фізики механіко-математичного факультету. (2024). *Історична довідка*. https://mp.mechmat.knu.ua/cathedra/history

Отримано редакцією журналу: 12.04.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Tatyana POLOZHY, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.,
ORCID ID: 0009-0002-1841-9312
e-mail: juliamfed@gmail.com

Juliia FEDORENKO, Post Graduate Student
ORCID ID: 0000-0001-5791-0943
e-mail: juliamfed@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

A LETTER THAT DETERMINED THE FATE OF FOLLOWING GENERATIONS INFINITY

Abstract. *The article is devoted to the 110 th anniversary of the birth of George Mykolayovych Polozhy. The authors of the article are the daughter and granddaughter of the great mathematician. The work describes the short life path of the great mathematician. The materials of the family archive are published on the vivid example of the correspondence that changed the fate of the entire family and at the same time was of decisive importance for the development of the Kyiv mathematics school.*

Keywords: *(p,q)-analytic functions; method of total images*.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Про математику і математиків

УДК 929:51(540) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.3**

Сергій ГЛАДУН, магістр (прикл. математика),
ORCID ID: 0000-0002-5896-676X
e-mail: gladunsergio@ukr.net

МАТЕМАТИЧНА ПОЕЗІЯ ТРАГІЧНОЇ НЕСКІНЧЕННОСТІ

Анотація. *У статті дуже стисло розповідається про життєвий шлях і наукові досягнення індійського математика Срінівази Рамануджана Айєнгара, який зробив значний внесок у теорію чисел, математичний аналіз та інші галузі математики. Не маючи формальної освіти в галузі математики, він сам вивчав цю дисципліну, спираючись на обмежені ресурси та власну інтуїцію. Він сформулював безліч теорем, зробив припущення, які згодом були доведені іншими математиками, та розробив нові методи дослідження. Його роботи мали значний вплив на розвиток математики XX століття.*

Ключові слова: *ланцюговий дріб; тета-функція; гамма-функція Ейлера; дзета-функція Рімана.*

1. Вступ

Трохи більше 100 років минуло з дня смерті видатного індійського математика, представника формальних геніїв, Срінівази Аєнґара Рамануджана, який став своєрідним символом класичної математики. В математиці, як і в інших науках, є свої титани, революціонери, філософи. До титанів математики відносяться Л. Ейлер, К. Гаус, І. Ньютон, Р. Декарт. Революціонерами-математиками були М. Лобачевський, Е. Галуа, К. Гьодель, Г. Кантор. До математиків-філософів належать Б. Больцано, Г. Лейбніц, Б. Паскаль. Рамануджан належить до математиків-монахів, оскільки був позбавлений більшості математичних скарбниць людства і вимушений був шукати ці скарбниці самостійно, а потім іти до нових істин, яких людство ще не знало, своїм великим шляхом. Він жив у світі формул для рядів, інтегралів, нескінченних ланцюгових дробів та радикалів, що повторюються нескінченну кількість разів. Кожна з цих формул схожа на витвір мистецтва. Переважна більшість формул Рамануджана так чи інакше пов'язана з теорією тета-функцій, яка на сьогоднішній день представляє собою красивий і величний храм математичної архітектури. Доля Рамануджана, як і багатьох літературних поетів, була трагічна. Прожив він неповних 33 роки і помер від тяжкої хвороби у Четпуті неподалік від Мадрасу 26 квітня 1920 року. Досить повний варіант біографії див. у (Kanigel,1991).

2. Співпраця Рамануджана з Харді

Зараз у світі дуже багато прихильників і фанатів творчості Рамануджана. Скоріше за все це пов'язано із загадковою долею цього великого східного математика. У житті він був дуже скромною, віруючою, трохи дивною людиною, проте з ним інколи можна було поговорити і про політику. Рамануджан став всесвітньо відомим не тільки завдяки своїм грандіозним формулам, а й завдяки підтримці дуже поважного англійського математика Годфрі Гарольда Харді, якому він писав листи із далекої Індії, оскільки тоді на батьківщині його мало хто міг зрозуміти. Професор Харді відразу побачив, що має справу з унікальним талантом, який треба рятувати, і запросив

приїхати до Англії для співпраці. У 1914 році, спираючись на одну з формул Раманудяана, професор Харді довів, що дзета-функція Рімана має нескінченну кількість нулів на критичній прямій. Ще одним видатним результатом співпраці цих вчених була асимптотична формула для функції числа розбиттів. Пізніше Радемахер отримав точну формулу, вдосконаливши метод Харді-Раманудяана.



Срініваса Аєнґар Раманудяан (1887-1920)

Асимптотична формула Харді-Раманудяана записується так:

$$p(n) = \frac{e^{K\lambda_n}}{4\sqrt{3}\lambda_n^2} + O\left(\frac{e^{K\lambda_n}}{\lambda_n^3}\right), \tag{1}$$

де $K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$, $n \geq 1$, а $p(n)$ є числом представлень n у вигляді суми натуральних доданків.

Одна із самих яскравих формул Раманудяана, яка містить функцію числа розбиттів (Hardy, 2002), має вигляд:

$$p(4) + p(9)q + p(14)q^2 + p(19)q^3 + \cdots = \tag{2}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$= 5\frac{\{(1-q^5)(1-q^{10})(1-q^{15})(1-q^{20})\cdots\}^5}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots\}^6},$$

де $|q| < 1$.

Раманудж ан ніколи не публікував повне доведення цього шедевру, який містить нескінченний добуток Ейлера. Але можна відтворити це доведення за опублікованою ним елементарною схемою. Більшість міркувань Раманудж ана були елементарними, але нетривіальними, а інколи дуже складними. Англійський професор Ватсон систематично вивчав записні книжки Раманудж ана із формулами і відновлював доведення, яких Раманудж ан не залишив.

3. Формули Роджерса-Раманудж ана

Завдяки Раманудж ану став знаменитим англійський математик Роджерс – надзвичайно талановитий, але маловідомий вчений. Формули Роджерса-Раманудж ана відносяться до комбінаторного аналізу й представлять собою велике математичне відкриття, хоча їх доведення займає дві сторінки. Раманудж ан прийшов до цих формул незалежно від Роджерса. Спочатку у нього не було повного доведення, але пізніше він знайшов дуже красивий варіант міркувань. Ці формули наведені у (Hardy, 2002), а доведення Раманудж ана можна знайти у (Hardy, Seshu, Wilson, 1927).

Математичні шедеври Раманудж ан почав отримувати ще в юності. Наведемо, наприклад, наступні формули того періоду творчості:

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8-\cdots}}}} = 1 + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right),$$

$$\sqrt[3]{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}.$$

У першій з цих трьох формул знаки чергуються групами по три $(-,+,-)$. Очевидно, що здогадатись про існування подібних елементарних формул міг тільки математик самого високого рангу.

Коли, перебуваючи в Англії, Раманудж ан тяжко захворів, то навіть лікарі не змогли заборонити йому напружено працювати над новим класом тета-функцій.

Як і теорію модулярних рівнянь високих степенів, Рамануджан дуже добре розумів формальний бік теорії нескінченних ланцюгових дробів. Приведемо цікаву формулу, яка зв'язує дві величини:

$$u=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^5}{1+\cfrac{x^{10}}{1+\cfrac{x^{15}}{1+\cdots}}}}, \qquad v=\cfrac{x^{\frac{1}{5}}}{1+\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{1+\cfrac{x^3}{1+\cdots}}}}, \qquad |x|<1.$$

Це елементарне алгебраїчне співвідношення має вигляд:

$$v^5=u\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}. \tag{3}$$

Одного погляду достатньо, щоб зрозуміти глибину і складність доведення. Ще одна не менш цікава формула, яка пов'язана із цією темою, записується так:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\cdots}}}}=\mu e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}, \tag{4}$$

де

$$\mu=\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

В лівій частині формули (4) знаходиться так званий ланцюговий дріб Роджерса Рамануджана. Формули (3) та (4) доводяться за допомогою теорії тета-функцій.

4. Формули Рамануджана, пов'язані з аналітичною теорією чисел

На думку автора цієї статті, часи формул не пройшли, і ніколи не пройдуть, хоча зараз іде ера обчислювальної техніки та нових інформаційних технологій, тому що математика при цьому ще більше споріднюється з мистецтвом. Ми бачимо, що поділ між наукою та мистецтвом умовний, і це підтверджує творчість Рамануджана. Навіть шахи, які придумали теж у Індії, є одночасно і наукою, і мистецтвом, а вже потім

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

спортом. Індійського математика Рамануджана можна порівняти ще із геніальним шаховим композитором, бо в нього також були дуже великі комбінаторні здібності і почуття краси математичної думки.

Зауважимо, що всього за декілька років Рамануджан фактично самостійно побудував базу для аналітичної теорії чисел, записавши асимптотичні формули для багатьох теоретико-числових функцій. Наведемо приклад однієї такої формули. Нехай $R(n)$ представляє кількість чисел $\leq n$ вигляду $2^k 3^l$, де $k, l \in Z_0^+$. Тоді

$$R(n) \sim \frac{\lg(2n)\,\lg(3n)}{2\,\lg(2)\,\lg(3)}, \qquad n \to \infty.$$

Очевидно, що в даному випадку все не так просто, ніж коли розглядати числа вигляду 2^k або 3^k. Маємо наступні точні значення функції $R(n)$: $R(10^3) = 40$, $R(10^{50}) = 8\,839$, $R(10^{100}) = 35\,084$, $R(10^{150}) = 78\,734$. Формула Рамануджана дає відповідно наступні наближені значення: 39.96, $8\,838.996$, $35\,083.59$, $78\,734.29$.

Наостанок привернемо увагу читача до дивовижної формули, яка включає теоретико числову функцію Мьобіуса, гамма-функцію Ейлера та дзета-функцію Рімана (Titchmarsh, 1986):

$$\sqrt{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-\left(\frac{a}{n}\right)^2} - \sqrt{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-\left(\frac{b}{n}\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{b}}\sum_{n=1}^{\infty}b^{\rho}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2}\right)}{\zeta'(\rho)}, \qquad (5)$$

де $a, b > 0$ і $ab = \pi$. Зауважимо, що, можливо, ряд у правій частині по нетривіальним нулям дзета-функції збігається в звичайному сенсі, але для доведення цього недостатньо навіть гіпотези Рімана. Формулу (5) можна довести за допомогою теореми Коші про лишки.

Висновки

За свої математичні здобутки Рамануджан отримав звання професора Кембриджського університету та був обраний до англійської академії наук. З формулами Рамануджана пов'язані й порівняно нові напрямки математики (теорія нескінченновимірних алгебр Лі) та навіть фізики (статистична механіка та теорія струн). Для читачів, які бажають вивчати творчість Рамануджана, автор рекомендує багатотомні монографії (Berndt, 1985, 1998), (Andrews, Berndt, 2005, 2013) написані на основі манускриптів великого індійського математика.

Список використаних джерел

Kanigel R.(1991) *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan.* Simon and Schuster.

Hardy G. H. (2002). *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*. Chelsea Pub Co.

Hardy G. H., Seshu Aiyar P. V. & Wilson B. M. (1927). *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge.

Titchmarsh E. C. (1986). *THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION*. Clarendon Press Oxford.

Berndt B. C. (1985, 1998), *Ramanujan Notebooks*, New York.

Andrews G. E., Berndt B. C. (2005-2013). *Ramanujan's Lost Notebooks*, New York.

Отримано редакцією журналу: 28.03.2022
Схвалено до друку: 24.06.2024

Sergiy GLADUN, Master's (App. Mathematics),
ORCID ID: 0000-0002-5896-676X
e-mail: gladunsergio@ukr.net

MATHEMATICAL POETRY OF TRAGIC INFINITY

Abstract. *The article, very briefly, tells about the life path and scientific achievements of the Indian mathematician Srinivasa Ramanujan Iyengar, who made a significant contribution to number theory, mathematical analysis and other areas of mathematics. With no formal training in mathematics, he taught himself the discipline, relying on limited resources and his own intuition. He formulated many theorems, made assumptions that were later proved by other mathematicians, and developed new research methods. His works had a significant impact on the development of mathematics in the 20th century.*

Keywords: *continued fraction; theta function; Gamma function; Riemann zeta function*.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні олімпіади

УДК [378.4.091.33:005.332.4(477.411)КНУ]:51 DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.4

Олександр БОРИСЕЙКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА З МАТЕМАТИКИ

Анотація. *Математична олімпіада – це інтелектуальне змагання, яке дає можливість талановитим учням продемонструвати свої знання, логічне мислення та вміння вирішувати складні математичні задачі. Олімпіади стимулюють поглиблене вивчення математики, розширюють знання та удосконалюються навички учнів. В роботі представлено розв'язки задач Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 2024 року.*

Ключові слова: *математична олімпіада; рівняння; нерівність; розв'язок; трикутник*.

1. Вступ

Всеукраїнська олімпіада з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2024 році, як зазвичай, викликала неабияку зацікавленість серед школярів-випускників, майбутніх абітурієнтів. Багато хто зі школярів розглядав олімпіаду для перевірки своїх знань та підготовки до національного мультимедійного тесту, адже завдяки олімпіадам стимулюється поглиблене вивчення математики, розширюються знання та удосконалюються навички учнів.

Математична освіта у загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями алгоритмів розв'язування стандартних задач. Але часто доводиться мати справу із задачами, для розв'язування яких традиційних способів буває недостатньо. Як правило, завдання такого типу пропонуються на різноманітних олімпіадах. Часто розв'язання олімпіадної задачі ґрунтується на використанні однієї оригінальної ідеї. Однак в більшості випадків одні і ті ж підходи реалізуються для розв'язування багатьох задач. Тільки, на відміну від стандартного алгоритму, треба ще здогадатися, що саме цей, а не інший метод, необхідно використати.

2. Огляд літератури

В якості рекомендацій для підготовки до олімпійських стартів варто будувати підготовку, використовуючи широкий арсенал можливостей, який представлено в мережі Інтернет та спеціалізованій літературі (Федак, 2003), (Сарана, 2005) та багатьох інших джерелах. Основна мета зазначених джерел – ознайомлення з різноманітними методами розв'язування олімпіадних задач. Викладення матеріалу побудовано так, що загальні висновки і рекомендації встановлюються і формулюються в процесі аналізу та розв'язування конкретних задач, взятих в основному з математичних олімпіад різних рівнів.

3. Задачі фінального туру олімпіади

Всеукраїнська олімпіада з математики – 2024 відбувалася на базі механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка і складалася з двох турів: заочного та фінального. У олімпіаді прийняли участь 83 учасники з різних регіонів України.

Наведемо умови завдань фінального туру олімпіади з відповідними розв'язками або вказівками.

Задача 1. *Обчислити значення* $log_{30} 8$ *якщо* $log_{30} 3 = a,\ \ log_{30}\ 5 = b.$

Розв'язання: Для розв'язання запропонованої задачі застосуємо відомі формули для перетворення логарифмічних виразів:

$$log_a\, b\, c = log_a|b| + log_a|c|\,, \qquad log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a|b| - log_a|c|\,, \qquad n\, log_a\, b = log_a\, b^n$$

Застосуємо ланцюжок наступних перетворень:

$$a + b = log_{30}\, 1\, 5 = log_{30}\frac{30}{2} = log_{30}\, 3\, 0 - log_{30}\, 2 = 1 - log_{30}\, 2.$$

Маємо, що $log_{30}\, 2 = 1 - a - b$.

Домножимо отриману рівність на 3, отримаємо:

$$3\, log_{30}\, 2 = 3(1 - a - b) \ \text{ звідки } \ log_{30}\, 8 = 3(1 - a - b).$$

Відповідь: $3(1 - a - b)$.

Задача 2. *Знайти розв'язки нерівності* $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x + \left(5 - 2\sqrt{6}\right)^x \le 10.$

Розв'язання: Зауважимо, що $\left(5 + 2\sqrt{6}\right)\left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 25 - 24 = 1.$

Отже, можемо записати, що

$$5 - 2\sqrt{6} = \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}.$$

Враховуючи область значень показникової функції, застосуємо заміну змінної

$$\left(5 + 2\sqrt{6}\right)^x = t > 0.$$

Для отриманої нерівності $t + \frac{1}{t} \le 10$, знаходимо її розв'язок:

$$t \in \left[5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}\right].$$

Повернувшись до початкової змінної, отримаємо : $x \in [-1; 1]$.

Відповідь: $x \in [-1; 1]$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 3. *Задано трикутник ABC. До сторони BC проведено бісектрису AM. Відомо, що $CM:MB=3:2$. На стороні AB вибрано точку N так, що $AN:NB=2:1$.*

а) Нехай $AC=12$ см, $BC=10$ см. Обчислити площу трикутника ABC.

б) Знайти $AO:OM$, де O – точка перетину AM і CN.

Розв'язання. Зробимо схематичну побудову рисунка відповідно до умов задачі.

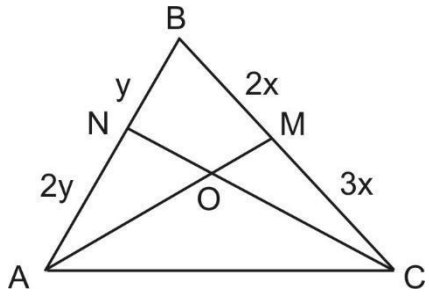


Рис.1. Схематичний рисунок до задачі 3.

а) Скористаємося властивістю бісектриси трикутника:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{BC}=\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad AB=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\cdot 12=8 \text{ см}.$$

Тоді площу трикутника ABC обчислимо за формулою Герона.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де $p=\frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр трикутника. Отже,

$$p=\frac{8+10+12}{2}=15 \text{ см}, \qquad S_{ABC}=\sqrt{15\cdot 3\cdot 5\cdot 7}=15\sqrt{7} \text{ см}^2.$$

б) Для визначення відношення $AO:OM$ застосуємо теорему Менелая (Сарана, Семенець, 2007) до трикутника ABC і точок C, O, N, які лежать на одному відрізку.

$$\frac{BN}{NA}\cdot\frac{AO}{OM}\cdot\frac{CM}{CB}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{AO}{OM}\cdot\frac{3}{5}=1 \quad \Rightarrow \quad AO:OM=10:3.$$

Відповідь: $S_{ABC}=15\sqrt{7}$ см^2; $AO:OM=10:3$.

Задача 4. *Знайти розв'язки системи рівнянь*

$$\begin{cases} 2^{x+1}=32y\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+y^2+2-2x-2y}+\sqrt{x^2+y^2-6x+9}=\sqrt{5}. \end{cases}$$

Розв'язання. Виразимо змінну y з першого рівняння $y=2^{x-\frac{9}{2}}$. Функція $y(x)=2^{x-\frac{9}{2}}$ є показниковою функцією, що зростає на всій множині визначення.

Перетворимо друге рівняння: виділимо повні квадрати під коренями у лівій частині рівняння. Отримаємо:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{5}.$$

Геометричне місце точок, яке описується цим рівнянням – це точки відстань від яких до точок $A(1;1)$ та $B(3;0)$ дорівнює $\sqrt{5}$. Але відстань $|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{5}$. Отже, розв'язками другого рівняння можуть бути координати лише тих точок, що належать відрізку AB.

Відрізок AB лежить на прямій, рівняння якої можемо визначити з системи рівнянь:

$$\begin{cases}0=3k+l,\\1=k+l,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad k=-\frac{1}{2},\qquad l=\frac{3}{2}.$$

Тоді координати точок, що задовольняють умовам

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

та $1\le x\le 3$ будуть розв'язками другого рівняння. Таким чином, проаналізувавши графіки, що описують рівняння заданої системи, приходимо до висновку, що система може мати не більше одного розв'язку.

Координати єдиної точки перетину графіків або єдиний розв'язок системи можемо визначити нескладним методом підбору $\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Відповідь: $\left(\frac{5}{2};\frac{1}{4}\right)$.

Задача 5. *а) Розв'язати рівняння:* $\sqrt{2+tg\,x}=tg\,x$ *.*

б) Знайти значення параметра a*, при кожному з яких має розв'язки рівняння*

$$\sqrt{a+\sqrt{a+tg\,x}}=tg\,x\,.$$

Розв'язання: а) Застосуємо метод розв'язування як для стандартного ірраціонального рівняння вигляду $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Отримаємо систему, що відповідає початковому рівнянню:

$$\begin{cases}f(x)=\big(g(x)\big)^2,\\g(x)\ge 0.\end{cases}$$

Отже, ми отримали квадратне рівняння відносно змінної $tg\,x$:

$$tg^2\,x-tg\,x-2=0 \text{ за умови } tg\,x\ge 0.$$

Розв'язки рівняння знаходимо за теоремою Вієта

$$tg\,x=-1;.\qquad tg\,x=2.$$

Перший корінь від'ємний, тому він не задовольняє умову $tg\,x\ge 0$. Другий корінь :

$$tg\,x=2\quad\Rightarrow\quad x=arctg\,2+\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

б) Проведемо заміну змінної $tg\ x\ = t \geq 0$. Обмеження відповідає аналогічному з попереднього випадку а). Маємо: $\sqrt{a+\sqrt{a+t}} = t$.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату і запишемо відповідну систему обмежень:

$$\begin{cases} \sqrt{a+t} = t^2 - a, \\ t \geq 0, \\ t^2 \geq a. \end{cases}$$

Ще раз підносимо до квадрату

$$a + t = t^4 - 2at^2 + a^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 - (2t^2+1)a + t^4 - t = 0.$$

Отримали квадратне рівняння відносно параметра a. Знаходимо його розв'язки у вигляді $a = a(t)$:

$$D = (2t^2+1)^2 - 4t^4 + 4t = 4t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^4 + 4t = 4t^2 + 4t + 1 = (2t+1)^2,$$

$$a = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2t^2+1+2t+1}{2}, \\ \dfrac{2t^2+1-2t-1}{2}, \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} t^2+t+1, \\ t^2-t. \end{array}\right.$$

Далі розглянемо два випадки

1) Якщо $a = t^2 + t + 1$, то рівняння не має розв'язків, бо $t^2 - a + t + 1 > 0$.

2)Розглянемо випадок коли виконуються умови:

$$\begin{cases} a = t^2 - t, \\ t^2 \geq a, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Друга нерівність системи виконується автоматично з врахуванням третьої нерівності та рівняння.

Для функції $y = t^2 - t$ областю значень на проміжку $[0; +\infty)$ є проміжок $[-\frac{1}{4}; +\infty)$, бо вершина параболи розташована у точці з координатами $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Отже, $a \in [-\frac{1}{4}; +\infty)$.

Відповідь: а) $x = arctg\ 2\ + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$; б) $a \geq -\frac{1}{4}$.

Висновки

Організатори олімпіади відзначають стійкий інтерес юних математиків до цієї престижної інтелектуальної події. На таких заходах майбутні абітурієнти змагаються не лише за звання кращих математиків України, а й за можливість продемонструвати свою кмітливість, логічне мислення та наполегливість. Математика – це не просто наука, це мова Всесвіту, яка відкриває двері до безмежних знань і можливостей. Керівництво університету вірить, що учнівська молодь володіє неабияким талантом і

потенціалом, здатна успішно розв'язувати найскладніші задачі, стійка перед складними викликами сучасності. Київський національний університет імені Тараса Шевченка докладає багато зусиль для того, щоб надихати атмосферою змагань, стимулювати прагнення до перемоги, що вестиме до нових звершень.

Зауважимо, що, незалежно від результатів, учасники олімпійського математичного руху вже є переможцями, адже уже в юному віці вони зважилися на важливий крок і продемонстрували свою зацікавленість у математиці.

Список використаних джерел

Федак І. В.(2003) *Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для ЗНЗ.*

Сарана О.А. (2005) *Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник.*

Сарана О.А., Семенець С.П. (2007) *Нестандартні геометричні задачі: Навчально-методичний посібник.* Житомир: Вид-во ЖДУ ім.. І.Франка.150 с.

Отримано редакцією журналу: 01.05.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Oleksandr BORYSEIKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ALL-UKRAINIAN MATHEMATICS OLYMPIAD OF TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY

Abstract. *Mathematical Olympiad is an intellectual competition that gives talented students the opportunity to demonstrate their knowledge, logical thinking and ability to solve complex mathematical problems. Olympiads stimulate in-depth study of mathematics, expand knowledge and improve students' skills. The work presents solutions to the problems of the 2024 All-Ukrainian Mathematics Olympiad of Taras Shevchenko National University of Kyiv were considered*

Keywords: *mathematical Olympiad; equation; inequality; solution; triangle.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні олімпіади

УДК [37.091.33:005.332.4](477):81+519.76 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.5**

Данило МИСАК
ORCID ID: 0009-0004-0581-4975
e-mail: danmysak@gmail.com
Засновник та співорганізатор руху лінгвістичних олімпіад, Київ, Україна

У СВІТІ ЛІНГВІСТИКИ

Анотація. *Для того, хто ще не мав тісного контакту з лінгвістикою, ця дисципліна може видаватися вельми далекою від точних наук. Проте виявляється, що навіть дуже різні мови часто виявляють численні спільні риси — адже в основі кожної мови лежить набір тих чи інших досить загальних правил і законів. Цей факт дозволяє складати самодостатні мовні задачі: їх пропонують розв'язати усім охочим школярам на такому змаганні, як лінгвістичні олімпіади. Підходи до розв'язування лінгвістичних задач часто схожі на ті, що застосовують до задач математичних. Для успішного виступу на олімпіаді з лінгвістики не обов'язково знати багато мов: достатньо вміння бачити та грамотно описувати ті самі загальні мовні правила й закони, знайомі учасникам зокрема і з української мови. Історія вітчизняних лінгвістичних олімпіад налічує вже 10 років. У статті розглянуто та подано розв'язки до двох задач із числа запропонованих на XI Українській олімпіаді з лінгвістики, проведеної в Києві 9 і 10 березня 2024 року.*

Ключові слова: *олімпіада з лінгвістики; лінгвістичні задачі; лінгвістика; математична лінгвістика*

1. Вступ

Кожна справжня наука ставить собі завданням якнайдостеменніше описати ту чи іншу сторону дійсності, у якій ми живемо. У хімії, наприклад, вивчають властивості дрібних часток, із яких складається все навколо; у фізиці – природу цих часток; у математиці – самі принципи, яким мусять ці частки (і не лише вони) підкорятися.

Лінгвістика, тобто наука про мови, на цьому фоні виглядає далеко не такою фундаментальною — і вже напевне не «точною» наукою. Здавалося б, людська мова – річ вельми умовна: як хто захоче, так і говоритиме. Можна, скажімо, домовитися кудкудакати, коли ти згоден зі співрозмовником, і бити себе в груди, коли ні. Що ж тут вивчати? А проте виявляється, що реальні живі і навіть уже вимерлі мови поводяться геть не так випадково і примхливо, а натомість мають багато спільних рис і закономірностей. Про кілька з них поговоримо нижче.

Як пояснити схожість будови різних людських мов? Чому такі поняття, як «іменник», «прикметник», «підмет», «присудок», «однина», «множина» та інші — це не щось таке, що притаманне виключно, наприклад, українській мові, а має сенс і для англійської, і для суахілі? Імовірно, подібні мовні категорії відображають до певної міри саму суть нашого сприйняття навколишнього світу. Десь глибоко у мозку людини – незалежно від континенту, де ця людина народилася — закладене розрізнення одного предмета та кількох. Отже, що-небудь в одному екземплярі і те саме, але в більшій кількості людина схильна і називати по-різному[1]. Задачею лінгвістики якраз і є зрозуміти, які саме категорії «зашиті» в людину і як людина цими категоріями оперує, говорячи.

[1] Хоча, звичайно, не мусить цього робити: у тій чи іншій мові цілком може й не бути окремих категорій, як-от граматичного числа; при цьому кожна мова так чи інакше містить велику кількість універсальних категорій.

До певної міри кожна людина має потенціал «з нуля», самостійно вивести мовні закономірності та окреслити лінгвістичні поняття – просто зіставивши ситуації, про які вона думає, зі словами, якими за життя навчилася ці ситуації описувати. У цьому сенсі лінгвістика подібна до математики, де теорему Піфагора – чи будь-яку іншу – можна довести (і навіть самостійно сформулювати) «на місці», ніколи раніше про відповідний факт не чувши. Саме з цієї причини задачі з математики настільки цікаво розв'язувати: вони не вимагають нічого, крім власної голови та хорошої уяви. Завдяки цій же обставині з такої дисципліни, як лінгвістика, також можна скласти цілком самодостатні задачі. Саме такі пропонують для розв'язування на лінгвістичних олімпіадах для школярів.

Учнівські змагання з лінгвістики проводять в Україні вже 10 років. Останній масштабний захід пройшов у Києві у березні цього року: тридцятеро переможців відбіркових етапів олімпіади зібралися, щоб поборотися за першість у всеукраїнському заліку та право представляти нашу країну на XXI Міжнародній лінгвістичній олімпіаді у Бразилії. Нижче ми познайомимо читача з парою (простіших) задач з-поміж запропонованих на всеукраїнській олімпіаді. До кожної з них подамо ще і розв'язок з лінгвістичним коментарем.

2. Вибрані задачі олімпіади

Задача 1. Мова вікі: називаємо людей і тварин (автор – Данило Мисак)

Нижче наведено декілька слів і словосполучень мови вікі та їхні переклади українською в переплутаному порядку:

atsinha, **hin'u**, **hin'u wemek**, **lawemek**,
toch'efwa atsinha, **tsun'ataj**, **yel'ataj atsinha**;

старий, жінка, баран, дід,
дружина, чоловік *(стать)*, кобила.

Завдання 1. *Встановіть правильні відповідності.*

Завдання 2. *Перекладіть українською:*

yel'ataj, **toch'efwa hin'u**.

Завдання 3. *Перекладіть мовою вікі:*

баба, вівця.

Примітка. Вікí – мова або сімейство мов, якими розмовляють кілька тисяч представників однойменного народу, що проживає в Аргентині та Болівії. Належить до матакської мовної родини.

Апостроф у записі слів використовується для позначення звуків з особливою вимовою.

Саме в такому вигляді задачу було запропоновано на березневій олімпіаді.

Для людини, що вперше стикається з лінгвістичною задачею, примітка може виглядати дивно: для чого потрібна географічно-соціологічна інформація про мову,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

якщо задача, як ми знаємо, мала би бути самодостатньою? Не в останню чергу така примітка підкреслює, що на лінгвістичних олімпіадах ми маємо справу з реальними мовами, а не просто з вигадкою автора задачі. При цьому серед тисяч мов світу трапляються й такі, що мають однакові назви або такі, які не мають традиційно закріплених в українській мові назв; за допомогою примітки такі мови можна дещо краще ідентифікувати. Нарешті, для людини, що цікавиться лінгвістикою поза контекстом олімпіад, додаткова інформація про мову становитиме окремий інтерес і сприятиме фаховому розвитку.

Розв'язання. Перейдемо тепер до самої задачі.

Якби мова вікі була влаштована цілком довільно, то зіставити набір із семи слів із перекладами цих слів даною мовою було б неможливо: кожне слово могло би перекладатися як завгодно, і будь-яка розстановка перекладів була б однаково ймовірною. Проте закономірності таки є: їх ми знаходимо і в (переплутаних місцями) перекладах українських слів мовою вікі, і в самих українських словах. У перекладах повторюються деякі частини:

- **atsinha** (трапляється саме по собі, а також у складі **toch'efwa atsinha** та **yel'ataj atsinha**);
- **hin'u** (трапляється саме по собі, а також у складі **hin'u wemek**);
- **wemek** (трапляється у складі вже згаданого **hin'u wemek**, а також у **lawemek**);
- **'ataj** (є у **tsun'ataj** та **yel'ataj atsinha**).

Що ж стосується українських слів, то спільними у них є скоріше не фрагменти буквеного запису, а значення:

- «баран» і «кобила» – тварини;
- слова «старий» та «дід» несуть відтінок старості;
- «жінка», «дружина» і «кобила» стосуються істот жіночої статі;
- «чоловік», «дід» і, можливо, «баран» та «старий» — чоловічої (останні два слова можуть також називати істоту незалежно від її статі).

Лишається зрозуміти, яка з частинок мови вікі відповідає котрому з відтінків значень українських слів. Невелика кількість «розумного» перебору приводить нас у підсумку до єдино можливого варіанта:

- **atsinha** – жінка;
- **hin'u** – чоловік;
- **wemek** – старість;
- на **-'ataj** закінчуються назви тварин.

Відповідності слів та перекладів у такому разі мають такий вигляд:

Вікі	Українська	Дослівно
atsinha	жінка	жінка

hin’u	чоловік *(стать)*	чоловік
hin’u wemek	дід	старий чоловік
lawemek	старий	**la-** + старість
toch’efwa atsinha	дружина	**toch’efwa** + жінка
tsun’ataj	баран	баран
yel’ataj atsinha	кобила	**yel’ataj** + жінка

Невідомими для нас залишаються значення слів **yel’ataj** та **toch’efwa**, а також частинки **la-**. Якщо про **yel’ataj** природно зробити висновок, що це «кінь» (бо в купі з «жінкою» мусить давати «кобилу»), то однозначно встановити зміст **toch’efwa** та **la-** важко. Але для повного розв’язання задачі це і не потрібно! Достатньо припустити, що якщо **toch’efwa** + «жінка» — це «дружина», то **toch’efwa** + «чоловік *(стать)*» — це «чоловік *(подружній статус)*». Такі міркування дозволяють нам відновити відповіді на додаткові завдання.

Завдання 2:

Вікі	Дослівно	Українська
yel’ataj	кінь	кінь
toch’efwa hin’u	**toch’efwa** + чоловік *(стать)*	чоловік *(подружній статус)*

Завдання 3:

Українська	Дослівно	Вікі
баба	стара жінка	**atsinha wemek**
вівця	баран + жінка	**tsun’ataj atsinha**

Можливо, у когось промайне думка, що матеріал для задачі підібрано дещо лукаво. Мовляв, південноамериканські аборигени мають, очевидно, не сильно розвинуту мову, лексикон у них бідний, і доводиться називати все буквально: не *дід*, а *старий чоловік*, не *кобила*, а *кінь-жінка* і т. д., а ми цією відсталістю взяли і прагматично скористалися, щоб скласти «головоломку». Така думка, однак, буде далекою від лінгвістичної істини. Якщо вам раптом здається, що підібрати конкретний набір «базових слів» (як-от *кінь*, *старий*, *жінка*), із яких можна скласти будь-яке інше поняття на світі, – проста задача, то це тільки тому, що ви досвідчений носій української мови, де цю задачу вже якось вирішено за вас. Що саме брати за базові поняття, а що з них складати, кожна мова вирішує самостійно, виходячи з потреб людей, які нею спілкуються. Скажімо, представник новозеландського народу ма́орі може посміятися з українця, який називає його такий простий і знайомий *rū* незграбним складеним словом *землетрус*...

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 2. Мова ґýґу-я́ланґі: екзотичні слова у звичних відмінках (автор – Таміла Краштан)

Подано слова мовою ґуґу-яланґі та їхні переклади українською:

badurubu	волосінню
baduruku	волосіні (д. в.)
buraynja	джерелом
burrira	у/на острові
burrirabu	островом
dajaliymba	у/на глибокій воді
dajaliynja	глибокою водою
dubuy	альціон
jarramalinga	у/на грозі
kadar	валабі (н. в.)

kadaraka	валабі (д. в.)
kiju	мангровий краб
kukur	пацюк
kuljika	каменю (д. в.)
ngiwaka	мурені
ngujay	прісноводна черепаха
ngurrkungu	у/на сові-голконозі
wungar	сонце
wungarabu	сонцем
yibuynju	каламусом

Завдання 1. *Перекладіть українською:*

badur, **dubuymbu**, **jarramalibu**,
kijuku, **kukuru**, **ngujayngka**.

Завдання 2. *Перекладіть мовою ґуґу-яланґі:*

у/на валабі, каламусові, сова-голконіг,
муреною, сонцю, прісноводною черепахою.

Примітка. Мова ґýґу-я́ланґі належить до пама-ньюнґської мовної родини. Цією мовою розмовляє кілька сотень людей у австралійському штаті Квінсленд.

Літера *y* позначає той самий звук, що й українська *й*; літера *w* — ***в*** у слові ***любов***; літера *b* може позначати як звук *б*, так і звук *п*; літера *d* – *д* або *т*; літера *k* – *к* або *ґ*; літера *j* – *к*, як у слові *кінь*, або *ґ*, як у слові *Верґілій*; сполучення літер *ng* позначає той самий звук, що й в англійському *long* чи німецькому *lang*.

Альціо́н – (тут) невеликий бурий птах із червоним дзьобом.

Вала́бі – вид невеликих сумчастих тварин, схожих на кенгуру.

Волосі́нь – нитка або шнур для риболовлі.

Кала́мус, або *рота́нг*, – вид тропічних ліан.

Ма́нгровий краб – вид крабів, що живе у манграх – заростях на берегах водойм.

Муре́на – рід видовжених хижих риб.

Сова-голконіг – вид невеликих австралійських сов.

Розв'язання. У задачі трапляються слова в чотирьох відмінках: називному, давальному, орудному та місцевому. Щоб систематизувати подані в задачі дані, створимо таблицю, в яку занесемо всі наявні в основній частині умови форми:

Слово	Називний	Давальний	Орудний	Місцевий
альціон	**dubuy**			
валабі	**kadar**	**kadaraka**		
волосінь		**baduruku**	**badurubu**	
глибока вода			**dajaliynja**	**dajaliymba**
гроза				**jarramalinga**
джерело			**buraynja**	
каламус			**yibuynju**	
камінь		**kuljika**		
мангровий краб	**kiju**			
мурена		**ngiwaka**		
острів			**burrirabu**	**burrira**
пацюк	**kukur**			
прісноводна черепаха	**ngujay**			
сова-голконіг				**ngurrkungu**
сонце	**wungar**		**wungarabu**	

У межах кожного рядка початок слова зберігає свій вигляд. Міняються поміж стовпцями лише закінчення. Схарактеризуймо в загальних рисах, які закінчення можуть мати слова у кожному з чотирьох відмінків:

- У називному відмінку слова закінчуються на **-y**, **-r**, а одне слово – на голосний **-u**.
- У давальному відмінку всі слова закінчуються на **-ka** або **-ku**.
- В орудному – на **-bu**, **-nja** або **-nju**.
- Нарешті, у місцевому – на **-mba**, **-nga**, **-ngu** або **-ra**.

Як бачимо, часто з одними й тими самими приголосними можуть комбінуватися водночас голосна **-a** та голосна **-u**.

Не слід забувати, що виписаними в таблиці формами наявний в умові мовний матеріал не обмежується! Маємо ще завдання 1, де наведено кілька додаткових форм – хоч і не очевидно, яким саме відмінкам вони відповідають. Спробуймо це для кожної з них встановити та паралельно розв'язати завдання:

- **badur**: на приголосний закінчуються лише слова у стовпчику називного відмінка. Отже, це називний відмінок слова «волосінь».

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

- **dubuymbu**: з одного боку, на **-bu** інколи закінчуються форми орудного відмінка. З іншого, перед цим закінченням у відомих формах орудного відмінка завжди йде голосний, а ось у формі **dubuymbu** – приголосний **-m-**. Можемо натомість припустити, що **-mbu** — одне з можливих закінчень місцевого відмінка поряд із **-mba** (адже, згадаймо, **-a** та **-u** в закінченнях часто «чергуються»). Отже, **dubuymbu** скоріше за все «у/на альціоні».
- **jarramalibu**: це, навпаки, типовий орудний відмінок (тим більше, що місцевий уже «зайнято» формою **jarramalinga**). Отже, ця форма перекладається як «грозою».
- **kijuku**: на **-ku** закінчується давальний відмінок, тобто це «мангровому крабу».
- **kukuru**: очевидно, закінчення **-ru** є паралельним до **-ra**, а відмінок, таким чином, – місцевий. Значення форми – «у/на пацюку».
- **ngujayngka**: давальний відмінок; «прісноводній черепасі».

Із половиною задачі ми вже впоралися. Проте щоб виконати завдання 2, уже недостатньо приблизно орієнтуватися у вигляді закінчень того чи іншого відмінка, а потрібно точно розуміти, як конкретно виглядає закінчення кожного відмінка для кожного зі слів. А щоб із цим розібратися, нам доведеться внести в побудовану раніше таблицю щойно встановлені форми з завдання 1:

Слово	**Називний**	**Давальний**	**Орудний**	**Місцевий**
альціон	**dubuy**			**dubuymbu**
валабі	**kadar**	**kadaraka**		
волосінь	**badur**	**baduruku**	**badurubu**	
глибока вода			**dajaliynja**	**dajaliymba**
гроза			**jarramalibu**	**jarramalinga**
джерело			**buraynja**	
каламус			**yibuynju**	
камінь		**kuljika**		
мангровий краб	**kiju**	**kijuku**		
мурена		**ngiwaka**		
острів			**burrirabu**	**burrira**
пацюк	**kukur**			**kukuru**
прісноводна черепаха	**ngujay**	**ngujayngka**		
сова-голконіг				**ngurrkungu**
сонце	**wungar**		**wungarabu**	

Це те місце, де вступає у гру «розумний перебір». Вибір конкретного закінчення для кожної із форм потенційно міг би залежати від багатьох факторів, серед яких зокрема значення слова, його довжина, перша або остання літера основи тощо. Якісь із цих факторів більш вірогідні, якісь менш. Наприклад, від значення слова відмінкове закінчення[2] у мовах світу справді залежить часто. І навіть в українській мові у знахідному відмінку маємо різні закінчення для іменників чоловічого роду залежно від того, називають вони істоту чи ні: побачити *тин*, але *сина*; сісти на *трон*, але на *слона* тощо. І від останніх літер (а точніше звуків) слова закінчення теж, буває, залежать: наприклад, *кава* – *кавою*, але *каша* – *кашею*. Натомість від початку слова або від його довжини закінчення залежать у мовах світу рідше, хоча і таке інколи трапляється.

У цій задачі ключем до розв'язання є останній звук основи – від нього залежать приголосні в закінченні, – а також останній голосний у складі основи – від нього залежить вибір голосного **-a** чи **-u** в закінченні. За саму основу при цьому можна взяти форму називного відмінка слів, тобто вважати, що закінчення у цієї форми завжди нульове (відсутнє). Позначивши через ***V*** (скорочено від англ. *vowel* – «голосна») одну з літер **-a** або **-u**, складемо таку схему закінчень:

	давальний	**орудний**	**місцевий**
основа на голосний	**-k*V***	**-bu**	**-ng*V***
основа на **-r**	**-*V*k*V***	**-*V*bu**	**-*V***
основа на **-y**	**-ngk*V***	**-nj*V***	**-mb*V***

останній голосний основи	
a або **i**	***V*** = **a**
u	***V*** = **u**

Перекладемо тепер слова із другого завдання:

- «у/на валабі»: основою тут є **kadar**, тож беремо закінчення з комірки «основа на **-r** / місцевий». Це ***V***, замість якого підставляємо **a**, оскільки останній голосний основи – **a**. Підсумкова форма – **kadara**.
- «каламусові»: основою тут буде називний відмінок слова «каламус», який, однак, нам ще треба відновити. Це можна зробити з форми орудного відмінка **yibuynju**: основою виявляється **yibuy**. Закінчення беремо з комірки «основа на **-y** / давальний», тобто **-ngk*V***. Замість ***V*** підставляємо **u**, адже останній голосний основи – **u**. У підсумку маємо **yibuyngku**.
- «сова-голконіг»: форма місцевого відмінка – **ngurrkungu**, отже основа (і форма називного) – **ngurrku**.
- «мурeною»: форма давального відмінка цього слова – **ngiwaka**, тож форма називного – **ngiwa**. Тоді форма орудного – **ngiwabu**.

[2] Або, в контексті неслов'янських мов, такі закінчення називають словом *суфікс* (це те, що приписується до основи ззаду) чи, більш загально, *афікс* (те, що може приписуватися як ззаду, так і спереду).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

- «сонцю»: основа – **wungar**; закінчення у відповідній комірці таблиці – **-*V*k*V***. Замість ***V*** підставляємо **a**, адже таким самим є й останній голосний основи. Виходить форма **wungaraka**.
- «прісноводною черепахою»: основа **ngujay**; закінчення – **-nj*V***. Замість **V** підставляємо **a**. Отримуємо **ngujaynja**.

■

Сподіваємося, наведені приклади завдань викликали у читача інтерес до лінгвістичних олімпіад. Якщо це так, то запрошуємо відвідати наш сайт, на якому, серед іншого, можна знайти решту задач та матеріалів березневої олімпіади (Українські змагання з лінгвістики, 2024).

Список використаних джерел

Українські змагання з лінгвістики. (2024). *XI Українська олімпіада з лінгвістики*. https://ling.org.ua/contests/ukraine-2024/

Отримано редакцією журналу: 01.04.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Danylo MYSAK
ORCID ID: 0009-0004-0581-4975
e-mail: danmysak@gmail.com
Founder and co-organizer of the Linguistic Olympiad movement, Kyiv, Ukraine

IN THE WORLD OF LINGUISTICS

Abstract. *For someone who has not yet had close contact with linguistics, this discipline may seem very distant from the exact sciences. However, it turns out that even very different languages often exhibit numerous common features—since each language is based on a set of relatively general rules and laws. This fact allows for the creation of self-contained linguistic problems, which are proposed to be solved by all interested school students in competitions known as linguistics Olympiads. The approaches to solving these problems are often similar to those applied in mathematical problems. To perform successfully in a linguistics Olympiad, it is not necessary to know many languages; it is sufficient to have the ability to see and accurately describe the aforementioned general linguistic rules and laws, which are particularly familiar to participants from their native language. The history of Ukrainian linguistics Olympiads already spans 10 years. This article discusses and provides solutions to two problems from the XI Ukrainian Linguistics Olympiad, held in Kyiv on March 9 and 10, 2024.*

Keywords: *linguistics Olympiad; linguistic problems; linguistics; mathematical linguistics*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 511.172 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.6**

Володимир ВИШЕНСЬКИЙ, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олексій ПЕЧЕРИЦЯ, вчитель математики вищої кат., учитель-методист
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЛАНЦЮГИ ДІЛЬНИКІВ: КОМБІНАТОРНИЙ АСПЕКТ

Анотація. *Стаття присвячена дільникам натуральних чисел і властивостям, пов'язаним із розкладом натурального числа на множники. Зокрема, у статті йдеться про канонічну форму запису розкладу числа на прості множники, її узагальнення у вигляді нескінченної мультиплікативної структури та про кількість дільників заданого числа. Крім того, розглянуто поняття ланцюгів дільників числа, факторів ланцюгів дільників, взаємну обумовленість ланцюга дільників і послідовності його факторів. Окремо досліджено так звані щільні ланцюги дільників заданого числа та те, як довжини таких ланцюгів пов'язані з його мультиплікативною структурою, наведено два способи підрахунку загальної кількості щільних ланцюгів дільників заданого числа. Стаття адресована для школярів, учителів закладів загальної середньої освіти та усім, хто любить математику.*

Ключові слова. *Подільність; розклад числа на множники; кількість дільників числа; основна теорема арифметики; ланцюг дільників; фактор ланцюга дільників; щільний ланцюг дільників.*

1. Вступ

Дана стаття написана простою мовою задля того, щоб її могли зрозуміти не лише студенти або студентки математичних спеціальностей закладів вищої освіти, але й учні та учениці закладів загальної середньої освіти. Її метою є ознайомити читачів із початковими поняттями про подільність та деякими властивостями, пов'язаними із дільниками чисел.

Тут ітиметься виключно про натуральні (цілі додатні) числа. Тому задля лаконічності ми майже завжди опускатимемо прикметник "натуральне" і казатимемо просто "число".

Завдання цієї статті полягають у ознайомленні із поняттями, пов'язаними із подільністю чисел, взаємозв'язками між дільниками одного й того самого числа, дослідженні розкладу числа на множники, зокрема – узагальненні цього поняття, введенні понять ланцюгів дільників та факторів, а також – описі їхніх властивостей.

2. Дільники

Число c називаємо дільником числа a, якщо для певного числа p (звичайно ж, натурального) справджується рівність

$$a = c \cdot p.$$

Приклади. 1) Число 7 – дільник числа 21, бо $21 = 7 \cdot 3$.

2) Число 1 – дільник будь-якого числа a, бо $a = 1 \cdot a$.

3) Будь-яке число a є дільником самого себе, бо $a = a \cdot 1$.

Якщо c – дільник числа a і

$$a = c \cdot p,$$

то p також є дільником числа a, адже

$$a = p \cdot c.$$

Відзначимо вже тепер ще одну властивість подільності, котра знадобиться нам дещо пізніше.

Якщо c – дільник числа a, а f – дільник числа c, то f є також дільником числа a.

Справді, якщо $a = cp$ і $c = fq$, то

$$a = f \cdot (qp),$$

а ця остання рівність і засвідчує (згідно з означенням), що f – дільник a.

Отже, будь-який дільник будь-якого дільника числа a сам є дільником цього числа.

Нашим першим комбінаторним завданням буде з'ясувати, від чого залежить, скільки дільників має те чи те число, і як полічити їх.

Число 1 має один дільник і цей дільник – 1. Решта чисел має більше дільників. Щонайменше їх два, адже дільниками кожного числа є 1 та саме це число. Числа, що мають рівно два дільники, називають простими. Найменше просте число – 2. Ось усі ті прості числа, які не перевищують 70:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67.$$

Ще математики стародавньої Греції довели, що простих чисел є безліч. Ці слова означають: скільки б простих чисел ми не назвали, знайдеться не назване просте число.

Усі числа, крім одиниці й простих чисел, мають щонайменше три дільники. Ось кілька прикладів.

1) Число 10 має чотири дільники: 1, 2, 5 і 10.

2) Число 24 має вісім дільників: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 і 24.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

3) Число 25 має три дільники: 1, 5 і 25.

У очі відразу впадає складна залежність кількості дільників числа від нього самого. Ця обставина стає ще рельєфнішою, коли навести приклади більшої кількості чисел, пов'язавши кожне з них з кількістю його дільників. Найкраще подати такі спостереження дворядковою таблицею. У її першому рядку названо числа, а в другому – кількості їхніх дільників.

Число	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Кількість дільників	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4	4	5	2	6	2	6	4	4	2	8	3

Послідовність чисел другого рядка здається геть безсистемною. Єдине, що стосовно неї можна сказати одразу з цілковитою певністю, – це не дуже глибоке твердження про те, що кількість дільників числа мало залежить від його величини. Наприклад, числа 23, 24 і 25 дуже близькі за величиною, проте кількості їхніх дільників – 2, 8 і 3 – суттєво різні.

Наше найближче завдання – з'ясувати, від чого залежить кількість дільників числа і за яким правилом (за якою формулою) цю кількість можна обчислювати (Perestyuk, Vyshenskyi, 2022). Проте ми не впораємося з цим завданням, не пригадавши ще кількох арифметичних фактів.

3. Розклад числа на множники

Якщо

$$a = bc,$$

до того ж кожне з чисел b і c менше, ніж a, то кажуть, що a розкладено на множники b і c. Те саме (тобто однакове за змістом) означення можна висловити дещо по-іншому. Кажуть, що a розкладено на множники b і c, якщо $a = bc$ і жодне з чисел b і c не є одиницею. Рівнозначність цих двох означень не викликає сумніву, адже якщо жодне з чисел b і c не є одиницею, то також жодне з них не дорівнює a, і навпаки.

Приклад. Число 30 можна розкласти на два множники кількома способами: $2 \cdot 15$, або $3 \cdot 10$, або $5 \cdot 6$.

Число можливо розкласти на множники тільки в тому разі, коли воно має *власні* дільники. Так називають ті дільники числа, котрі менші від нього, але більші від 1. Число 1 і всі прості числа не мають власних дільників, а тому їх неможливо розкласти на множники. Решта чисел мають власні дільники, а тому їх можна подати добутком двох менших чисел, тобто розкласти на два множники.

Хай число a розкладено на два множники:

$$a = bc.$$

Може статися, що один з них (чи й обидва), наприклад b, також розкладається на множники: $b = u \cdot v$. Підставивши це значення b у формулу для a, отримаємо зображення числа a добутком трьох множників, кожний з яких є власним дільником числа a:

$$a = u \cdot v \cdot c.$$

В разі, коли серед чисел u, v і c є не прості, ми зможемо й далі продовжити це мультиплікативне (від слова *multiplizieren* – множити) подрібнення числа a. Щоразу кількість множників збільшуватиметься. Це триватиме доти, доки всі вони не стануть простими числами. Без кінця, до речі, процес тривати не може, бо при кожному мультиплікативному роздвоєнні числа обидва множники стають меншими від нього, а чисел, менших від a, є всього $a - 1$.

Наші міркування доводять, що кожне число, крім числа 1 і простих чисел, можна подати добутком простих чисел або, як ще кажуть, розкласти на прості множники. Можна довести також (ми не будемо тут цього робити), що для кожного числа існує тільки один такий розклад. Останнє твердження слід розуміти так. Якщо ви розклали якесь число n на прості множники і виявили, що цей розклад п'ять разів містить число 13, то такий самий результат отримає кожний, хто розкладе число n на прості множники. Звичайно ж, сказане стосується також будь-якого іншого простого множника. Якщо, наприклад, у вашому розкладі числа n на прості множники число 7 відсутнє, то хай хто розкладатиме число n на прості множники, число 7 з'явитися там не може.

Одним словом, кожне число розкладається на прості множники єдиним, тільки йому притаманним, чином. Розклад на прості множники є немов би мультиплікативним паспортом числа. Кожне число має свій, не подібний до інших паспорт, і кожний паспорт (добуток простих чисел) належить одному числу.

Не буде зайвим відзначити, що розклад числа на прості множники все-таки не цілком однозначний, адже співмножники можна розташовувати в добуткові у різному порядку. Наприклад, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, але також $24 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$ і т.п. Проте ці відмінності не суттєві. Суттєвим є те, що за будь-якого запису розклад числа 24 на прості множники містить одну трійку і три двійки, і більше множників у ньому немає.

Якщо розклад на прості множники числа a містить

k_1 *простих множників* p_1,

k_2 *простих множників* p_2,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

k_3 *простих множників* p_3,

і так далі, нарешті,

k_s *простих множників* p_s,

і цим асортимент простих множників вичерпується, то цілком доречно обрати таку форму презентації розкладу:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k^3} \dots p_s^{k_s}.$$

Її називають *стандартною* або ж *канонічною формою*.

Ось приклади канонічних зображень розкладів на прості множники кількох чисел:

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,$$

$$1024 = 2^{10},$$

$$242 = 2 \cdot 11^2,$$

$$216 = 2^3 \cdot 3^3.$$

Математика не любить винятків. Ми винятки поки що маємо. Не всі числа можна розкласти на прості множники. Винятковим є число 1 та прості числа. Домовившись про певне розширення змісту поняття розкладу на прості множники, ми усунемо ці винятки, уможлививши чітке й стисле звучання підсумкової теореми. Вважаємо, що кожне просте число розкладається на прості множники і цей розклад містить всього один множник — саме це число. Що ж до числа 1, то його розклад на прості множники вважаємо порожнім, тобто таким, що не містить жодного простого множника. За цих домовленостей отримуємо таку теорему про розклад чисел на прості множники.

Теорема 1. *Кожне число можна розкласти на прості множники, до того ж тільки одним способом*.

Цю теорему, зважаючи на її виняткове значення для арифметики, а отже, й усієї математики загалом, називають *основною теоремою арифметики*.

3.1 Про те саме дещо по-іншому

Ми усвідомлюємо, що таке добуток трьох, сорока семи і навіть мільйона якихось чисел. Ми розуміємо, що кожний такий добуток є певним числом, знаємо, як його, принаймні теоретично, отримати. Так само ми усвідомлюємо, що навіть теоретично неможливо перемножити безліч співмножників. Проте бувають випадки, коли добуткові безлічі співмножників цілком доречно присвоїти певне числове значення. Нас цікавитиме зараз один з цих випадків. Хай маємо нескінченну послідовність чисел

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ \dots\ ,\ c_n,\ c_{n+1},\ \dots$$

тобто нескінченну череду чисел, виписаних одне за одним за якимось правилом. Не забороняється, щоб поміж чисел були однакові. Серед таких послідовностей виокремимо ті, у яких після певної кількості довільних початкових чисел усі решта – одиниці. Хай, наприклад,

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = 1.$$

Утворимо формальний (без претензій на зміст) нескінченний добуток

$$c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \dots \cdot c_n \cdot c_{n+1} \cdot c_{n+2} \cdot \dots .$$

Виконуючи послідовно множення

$$c_1 \cdot c_2, \qquad (c_1 \cdot c_2) \cdot c_3, \qquad (c_1 \cdot c_2 \cdot c_3) \cdot c_4, \qquad \dots \qquad (c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{n-1}) \cdot c_n, \qquad \dots$$

на $(n-1)$-му кроці отримаємо число

$$u = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_n,$$

котре більше не змінюватиметься, коли утворюватимемо наступні добутки, адже далі щоразу множитимемо на 1. Тому число u доречно назвати значенням нескінченного добутку

$$c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 \cdot \dots .$$

Візьмімо тепер послідовність усіх простих чисел, розміщених за зростанням (кожне наступне число більше від попереднього). Ось початок цієї послідовності:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$$

Утворимо тепер такий нескінченний добуток цілих невід'ємних степенів цих чисел, в якому тільки скінченна кількість показників додатні, а решта – нулі. У такому добуткові кілька (скінченна кількість) співмножників будуть натуральними степенями простих чисел,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

а решта – одиницями. Отже, наш добуток зображатиме певне натуральне число, подаючи його розкладеним на прості множники.

Приклади. 1) Нескінченний добуток

$$2^0 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot \dots ,$$

у якому всі прості числа, більші від 11, стоять у нульовому степені, зображає число $3^2 \cdot 7 \cdot 11$, тобто 693.

2) Нескінченний добуток

$$2^4 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^1 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot \dots ,$$

у якому одиницями є всі множники, що стоять після 13^1, зображає число $2^4 \cdot 3 \cdot 13$, тобто 624.

3) Якщо в добуткові всі прості числа стоять у нульовому степені, то добуток зображає число 1.

4) Якщо в нескінченному добуткові, утвореному степенями простих чисел, один показник степеня є одиницею, а всі решта дорівнюють нулеві, то добуток зображає відповідне просте число.

Трактуючи такого типу нескінченні добутки, як узагальнені розклади чисел на прості множники, урівноправлюємо з погляду розкладу всі числа включно з одиницею і простими числами. Число 1 і прості числа не потребують тепер жодних спеціальних домовленостей чи застережень. Наступна теорема – точний відповідник основної теореми арифметики – не має жодних винятків. Усі числа цілком рівноправні щодо неї.

Теорема 2. *Кожне число можливо, до того ж тільки одним способом, зобразити нескінченним добутком невід'ємних цілих степенів усіх простих чисел, впорядкованих за зростанням*.

4. Кількість дільників числа.

Нехай

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$$

– канонічний розклад числа a на прості множники. Сказане означає, що:

1) $p_1, p_2, \dots , p_s$ – різні прості числа;

2) $k_1, k_2, \dots , k_s$ – натуральні числа.

Якщо b – дільник числа a, то:

1) b не може ділитися на жодне просте число, крім $p_1, p_2, \dots , p_s$;

2) b не може ділитися на $p_1^{l_1}$, якщо $l_1 > k_1$;

3) сказане у попередньому пункті з належною заміною чисел l_1 і k_1 стосується також простих чисел $p_2,\ p_3,\ \dots\ ,\ p_s$.

Інакше кажучи, якщо число b розкласти на прості множники, то матимемо таке його зображення:

$$b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}.$$

При цьому для показників степенів чисел $p_1,\ p_2,\ \dots\ ,\ p_s$ справджуватимуться нерівності

$$0 \le m_1 \le k_1,\quad 0 \le m_2 \le k_2,\quad \dots,\quad 0 \le m_s \le k_s.$$

Важливо підкреслити, що для тих чи інших дільників b числа a окремі (або навіть усі) показники $m_i\ (i = 1,2,\dots,s)$ можуть бути нулями, адже не всі дільники числа a зобов'язані ділитися на всі числа $p_i\ (i = 1,2,\dots,s)$. Наведене зображення дільника b однозначне. Опустивши в ньому множники з нульовими показниками m_i, отримаємо канонічний розклад числа b на прості множники.

Отже, поза межами чисел

$$b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$$

за наведених вище умов для показників $m_i\ (i = 1,2,\dots,s)$ немає дільників числа a. З іншого боку, всі числа b вказаного типу є дільниками a, бо

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} = \left(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}\right) \cdot \left(p_1^{k_1 - m_1} p_2^{k_2 - m_2} \dots p_s^{k_s - m_s}\right),$$

тобто

$$a = bc$$

і

$$c = p_1^{k_1 - m_1} p_2^{k_2 - m_2} \dots p_s^{k_s - m_s}$$

– натуральне число, адже

$$k_1 - m_1 \ge 0,\quad k_2 - m_2 \ge 0,\quad \dots\ ,\quad k_s - m_s \ge 0.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Виходить, що число a має стільки дільників, скільки є наборів невід'ємних цілих чисел

$$(m_1, m_2, \dots, m_s),$$

у яких

$$0 \le m_1 \le k_1, \;\; 0 \le m_2 \le k_2, \;\; \dots, \;\; 0 \le m_s \le k_s.$$

Першу компоненту такого набору можемо обрати $(k_1 + 1)$ способами, другу – $(k_2 + 1)$ способами і т.д., нарешті, останню – $(k_s + 1)$ способами. При цьому значення кожної з s компонент можемо обирати незалежно від вибору інших. За цих умов можемо утворити всього

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$$

зазначених наборів. Тому число a має саме стільки різних дільників.

Приклади. 1) Число

$$a = 2^7 \cdot 11 \cdot 17^2 \cdot 41$$

Має

$$(7 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 96$$

різних дільників. Серед них непарних дільників є

$$(1 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 12.$$

2) Які числа мають непарну кількість дільників?

Нехай

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s},$$

де $p_1, p_2, \dots, p_s$ – різні прості числа.

Число a має

$$(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1)$$

дільників. Цей добуток є непарним числом лише в тому разі, коли непарними числами є всі його співмножники, а це буде тоді, коли всі числа $k_1, k_2, \ldots, k_s$ парні. Нехай

$$k_1 = 2t_1, \;\; k_2 = 2t_2, \;\; \ldots, \;\; k_s = 2t_s.$$

Маємо:

$$a = p_1^{2t_1} \cdot p_2^{2t_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{2t_s} = \left(p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{t_s}\right)^2.$$

Висновок. *Непарну кількість дільників мають ті й тільки ті числа, котрі є квадратами натуральних чисел, як-от* $1, 4. 9, 16, 25$ *тощо*.

5. Ланцюги дільників числа.

Ланцюгом дільників числа a $(a \neq 1)$ називаємо скінченну послідовність чисел, яка починається числом a, закінчується числом 1, до того ж кожне наступне її число є дільником попереднього і всі ці числа різні.

Одразу проілюструємо це означення прикладом. Наведемо усі можливі ланцюги дільників числа 30:

$30, 15, 5, 1;$

$30, 15, 3, 1;$

$30, 10, 5, 1;$

$30, 10, 2, 1;$

$30, 6, 3, 1;$

$30, 6, 2, 1;$

$30, 15, 1;$

$30, 10, 1;$

$30, 6, 1;$

$30, 5, 1;$

$30, 3, 1;$

$30, 2, 1;$

$30, 1.$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, маємо шість ланцюгів завдовжки чотири елементи, стільки ж завдовжки три та один ланцюг завдовжки два – загалом тринадцять різних ланцюгів.

Неважко помітити, що всі члени ланцюгів є дільниками початкового числа. Ця обставина є наслідком так званої транзитивності відношення подільності: якщо l ділиться на m, а m ділиться на n, то l також ділиться на n.

Цей факт є нескладним наслідком означення подільності. Згідно з ним "a ділиться на b" означає, що

$$a = bc,$$

причому число c ціле. Отож "l ділиться на m", а "m ділиться на n" означає, що

$$l = mk \; i \; m = ns,$$

де числа k і s цілі. Підставивши у першу рівність значення числа m з другої рівності, отримуємо:

$$l = n \cdot sk.$$

Оскільки число sk ціле, то остання рівність засвідчує, що l ділиться на n (n є дільником l). Оскільки в ланцюгу дільників кожне наступне число є, згідно з означенням, дільником попереднього, то всі числа ланцюга є дільниками початкового числа.

Від чого залежить, скільки ланцюгів дільників можна побудувати для числа a? На перший погляд, кількість ланцюгів залежить від кількості дільників числа. Така залежність, безсумнівно, існує. Наприклад, усі прості числа мають два дільники, котрі складають один ланцюг. Проте залежність ця не проста. Точніше, кількість ланцюгів числа залежить не тільки від кількості його дільників, а й від характеру розкладу числа на прості множники.

Наприклад, як було з'ясовано вище, число 30, що має вісім дільників, має тринадцять ланцюгів дільників. Число 24 також має вісім дільників (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24), проте ланцюгів дільників у нього двадцять. Ось ці ланцюги:

$$24,\ 12,\ 6,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 6,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 6,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 4,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 4,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 6,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 6,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 12,\ 1;$$

$$24,\ 8,\ 1;$$

$$24,\ 6,\ 1;$$

$$24,\ 4,\ 1;$$

$$24,\ 3,\ 1;$$

$$24,\ 2,\ 1;$$

$$24,\ 1.$$

6. Фактори ланцюгів дільників.

Нехай

$$a = a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ ,\ a_n = 1$$

ланцюг дільників числа a (котре в цьому контексті нам зручно буде позначати також a_0).

Відношення

$$\frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \dots, \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

називатимемо *факторами ланцюга дільників*, а послідовність цих відношень у зазначеному порядку – *послідовністю факторів*.

Приклади. 1) Факторами ланцюга

$$30,\ 10,\ 2,\ 1$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

є числа

$$3,\ 5,\ 2.$$

2) Послідовність

$$2,\ 3,\ 5$$

є послідовність факторів ланцюга дільників

$$30,\ 15,\ 5,\ 1.$$

Теорема 3. *Добуток усіх факторів будь-якого ланцюга дільників числа* a *дорівнює* a.

Доведення. цієї теореми нескладне. Хай

$$a = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_{n-1},\ a_n = 1$$

ланцюг дільників, а

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots\ ,\ t_{n-1}$$

– послідовність його факторів. За означенням

$$t_0 = \frac{a_0}{a_1},\ t_1 = \frac{a_1}{a_2},\ \dots\ ,\ t_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

а тому

$$t_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{n-1} = \frac{a_0}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = a_0 = a.$$

■

Наступна теорема виявляє взаємну обумовленість ланцюга дільників та послідовності його факторів.

Теорема 4. *За послідовністю факторів можливо відновити ланцюг дільників. Іншими словами: знайти ланцюг дільників все одно, що знайти послідовність його факторів.*

Доведення. Ми вже знаємо (згідно з означенням), що ланцюг дільників однозначно визначає послідовність своїх факторів.

Хай тепер дано послідовність факторів

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots\ ,\ t_{n-1}$$

певного ланцюга дільників. Чи можливо відновити сам ланцюг? Так, і саме ця відповідь є змістом теореми. Ось як це можна зробити.

Згідно з попередньою теоремою, перше число ланцюга є добутком усіх факторів, тобто

$$a_0 = t_0 t_1 t_2 \dots\ t_{n-1}.$$

Оскільки $t_0 = \frac{a_0}{a_1}$, то

$$a_1 = \frac{a_0}{t_0} = t_1 t_2 \dots\ t_{n-1}.$$

Далі маємо, що $t_1 = \frac{a_1}{a_2}$, а тому

$$a_2 = \frac{a_1}{t_1} = t_2 t_3 \dots\ t_{n-1}.$$

Так, крок за кроком, отримуємо:

$$a_3 = t_3 \dots\ t_{n-1},\ a_4 = t_4 \dots\ t_{n-1},\ \dots\ ,\ a_{n-1} = t_{n-1},$$

нарешті, $a_n = \frac{a_{n-1}}{t_{n-1}} = 1$.

Із цієї теореми випливає, що між ланцюгами дільників числа a та послідовностями їхніх факторів існує бієкція. За ланцюгом однозначно відновлюється послідовність факторів і навпаки.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Будь-яка скінченна послідовність натуральних чисел, що не містить числа 1, є послідовністю факторів певного ланцюга дільників одного з натуральних чисел.

Приклади. 1) Послідовність

$$2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 5$$

є послідовністю факторів ланцюга дільників

$$360,\ 180,\ 90,\ 30,\ 15,\ 5,\ 1$$

числа 360.

2) Числа

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2$$

є послідовними факторами ланцюга дільників

$$128,\ 64,\ 32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1$$

числа 128.

3) Послідовності, складеній з одного фактора

$$12$$

відповідає двочленний ланцюг дільників

$$12,\ 1$$

числа 12.

7. Щільні ланцюги дільників.

Якщо з будь-якого ланцюга дільників числа a видалити яке завгодно внутрішнє (не перше й не останнє) число, то послідовність чисел, що лишаться, складе інший ланцюг дільників того самого числа. Це випливає з транзитивної властивості подільності чисел. А чи можливо вставити в ланцюг дільників ще одне число так, щоб нова послідовність також була ланцюгом дільників того самого, що й раніше, числа? Іноді можливо, а іноді ні. Наприклад, видовжити на одну ланку ланцюг

$$30,\ 5,\ 1$$

можливо двома способами: між числами 30 і 5 вставити 15 або 10. Отримаємо ланцюги

$$30,\ 15,\ 5,\ 1 \textit{ або } 30,\ 10,\ 5,\ 1.$$

Що ж до обох цих ланцюгів, то ні один, ні другий жодним чином видовжити не можна.

Означення. *Ланцюг дільників, який неможливо видовжити, називатимемо щільним*.

Теорема 5. *Ланцюг дільників числа* a

$$a = a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ ,\ a_{n-1},\ a_n = 1$$

щільний у тому й тільки тому разі, коли всі його фактори

$$\frac{a_0}{a_1},\ \frac{a_1}{a_2},\ \frac{a_2}{a_3},\ \dots\ ,\ \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}},\ \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

є простими числами.

Доведення. Якщо $a_k = a_{k+1} \cdot p$, де p – просте число, то між числами a_k і a_{k+1} не можна вставити ще одне число. Справді, припустімо, що є таке число d, яке ділиться на a_{k+1}, а саме є дільником a_k:

$$a_k = dm \textit{ і } d = a_{k+1}n,$$

до того ж $m > 1$ *і* $n > 1$ (числа a_k, d і a_{k+1} різні). За цих умов справджується рівність

$$a_k = a_{k+1} \cdot mn.$$

Разом з рівністю

$$a_k = a_{k+1} \cdot p$$

вона засвідчує, що

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$p = mn,$$

а це неможливо, бо p – просте число. Тож наше припущення про те, що між a_k і a_{k+1} можна вставити такий дільник числа a_k, котрий ділиться на a_{k+1}, хибне.

Хай тепер

$$a_k = a_{k+1} \cdot l$$

і число l не просте. Тоді

$$l = u \cdot v,$$

до того ж $u > 1$, $v > 1$. Візьмемо число

$$c = v \cdot a_{k+1}.$$

Маємо:

$$a_k = u \cdot c,\ c = v \cdot a_{k+1}.$$

Ці дві рівності свідчать , що трійка чисел

$$a_k,\ c,\ a_{k+1}$$

складає правильний відтинок ланцюга дільників. Тож початковий ланцюг можливо видовжити, вставивши число c між числами a_k і a_{k+1}.

■

Приклади. 1) Ланцюг дільників

$$144,\ 72,\ 36,\ 12,\ 6,\ 2,\ 1$$

щільний, бо всі його фактори

$$2,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2$$

прості числа.

2) Ланцюг дільників

$$1800,\ 360,\ 180,\ 30,\ 15,\ 3,\ 1$$

не щільний, бо серед членів послідовності його факторів

$$5,\ 2,\ 6,\ 2,\ 5,\ 3$$

є не просте число. Якщо у послідовності факторів число 6 замінити двома числами: 2 і 3 або 3 і 2, – то новим послідовностям відповідатимуть два різні щільні ланцюги

$$1800,\ 360,\ 180,\ 90,\ 30,\ 15,\ 3,\ 1$$

або

$$1800,\ 360,\ 180,\ 60,\ 30,\ 15,\ 3,\ 1.$$

Кожний із них є ущільненням початкового ланцюга.

3) Число 1 не має (згідно з означенням) жодного ланцюга дільників. Будь-яке інше число a має ланцюг дільників

$$a,\ 1$$

завдовжки 2. Це – найкоротший ланцюг. Для простих чисел a він щільний. Жодних інших ланцюгів дільників прості числа не мають. Якщо ж число a не просте, то цей ланцюг не єдиний, і будь-який інший ланцюг є його ущільненням.

Із означення факторів ланцюга дільників випливає, що довжина ланцюга на 1 перевищує довжину послідовності факторів.

Тепер саме час відповісти на запитання: як довжини щільних ланцюгів дільників даного числа a пов'язані з його мультиплікативною структурою? Відповідь дає така

Теорема 6. *Якщо*

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots\ p_s^{k_s}$$

($p_1, p_2, \dots, p_s$ *різні прості числа*), *то кожний щільний ланцюг числа* a *має довжину*

$$k_1 + k_2 + \dots + k_s + 1.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Доведення. Як нам уже відомо, послідовність факторів щільного ланцюга дільників числа a складається з простих чисел, добуток яких дорівнює a. Тому поміж факторів є

$$k_1 \textit{ простих чисел } p_1$$
$$k_2 \textit{ простих чисел } p_2$$
$$\vdots$$
$$k_s \textit{ простих чисел } p_s.$$

Адже саме добуток усіх цих чисел складає число a. З цього висновуємо, що послідовність факторів містить

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s$$

чисел. Ланцюг дільників містить на одне число більше.

■

Приклад. Число 100 розкладається на прості множники так:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2.$$

Тому всі щільні ланцюги його дільників мають довжину $2 + 2 + 1 = 5$. Кожному такому ланцюгу відповідає послідовність факторів, складена з двох чисел 2 і двох чисел 5. Ось повний перелік усіх щільних ланцюгів та їхніх факторів.

Фактори	Ланцюги дільників
$2\ 2\ 5\ 5$	$100\ 50\ 25\ 5\ 1$
$2\ 5\ 2\ 5$	$100\ 50\ 10\ 5\ 1$
$2\ 5\ 5\ 2$	$100\ 50\ 10\ 2\ 1$
$5\ 2\ 2\ 5$	$100\ 20\ 10\ 5\ 1$
$5\ 2\ 5\ 2$	$100\ 20\ 10\ 2\ 1$
$5\ 5\ 2\ 2$	$100\ 20\ 4\ 2\ 1$

8. Про кількість ланцюгів.

Спочатку з'ясуємо, скільки щільних ланцюгів дільників має число a залежно від того, як воно розкладається на прості множники. Що ми вже знаємо про щільні ланцюги? Усі

вони мають однакову довжину, а всі їхні фактори – прості числа. Будь-який не щільний ланцюг коротший від щільного, а поміж його факторів є хоча б одне не просте число.

Найпростішим видається випадок, коли

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} \cdot p_n,$$

де всі прості множники p_i різні. У цьому випадку послідовність факторів будь-якого щільного ланцюга дільників складатимуть n різних простих чисел p_1, p_2, ... , p_n, розташованих у певному порядку. Змінюючи порядок, утворюватимемо нові послідовності, котрим відповідатимуть нові щільні ланцюги дільників, адже між тими й тими об'єктами маємо бієкцію. Замість полічити ланцюги дільників можна полічити послідовності факторів. Різні числа p_1, p_2, ... , p_n можна вишикувати в ряд $n!$ способами. Отже, в нашому випадку можемо утворити

$$n!$$

різних послідовностей факторів, котрим відповідатимуть $n!$ різних щільних ланцюгів дільників.

Висновок. *Якщо* $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, *де* p_1, p_2, ... , p_n *різні прості числа, то число* a *має* $n!$ *різних щільних ланцюгів дільників.*

Приклад. Оскільки $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то для числа 210 є всього $4!$, тобто 24 різні щільні ланцюги дільників кожний завдовжки 5. Ось кілька з них разом з відповідними послідовностями факторів.

Фактори				Ланцюги дільників				
2	3	5	7	210	105	35	7	1
2	7	5	3	210	105	15	3	1
7	5	3	2	210	30	6	2	1
5	2	7	3	210	42	21	3	1
3	2	7	5	210	70	35	5	1

Розглянемо тепер довільний випадок, тобто вважатимемо, що дане число a розкладається на прості множники, серед яких можуть бути однакові. Отже, нехай

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s},$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

де p_1, p_2, ... , p_s різні прості числа. Цього разу щільний ланцюг дільників числа a визначає послідовність завдовжки $k_1 + k_2 + \ldots + k_s$ факторів p_1, p_2, ... , p_s, які повторюються відповідно k_1, k_2, ... , k_s разів. Кількість різних таких послідовностей дорівнює кількості всіляких щільних ланцюгів дільників, адже між тими й тими об'єктами маємо бієкцію. Полічити всі послідовності факторів щойно вказаного типу (k_1 чисел p_1, k_2 чисел p_2 і т.д., нарешті k_s чисел p_s) можна по-різному. Вкажемо на деякі способи.

Перший спосіб. Можемо вважати, що p_1, p_2, ... , p_s просто літери, написані на окремих картонних картках на зразок розрізної абетки. Повний комплект цих карток складено з k_1 карток, на яких зображено літеру p_1, k_2 карток p_2 і т.д., нарешті k_s карток із зображеними на них літерами p_s. Всі літери p_1 на всіх k_1 картках віддруковано однаковим шрифтом, а тому картки з цією літерою не відрізняються одна від одної. Це саме стосується усіх решти літер p_i ($i = 2, 3, \ldots, s$). Нас цікавить, скількома способами всі $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ карток можна викласти в ряд одну за одною. Якби поміж карток не було однакових, то ми відразу відповіли б на це запитання. Різних варіантів було б $(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!$ Ми в змозі зробити наші картки різними, долучивши до кожної з k_1 наявних літер p_1 додаткові різні між собою тимчасові позначки і вчинивши так само з рештою літер p_2, ... , p_s. Картки з цими додатковими позначками можемо вишикувати в ряд $(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!$ способами. Уявімо собі, що ми крок за кроком фізично утворили всі ці перестановки, послідовно сфотографувавши їх і розмістивши, наприклад у колонку.

Будь-які дві такі перестановки хоча б в одній позиції (насправді принаймні в двох) відрізняються одна від одної або літерами p_i, або ж додатковими мітками біля однакових літер. Візьмімо яку-небудь одну з перестановок і розглянемо всі ті перестановки, котрі в кожній позиції мають однакові з нею літери p_i, а тому відрізняються від неї тільки додатковими мітками в окремих (можливо, й в усіх) позиціях. Скільки всього є таких перестановок включно з початковою перестановкою φ? Міняючи в перестановці φ місцями всіляким чином мітки біля букв p_1, отримаємо $k_1!$ таких перестановок. Міняючи в кожній з них всіляким чином місцями мітки біля літер p_2, отримаємо разом $k_1! \cdot k_2!$ таких перестановок. Вчинивши у кожній з них те саме з мітками біля літер p_3, отримаємо вже $k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!$ тих перестановок, в яких усі літери p_3 стоять на однакових місцях. Ці міркування без жодних змін можна продовжити далі аж доки не дійдемо до останньої літери p_s. Водночас отримаємо відповідь на наше запитання: всього є $k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!$ перестановок, у яких літери p_1, p_2, ... , p_s стоять на тих самих місцях, що й у перестановці φ.

Через те, що в попередніх міркуваннях перестановка φ довільна, то це означає, що всі $(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!$ перестановок літер p_i з мітками розподіляються на

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!}$$

груп по $k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!$ перестановок у кожній з них. У всіх перестановок однієї групи всі літери p_i стоять на однакових місцях. У перестановок з різних груп хоча б у одній позиції стоять різні літери p_i.

Зі сказаного висновуємо, що якщо в усіх перестановках усунемо мітки, то всі перестановки однієї групи перетворяться на однакові послідовності літер p_i, а перестановки різних груп – у різні послідовності. Тому різних послідовностей літер p_1, p_2, ... , p_s, в яких літера p_i повторюється k_i рази ($i = 1, 2, \ldots, s$) є

$$\frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!}.$$

Другий спосіб. Отже, є k_1 примірників літери p_1, k_2 примірників літери p_2 і т.д., нарешті k_s примірників літери p_s. Усі ці літери шикуємо в ряд завдовжки $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ і запитуємо, скількома способами це можна зробити. Формування ряду можна здійснити так. Є $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ місць – від першого до останнього, – на які маємо розставити наші літери p_i. Спочатку обираємо ті k_1 місць, на які ставимо літери p_1. Вибір можна зробити

$$C^{k_1}_{k_1+k_2+k_3+\ldots+k_s}$$

способами. Який би варіант ми не обрали, для розміщення на наступному кроці літер p_2 матимемо $k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ місць. Обрати з них k_2 місць для розміщення літер p_2 можемо

$$C^{k_2}_{k_2+k_3+\ldots+k_s}$$

способами. Після цього обираємо з $k_3 + k_4 + \ldots + k_s$ ще вільних місць ті k_3 місць, на які поставимо літери p_3. Ці k_3 місць можемо обрати

$$C^{k_3}_{k_3+k_4+\ldots+k_s}$$

способами. Чинимо так і далі доти, доки не розставимо всі літери. На передостанньому кроці місця для літер p_{s-1} зможемо обирати

$$C^{k_{s-1}}_{k_{s-1}+k_s}$$

способами, а на останньому кроці місця для літер p_s –

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$C_{k_s}^{k_s}$$

способами. Оскільки число варіантів розміщення кожної наступної групи однакових літер не залежить від того, як було розміщено попередні літери, то згідно з комбінаторним правилом множення, вишикувати в ряд усі $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s$ літер зможемо

$$C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n_2}^{k_2} \cdot C_{n_3}^{k_3} \cdot \ldots \cdot C_{n_{s-1}}^{k_{s-1}} \cdot C_{n_s}^{k_s}$$

способами. Для скорочення через n_i позначаємо суму $k_i + k_{i+1} + \ldots + k_s$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ s)$.

Позначивши цей добуток через M і взявши до уваги той факт, що $n_i - k_i = n_{i+1}$, якщо $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ s-1$, і $n_s - k_s = 0$, отримуємо:

$$M = \frac{n_1!}{k_1!\,(n_1 - k_1)!} \cdot \frac{n_2!}{k_2!\,(n_2 - k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_s!}{k_s!\,(n_s - k_s)!} =$$

$$= \frac{n_1!}{k_1!\,n_2!} \cdot \frac{n_2!}{k_2!\,n_3!} \cdot \frac{n_3!}{k_3!\,n_4!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_{s-1}!}{k_{s-1}!\,n_s!} \cdot \frac{n_s!}{k_s!\,0!} =$$

$$= \frac{n_1!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_s!} = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_s)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ldots \cdot k_s!}.$$

Приклади. 1) Оскільки $100 = 2^2 \cdot 5^2$, то це число має

$$\frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} = 6$$

щільних ланцюгів дільників. Ось вони:

$$100,\ 20,\ 4,\ 2,\ 1;$$

$$100,\ 20,\ 10,\ 2,\ 1;$$

$$100,\ 50,\ 10,\ 2,\ 1;$$

$$100,\ 50,\ 25,\ 5,\ 1;$$

$$100,\ 50,\ 10,\ 5,\ 1;$$

$$100,\ 20,\ 10,\ 5,\ 1.$$

2) Будь-який степінь простого числа має одним-один щільний ланцюг дільників. Наприклад, для числа 2^5 це буде ланцюг

$$32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1.$$

Перелічити всі, а не тільки щільні ланцюги довільного числа a складно, і ми тут не будемо обговорювати в загальному вигляді цю проблему. Натомість розглянемо кілька часткових задач, котрі її стосуються.

Нескладно помітити, скільки всього ланцюгів дільників має степінь простого числа, тобто число p^k, де p – просте число. Оскільки число p^k має лише один щільний ланцюг дільників

$$p^k,\ p^{k-1},\ p^{k-2},\ \dots\ ,\ p^2,\ p,\ 1,$$

то будь-який його ланцюг отримаємо, викресливши в щільному ланцюзі кілька проміжних (не крайніх) дільників p^i ($i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ k-1$) або ж залишивши все так, як є. В останньому випадку матимемо той-таки щільний ланцюг. Із $k-1$ наявних чисел викреслити кілька (або жодного, або одне, або два і т.д. аж до їх усіх) можемо 2^{k-1} способами (кожне число або викреслене, або ні – два варіанти). Тому число p^k (p – просте) має 2^{k-1} ланцюгів дільників.

Приклад. Ось усі ланцюги дільників числа 2^3:

$$8,\ 4,\ 2,\ 1;\ \ 8,\ 4,\ 1;\ \ 8,\ 2,\ 1;\ \ 8,\ 1.$$

Достоту так само можна полічити всі ті ланцюги дільників довільного числа a, котрі є похідними одного щільного ланцюга дільників цього числа (ланцюг L називаємо похідним ланцюга A, якщо L можна отримати, видаливши з A кілька (зокрема й 0) проміжних чисел). Якщо щільні ланцюги числа a мають довжину n, то кожний з них має 2^{n-1} похідних ланцюгів.

Оскільки не щільні ланцюги можуть бути похідними кількох щільних, то з останнього результату не можна просто виснувати в загальному випадку, скільки всього ланцюгів має число.

Висновки

Дана стаття є спробою популяризувати строгі концепції основ теорії чисел. ЇЇ текст дозволяє читачам ознайомитись із основними поняттями теорії подільності та деякими методами їхнього дослідження. Користуючись матеріалами статті, учні та учениці профільних математичних класів закладів загальної середньої освіти мають змогу розпочати власні дослідження у царині алгебри та теорії чисел, а студенти початкових

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

курсів закладів вищої освіти – краще осягнути необхідний для вивчення матеріал відповідних базових математичних курсів.

Внесок авторів. Володимир Вишенський – оригінальний текст статті, методика та концептуалізація. Олексій Печериця – аналіз джерел, перевірка, адаптація та коректура остаточного тексту статті.

Подяка. Олексій Печериця дякує редакційній колегії журналу «У світі математики» за можливість публікації цього тексту, а Віктору Володимировичу та Інні Яківні Вишенським – за надання рукопису цієї статті, яка є останньою неопублікованою за життя працею Володимира Андрійовича Вишенського.

Список використаних джерел

Perestyuk Mykola, Vyshenskyi Volodymyr. (2022). *Combinatorics : first steps.* New York : Nova Science Publishers, Inc., Series: Computational mathematics and analysis | Includes bibliographical references and index. ISBN 9781685072971 LC ebook record available at https://lccn.loc.gov/2021050253.

Отримано редакцією журналу: 01.03.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Volodymyr VYSHENSKY, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksii PECHERYTSIA, teacher of mathematics of higher category, teacher-methodist
ORCID ID: 0000-0001-7016-9854
e-mail: oleksii.pecherytsia@knu.ua
Ukrainian Physics and Mathematics Lyceum
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

CHAINS OF DIVISORS: THE COMBINATORY ASPECT

Abstract. *The article is devoted to the divisors of natural numbers and properties related to the factorization of a natural number. In particular, the article deals with the canonical form of writing the decomposition of a number into prime factors, its generalization in the form of an infinite multiplicative structure, and the number of divisors of a given number. In addition, the concepts of chains of divisors of a number, factors of chains of divisors, mutual conditioning of a chain of divisors and sequences of its factors are considered. The so-called dense chains of divisors of a given number are separately investigated and how the lengths of such chains are related to its multiplicative structure, two methods of counting the total number of dense chains of divisors of a given number are given. The article is addressed to schoolchildren, teachers of general secondary education institutions and everyone who loves mathematics.*

Keywords: *Divisibility; factoring a number; number of divisors of the number; the basic theorem of arithmetic; chain of divisors; chain factor of divisors; a dense chain of divisors.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 519.218.7 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.7**

Нікіта АРСЬКИЙ, студент
ORCID ID: 0009-0000-9340-2639
e-mail: nikita.arskiy.25@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

АРИФМЕТИЧНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ҐАУСОВИХ ЧИСЕЛ

Анотація. *Комплексні числа, у яких дійсна та уявна частини є цілими, називаються ґаусовими. У цій статті на ґаусові числа переносяться відомі теоретико-числові функції: кількість, сума та добуток дільників. Для цих функції доводяться формули для обчислення, що використовують розклад числа на прості множники, та властивості, пов'язані з асоційованими та спряженими ґаусовими числами. Виведено також формули для кількості, суми та добутку всіх дільників ґаусового числа, що кратні іншому ґаусовому числу. Застосування отриманих результатів проілюстровано в розв'язаннях задач.*

Ключові слова: *ґаусове число; дільник; кількість дільників; сума дільників; добуток дільників.*

1. Вступ

Працюючи над біквадратичним законом взаємності, у кінці 1820-х років видатний німецький математик Карл Фрідріх Ґаус дослідив властивості одного класу комплексних чисел, які **тепер називаються** на його честь – *ґаусові числа*. Виявилося, що з точки зору подільності ґаусові числа поводяться подібно до натуральних. Зокрема, для них доведені теореми про ділення з остачею, існування найбільшого спільного дільника та однозначний розклад на прості множники. Завдяки цим властивостям ґаусові числа є корисними для розв'язування широкого класу діофантових рівнянь, а також полегшують доведення деяких теорем. Наприклад, за їх допомогою можна неважко довести таке зовсім не тривіальне твердження, яке часто називають різдвяною теоремою Ферма: *довільне просте число вигляду* $4k+1$ *розкладається в суму двох точних квадратів.*

У цій статті ми переносимо на ґаусові числа класичні арифметичні функції: кількість, суму та добуток дільників.

2. Огляд літератури

Перші результати про подільність ґаусових чисел, отримані Ґаусом, можна знайти в його монографії (Gauss, 1973). Також із теорією ґаусових чисел можна познайомитися, наприклад, у статтях (Calcut, 2009) і (Willerding, 1966), чи в підручнику (Stillwell, 2003). Зокрема, у вказаних джерелах містяться поняття та теореми, що були використані при отриманні результатів цієї статті.

Детальнішу інформацію про функції кількості, суми та добутку дільників ґаусового числа можна знайти в (Arskyi, 2023).

3. Основні відомості про ґаусові числа

Ґаусовими називають комплексні числа, у яких дійсна та уявна частини є цілими. Множина усіх ґаусових чисел позначається $Z[i]$. Зауважимо, що за означенням, кожне

ціле число є ґаусовим. У цьому підрозділі ми наведемо основні поняття та твердження (без доведення), пов'язані із ґаусовими числами.

Ґаусові числа α і β називають *асоційованими*, якщо $\beta = \mu\alpha$, де $\mu \in \{\pm 1, \pm i\}$. Те, що числа α і β є асоційованими, позначається $\alpha \sim \beta$. *Нормою* ґаусового числа $\alpha = a + bi$ називається число $N(\alpha) = a^2 + b^2$.

Очевидно, що сума, різниця та добуток двох ґаусових чисел також є ґаусовим. Однак частка двох ґаусових чисел не завжди буде належати множині $Z[i]$. З огляду на це природним є таке означення.

Означення 1. *Кажуть, що ґаусове число α ділиться націло на ненульове ґаусове число β, якщо існує таке ґаусове число γ, що $\alpha = \beta\gamma$. При цьому число β називають дільником числа α і використовують позначення $\beta|\alpha$.*

Довільне ґаусове число $\alpha \neq 0$ ділиться на числа $\pm 1, \pm i, \pm\alpha, \pm\alpha i$. Ці дільники числа α називають *тривіальними*. Дільники, які не є тривіальними, називають *нетривіальними*.

Означення 2. *Ґаусове число $\rho, N(\rho) > 1$ називається простим, воно не має нетривіальних дільників. Числа, що мають нетривіальні дільники, називають складеними.*

Зауважимо, що хоча всі натуральні числа є ґаусовими, *прості* натуральні числа можуть буди складеними в $Z[i]$. Наприклад, число 2 є складеним як ґаусове, оскільки $2 = (1 + i)(1 - i)$.

Означення 3. *Найбільшим спільним дільником ненульових ґаусових чисел α і β називають такий їхній спільний дільник δ, який ділиться на всі спільні дільники цих чисел. Якщо 1 є найбільшим спільним дільником чисел α і β, то ці числа називають взаємно простими.*

Нижче ми наведемо кілька важливих теорем, які показують, що подільність ґаусових чисел влаштована подібно до подільності натуральних чисел.

Теорема 1 (про ділення з остачею для ґаусових чисел). *Для довільних $\alpha, \beta \in Z[i]$, $\beta \neq 0$, існують такі $\gamma, \rho \in Z[i]$, що $\alpha = \beta\gamma + \rho$ і $N(\rho) < N(\beta)$.*

Теорема 2. *Для довільних ненульових ґаусових чисел α та β їхній найбільший спільний дільник існує, причому його можна подати у вигляді $\gamma\alpha + \kappa\beta$ для деяких $\gamma, \kappa \in Z[i]$.*

Теорема 3. *Якщо ґаусові числа α і β взаємно прості і $\beta|\alpha\gamma$, то $\beta|\gamma$.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Теорема 4 (основна теорема арифметики для ґаусових чисел). *Довільне ґаусове число α, таке що $N(\alpha) > 1$, можна подати у вигляді $\alpha = \mu\rho_1^{a_1} \cdots \rho_k^{a_k}$, де $\mu \sim 1$, а $\rho_1, \ldots, \rho_k$ — попарно не асоційовані прості числа. Цей розклад єдиний із точністю до порядку множників та їх асоційованості.*

Теорема 5. *Кожне просте ґаусове число ρ задовольняє рівно одну із таких трьох умов:*

1. $\rho \sim 1 + i$;
2. $\rho \sim p$, *де* p *– просте натуральне число вигляду* $4k + 3$;
3. $N(\rho)$ *– просте натуральне число вигляду* $4k + 1$.

Теорема 6. *Ґаусове число $\alpha = a + bi$ ділиться на $1 + i$ тоді й тільки тоді, коли числа a і b однієї парності.*

4. Результати.

Оскільки у ненульового ґаусового числа кількість дільників скінченна, то постає природне питання: чому дорівнюють їхня кількість, сума і добуток. Для натуральних чисел відповідні функції детально вивчені. Ознайомитися із їхніми властивостями та застосуванням до розв'язування задач можна, наприклад, у (Koshy, 2007). У цьому підрозділі ми введемо аналогічні функції для ґаусових чисел та доведемо основні твердження, пов'язані з ними, а також проілюструємо застосування отриманих результатів для розв'язування задач.

Означення 4. *Для ненульового ґаусового числа α визначимо функції*

$$\tau^*(\alpha) = \sum_{\delta|\alpha} 1, \qquad \sigma_m^* = \sum_{\delta|\alpha} \delta^m, \qquad \pi^*(\alpha) = \prod_{\delta|\alpha} \delta$$

як кількість, суму m-тих $(m \in N)$ степенів та добуток усіх дільників числа α відповідно.

Зауважимо, що якщо δ є дільником числа α, то $-\delta, \delta i$ та $-\delta i$ також будуть дільниками α. Але тоді якщо m не кратне 4, то сума m-тих степенів усіх дільників числа α дорівнюватиме нулю. З огляду на це надалі розглядатимемо лише випадок, коли $4|m$.

Значення введених нами функцій для $\alpha = 1$ обчислити легко: $\tau^*(1) = 4$, $\sigma_{4m}^*(1) = 4$, $\pi^*(1) = -1$. Наступна теорема дає змогу обчислювати значення цих функцій і для чисел, не асоційованих з одиницею.

Теорема 7. *Нехай $\alpha = \mu\rho_1^{a_1} \cdots \rho_k^{a_k}$ – розклад числа α на прості множники, а $m \in N$. Тоді:*

$$\tau^*(\alpha) = 4\prod_{j=1}^{k}(a_j+1),$$

$$\sigma^*_{4m}(\alpha) = 4\prod_{j=1}^{k}\frac{\rho_j^{4m(a_j+1)}-1}{\rho_j^{4m}-1} = 4\prod_{j=1}^{k}\left(1+\rho_j^{4m}+\rho_j^{8m}+\cdots+\rho_j^{4ma_j}\right),$$

$$\pi^*(\alpha) = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}, & \textit{якщо } \alpha \textit{ не є квадратом ґаусового числа,} \\ -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}, & \textit{якщо } \alpha \textit{ є квадратом ґаусового числа.} \end{cases}$$

Доведення. Довільний дільник ґаусового числа α має вигляд $\vartheta\rho_1^{b_1}\cdots\rho_k^{b_k}$, де $\vartheta \sim 1$ і $0 \le b_j \le a_j, 1 \le j \le k$. Тому число ϑ може набувати 4 можливих значення, а b_j — a_j+1 можливих значень, $1 \le j \le k$. Застосувавши комбінаторне правило добутку, знаходимо значення $\tau^*(\alpha)$.

Щоб отримати значення $\sigma^*_{4m}(\alpha)$, розглянемо добуток

$$(1+1+1+1)\prod_{j=1}^{k}\left(1+\rho_j^{4m}+\rho_j^{8m}+\cdots+\rho_j^{4ma_j}\right).$$

Після розкриття дужок отримуємо суму усіх можливих доданків вигляду $\left(\vartheta\rho_1^{b_1}\cdots\rho_k^{b_k}\right)^{4m}$, тобто суму $4m$-тих степенів усіх дільників числа α.

Знайдемо, чому дорівнює добуток дільників числа α. Нехай $\beta_1,\ldots,\beta_{\tau^*(\alpha)}$ – усі дільники числа α. Помітимо, що число β є дільником числа α тоді й тільки тоді, коли $\frac{\alpha}{\beta}$ є дільником числа α. Тому можемо записати:

$$\pi^*(\alpha) = \beta_1\cdots\beta_{\tau^*(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta_1}\cdots\frac{\alpha}{\beta_{\tau^*(\alpha)}},$$

звідки

$$\left(\pi^*(\alpha)\right)^2 = \beta_1\cdots\beta_{\tau^*(\alpha)}\cdot\frac{\alpha}{\beta_1}\cdots\frac{\alpha}{\beta_{\tau^*(\alpha)}} = \alpha^{\tau^*(\alpha)}.$$

Тому $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ або $\pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Дільники числа α природно розпадаються на четвірки: $\left(\delta_j, -\delta_j, i\delta_j, -i\delta_j\right)$, $1 \le j \le \frac{1}{4}\tau^*(\alpha)$. Тому можемо записати:

$$\pi^*(\alpha) = \prod_{j=1}^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)} \left(\left(\delta_j\right) \cdot \left(-\delta_j\right) \cdot \left(i\delta_j\right) \cdot \left(-i\delta_j\right)\right) = (-1)^{\frac{1}{4}\tau^*(\alpha)}\gamma^4.$$

Тепер розглянемо три випадки.

1. Якщо $\alpha = \mu\rho_1^{a_1} \cdots \rho_k^{a_k}$ не є асоційованим із квадратом ґаусового числа, то для деякого j число a_j непарне. Тому число $\tau^*(\alpha)$ ділиться на 8 і $\pi^*(\alpha) = \gamma^4$. Оскільки -1 не є четвертим степенем ґаусового числа, то випадок $\pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ неможливий, отже, $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

2. Якщо $\alpha = i\omega^2, \omega \in Z[i]$, за допомогою аналогічних міркувань отримуємо, що число $\tau^*(\alpha)$ не ділиться на 8, а тому $\pi^*(\alpha) = -\gamma^4$ і $\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} = -\omega^{\tau^*(\alpha)}$. Оскільки число -1 не є четвертим степенем ґаусового числа, то випадок $\pi^*(\alpha) = -\gamma^4 = \omega^{\tau^*(\alpha)} = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$ неможливий. Тому $\pi^*(\alpha) = \alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

3. Якщо $\alpha = \omega^2, \omega \in Z[i]$, то, міркуючи аналогічно, отримуємо, що $\pi^*(\alpha) = -\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}$.

Підсумувавши ці випадки, отримуємо формулу із твердження теореми.

■

З формул для обчислення одразу випливають такі найпростіші властивості функцій τ^*, σ_{4m}^* та π^*:

Твердження 1.

1. *Для асоційованих ґаусових чисел значення функцій τ^*, σ_{4m}^* та π^* рівні.*

2. *Для спряжених ґаусових чисел значення функції τ^* однакові, а значення функцій σ_{4m}^* та π^* відповідно спряжені.*

3. *Якщо $\alpha \in Z$, то $\sigma_{4m}^*(\alpha) \in Z$ та $\pi^*(\alpha) \in Z$.*

Задача 1. *Обчисліть кількість, суму четвертих степенів та добуток усіх дільників чисел $\alpha = 7 + 9i, \beta = 9 + 7i$.*

Розв'язання. Розкладемо число α на прості множники. Оскільки числа 7 та 9 однієї парності, то $(1 + i)|\alpha$. Після ділення отримуємо, що $\alpha = (1 + i)(8 + i)$. Щоб знайти прості дільники числа $8 + i$, знайдемо його норму та розкладемо її на множники.

$$N(8 + i) = 65 = 5 \cdot 13 = (1^2 + 2^2)(2^2 + 3^2 = (1 + 2i)(1 - 2i)(2 + 3i)(2 - 3i).$$

Таким чином, $8+i$ ділиться на одне з чисел $1\pm 2i$ та на одне з чисел $2\pm 3i$. Перевіркою пересвідчуємося, що $8+i=(1+2i)(2-3i)$. Отже, шуканий розклад такий:

$$7+9i=(1+i)(1+2i)(2-3i).$$

Використовуючи формули, знаходимо: $\tau^*(7+9i)=4(1+1)(1+1)(1+1)=32$, $\sigma_4^*(7+9i)=4(1+(1+i)^4)(1+(1+2i)^4)(1+(2-3i)^4)=-43056-25344i$, $\pi^*(7+9i)=(7+9i)^{\frac{32}{2}}=(7+9i)^{16}$.

Тепер помітимо, що $\beta=9+7i=i(7-9i)=i\underline{\alpha}\sim\underline{\alpha}$. Тому $\tau^*(\beta)=\tau^*(\alpha)=16$, $\underline{\sigma_4^*(\alpha)}=\sigma_4^*(\beta)=-43056+25344i$, $\underline{\pi^*(\alpha)}=\pi^*(\beta)=(7-9i)^{16}$.

Відповідь. $\tau^*(\alpha)=\tau^*(\beta)=32$, $\sigma_4^*(\alpha)=-43056-25344i$, $\sigma_4^*(\beta)=-43056+23544i$, $\pi^*(\alpha)=(7+9i)^{16}$, $\pi^*(\beta)=(7-9i)^{16}$.

Задача 2. *Знайдіть усі ґаусові числа α, для яких $\tau^*(\alpha)=24$ та $\sigma_4^*(\alpha)=4264$.*

Розв'язання. Очевидно, що α не є асоційованим із одиницею. Нехай $\alpha=\mu\rho_1^{a_1}\cdots\rho_k^{a_k}$ — розклад числа α на прості множники. Тоді $\tau^*(\alpha)=24=4(a_1+1)\cdots(a_k+1)$, а тому $(a_1+1)\cdots(a_k+1)=6=(1+1)(2+1)=5+1$. Таким чином, маємо два варіанти: $\alpha=\mu\rho^5$ або $\alpha=\mu\rho\xi^2$ для деяких простих ρ та ξ. Розглянемо їх окремо.

1. Якщо $\alpha=\mu\rho^5$ для деякого простого ρ, то $\sigma_4^*(\alpha)=4(1+\rho^4+\rho^8+\rho^{12}+\rho^{16}+\rho^{20})=4264$, звідки $\rho^4(1+\rho^4+\rho^8+\rho^{12}+\rho^{16})=1065$. Число 1065 як ґаусове розкладається на прості множники таким чином: $1065=3\cdot 71(1-2i)(1+2i)$, а тому воно не ділиться на четвертий степінь простого числа. Отже, цей випадок не дає розв'язків до задачі.

2. Якщо $\alpha=\mu\rho\xi^2$, то $\sigma_4^*(\alpha)=4(1+\rho^4)(1+\xi^4+\xi^8)=4264$, а тому $(1+\rho^4)(1+\xi^4+\xi^8)=1066$. Звідси $(1+\rho^4)|1066$. Перевіркою пересвідчуємося, що ρ не може бути асоційованим із $1+i$. Нехай $\rho=a+bi$. Тоді a та b мають різну парність. Застосувавши формулу бінома Ньютона, отримуємо:

$$1+\rho^4=(1+a^4-6a^2b^2+b^4)+4(a^3b-ab^3)i.$$

Тому $1+\rho^4$ ділиться на 2. Перебравши дільники числа 1066, що діляться на 2, отримуємо, що $\alpha\sim 6$, тобто $\alpha\in\{6,-6,6i,-6i\}$.

Відповідь. $\alpha\in\{6,-6,6i,-6i\}$.

Обчислимо значення кількості, суми та добутку усіх дільників ґаусового числа, кратних деякому числу.

Твердження 2. *Нехай число δ є дільником ненульового ґаусового числа α. Тоді кількість, сума $4m$-тих степенів та добуток усіх дільників числа α, які діляться на δ, дорівнюють $\tau^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$, $\delta^{4m}\sigma_{4m}^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$ та $\delta^{\tau^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)}\pi^*\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)$ відповідно.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Доведення. Довільний дільник числа α, що ділиться на δ, можна єдиним чином нзаписати у вигляді $\gamma\delta$, де γ – деякий дільник числа $\frac{\alpha}{\delta}$. Звідси одразу випливає формула для кількості таких дільників. Для їхньої суми маємо:

$$\sum_{\beta|\alpha,\delta|\beta} \beta^{4m} = \sum_{\gamma|(\alpha/\delta)} \gamma^{4m}\delta^{4m} = \delta^{4m} \sum_{\gamma|(\alpha/\delta)} \gamma^{4m} = \delta^{4m}\sigma_{4m}^{*}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right).$$

Для добутку таких дільників доведення аналогічне.

■

Задача 3. *Скільки дільників числа* 1066 *у випадку (2) задачі 2 вдалося відкинути за допомогою доведення того, що* $2|(1+\rho^4)$*?*

Розв'язання. Ми відкинули всі дільники числа 1066, що не діляться на 2. Очевидно, що їхня кількість дорівнює різниці кількості усіх дільників числа 1066 та тих, що кратні 2. Розкладемо число 1066 на прості множники:

$$1066 = 2 \cdot 13 \cdot 41 = -i(1+i)^2(2-3i)(2+3i)(4-5i)(4+5i).$$

Тоді шукана кількість дорівнює

$$\tau^*(1066) - \tau^*(533) = 4 \cdot 3 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^4 = 192 - 64 = 128.$$

Таким чином, було відкинуто 128 варіантів, що складає дві третини від початкової кількості.

Відповідь. 128.

Добре відомо, що функція $\pi(n)$ добутку дільників натурального числа n є ін'єктивною. На множині ґаусових чисел аналогічна функція π^* є "майже" ін'єктивною.

Твердження 3. *Якщо для деяких* $\alpha, \beta \in Z[i]$ *виконується рівність* $\pi^*(\alpha) = \pi^*(\beta)$*, то* $\alpha \sim \beta$*.*

Доведення. Якщо $\alpha \sim 1$ або $\beta \sim 1$, то твердження очевидне. Нехай α і β не є асоційованими з одиницею. З формули для обчислення функції π^* випливає, що числа α і β повинні мати однакові прості дільники. Нехай $\alpha = \mu\rho_1^{a_1}\cdots\rho_k^{a_k}$ та $\beta = \vartheta\rho_1^{b_1}\cdots\rho_k^{b_k}$. Тоді

$$\alpha^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)} = \mu^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)}\rho_1^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)a_1}\cdots\rho_k^{\frac{1}{2}\tau^*(\alpha)a_k} = \pm\beta^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)} = \pm\vartheta^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)}\rho_1^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)b_1}\cdots\rho_k^{\frac{1}{2}\tau^*(\beta)b_k}.$$

Звідси для довільного $j, 1 \le j \le k$, виконується рівність $a_j\tau^*(\alpha) = b_j\tau^*(\beta)$. Тому

$$\frac{a_1}{b_1} = \cdots \frac{a_k}{b_k} = \frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)}.$$

Якби виконувалася нерівність $\frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)} > 1$, то для довільного j було б $a_j > b_j$, але тоді ми б отримали нерівність $\tau^*(\alpha) > \tau^*(\beta)$, яка суперечить початковій. Аналогічно до суперечності призводить припущення, що $\frac{\tau^*(\alpha)}{\tau^*(\beta)} > 1$. Отже, $\frac{a_1}{b_1} = \cdots \frac{a_k}{b_k} = \frac{\tau^*(\beta)}{\tau^*(\alpha)} = 1$, звідки $a_j = b_j, 1 \le j \le k,$ і $\alpha \sim \beta$.

■

Наслідок 1. $\pi^*(\alpha) \in Z$ *тоді й тільки тоді, коли* α *асоційоване із цілим числом.*

Доведення цього наслідку залишаємо читачеві як вправу.

Задача 4. *Для яких натуральних чисел* n *добуток усіх дільників числа* $(1+i)^n$ *є цілим числом?*

Розв'язання. За наслідком 1, число α має бути асоційованим із цілим числом. Розглянемо випадки в залежності від остачі від ділення числа n на 4:

$$(1+i)^{4k} = (-4)^k \in Z;\ (1+i)^{4k} = (-4)^k \in Z;$$

$$(1+i)^{4k+2} = (-4)^k \cdot 2i \sim 2(-4)^k \in Z;\ (1+i)^{4k+3} = (-4)^k(-2+2i) \notin Z.$$

Отже, умову задовольняють лише парні числа.
Відповідь. Для парних n.

Висновки

У цій статті розглянуто функції кількості, суми та добутку дільників на множині ґаусових чисел. Для них доведено формули для обчислення та співвідношення між їхніми значеннями для асоційованих та спряжених ґаусових чисел; отримано формули для кількості, суми та добутку тих дільників ґаусового числа, що кратні деякому фіксованому ґаусовому числу. Наведено також кілька прикладів задач, які можна розв'язати за допомогою виведених тверджень.

Отримані результати мають спільні риси із відповідними теоремами для натуральних чисел, але й дещо відрізняються від них. Наприклад, формули для обчислення функцій τ^* та σ^*_{4m} мають додатковий множник 4. Це пояснюється тим, множина ґаусових чисел містить 4 дільники одиниці: $1, -1, i, -i$. До суттєвих розбіжностей призводить і той факт, що комплексні (зокрема, і ґаусові) числа не можна порівнювати між собою так само, як дійсні.

Перспективи для подальших досліджень полягають не лише в знаходженні нових властивостей для функцій дільників для ґаусових чисел, а й в узагальненні теорії таких

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

функцій для інших множин, для елементів яких визначена подільність. Цікавим прикладом є множина так званих *чисел Айзенштайна* – чисел вигляду $a + b\omega$, де $a, b \in Z$, а $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ – кубічний корінь з одиниці.

Список використаних джерел

Arskyi, N. (2023). Number-theoretic functions for Gaussian *integers*. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*. (1), 11–20. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.1

Calcut, J. S. (2009). Gaussian Integers and Arctangent *Identities* for π. *The American Mathematical Monthly*, *116*(6), 515–530. http://www.jstor.org/stable/40391144

Gauss, C. F. (1973). Theoria residuorum *biquadraticorum*. Commentatio secunda. Comm. Soc. Reg. Sci. Göttingen 7: 89-148; reprinted in Werke, Hildesheim: Georg Olms Verlag. p. 93–148.

Koshy, T. (2007). *Elementary Number Theory with Applications* (2nd ed.). Academic Press

Stillwell, J. (2003). *Elements of Number Theory.* New York: Springer *Science*+Business Media.

Willerding, M. F. (1966). Divisibility and factorization of *Gaussian* integers. *The Mathematics Teacher,* 59(7). p. 634-637. http://www.jstor.org/stable/27957439

Отримано редакцією журналу: 12.04.2024
Схвалено до друку: 24.06.2024

Nikita ARSKYI, Student
ORCID ID: 0009-0000-9340-2639
e-mail: nikita.arskiy.25@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Lyiv, Kyiv, Ukraine

ON SOME ARITHMETIC FUNCTIONS FOR GAUSSIAN INTEGERS

Abstract. *Complex numbers whose real and imaginary parts are integers are called Gaussian integers. In this article, the well-known arithmetic functions—the number, sum and product of divisors—are generalized to Gaussian integers. For this functions, the formulae for calculation that use the prime factorization were derived, and some properties of these functions that concern associative or conjugate Gaussian integers were established. Obtained were also the formulae of the number, sum and product of all divisors of a Gaussian integer that are themselves divisible by a certain number. The usefulness of the obtained results are illustrated in the solutions to some problems.*

Keywords: *Gaussian integer, divisor, number of divisors, sum of divisors, product of divisors.*

Обрії математики

УДК 514.112 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.8**

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Світлана Білун, Канд. фіз.-мат. наук.
ORCID ID: 0000-0003-2925-5392
e-mail: bilun@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ГЕОМЕТРІЯ ТА ТОПОЛОГІЯ ПРОЄКТИВНОЇ ПЛОЩИНИ

Анотація. *Описано топологічну структуру та геометричні властивості проєктивної площини, а також її групу рухів, що породжують проєктивні перетворення евклідової площини.*

Ключові слова: *проєктивна площина; група рухів; топологічна структура.*

1. Вступ.

Актуальність дослідження. В комп'ютерній графіці при русі об'єкта спостереження, зображення нерухомих тривимірних тіл на площині весь час проєктуються з різних точок. Вони між собою пов'язані проєктивними перетвореннями площини. Це пояснює актуальність робіт з проєктивної геометрії (Greenberg, 1974) (Борисенко, 1995), (Beutelspacher, Rosenbaum, 1998), (Hilbert, Cohn-Vossen, 1999) (Пришляк, 2013).

Об'єктом дослідження є проєктивна площина або, більш загально, проєктивний простір. Під n-вимірним проєктивним простором розуміють простір 1-вимірних підпросторів (прямих, що проходять через початок координат) в евклідовому просторі розмірності $n+1$. При цьому відстань між точками проєктивного простору – це кут між відповідними прямими.

Основна мета цієї статті – описати топологічну структуру та геометричні властивості проєктивної площини, а також її групу рухів. Ми пояснимо, звідки береться її назва, а також, що таке нескінченно віддалена пряма, що фігурує в традиційному означенні проєктивної площини. В роботі поряд з важливими фактами теорії наводимо низку вправ, яку читачеві пропонуємо розв'язати самостійно.

Ми використовуємо методи диференціальної геометрії та теорії груп. Зокрема властивості орбіт під дією групи використовуються як для описання топологічних властивостей проективного простору, так і його групи рухів, а для описання властивостей проективних прямих ми використовуємо геодезичні лінії.

2. Основні означення та результати.

2.1. Проєктивна пряма RP^1. *Дійсна проєктивна пряма* – це множина одновимірних підпросторів двовимірного простору або, іншими словами, прямих на площині, що проходять через початок координат. *Відстань між прямими* визначається як найменший (тобто гострий або прямий) кут між ними.

Вправа 1. *Перевірте, що так визначена відстань задовольняє аксіомам метрики*.

Опишемо топологічні та геометричні властивості проєктивної прямої. Нагадаємо,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

що геометричні властивості – це ті, що зберігаються при ізометріях (бієктивних відображеннях, що зберігають відстань або довжини кривих), а топологічні властивості зберігаються при гомеоморфізмах (неперервних бієктивних відображеннях, обернені до яких також неперервні). Для цього побудуємо відображення $p: RP^1 \to S_{\frac{1}{2}}$ проєктивної прямої на коло радіуса $\frac{1}{2}$ за формулою

$$p(\alpha) = \left\{\frac{1}{2}\cos(2\alpha), \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right\},$$

де α – кут нахилу відповідної прямої.

Вправа 2. *Перевірте, що відображення p є гомеоморфізмом.*

Вправа 3. *Перевірте, що відображення p є ізометрією*.

2.2. Означення проєктивної площини RP^2. Проєктивна площина є проєктивним простором розмірності 2.

Означення 1. *Дійсна проєктивна площина* – це *множина одновимірних підпросторів тривимірного евклідового простору*.

Розглянемо в тривимірному евклідовому просторі сферу S^2 з центром у початку координат і радіуса 1. Кожний одновимірний підпростір є прямою, що проходить через початок координат. Вона перетинає сферу по парі діаметрально протилежних точок. Тому існує бієкція між одновимірними підпросторами і парами діаметрально протилежних точок на сфері.

Означення 2. *Проєктивна площина є факторпростором двовимірної сфери за відношенням еквівалентності породженим симетрією відносно центра сфери (клас еквівалентності - це пара діаметрально протилежних точок):*

$$PR^2 = S^2/\sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p,\ p \in S^2.$$

На S^2 можна задати дію групи $Z_2 = \{1, -1\}$ як $1p = p$ і $-1p = -p$. Тоді проєктивна площина є множина орбіт цієї дії: $RP^2 = \frac{S^2}{Z_2}$.

Опишемо ще один спосіб побудови проєктивної площини. Нагадаємо, що в топології кажуть, що *точки склеєні*, якщо вони попадають в один клас еквівалентності при факторизації. Щоб склеїти діаметрально протилежні точки сфери, спочатку склеїмо точки верхньої півсфери з точками нижньої півсфери (без екватору). Ортогонально спроєктуємо отриману нижню півсферу на горизонтальну площину. Отримаємо двовимірний диск (круг) D^2, у якого потрібно склеїти симетричні точки межі.

Означення 3.

$$PR^2 = D^2/\sim, \text{ де } p \sim p \text{ або } p \sim -p,\ p \in \partial D^2.$$

Замість ортогональної проекції застосуємо центральну проекцію нижньої півсфери з центра сфери на площину $z = -1$. При цьому точки нижньої півсфери бієктивно

відображаються на точки площин, а точки екватора переходять в точки на нескінченності.

Означення 4. *Проєктивна площина – це евклідова площина з нескінченно віддаленими точками. Кожна така нескінченно віддалена точка відповідає класу еквівалентності паралельних прямих. Цей клас еквівалентності також називають напрямком. При цьому множина нескінченно віддалених точок утворює проєктивну пряму*.

Повсякчасне застосування проєктивної площини та відстані: коли ми дивимось на об'єкт в тривимірному просторі, то сприймаємо промені від нього на сітківку ока. При цьому відстані та розміри об'єктів нами оцінюються за допомогою кутів між цими променями, тобто за допомогою проєктивної метрики або відстані на сфері (сітківці). При обертанні голови відбуваються проєктивні перетворення (ізометричні перетворення сфери).

2.3. Топологічна структура.

Теорема 1. *На проєктивній площині існує замкнена крива, яка розбиває проєктивну площину на дві частини, одна з яких гомеоморфна листу Мьобіуса, а інша двовимірному диску.*

Наслідок 1. *Якщо з проєктивної площини викинути досить малий регулярний окіл довільної точки, то отримана множина гомеоморфна листу Мьобіуса*.

Наслідок 2. *Проєктивна площина є неорієнтованою поверхнею*.

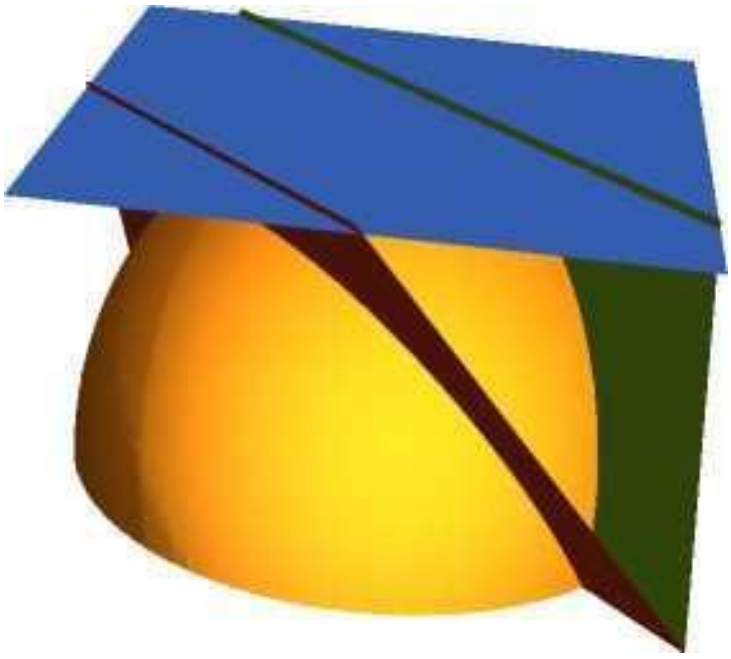


Рис. 1: Дві паралельні прямі, що перетинаються в точці на нескінченності

Насправді кожна замкнена неорієнтована поверхня може бути отримана як деяке число проєктивних площин, з яких викинуті двовимірні диски, а межі отриманих дірок попарно склеєні за допомогою деяких гомеоморфізмів.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2.4. Геометричні властивості. Локальні властивості проєктивної площини такі самі, як на одиничній сфері.

Проєктивна пряма – двовимірний підпростір. Оскільки двовимірний підпростір (площина, що проходить через початок координат) перетинається з одиничною сферою S^2 за колом радіусу 1 з центром в початку координат (велике коло), то після ототожнення па ньому діаметрально протилежних точок знову отримаємо коло. Це значить, що проєктивна пряма гомеоморфна колу, тобто є замкненою кривою.

Теорема 2. *Найкоротша крива між двома точками проєктивного простору є відрізком проєктивної прямої*.

Нагадаємо, що кут між кривими на поверхні визначається як кут між їх дотичними у точці перетину.

Вправа 4. *Довести, що кут між проєктивними прямими дорівнює куту між їх двовимірними просторами і дорівнює куту між нормалями до них*.

Зауважимо, що ортогональне доповнення у тривимірному просторі задає бієкцію між проєктивними прямими та точками проєктивного простору.

Вправа 5. *Довести, що площа трикутника, утвореного проєктивними прямими, дорівнює сумі його кутів мінус* π.

Наслідок. *Сума кутів трикутника в проєктивній геометрії більша за* π.

2.5. Група рухів проєктивної площини.

Група рухів проєктивної площини пов'язана з групою рухів сфери, для яких образи діаметрально протилежних точок буть діаметрально протилежними. Рухи на сфері утворюють групу ортогональних перетворень $O(3)$ і вони переводять діаметрально протилежні точки в такі самі. Але оскільки центральна симетрія задає тотожне перетворення проєктивної площини, то слід профактеризувати групу $O(3)$ за цим претворенням. Отримаємо групу $SO(3)$. Її елементи є обертаннями навколо осей в тривимірному просторі.

Вправа 6. *Довести, що як топологічний простір ця група гомеоморфна проєктивному простору розмірності* 3.

2.6. Однорідна система координат.

$$x{:}\,y{:}\,z = kx{:}\,ky{:}\,kz$$

За допомогою однорідних координат можна побудувати атлас карт на проєктивній площині:

1) перша карта $x \neq 0$, $x{:}\,y{:}\,z \to \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, параметризація $(y, z) \to 1{:}\,y{:}\,z$;
2) друга карта $y \neq 0$, $x{:}\,y{:}\,z \to \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$, параметризація $(x, z) \to x{:}\,1{:}\,z$;
3) третя карта $z \neq 0$, $x{:}\,y{:}\,z \to \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$, параметризація $(y, z) \to x{:}\,y{:}\,1$.

Однорідні рівняння задають криві в проєктивній площині. Проєктивна пряма задається однорідним рівнянням першого порядку $Ax + By + Cz = 0$.

Якщо $F(x, y) = 0$ – рівняння кривої в третій карті, то її однорідне рівняння буде мати

вигляд $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$.

3. Доведення.

*Доведення теореми 1***.** Розглянемо на сфері множину точок, відстань яких до екватора не перевищує $\frac{1}{3}$. Ця множина гомеоморфна циліндру. Після ототожнення діаметрально протилежних точок на ньому отримаємо лист Мьобіуса. (Вправа: довести це.) Якщо цю множину викинути зі сфери, то отримаємо два диска (один у верхній, а інший у нижній півсфері). Після склеювання діаметрально протилежних точок отримаємо один диск. Його границя – шукана крива. Отже, проєктивна площина є об'єднання диска і листа Мьобіуса.

■

Доведення теореми 2. Будемо використовувати основну властивість геодезичних ліній, що доводиться у курсі диференціальної геометрії, про те, що найкоротша крива між двома точками є геодезичною. Отже, слід показати, що проєктивні прямі, і тільки вони, є геодезичними на проєктивній площині. За означенням, *геодезична*, це крива, у якої геодезична кривина дорівнює 0. Це означення носить локальний характер, тому треба показати, що великі кола є геодезичними на одиничній сфері. Оскільки таке коло лежить в площині, що перпендикулярна до дотичної площини, то при проекції його на дотичну площину вийде відрізок. Оскільки геодезична кривина – це кривина проекції на дотичну площину, а кривина (швидкість обертання дотичного вектора при русі по кривій з одиничною швидкістю) відрізка дорівнює 0, то великі кола є геодезичними. Оскільки через кожну точку сфери в довільному напрямку з дотичного простору можна провести велике коло, то інших геодезичних немає.

■

4. Приклади.

Приклад 1. *Як правильно зобразити квадрат (прямокутник) у горизонтальній площині?*

Розв'язання. Ми припускаємо, що дивимось прямо, тому сприймаємо зображення як на вертикальній площині (наприклад, моніторі), тобто в першій карті (рис. 2). Горизонтальній площині відповідає третя карта. Нехай квадрат має рівняння в ній

$$x+y=1, x+y=2, x-y=1, x-y=2.$$

Однорідні рівняння цих прямих мають вигляд

$$x+y=z, x+y=2z, x-y=z, x-y=2z.$$

Тоді в першій карті їх рівняння будуть мати вигляд:

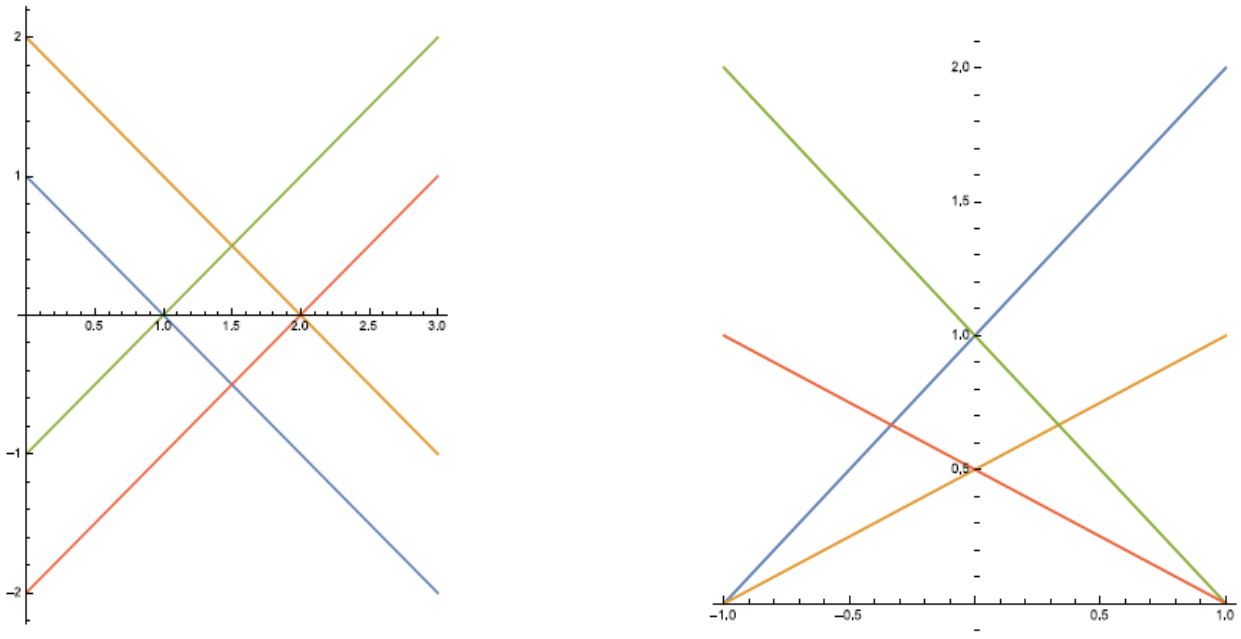
$$1+y=z, 1+y=2z, 1-y=z, 1-y=2z.$$

Отже, перші дві прямі будуть перетинатися в точці (на нескінченості)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$y = -1, z = 0,$$

а останні дві – в точці $y = 1$, $z = 0$.



а) б)

Рис.2. Квадрат в різних картах.

Приклад 2. *Довести, що будь-які дві паралельні горизонтальні прямі в першій карті перетинаються в точці на прямій* $z = 0$.

Цю пряму зображують па рисунках як обрій, а любі дві прямі, що паралельні горизонтальній площині і паралельні між собою, як прямі, що перетинаються на обрії. Це широко використовується в комп'ютерній графіці, наприклад, в програмі Inkscape для створення прямокутних паралелепіпедів (рис. 3).

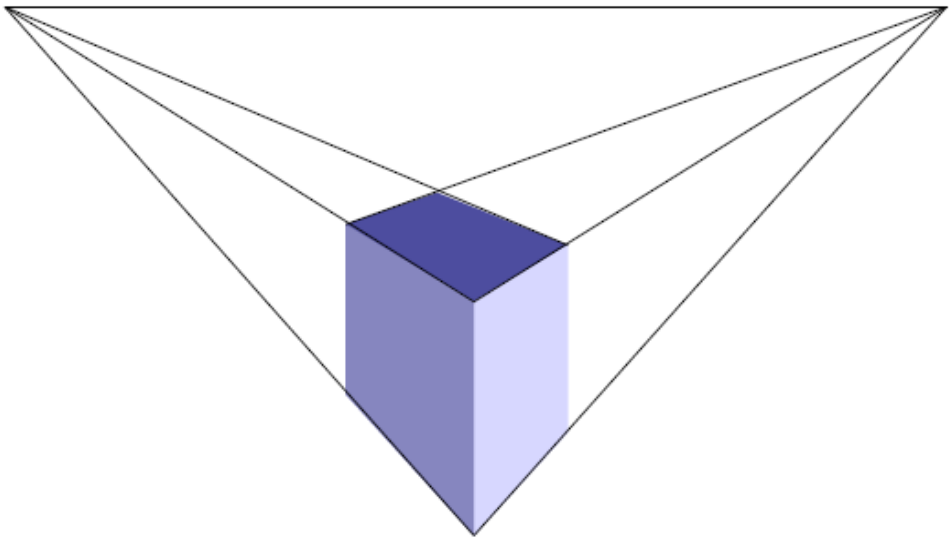


Рис. 3: 3D паралелепіпед в Inkscape

Приклад 3. *Знайти кут при вершині* A *та довжину сторони* AB *трикутника* ABC, $A(1:0:0)$, $B(a:b:1)$, $C(c:1:d)$.

Вказівка. Скористайтися тим, що відстань між точками в проективній геометрії дорівнює куту між відповідними прямими.

Приклад 4. *Знайти кут між проєктивними прямими, заданими в третій карті рівняннями* $x = 0$ та $x = 1$.

Розв'язання. Однорідне рівняння першої прямої в третій карті буде $\frac{x}{z} = 0$ та $x = 0$ в проєктивній площині. Для другої кривої маємо рівняння $\frac{x}{z} = 1$ та $x - z = 0$, відповідно. Кут між проєктивними прямими дорівнює куту між векторами нормалей $\{1,0,0\}$, 1, 0, -1 відповідних площин в тривимірному просторі і дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

Висновки

Проективна площина є замкненим неорієнтованим двовимірним многовидом найменшого роду (1), всі інші неорієнтовані двовимірні многовиди можна отримати з неї за допомогою операції зв'язної суми, тому описані в статті її топологічні властивості є важливими при роботи з такими об'єктами. Геометричні властивості проективної площини і проективних перетворень є необхідним елементом тривимірної комп'ютерної графіки.

Внесок авторів. Олександр Пришляк – концептуалізація, методика, емпіричне дослідження; Світлана Білун – збір і перевірка емпіричних даних.

Список використаних джерел

Борисенко О.А.(1995) *Диференціальна геометрія і топологія.* Х.: Основа. 209 с.

Пришляк О.О. (2013) *Топологія многовидів*. К.: Київський університет. 83 с.

Beutelspacher, Albrecht; Rosenbaum, Ute (1998). *Projective geometry: from foundations to applications*. Cambridge University Press.

Coxeter, Harold Scott MacDonald (1974). *Projective geometry*. Toronto, Ont.: University of Toronto Press,

Greenberg, M.J. (1980). *Euclidean and non-Euclidean geometries*. Freeman.

Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. (1999). *Geometry and the imagination.* Chelsea.

Отримано редакцією журналу: 01.09.2023
Схвалено до друку: 24.06.2024

Aleksandr PRISHLYAK, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Svitlana BILUN, Ph.D (Phys&Math)
ORCID ID: 0000-0003-2925-5392
e-mail: bilun@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

GEOMETRY AND TOPOLOGY OF THE PROJECTIVE PLANE

Abstract. *The topological structure and geometric properties of the projective plane are described, as well as its group of movements that generate projective transformations of the Euclidean plane.*

Keywords: *projective plane; groups of movements; topological structure.*