КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

У СВІТІ МАТЕМАТИКИ

№2, 2024

У світі математики, випуск №2, 2024

Журнал «У світі математики» – єдине українське науково-популярне видання з математики, яке містить науково-популярні, наукові та методичні математичні статті. Покликаний відкривати математичні здібності, усебічно розвивати особистість читача, задовольняти спрагу до математичних знань, привертати увагу до математики як професії.

У журналі містяться результати нових досліджень у різних галузях математики та методики навчання математики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, студентів. Адресований насамперед школярам, водночас буде цікавим студентам, учителям, методистам, викладачам, аспірантам і всім, хто не байдужий до математики.

Друкується за рекомендацією вченої ради механіко-математичного факультету.

Редакційна колегія:

головний редактор:

Валентин Собчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

заступники головного редактора:

Юлія Мішура

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Вадим Радченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

члени редакційної колегії:

Orest Artemovych

Cracow University of Technology, Poland;

Sergey Dashkovskiy

University of Würzburg, Germany;

Nataliia Gorban,

Bauhaus University Weimar, Germany;

Ivane Kiguradze,

Tbilisi Mathematical Institute, Georgia;

Konrad Kulakovsky,

AGH University of Krakow, Poland;

Oleksandr Misiats,

Virginia Commonwealth University, USA;

Dariusz Sala

AGH University of Krakow, Poland;

Petro Feketa

Victoria University of Wellington, New Zealand;

Efim Zelmanov,

University of California, San Diego, USA;

Оксана Безущак

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Олена Бахчеджиоглу

Креативна Міжнародна Дитяча Школа, Україна

Інна Вишенська

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна;

Ярослав Віннишин
Київський природничо-науковий ліцей № 145, Україна;
Яніна Гончаренко
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Михайло Городній
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ярослав Жук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Казмерчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Король
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна;
Олександр Курченко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Лавренюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Оксана Литвин
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна;
Тетяна Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Україна;
Ольга Мартинюк
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
Олексій Нестеренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Дмитро Номіровський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Андрій Олійник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Михайло Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Парасюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олег Перегуда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Петравчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Працьовитий
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Богдан Рубльов
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Станжицький
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Катерина Терлецька
Національний центр "Мала академія наук України", Україна;

Григорій Торбін
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Андрій Чайковський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ольга Чашечникова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна;
Михайло Чемерис
Науковий ліцей №208 Дніпровського району м. Києва, Україна;
Ольга Швай
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна;
Ігор Шевчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Школьний
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Ростислав Ямненко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна.

Редакційний відділ:
Світлана Бабич

Відповідальний секретар:
Євгенія Кочубінська

Адреса редакційної колегії:
Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
проспект академіка Глушкова, 4-е, 03127, Україна
тел.: +38 (044) 259-01-35
e-mail: usm@knu.ua
сайт: https://usm.knu.ua
ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Засновник:
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію
KV No 22695-12595ПР від 24.03.2017

Ідентифікатор медіа / Номер ліцензії
R30-04577 від 25.04.2024
DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2

Безкоштовно

Зміст

Про математику і математиків

Перестюк Г.О. *Великі вчені теж були дітьми* ……..…….. 6

Іванова Н.М. *Марки і математика*…….. 10

Ткаченко А.А. С. *Фалес Мілетський. Основні теореми та їх застосування в геометрії* ……... 18

Юсипів Т.В. *Цеглини математичних досліджень: від античності до епохи штучного інтелекту* ……... 26

Математичні олімпіади

Перегуда О.В., Циганівська І.М. *Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики 2025. Заочний тур*…….. 33

Задачі та гіпотези, рішення

Завдання дистанційного туру олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка …….. 40

Математичний гурток

Романенко В.І., Романенко О.В., Лебедєва І.В. *Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди методами алгебри*……..…… 42

Ващіліна О.В., Лебедєва І.В. *Застосування математики в комп'ютерній графіці* 51

Обрії математики

Грінченко В.Т., Маципура В.Т. *FRACTALIST* ……..…… 60

Пришляк О.О. *Правильні восьмикутники в гіперболічній геометрії*…….. 88

Про математику і математиків

УДК 51:929Перестюк М. **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.1**

Галина ПЕРЕСТЮК
e-mail: perestyuk@gmail.com

ВЕЛИКІ ВЧЕНІ ТЕЖ БУЛИ ДІТЬМИ

Анотація. *Це зворушлива розповідь про дитинство і юність видатного українського математика Миколи Олексійовича Перестюка. Авторка, його рідна сестра, ділиться спогадами про родинне життя, шкільні роки та перші кроки в науці майбутнього академіка. Історія демонструє, як у звичайній селянській родині виросло обдароване дитя, яке згодом досягло вершин світової науки. Ця публікація буде цікава не лише науковцям, а й усім, хто захоплюється історіями успіху та прагне надихнути молодь на досягнення нових висот.*

Ключові слова: *Перестюк М.О.*

1. Родина

Микола Олексійович Перестюк – легендарна людина Хмельниччини. Він народився в перший день 1946 року, в зимовий сніжний вівторок, у багатодітній селянській родині Олексія та Ольги в селі Плоска Славутського району Хмельницької області.

У родині завжди панувала любов і злагода, тому ми, діти, не відчували труднощів повоєнного часу, поряд з батьками почувалися захищеними і щасливими.



Рис. 1. Чотирирічний Микола Перестюк, 1950 рік

Наш батько, Олексій Онуфрійович, вирізнявся серед односельців великою обізнаністю і працелюбністю, був дуже розумний, початкову школу закінчив за два

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

роки. До останніх днів свого життя батько багато читав. Односельці поважали його, часто приходили за порадою.

Мати, Ольга Йосипівна, була надзвичайно доброю, але й вольовою жінкою. Мама завжди знала, якими хоче бачити своїх дітей, залучала всіх до праці, вчила допомагати один одному.

Батьки для себе твердо вирішили, що всі їхні діти, а нас було аж восьмеро, мають здобути вищу освіту. Так і сталося.

2. Дитинство

Микола з самого дитинства ріс допитливою дитиною. У нашому селі була початкова школа, до школи брат пішов у 1952 році. Всі чотири роки був відмінником. Коли закінчувалася чверть, він прибігав з табелем додому і викрикував: «У мене все «5»!». Особливо запам'ятався випадок, коли вчитель Леонід Опанасович прийшов до батьків і каже: «Віддайте мені цього хлопця, я з нього зроблю людину». На це батько відповів: «Він у нас вже людина».

Микола зростав мужнім, допитливим і дуже працьовитим, в усьому допомагав батькам по господарству. Під час літніх канікул пас колгоспні корови, був помічником комбайнера, заробляючи трудодні.

Після закінчення початкової школи Микола продовжив навчання у Мирутинській середній школі, що була розташована за 3 км від домівки. І тут він проявив свої відмінні знання з усіх дисциплін. Особливо захоплювався літературою, хімією та математикою. Великий інтерес проявляв до поезії, фотографування і плавання. У нашому селі протікає дуже гарна річка Жариха. І сьогодні на її берегах ростуть розлогі верби, а по річці плавають білі лебеді. Саме тут Микола навчився плавати, ловити рибу і під вербами розв'язувати задачі.



Рис. 2. Микола Перестюк – випускник у Мирутинської середньої школи, 1963 рік

Краса природи надихала його на творчість. У районних і обласних часописах Микола друкував свої вірші, замітки, статті. Його часто запрошували на конференції як молодого дописувача.

Вже в старших класах брат брав участь у районних та обласних математичних олімпіадах і кожного разу ставав переможцем.

У цей період був і активним учасником гуртка художнього читання. Учні їхнього класу часто давали концерти у сільських клубах, і жоден такий виступ не обходився без участі Миколи, який завжди декламував вірші, поеми, гуморески.

В одинадцятому класі (а це був перший випуск одинадцятикласників) постає питання: ким бути? Вчителі і однокласники Миколу бачили у педінституті на філологічному факультеті, а він повністю «закохався» у математику. Улюбленим заняттям випускника було розв'язування математичних задач з багатьма невідомими.

У 1963 році закінчується безтурботне шкільне життя. Микола разом з атестатом отримує золоту медаль, і це була перша золота медаль за всі роки існування школи. Директор школи Мосіюк Антон Купріянович, нагороджуючи випускника, сказав: «Ти наша велика гордість і безмежна надія. Не підведи, ми в тебе віримо».

3. Студентські роки

Після закінчення школи Микола їде вступати до Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка на механіко-математичний факультет. Вступив з першого разу і став, до речі, першим студентом з Мирутинської середньої школи.

Вчитися в університеті Миколі було дуже важко матеріально, адже міг розраховувати тільки на самого себе. Вільного часу не було взагалі, оскільки потрібно було скласти сесію так, щоб отримувати стипендію, без якої у нього не буде засобів для існування. Наполегливо опановуючи нові знання в університеті, а після занять – у читальному залі, Микола першу сесію здав на «4» і щасливий приїхав додому на зимові канікули. Щоб допомогти собі матеріально, під час літніх канікул їздив з будівельними загонами у Казахстан.

Крім аудиторних занять Микола регулярно відвідував математичні гуртки, брав участь у семінарах, які проводили науковці. Саме тут і звела його доля з наставником Самойленком Анатолієм Михайловичем. Про цього видатного українського математика він згодом казав: «Усім, чого досяг у математиці, я зобов'язаний цій талановитій людині». Але, на мою думку, таланти не народжуються, їх творить непосильна праця.

Саме в університеті здійснювались всі мрії мого брата Миколи, тут він знайшов себе і відкрив незбагненні можливості математики.

4. Великий учений – велика людина

У повсякденному житті й до кінця своїх днів Микола був дуже скромною людиною, завжди виявляв доброзичливість, щирість, простоту, повагу. Він ніколи не втрачав зв'язок із нами, рідними, своїм селом Плоска, Мирутинською школою. Завжди у серпні

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

приїжджав додому, і ми ходили купатися в річці, стрибали у воду і плавали. Нам обом вже було за шістдесят, а ми у тій воді почувалися, як у дитинстві, малими дітьми.

У спілкуванні брат часто наголошував: «Живи, радій, іншим радість приноси».

До вершин науки Микола йшов тернистим шляхом, але ніколи не зупинявся перед труднощами. Багатьом землякам він допомагав прокладати дорогу у «світ знань». Його девізом були слова: «Завжди допомагати таланту, а нездара і сам проб'ється».

Микола не втрачав і уже ніколи не втратить відчуття рідної землі та свого родоводу. У ньому – людяність батька і матері, допомога і любов брата, розуміння сутності життя.

Від босоногого дитинства Микола Олексійович Перестюк дійшов до вершини науковця-математика, академіка НАН України, всесвітньовідомої людини в галузі математики.

Подяка

Редакція журналу виказує невимовну подяку рідній сестрі Миколи Олексійовича Перестюка за підготований матеріал та фото з сімейного архіву для публікації у нашому журналі. Ми вдячні за Вашу готовність поділитися своїми спогадами з нашими читачами.

Отримано редакцією журналу: 15.11.2024
Прорецензовано: 25.11.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Halyna PERESTYUK
e-mail: perestyuk@gmail.com

GREAT SCIENTISTS WERE ALSO CHILDREN

Abstract. *This is a touching story about the childhood and youth of the outstanding Ukrainian mathematician Mykola Oleksiyovych Perestyuk. The author, his sister, shares memories of family life, school years and the first steps in science of the future academician. The story demonstrates how a gifted child grew up in an ordinary peasant family, who later reached the heights of world science. This publication will be interesting not only to scientists, but also to everyone who is fascinated by success stories and seeks to inspire young people to achieve new heights*

Keywords: *Perestyuk M.*

Про математику і математиків

УДК 514.112.3:520.874(091)Фалес **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.3**

Анастасія ТКАЧЕНКО, студентка
e-mail: nastyatkachenko0711@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ФАЛЕС МІЛЕТСЬКИЙ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. *У роботі розглядається життя та наукова спадщина Фалеса Мілетського – одного з провідних математиків і астрономів Давньої Греції, якого відносять до числа семи великих мудреців світу. Особлива увага приділена його досягненням у галузі геометрії та астрономії, включаючи теореми, які він сформулював та довів, а також методи розв'язання практичних завдань, таких як обчислення висоти єгипетських пірамід та ширини річок. У роботі детально проаналізовані основні теореми, пов'язані з його ім'ям, зокрема, теорема про пропорційні відрізки та теорема про вписаний трикутник. Наводяться приклади використання пропорційності та подібних трикутників для визначення відстаней до недосяжних об'єктів.*

Ключові слова: *пропорційні відрізки; вписаний трикутник; подібні трикутники; висота піраміди; астрономія; вимірювання відстаней.*

1. Вступ

Фалес Мілетський – видатний давньогрецький філософ, математик та астроном, якого зараховують до числа семи великих мудреців античного світу (рис. 1). Найбільшим досягненням Фалеса у сфері математики було введення доведення в галузі геометрії.

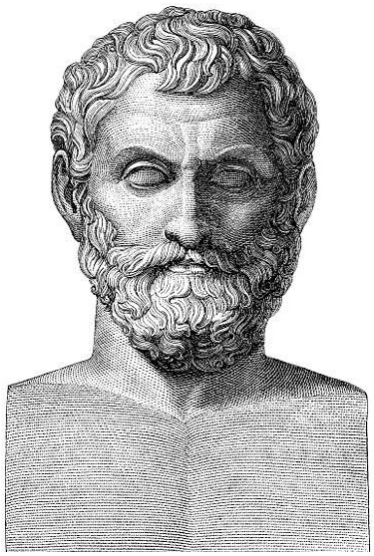


Рис.1. Фалес Мілетський
(бл. 625-548 до н.е.)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Мілетська школа, заснована ним, стала фундаментом для розвитку геометрії, що почала зосереджуватись на доведенні тверджень, спираючись на вже відомі аксіоми. Про життя Фалеса Мілетського не збереглось жодних історичних документів, через це про діяльність Фалеса дізнаємося із пізніших праць відомих мислителів та учнів філософської школи пізнішого часу, таких як Анаксімандр, Анаксімен, Аристотель, Платон та Геродот. Згідно з їхніми працями, Фалес у юному віці здійснив подорож до єгипетських земель, де ознайомився з досягненнями місцевої культури та природничими науками. Завдяки своєму таланту й наполегливості юнак не лише перейняв знання кращих єгипетських учених, але й зробив наукові власні відкриття (Бевз, 2006), (Шмигевський, 2004).

Фалес заснував філософську школу в Мілеті після повернення на батьківщину. Відомо, що він активно пропагував нові ідеї серед грецьких мислителів.

Приблизно у восьмидесятирічному віці Фалес загинув на стадіоні під час проведення Олімпійських ігор. Існують різні версії його смерті: перша висловлює теорію про сонячний удар, а друга розповідає, що він став жертвою натовпу, який випадково завдав старцю смертельної шкоди. На гробниці видатного філософа викарбувано напис: «Наскільки є малою ця гробниця, настільки великою є слава цього царя астрономії в царині зірок».

2. Наукові відкриття

Вчені вважають, що Фалес був першим, хто зміг довести важливі геометричні теореми, зокрема: про рівність кутів, що утворюються при перетині двох прямих (вертикальні кути), про рівність двох кутів при основі у рівнобедреному трикутнику та про рівність двох трикутників за однією стороною і двома прилеглими кутами. Також показав, що трикутник, вписаний у коло з діаметром як однією зі сторін, завжди матиме прямий кут. Важливо зазначити, що саме Фалес розробив методику обчислення відстані до недосяжних об'єктів без необхідності проводити безпосереднє вимірювання.

Ще одним його досягненням в астрономії було відкриття того, що Земля має форму кулі й знаходиться в центрі Всесвіту. Також Фалес разом зі своїми учнями визначив тривалість року як 365 днів. Історики приписують Фалесу обчислення відношення діаметра Сонця до довжини шляху орбіти Землі навколо Сонця, що стало основою для подальших астрономічних досліджень. Одним із найвизначніших його досягнень було передбачення сонячного затемнення, яке відбулося 28 травня 585 року до нашої ери (Видатні особистості, 2024).

Одним з обдарованих учнів Фалеса був Анаксагор, який у V столітті до нашої ери висловив припущення, що небесні тіла складаються з кам'яних мас, і вони не падають на Землю завдяки їхньому постійному руху по орбіті.

Через дві тисячі років закони цього руху сформулював Йоганн Кеплер, а Ісаак Ньютон запропонував математичне доведення цього факту.

Фалес поєднував свою наукову діяльність у галузях математики й астрономії з активною участю в політичному житті. Він був високоосвіченим, мудрим та енергійним діячем, чиї поради, особливо у військових питаннях, високо цінувалися.

3. Теореми Фалеса про пропорційні відрізки

Теорема 1. (Фалеса про пропорційні відрізки №1) *Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки і на другій його стороні.*

Доведення. Нехай паралельні прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 перетинають сторони кута з вершиною O (рис. 2), причому $A_1A_2 = A_2A_3$. Доведемо, що $B_1B_2 = B_2B_3$.

1) Проведемо через точки A_1 та A_2 прямі A_1M і A_2N, паралельні прямій OB_3. $A_1A_2 = A_2A_3$ (за умовою), $\angle A_2A_1M = \angle A_3A_2N$ (як відповідні кути при паралельних прямих $A_1M = A_2N$), $\angle A_1A_2M = \angle A_2A_3N$ (як відповідні кути при паралельних прямих

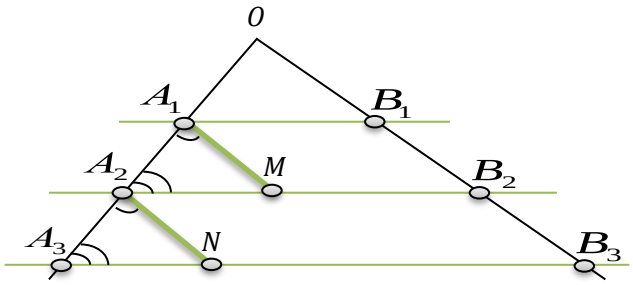


Рис. 2. Ілюстрація до теореми 1

A_2M і A_3N). Тому $\Delta A_1A_2M = \Delta A_2A_3N$ (за стороною і двома прилеглими кутами), а значить A_1M і A_2N (як відповідні сторони рівних трикутників).

2) Чотирикутник $A_1MB_2B_1$ – паралелограм (за побудовою) (рис. 2). Тому $A_1M = B_1B_2$.

Аналогічно $A_2NB_3B_2$ – паралелограм, тому $A_2N = B_2B_3$.

Отже, $A_1M = A_2N$, $A_1M = B_1B_2$, $A_2N = B_2B_3$. Звідки $B_1B_2 = B_2B_3$, що й потрібно було довести.

■

Наслідок. *Якщо паралельні прямі, що перетинають дві задані прямі a і b відтинають на одній прямій рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на інший прямій.*

Зауваження 1. *Теорема Фалеса говорить, що відрізки, які утворюються при перетині (наприклад, AB і FG), будуть рівними.*

На рис. 3 зображено дві прямі, що перетинають п'ять інших паралельних прямих.

Якщо $FG = GH = HJ = JK$ і $AF \parallel BG \parallel CH \parallel DJ \parallel EK$, то $AB = BC = CD = DE$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

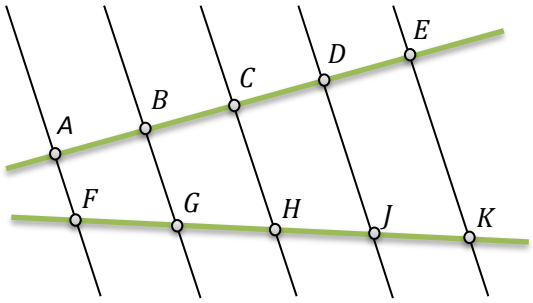


Рис. 3. Ілюстрація до зауваження 1

Зауваження 2. *За теоремою Фалеса можна поділити відрізок на будь-яку кількість рівних частин за допомогою лінійки без поділок*.

Приклад 1. *Поділіть відрізок* AB *на* 6 *рівних частин*.

Розв'язання:

1) Нехай AB – заданий відрізок (рис.4). Проведемо довільний промінь AC і відкладемо на ньому циркулем послідовно 6 відрізків: $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5 = C_5C_6$.

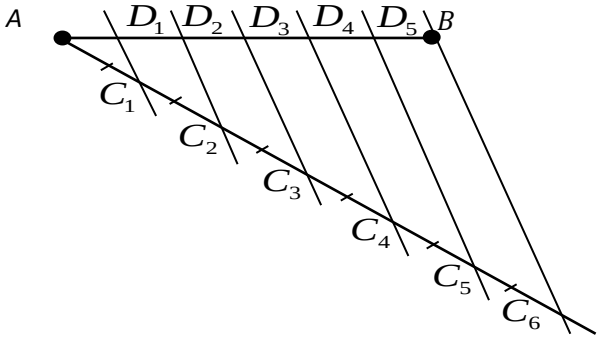


Рис. 4. Ілюстрація до прикладу 1

2) Через точки C_6 і B проведемо пряму.

3) Через точки C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 проведемо за допомогою лінійки прямі, паралельні прямій BC_6.

За теоремою Фалеса ці прямі поділять відрізок AB на 6 рівних між собою частин: $AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3D_4 = D_4D_5 = D_5B$.

Означення. *Відношенням двох відрізків називають відношення їхніх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру*.

Теорема 2. (**Фалеса про пропорційні відрізки №2)** *Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворились на другій стороні кута.*

Приклад 2. Якщо $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то відношення відрізка AB до відрізка CD дорівнює $\frac{8}{6}$. Записують $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, тобто $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$. Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, то говорять, що відрізки AB і CD пропорційні відповідно відрізкам A_1B_1 і C_1D_1.

Аналогічно можна говорити про пропорційність більшої кількості відрізків (Істер, 2021), (Мерзляк, 2021). Наприклад, якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$, то говорять, що відрізки AD, CD, MN пропорційні відповідно відрізкам A_1B_1, C_1D_1 і M_1N_1.

4. Знаходження висоти піраміди

Фалесу Мілетському приписують простий спосіб знаходження висоти піраміди. У сонячний день він ставив свій посох там, де закінчувалася тінь від піраміди. Потім він

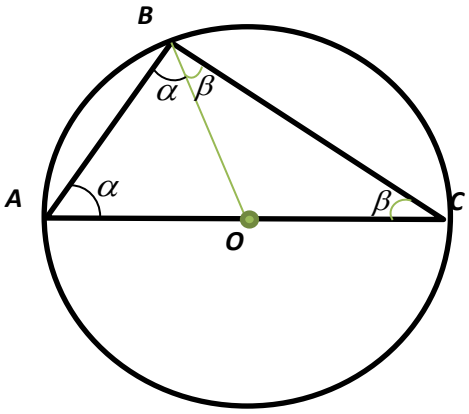


Рис. 5. Ілюстрація до теореми 3

показував, що як довжина однієї тіні відноситься до довжини іншої тіні, так і висота піраміди відноситься до висоти посоха.

Теорема 3. (**Фалеса про вписаний трикутник)** *Вписаний у коло трикутник, одна із сторін якого є діаметром, прямокутний*.

Доведення. На рис. 5 зображено трикутник ABC, вписаний у коло з центром O. Обидва трикутники ABO та BOC рівнобедрені, їх сторони є радіусами. Якщо $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то $2\alpha + 2\beta = 180°$, отже, $\alpha + \beta = 90°$.

Це означає, що $\angle ABC = 90°$.

■

5. Знаходження відстані за допомогою побудови подібних трикутників

На практиці часто виникає необхідність виміряти відстань до недоступного об'єкта, наприклад, визначити ширину річки (Шмаль, 2024). Для цього можна використати такий метод. Спочатку слід вибрати на протилежному березі річки добре помітний

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

об'єкт (A) – це може бути дерево або скеля, розташовані безпосередньо біля води. Далі потрібно стати точно навпроти цього об'єкта на своєму березі й позначити місце, поклавши камінь або встромивши кілочок (B) (рис. 6). Потім слід пройти уздовж берега,

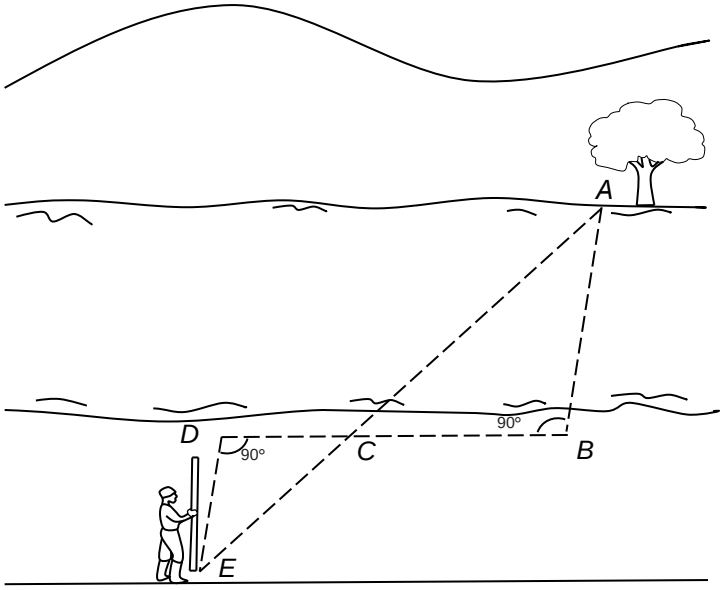


Рис. 6. Візуалізація процесу непрямого вимірювання за допомогою побудови подібних трикутників

рухаючись перпендикулярно до уявної лінії між об'єктом на протилежному боці й позначеним місцем (B), відраховуючи 30 кроків. На цій відстані в землю встромляється палиця (C). Далі, потрібно пройти ще 30 кроків у тому ж напрямку і зробити ще одну позначку на землі (D).

Тепер слід рухатися від цієї точки (D), повернувшись спиною до річки, знову відраховуючи кроки й періодично звіряючись із позицією об’єкта (A) на протилежному березі. Коли палиця (C), вставлена на березі, співпаде на лінії з об'єктом (A), тоді відстань між останньою позначкою (D) і місцем зупинки (E) буде дорівнювати ширині річки.

6. Знаходження відстані до недоступного об’єкта

Для знаходження відстані до об'єктів, яку не можна безпосередньо виміряти, застосовуються методи, що ґрунтуються на побудові подібних трикутників. Один із найпростіших способів – це використати звичайний сірник як інструмент для вимірювання. На сірнику наносять поділки по 2 мм. Для знаходження шуканої відстані потрібно знати приблизну висоту об'єкта. Розглянемо середні розміри предметів: зріст людини становить приблизно $1{,}7$ метра, висота ліхтарного стовпа становить 6 метрів, стандартного дорожнього знака – $2{,}5$ метра, автобусної зупинки – 3 метри, а одноповерхового будинку – від $2{,}5$ до 4 метрів.

Якщо треба виміряти відстань до вітряка, потрібно тримати сірник на витягнутій руці, яка у дорослої людини має довжину приблизно 60 см (рис. 7).

Приблизна висота вітряка у даній місцевості дорівнює 30 метрів. Зображення вітряка на сірнику займає 12 поділок, що становить 24 мм. Тоді можна використати пропорцію: довжина руки : відстань до вітряка = довжина зображення на сірнику : висота вітряка.

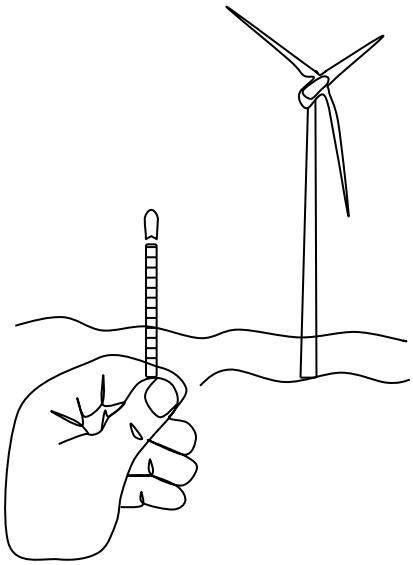


Рис. 7. Знаходження відстані за допомогою сірника

$$\frac{0{,}6}{x} = \frac{0{,}024}{30},$$

$$x = \frac{0{,}6 \cdot 30}{0{,}024} = 750.$$

Отже, відстань до вітряка становить 750 метрів.

7. Висновки

Фалес Мілетський, великий математик і астроном, назавжди залишив своє ім’я в історії науки, відкривши нові горизонти мислення і заклавши основи логіки та геометрії. Його праці показали, що абстрактні математичні теорії можуть не тільки пояснювати природні явища, але й служити практичним інструментом для розв’язування реальних задач — від визначення висоти пірамід до вимірювання відстані до недоступних об’єктів.

Його внесок виходить за межі математичних формул: Фалес навчив наступні покоління мислити системно, шукати порядок у хаосі та відкривати істини через доведення. Його спадщина є свідченням безмежної сили людського розуму, який здатний перетворювати світ, піднімаючи людство на нові рівні знань.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Список використаних джерел

Бевз В.Г. (2006). *Історія математики*. Х.: Вид. гр. Основа. 176 с. http://matematuka.inf.ua/rizne/hist_mat_bevz/hist_mat_bevz.html

Істер О.С. (2021). *Геометрія: підручник для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів*. Генеза. 240 с. https://pidruchnyk.com.ua/804-geometriya-8-klas-ister-2016.html

Мерзляк А. (2021). *Геометрія: підручник для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики*. Гімназія. 223 с. https://pidruchnyk.com.ua/865-geometriya-8-z-poglyblenym-vyvchennyam-2016-merzlyak.html

Видатні особистості. (2024). *Фалес Мілетський*. http://novopetrivske-osoba.edukit.mk.ua/vidatni_matematiki/fales_miletsjkij/

Шмаль С.Г.(2024). *Довідник з основних понять військової топографії*. Ліра-К. 108 с.

Шмигевський М.В. (2004). *Видатні математики*. Х.: Вид. гр. Основа. 174 с.

Отримано редакцією журналу: 20.10.2024
Прорецензовано: 04.11.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Anastasia TKACHENKO, student
e-mail: nastyatkachenko0711@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THALES OF MILETUS. BASIC THEOREMS AND THEIR APPLICATIONS IN GEOMETRY

Abstract. *This paper deals with the life and scientific heritage of Thales of Miletus, one of the leading mathematicians and astronomers of Ancient Greece, who is considered one of the seven great sages of the world. Particular attention is paid to his achievements in the field of geometry and astronomy, including the theorems he formulated and proved, as well as methods for solving practical problems, such as calculating the height of the Egyptian pyramids and the width of rivers. The work analyzes in detail the main theorems associated with his name, including the proportional line segment theorem and the inscribed triangle theorem. Examples are given of the use of proportionality and similar triangles to determine distances to inaccessible objects.*

Keywords: *proportional segments; inscribed triangle; similar triangles; pyramid height; astronomy; distance measurement.*

Про математику і математиків

УДК 510/511+519.1+004.8"652/654" **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.4**

Тарас ЮСИПІВ
ORCID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЦЕГЛИНИ МАТЕМАТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ: ВІД АНТИЧНОСТІ ДО ЕПОХИ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Анотація. *Математичні дослідження беруть початок ще з античних часів, коли людство стикнулося з необхідністю точних вимірювань та обчислень для розв'язування практичних завдань, що призвело до зародження таких наук як арифметика та геометрія. Важливою віхою в побудові математики як логічно строгої та послідовної теорії стала робота Евкліда «Начала», де ним було впроваджено принцип аксіоматичної системи: він обґрунтував істинність відомих на той час геометричних тверджень, виводячи їх з аксіом – базових тверджень, які приймаються істинними (з інтуїтивних міркувань). Разом з тим, як пізніше з'ясувалося, існують такі математичні твердження, доведення чи спростування яких може займати цілі століття. Яскравим прикладом цього є Велика теорема Ферма, істинність якої була підтверджена лише через понад 350 років після того, як автор записав її у своїх примітках. З появою новітніх технологій, таких як нейронні мережі, процес математичних відкриттів почав прискорюватися. «Нейронки» здатні моделювати складні логічні зв'язки та швидко перебирати можливі варіанти. Це відкриває нові горизонти для наукових досліджень, дозволяючи поєднувати класичні математичні методи з інноваційними підходами, що можуть значно змінити методи розв'язання математичних задач.*

Ключові слова: *аксіоматика; алгебра; арифметика; Велика теорема Ферма; геометрія; логічний вивід; машинне навчання; мовні моделі; теорія графів; теорія чисел.*

1. Арифметика і геометрія

Арифметика і геометрія виникли з природніх практичних потреб і стали першими систематичними спробами людства зрозуміти та описати структуру і порядок світу: перша досліджувала властивості чисел і операції з ними, задовольняючи потребу в обчисленнях і вимірюваннях, друга – вивчала просторові форми і зв'язки, розв'язуючи практичні завдання, наприклад, розподіл земель.

Перші систематичні математичні дослідження виникли в стародавніх цивілізаціях Вавилону, Греції та Єгипту, де розвивалися методи обчислень для землевимірювання, бухгалтерії та астрономії. Вже з тих часів люди розуміли, що математика оточує нас скрізь: від побутових справ до складних наукових досліджень. Видатними представниками пізнішого розвитку цих ідей стали давньогрецькі математики Евклід і Діофант з Александрії, яких розділяють 5 століть, але чиї праці значною мірою визначили подальший розвиток математики як науки (Bell, 1937).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. Евклід

У своїх книгах «*Начала»* Евклід сформулював аксіоматичний підхід, побудувавши геометрію на базі п'яти основних постулатів.

1) **Про прямі лінії**: через будь-які дві точки можна провести пряму лінію.
2) **Про відрізки**: відрізок між точками можна продовжити в обидва боки до нескінченності.
3) **Про кола**: можна побудувати коло з будь-яким центром і будь-яким радіусом.
4) **Про прямі кути**: усі прямі кути рівні між собою.
5) **Про паралельні прямі**: якщо пряма перетинає дві інші прямі таким чином, що сума внутрішніх односторонніх кутів менша за два прямі кути, то ці дві прямі, якщо їх продовжити, обов'язково перетнуться з того боку де кути менші, ніж два прямі.



Рис. 1. Евклід (близько 325 – близько 270 до н. е.)

П'ятий постулат відрізняється від інших своєю складністю та «неінтуїтивністю». Він викликав численні спроби довести його як теорему, використовуючи інші постулати, але всі ці спроби зазнали невдачі, а через 21 століття зміна цього постулату призвела до виникнення неевклідових геометрій (гіперболічної, пов'язаної з М. І. Лобачевським, та еліптичної – з Г. Ріманом), що відкрило нові горизонти в розумінні простору не лише з математичної, але й з фізичної точки зору. Здається дещо дивним, але, як з'ясувалося пізніше, у просторі, визначеному постулатами геометрії, можливі лише ці три типи геометрії (Pogorelov, 1979).

3. Діофант Александрійський

Діофант Александрійський, відомий як «батько алгебри», заклав фундамент для теорії чисел (і, зрештою, – *алгебри*), що спиралася не на геометричні принципи, як це було у Платона, Евкліда, Архімеда та Аполлонія, а на арифметичні властивості чисел. Його праця **«***Арифметика***»** стала добрим початком для подальших теоретико-

числових досліджень таких видатних математиків, як от П'єр Ферма, Марен Мерсенн та Леонард Ойлер.



Рис. 2. Діофант Александрійський (між 200 та 214 – між 284 та 298)

4. Ферма

Відомо, що П'єр Ферма любив залишати в книгах власні коментарі стосовно того, що там було написано. Одна з таких поміток на полях латинського перекладу «Арифметики» Діофанта, датована 1637 роком, стосувалася формулювання його знаменитої *Великої теореми* (*Fermat's Last Theorem*), де Ферма стверджував, що знайшов «прекрасне доведення» того факту, що
рівняння

$$a^n + b^n = c^n$$

не має розв'язків у цілих числах a, b, c, відмінних від нуля, при $n > 2, n \in \mathbb{N}$.

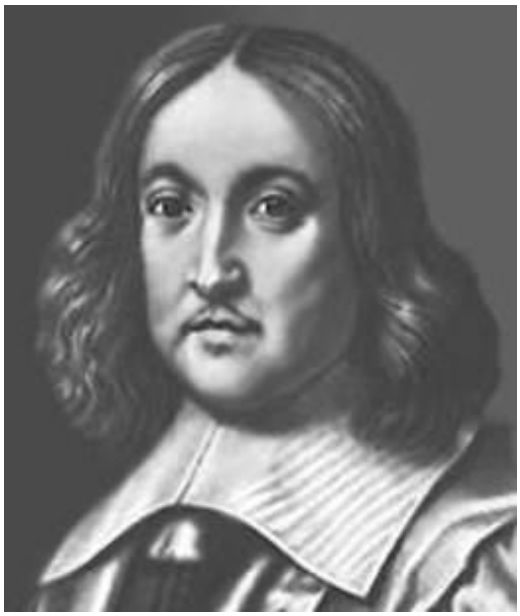


Рис. 3. П'єр Ферма (17 серпня 1601 – 12 січня 1665)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Коментар не містив доведення вказаного твердження і був виявлений лише через 30 років. Протягом 358 років після її формулювання достовірність теореми залишалася невстановленою, поки Ендрю Вайлз у співавторстві з Річардом Тейлором не зробили фінальний крок у доведенні (*теорема модулярності для напівстабільних еліптичних кривих*) (Boston, 2003). Цікаво, що хоча *Велика теорема Ферма* не мала практичної значущості, простота її математичного формулювання та неймовірна складність доведення призвели до того, що за весь час над її доведенням працювала велика кількість математиків, а також чимала кількість дилетантів, що призвело до того, що цей математичний факт посідає перше місце за кількістю «некоректних» доведень. Проте ці зусилля надали потужний імпульс розвитку сучасної теорії чисел, сприяючи важливим досягненням у цій галузі.

5. Марен Мерсенн

Марен Мерсенн вів жваве наукове листування з 78 кореспондентами, серед яких, крім Ферма, були такі відомі постаті, як Р. Декарт, Г. Галілей, Б. Паскаль, Е. Торічеллі та Х. Гюйгенс. Про відкриття Ферма відомо практично лише з цих листувань. У наші дні Мерсенн знаний як дослідник чисел вигляду

$$M_n = 2^n - 1.$$



Рис. 4. Марен Мерсенн (8 вересня 1588 – 1 вересня 1648)

Вони відіграють неабияку роль у пошуку великих простих чисел, що має важливе значення в криптографії, математиці та обчислювальних методах, оскільки для чисел Мерсенна існує ефективний *тест простоти Люка-Лемера*. Саме завдяки цьому тесту найбільшими відомими простими числами завжди були прості числа Мерсенна. Досягнення в пошуку великих простих чисел Мерсенна стали можливими завдяки *розподіленим обчисленням*: програми, такі як GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), використовують комп'ютерні ресурси волонтерів по всьому світу для

перевірки таких чисел на простоту. Найбільше відоме просте число Мерсенна на сьогодні – $M_{136279841}$, яке містить понад 41 мільйон цифр і було знайдено в жовтні 2024 року (the Great Internet Mersenne Prime Search, 2024).

6. Леонард Ойлер

Леонард Ойлер, якого вважають одним з найвидатніших та найрезультативніших у науковому сенсі математиків 18 століття, а можливо й усіх часів, крім своєї роботи в теорії чисел (зокрема, доведення *Великої теореми Ферма* для $n = 3$, виявлення зв'язку між простими числами та Дзета-функцією Рімана, доведення *теореми про розподіл простих чисел*, а також знаходження найбільшого відомого на той час простого числа 2 147 483 647, яке є числом Мерсенна M_{31}) також зробив вагомий внесок у багато інших галузей математики, зокрема в математичний аналіз, механіку, диференціальні рівняння тощо.

У 1736 році Л. Ойлер в одному зі своїх листів описує розв'язання задачі про Кеніґсбергські мости, чим започатковує теорію графів, яку можна застосовувати для розв'язування багатьох задач з різноманітних областей математики, зокрема комбінаторики.



Рис. 5. Леонард Ойлер (15 квітня 1707 – 18 вересня 1783)

Цікавим прикладом застосування теорії графів є доведення *Гіпотези чотирьох фарб*, яку було сформульовано в 1852 році. Вона стверджує, що

будь-яку карту, розташовану на сфері, можна розфарбувати лише чотирма фарбами так, щоб жодні дві сусідні області не мали однаковий колір.

Гіпотезу було доведено за допомогою комп'ютерних методів у 1996 році, тоді як лише в 2005 році вдалося формалізувати доведення з допомогою помічника *Coq*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

(Gonthier, 2008). Цей приклад, разом із прикладом розподілених обчислень, яскраво демонструє перспективність використання комп'ютерів у математичних дослідженнях.

6. Сучасність

Як зазначив видатний математик сучасності Теренс Тао (17 липня 1975, Аделаїда, Австралія): «Існує три способи, як можна використати штучний інтелект для розв'язування математичних задач: *машинне навчання* встановлює зв'язки між математичними розділами, які для людей є неочевидними; *мовні моделі* перекладають з людської мови на машинну і навпаки; *програми-помічники* допомагають зменшити час на формальне доведення певних математичних фактів» (Terence Tao & IMO, 2024).



Рис. 6. Теренс Тао (17 липня 1975)

У контексті можливих напрямків розвитку взаємодії між дослідниками та штучним інтелектом Велика теорема Ферма, яка надихала математиків протягом століть, може знову стати новим поштовхом до розвитку науки: у 2024 році Кевін Марк Базарт (21 вересня 1968, Об'єднане Королівство) отримав грант для виконання проєкту пошуку інших формальних доведень цієї теореми, що демонструє як сучасні методи можуть призвести до подальших проривів у математичних дослідженнях, сприяючи новим відкриттям і революційним досягненням у різних наукових галузях (Buzzard, 2024).

Список використаних джерел

Bell E.T. (1937). *Men of Mathematics*. Simon & Schuster, Ink., New York. 608 p.

Gonthier, Georges (2008). Formal Proof – The Four-Color Theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 55 (11): pp. 1382 – 1393: https://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf

Pogorelov A.V. (1979). Hilbert's fourth problem. Washington: Scripta. 97 p.

Boston Nigel, (2003). The Proof of Fermat's Last Theorem. Springer. 140 p. https://people.math.wisc.edu/~nboston/869.pdf

the Great Internet Mersenne Prime Search (2024). https://www.mersenne.org

Terence Tao at IMO 2024: AI and Mathematics. (2024) https://www.youtube.com/watch?v=e049IoFBnLA

Lean community blog The Fermat's Last Theorem Project / Kevin Buzzard 2024-04-30 Source https://leanprover-community.github.io/blog/posts/FLT-announcement

Отримано редакцією журналу: 28.11.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Taras YUSYPIV
ORCID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

THE BRICKS OF MATHEMATICAL RESEARCH: FROM ANTYQUITY TO THE ERA OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Abstract. *Mathematical research began in ancient times when humanity faced the need for precise measurements and calculations to solve practical problems, leading to the emergence of disciplines such as arithmetic and geometry. A significant milestone in building mathematics as a logically rigorous and consistent theory was Euclid's work Elements, in which he introduced the axiomatics system: he substantiated the truth of the known geometric statements of the time by deriving them from axioms – basic statements accepted as true (based on intuitive reasoning). However, as was later revealed, there are mathematical propositions whose proofs or disproving may take centuries, and a vivid example of this is Fermat's Last Theorem, the truth of which was confirmed only over 350 years after the author wrote it in his notes. With the advent of new technologies such as neural networks, the process of mathematical discovery began to accelerate. Neural networks can model complex logical relationships and quickly explore possible solution variants. This opens new horizons for scientific research, allowing the combination of classical mathematical methods with innovative approaches that may significantly change the way mathematical problems are solved.*

Keywords: *axiomatics; algebra; arithmetic; Fermat's Last Theorem; geometry; graph theory; language models; logical inference; machine learning; number theory.*

Математичні олімпіади

УДК 51:37.091.27-057.874(477):378.4(477.411)КНУ DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.5

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЦИГАНІВСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7632-3410
e-mail: itsy8009@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА З МАТЕМАТИКИ 2025. ЗАОЧНИЙ ТУР

Анотація. *Математична олімпіада – це інтелектуальне змагання, яке дає можливість талановитим учням продемонструвати свої знання, логічне мислення та вміння розв'язувати складні математичні задачі. Олімпіади стимулюють поглиблене вивчення математики, розширюють знання та вдосконалюють навички учнів. У роботі представлено розв'язання задач Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 2024 року.*

Ключові слова: *математична олімпіада; рівняння; нерівність; розв'язання.*

1. Вступ

Одним із найважливіших показників ефективності навчання у школі є забезпечення розвитку розумових здібностей учня. Стосовно математики можна сказати, що сам процес її вивчення повинен приводити до вміння логічно, доказово мислити, творчо, а не стереотипно, підходити до розв'язування будь-якої задачі.

Одним з ефективних засобів формування в учнів навичок самостійного мислення є участь у математичних олімпіадах. Основна мета олімпіад полягає не стільки у тому, щоб виявити переможців, а скільки у тому, щоб зацікавити усіх учасників оригінальними задачами, залучити новачків до систематичних занять математикою, самостійної роботи з різними математичними джерелами. Не можна думати, що невдача на олімпіаді свідчить про відсутність математичних здібностей учня. Після невдачі доцільно спробувати краще підготуватися до наступної олімпіади або математичного конкурсу, використовуючи задачі, укладені у збірниках (Гайштут, 1997), (Михайловський, 1975), (Сканаві, 1992), (Стасюк, 2006). Досягнення олімпійських успіхів потребує наполегливості, працелюбності, постійних тренувань і маленьких перемог над собою щодня.

І саме тому, щоб допомогти у цій нелегкій справі навчання розв'язувати нестандартні задачі, запропоновано розгляд певних типів задач, на які доцільно звернути увагу при підготовці до олімпіад.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. Приклади модельних завдань олімпіади

2.1. Метод математичної індукції

Задача 1. *Доведіть, що для всіх натуральних n виконується нерівність*

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Розв'язання: База індукції: при $n = 1$ маємо вірну нерівність

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Припустимо, що нерівність справедлива, коли $n = k$: тобто

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\mathrm{k}-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Доведемо, що нерівність справедлива при $n = k+1$, тобто, що має місце нерівність:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2\mathrm{k}+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

З урахуванням припущення індукції, достатньо довести нерівність

$$\frac{2k+1}{2\mathrm{k}+2} < \frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}.$$

Оскільки $k > 1$, то потрібно довести, що

$$\sqrt{2k+1} \cdot \sqrt{2k+3} < 2k+2.$$

Піднесемо цю нерівність до квадрата (ліва і права частини нерівності додатні). Отримаємо, що $(2k+1)(2k+3) < 4k^2 + 8k + 4$.

Отримана нерівність еквівалентна нерівності $3 < 4$. Отримали виконання нерівності при $n = k+1$.

На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження задачі справедливе для всіх натуральних n.

■

2.2. Рівняння, що має розв'язки в цілих або натуральних числах

Задача 2. *Розв'язати в натуральних числах рівняння*

$$x^2 - xy + 2x - 3y = 11.$$

Розв'язання: Виразимо невідому y через невідому x:

$$(x+3)y = x^2 + 2x - 11,$$

$$y = \frac{x^2+2x-11}{x+3} = \frac{x^2+2x-3-8}{x+3} = \frac{(x-1)(x+3)-8}{x+3} = x - 1 - \frac{8}{x+3}.$$

Оскільки невідомі y та x – натуральні числа, то вираз $\frac{8}{x+3}$ має бути натуральним числом, а $(x+3)$ – дільником числа 8.

Отже, $x+3=4$ або $x+3=8$, звідки отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_1 = 3. \end{cases}$$

Задовольняє умові задачі $x = 5, y = 3$.

Відповідь: $(5,3)$.

2.3. Рівняння вищих степенів

Задача 3. *Розв'язати рівняння*

$$x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = 0.$$

Розв'язання: Застосуємо метод розкладу на множники, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Кубічний многочлен можемо представити у вигляді добутку таких многочленів з невизначеними коефіцієнтами

$$x + a \quad \text{та} \quad \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3,$$

що має місце рівність:

$$(x+\alpha)(\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3) = x^3 + 3x + 5\sqrt{2}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях невідомої змінної x у лівій і правій частинах цієї рівності, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 + \alpha\beta_1 = 0, \\ \beta_2\alpha + \beta_3 = 3, \\ \alpha\beta_3 = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

З отриманої системи покроково виразимо невідомі β_2, β_3 через невідоме α і маємо наступне рівняння: $\alpha^3 + 3\alpha - 5\sqrt{2} = 0$. Представимо рівняння у вигляді

$$\alpha^3 + 3\alpha - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0,$$

отримаємо, що $\alpha = \sqrt{2}$.

Отже, розв'язком цієї системи рівнянь є числа $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = -\sqrt{2},\ \beta_3 = 5,\ \alpha = \sqrt{2}$. Тому справедливий розклад многочлена на множники:

$$x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 5\right).$$

Отримаємо, що вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\begin{bmatrix} x + \sqrt{2} = 0\,, \\ x^2 - \sqrt{2}x + 5 = 0. \end{bmatrix}$$

Ця сукупність рівнянь має єдиний розв'язок $x = -\sqrt{2}$.

Відповідь: $x = -\sqrt{2}$.

2.4. Доведення нерівностей

Задача 4. *Довести, що якщо* $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, *то виконується нерівність*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Розв'язання: Зробимо заміну виразів: $b + c = 2x,\ c + a = 2y,\ a + b = 2z$. Тоді, виразивши з цих співвідношень змінні a, b, c, отримаємо:

$$a = y + z - x, \quad b = x + z - y, \quad c = x + z - z.$$

Розглянемо ліву частину нерівності, підставивши в неї отримані вирази для a, b, c:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{e} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 3\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}(2 + 2 + 2 - 3) - \frac{3}{2} = 0.$$

Що й треба було довести.

■

2.5. Рівняння з параметром

Задача 5. *Знайти, для яких значеннях параметра* a *рівняння*

$$1 + a\sin x = a^2 - \sin^2 x$$

має розв'язки.

Розв'язання: Введемо заміну: $\sin x = t$, тоді початкове рівняння набуде вигляду

$$t^2 + at + 1 - a^2 = 0.$$

Тоді наша задача зводиться до наступної: *потрібно знайти усі такі значення параметра* a*, при яких хоча б один корінь отриманого рівняння належав проміжку* $-1 \le t \le 1$.

Обчислимо дискримінант $D = a^2 + 4a^2 - 4 = 5a^2 - 4$. Тоді корені рівняння

$$t_{1,2} = \frac{-a^2 \pm \sqrt{5a^2 - 4}}{2}.$$

Для розв'язування поставленої задачі можна розв'язати сукупність систем

$$\left[\begin{cases} 5a^2 - 4 \ge 0, \\ -1 \le \dfrac{-a^2 - \sqrt{5a^2 - 4}}{2} \le 1; \end{cases}\right.$$
$$\left[\begin{cases} 5a^2 - 4 \ge 0, \\ -1 \le \dfrac{-a^2 + \sqrt{5a^2 - 4}}{2} \le 1. \end{cases}\right.$$

Але з обчислювальної точки зору розв'язування буде досить складним і є не зовсім раціональним.

Тому розглянемо функцію $f(t) = t^2 + at + 1 - a^2$ і дослідимо для яких значень параметра a хоча б один корінь рівняння $t^2 + at + 1 - a^2 = 0$ належить відрізку $-1 \le t \le 1$. Дослідимо розташування нулів квадратичної функції відносно відрізка $[-1; 1]$ осі абсцис.

Тоді потрібна умова виконується у двох випадках:

1) коли корені різні і один з них належить проміжку $-1 \le t \le 1$;
2) коли обидва корені (різні чи ні) належать проміжку $-1 \le t \le 1$.

Перший випадок має місце при виконанні умови $f(-1)f(1) < 0$**,** тобто

$$(a^2 - a - 2)(a^2 + a - 2) < 0.$$

Розв'яжемо нерівність методом інтервалів (рис. 1).

Відповідне рівняння має такі нулі: $-1;\ 2;\ 1;\ -2$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

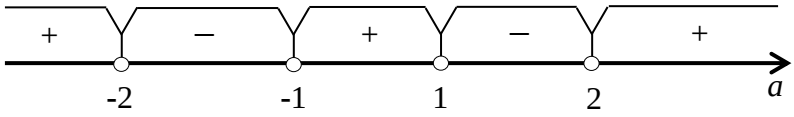


Рис. 1. Ілюстрація методу інтервалів для випадку 1)

Розв'язком системи буде $a \in (-2;-1;)\cup(1;2)$.

Другий випадок: коли обидва корені належать проміжку $-1 \le t \le 1$ (рис. 2.). Тоді має місце виконання умов:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ 1f(-1) > 0, \\ 1f(1) > 0, \\ -1 < -\dfrac{a}{2} < 1; \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} 5a^2 - 4 \ge 0, \\ 2 - a - a^2 > 0, \\ 2 + a - a^2 > 0, \\ -2 < a < 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| \ge \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \\ a^2 + a - 2 < 0, \\ a^2 - a - 2 < 0, \\ -2 < a < 2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \infty\right), \\ a \in (-2;1), \\ a \in (-1;2), \\ a \in (-2;2); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \infty\right), \\ a \in (-1;1). \end{cases}$$

Розв'язком системи буде:

$$a \in \left(-1; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right).$$

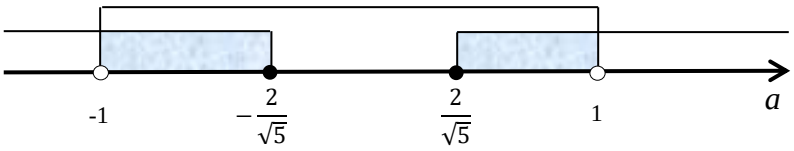


Рис. 2. Ілюстрація методу інтервалів для випадку 2)

Розглянемо тепер випадок, коли тричлен має корені $y = -1$ або $y = 1$.
Якщо $y = -1$, то $1 - a + 1 - a^2 = 0$, $a^2 + a - 2 = 0$, $a_1 = -2, a_2 = 1$.
Якщо $y = 1$, то $1 + a + 1 - a^2 = 0$, $a^2 - a - 2 = 0, a_1 = -1, a_2 = 2$.
Збираючи всі знайдені значення a, отримаємо остаточну відповідь.

Відповідь: рівняння має розв'язки при

$$a \in \left[-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right].$$

3. Анонс

Київський національний університет імені Тараса Шевченка щорічно проводить Всеукраїнську олімпіаду з математики. В олімпіаді можуть брати участь особи, які є учнями випускних класів закладів загальної середньої освіти або мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету. Традиційно олімпіада проходить у два тури: перший – дистанційний (відбірковий) взимку, та другий – очний (фінальний) навесні. Детальну інформацію читачі можуть знайти на офіційному сайті Київського національного університету імені Тараса Шевченка https://knu.ua.

Із завданнями дистанційного (відбіркового) туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка читачі можуть також ознайомитися в цьому номері журналу у рубриці «Задачі та гіпотези, рішення».

Список використаних джерел

Гайштут О. (1997) *Алгебра. Розв'язування задач та вправ*. Посібник. К.: «Магістр-S». 256 с.

Михайловський В.І. (1975) *Практикум з розв'язування задач з математики*. К.: Вища школа. 424 с.

Сканаві М.І. (1992) *Збірник задач з математики*. К.: Вища школа. 445 с.

Стасюк В.Д. (2006) *Практикум з розв'язування конкурсних завдань з математики*. Навчально-методичний посібник. К.: Карбон. 524 с.

Отримано редакцією журналу: 01.12.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna TSYGANIVSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0001-7632-3410
e-mail: itsy8009@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ALL-UKRAINIAN MATHEMATICS OLYMPIAD OF TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV 2025. CORRESPONDENCE TOUR

Abstract. *Mathematical Olympiad is an intellectual competition that allows talented students to demonstrate their knowledge, logical thinking and ability to solve complex mathematical problems. Olympiads stimulate in-depth study of mathematics, expand knowledge and improve students' skills. The paper presents solutions to the problems of the All-Ukrainian Mathematics Olympiad of Taras Shevchenko National University of Kyiv in 2024.*

Keywords: *Mathematical Olympiad; equation; inequality; solution.*

УДК 51:[37.091.27-057.874: 004 (477)]:378.4(477.411)КНУ
DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.6

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАВДАННЯ ДИСТАНЦІЙНОГО ТУРУ ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Анотація. *Завдання дистанційного туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка для випускників закладів загальної середньої освіти та особам, що мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету у 2025 році.*

Ключові слова: *математична олімпіада; задачі; абітурієнт 2025.*

1. Вступ

Київський національний університет імені Тараса Шевченка щорічно проводить Всеукраїнську олімпіаду з математики. В олімпіаді можуть брати участь особи, які є учнями випускних класів закладів загальної середньої освіти або мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету.

Традиційно олімпіада проходить у два тури: перший – дистанційний, який проходитиме з 15 січня 2024 року по 15 лютого 2025 року та другий – очний (фінальний), який планується провести на початку квітня 2025 року. Детальну інформацію читачі можуть знайти на офіційному сайті Київського національного університету імені Тараса Шевченка https://knu.ua.

Завдання насамперед адресовано учням випускних класів закладів загальної середньої освіти та особам, які мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту у 2024-2025 навчальному році, що бажають вступити до Київського національного університету імені Тараса Шевченка та усіх, хто цікавиться математикою.

2. Завдання дистанційного туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (для вступників 2025 року)

1. У трицифровому числі закреслили останню цифру нуль, і воно зменшилося на на 405. Яке число отримали?
2. Довести нерівність

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24},\quad n\geq 2.$$

3. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x+11+6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}=5$.
4. Знайти чотири числа, з яких три перших утворюють арифметичну прогресію, а три останніх – геометричну. Сума крайніх чисел дорівнює 22, а сума середніх дорівнює 20.
5. Знайти розв'язки рівняння $3+5sin2x=cos4x$, що належать проміжку $[0,\ 2\pi]$.
6. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола поділяє висоту у відношенні 5:2 починаючи від вершини. Довжина бічної сторони дорівнює 20 см. Визначити довжину основи трикутника.
7. Визначити усі значення параметра a, для яких корені рівняння
$$(a+1)x^2-3ax+4a=0$$
належать проміжку $(2;5)$.
8. На координатній площині Oxy зобразити всі точки з координатами (x,y), для яких справджується рівність $xy^2-y^2-x+y=0$.
9. Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Довжина сторони куба дорівнює 4 см. Через точку A, середини ребер B_1C_1 та D_1C_1 проведену площину. Визначити периметр утвореного перерізу куба площиною.

3. Застереження

Для участі в дистанційному турі необхідно:

1) зареєструвати через сайт Київського національного університету імені Тараса Шевченка за посиланням https://vstup.knu.ua/ особистий кабінет (при вдалій реєстрації на пошту учасника олімпіади прийде лист підтвердження);

2) завантажити в особистий кабінет не пізніше 15 лютого 2025 року розв'язання задач дистанційного туру (роботи потрібно оформити відповідно до вимог, розміщених в особистому кабінеті).

Отримано редакцією журналу: 02.12.2024
Прорецензовано: 05.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

TASK OF THE DISTANCE TOUR OF THE MATHEMATICS OLYMPIAD OF THE TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV

Abstract. *Tasks of the remote round of the All-Ukrainian Mathematics Olympiad of Taras Shevchenko National University of Kyiv for graduates of secondary education institutions and persons who have the right to receive a document of complete secondary education and wish to enter university in 2025.*

Keywords: *Mathematical Olympiad; problems; entrant 2025.*

Математичний гурток

УДК 510:512.622.86(091) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.7**

Віктор РОМАНЕНКО, Д-р. фіз.-мат. наук, Пров. наук. співроб.
ORCID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Інститут фізики НАН України, Київ, Україна

Олександр РОМАНЕНКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0009-0000-1860-496X
e-mail: oleksandr.romanenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

РОЗКЛАДАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ МЕТОДАМИ АЛГЕБРИ

Анотація. *Як відомо, методи на основі степеневих рядів – один із стовпів математичного аналізу. Для аналітичних функцій степеневі ряди можуть бути легко отримані з теореми Тейлора у вигляді рядів Маклорена обчислюванням похідних цих функцій при $x = 0$. У той же час було б корисно вміти розкладати функції в ряд, не користуючись поняттям похідної. Зокрема, такі розклади стали б в пригоді при обчисленні границь – основи математичного аналізу. У роботі Л. П. Мироненка і О. А Рубцової (2013) висунута ідея, що для розкладу в ряд елементарних функцій можна використати властивості цих функцій та отримано перші члени їхнього розкладу в степеневий ряд. У роботі В. І. Романенка та О. В. Романенка (2024) узагальнення цього підходу дозволило отримати члени ряду для синуса, косинуса і експоненти у загальному вигляді. У пропонованій читачу статті у спрощеному вигляді подаються основні результати цитованих статей, доповнені виведенням формули для розкладання тангенса у степеневий ряд. Виклад побудовано так, щоб суть ідеї і математичні викладки були зрозумілі читачу зі знанням шкільної програми. Можливість алгебраїчного підходу до розкладання функцій в ряди може бути поясненням того, як саме індійському математику Мадхаві (XIV–XV століття) вдалося отримати перші кілька членів розкладу в ряд для синуса, косинуса і арктангенса задовго до появи методів аналізу функцій у сучасному вигляді.*

Ключові слова: *степеневий ряд; метод невизначених коефіцієнтів; елементарні функції; історія математики.*

1. Вступ

Розкладання функцій в степеневі ряди – один з найпоширеніших методів розв'язання математичних, фізичних та технічних задач. У більшості випадків це робиться за допомогою теореми Тейлора шляхом обчислення похідних від функцій при певному значенні аргументу, наприклад, при $x = 0$, де x – аргумент функції (див., наприклад, Давидов, 1990). У той же час розклади в ряди для тригонометричних функцій були вже відомі задовго до появи математичного аналізу (Plofker K., 2009).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Швидше за все, індійський вчений Мадхава їх отримав, користуючись алгебраїчними методами. Як проілюстровано у (Мироненко & Рубцова, 2013), розкладання функцій у степеневий ряд могло би бути корисним під час вивчення теорії границь, яка є основою для введення поняття похідної. Іншою сферою застосування, навіть у середній школі, могло б бути пояснення учням того, як можна наближено обчислити тригонометричні функції довільного аргументу. У своєму дослідженні Л. П. Мироненко і О. А. Рубцова показали як степеневі ряди для елементарних функцій можна отримати, виходячи з властивостей цих функцій, і отримали для них кілька членів ряду. В роботі В. І. Романенка та О. В. Романенка (Romanenko & Romanenko, 2024) отримано загальні вирази для членів ряду. Крім того, автори використали дещо інший набір базових властивостей функцій, зокрема знайшли степеневий ряд для $\ln(1+x)$, користуючись, на відміну від праці Л. П. Мироненко і О. А. Рубцової, властивостями логарифма. Ми даємо спрощений виклад основних результатів цитованих робіт на рівні, зрозумілому для учня школи, який цікавиться математикою, а також отримуємо розклад тангенса в степеневий ряд, виходячи з властивостей тангенса, на відміну від роботи В. І. Романенка та О. В. Романенка (Romanenko & Romanenko, 2024), де цей розклад було знайдено як відношення степеневих рядів для синуса і косинуса.

Об’єктом дослідження є елементарні функції.

Мета та завдання дослідження – елементарний виклад отримання степеневих рядів елементарних функцій без застосування методів математичного аналізу.

Методи – використовується метод невизначених коефіцієнтів.

Для спрощення викладу обмежимося тут першими чотирма членами розкладання елементарних функцій в степеневий ряд.

2. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо рівняння

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots. \qquad (1)$$

Це рівняння буде справедливим за будь-яких x, якщо $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ і так далі. Переконаємося у цьому. Спершу покладемо $x = 0$, побачимо, що $a_0 = b_0$, віднімемо цю рівність від наведеного вище рівняння (1) і розділимо обидві частини на x. Знову покладемо $x = 0$, побачимо, що $a_1 = b_1$ і так далі. Отже, якщо ми маємо рівняння вигляду (1), яке справедливе за будь-якого x в області його визначення, ми можемо прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x. Цей метод, що є варіантом методу невизначених коефіцієнтів, далі використаємо для обчислення коефіцієнтів розкладу елементарних функцій в степеневі ряди.

3. Представлення експоненціальної функції у вигляді степеневого ряду

Для показникової функції a^x з основою $a > 0$ запис у вигляді степеневого ряду має вигляд:

$$a^x = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots. \quad (2)$$

Оскільки $a^0 = 1$, то $b_0 = 1$. Значення коефіцієнта b_1 залежить від основи показникової функції. Оберемо основу так, щоб $b_1 = 1$ і позначимо її e. Підставимо рівняння (2) для $a = e$ у рівняння

$$e^{2x} = e^x e^x, \quad (3)$$

яке виражає властивість показникової функції (для $a = e$ цю функцію називають *експоненціальною* або *експонентою*). У результаті з точністю до четвертого порядку за x маємо рівняння

$$\begin{gathered} 1 + 2x + 4b_2x^2 + 8b_3x^3 + 16b_4x^4 + \ldots = \\ = 1 + 2x + (1 + 2b_2)x^2 + 2(b_2 + b_3)x^3 + (b_2^2 + 2b_3 + 2b_4)x^4 + \cdots. \end{gathered} \quad (4)$$

Прирівняємо коефіцієнти при x з однаковими степенями у лівій та правій частинах рівняння (4). Отримаємо систему рівнянь для b_2, b_3, b_4:

$$4b_2 = 1 + 2b_2, \quad (5)$$

$$8b_3 = 2(b_2 + b_3), \quad (6)$$

$$16b_4 = b_2^2 + 2b_3 + 2b_4. \quad (7)$$

Ці рівняння послідовно легко розв'язуються. З рівняння (5) знаходимо b_2, підставляємо в рівняння (6) і знаходимо з нього b_3. Потім знайдені значення b_2 і b_3 підставляємо в рівняння (7) і знаходимо з нього b_4. Маємо

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{1}{6}, b_4 = \frac{1}{24}.$$

Тоді e^x можна записати у вигляді степеневого ряду

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots. \quad (8)$$

Тут позначено $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots (n-1) \times n$ для цілого n. Доведення того, що $b_n = \frac{1}{n!}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ наведено в (Romanenko & Romanenko, 2024). Користуючись тотожністю $a^x = e^{x \ln a}$, можна знайти і степеневий ряд для показникової функції з довільною додатною основою. Обчислюємо значення (8) при $x = 1$, знаходимо наближене значення $e \approx 2{,}7$ з точністю до двох значущих цифр. Цей же вираз,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

записаний з точністю до членів четвертого порядку за x, можна використати і для обчислення e з більшою точністю, наприклад, скориставшись тотожністю $e = \left[e^{\frac{1}{n}}\right]^n$. При $n = 12$ знаходимо наближене значення $e \approx 2{,}71828$.

4. Натуральний логарифм

Розклад в степеневий ряд $\ln(1+x)$ для малих x шукаємо у вигляді

$$\ln(1+x) = l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + l_4 x^4 + \cdots. \tag{9}$$

Розклад ми почали з лінійного члена, враховуючи, що $\ln 1 = 0$. Щоб знайти коефіцієнти l_1, l_2, l_3, l_4, скористаємося відомою властивістю логарифма $\ln(a^2) = 2\ln a$, яка у нашому випадку записується так:

$$\ln[(1+x)^2] = 2\ln(1+x), \tag{10}$$

а з урахуванням (9) з точністю до x^4 рівність (10) набуває вигляду:

$$\begin{gathered} l_1(2x+x^2) + l_2(2x+x^2)^2 + l_3(2x+x^2)^3 + l_4(2x+x^2)^4 = \\ = 2(l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + l_4 x^4). \end{gathered} \tag{11}$$

Прирівняємо коефіцієнти при x з однаковими степенями. Отримаємо систему рівнянь

$$2l_1 = 2l_1, \tag{12}$$

$$4l_2 + l_1 = 2l_2, \tag{13}$$

$$8l_3 + 4l_2 = 2l_3, \tag{14}$$

$$16l_4 + 12l_3 + l_2 = 2l_4. \tag{15}$$

Як бачимо, рівняння (12) задовольняється при будь-якому значенні l_1. Це зумовлено тим, що властивість логарифма, яку ми використовували, справедлива для будь-якої його основи. Оскільки нас цікавить основа e, звернемося до розкладу (8) з точністю до лінійного за x члена: $e^x \approx 1 + x$, який справедливий з тим вищою точністю, чим менше x. Обчисливши логарифм від обох частин рівності, бачимо, що розклад $\ln(1+x)$ в степеневий ряд починається з лінійного члена з коефіцієнтом 1, тобто $l_1 = 1$. Звичайно, ці міркування мають характер оцінки і не є строгим математичним доведенням, яке можна знайти в роботі (Romanenko & Romanenko, 2024). Далі

рівняння (13)–(15) розв'язуються легко, і ми отримуємо представлення у вигляді степеневого ряду:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots. \tag{16}$$

Ряд (16) збігається (маються на увазі і не вказані тут доданки) при $|x| < 1$.

5. Представлення синуса і косинуса у вигляді степеневого ряду

У цьому випадку обчислюємо одночасно степеневі ряди для обох функцій, оскільки рівняння, що відображають властивості однієї з них, включають іншу:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tag{17}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x. \tag{18}$$

Щоб спростити обчислення, врахуємо, що $\sin x$ – непарна функція x, а $\cos x$ – парна функція x. Крім того, врахуємо, що $\cos 0 = 1$. Шукаємо ці функції у вигляді розкладу в степеневий ряд за x:

$$\sin x = s_1 x + s_3 x^3 + \cdots, \tag{19}$$

$$\cos x = 1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots. \tag{20}$$

Підстановка виразів (19), (20) в рівняння (17), (18) та перенесення всіх виразів в ліву частину рівності дає:

$$x^2(2c_2 + s_1^2) + x^4(2c_4 + c_2^2 + 2s_1 s_3) + \cdots = 0, \tag{21}$$

$$2x^3(3\, s_3 - s_1 c_2) + \cdots = 0. \tag{22}$$

Згідно з методом невизначених коефіцієнтів ці рівняння справедливі, якщо коефіцієнти при кожному степені x дорівнюють нулю. З (21), (22) маємо рівняння:

$$2c_2 + s_1 = 0, \tag{23}$$

$$3s_3 - s_1 c_2 = 0, \tag{24}$$

$$2c_4 + c_2^2 + 2s_1 s_3 = 0. \tag{25}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

З рівнянь (23) - (25) можна виразити c_2, s_3, c_4 через s_1. Значення s_1 залишається довільним. Його вибір визначає одиницю виміру кута. При виборі $s_1 = 1$ кут вимірюється в радіанах. Щоб отримати $\sin x$ і $\cos x$ для кута в градусах, треба обрати $s_1 = \frac{\pi}{180}$. Надалі ми оберемо $s_1 = 1$. Тоді $c_2 = -\frac{1}{2}, s_3 = -\frac{1}{6}, c_4 = \frac{1}{24}$ і розклад $\sin x$ і $\cos x$ в степеневий ряд з точністю до членів четвертого порядку за x має вигляд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots, \tag{26}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots. \tag{27}$$

Неважко здогадатися, що коефіцієнти s_{2n+1}, c_{2n} у випадку довільного цілого n дорівнюють $s_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$. У роботі (Romanenko & Romanenko, 2024) наведено доведення цього твердження.

6. Представлення тангенса у вигляді степеневого ряду

У роботі (Romanenko & Romanenko, 2024) вираз для тангенса у вигляді степеневого ряду наведено як відношення рядів для синуса і косинуса. Тут ми застосуємо простіший метод, виходячи з властивостей тангенса, а саме з виразу для тангенса подвійного кута, записаного у вигляді:

$$\operatorname{tg} 2x\,(1 - \operatorname{tg}^2 x) = 2 \operatorname{tg} x. \tag{28}$$

Підставивши вираз для тангенса з урахуванням його непарності у вигляді степеневого ряду

$$\operatorname{tg} x = t_1 x + t_3 x^3 + \cdots \tag{29}$$

в (28), отримуємо рівняння

$$2x^3(3t_3 - t_1^3) + \cdots = 0. \tag{30}$$

Звідси випливає, що $t_3 = \frac{t_1^3}{3}$. Якщо треба визначити коефіцієнти розкладу (29) більш високого порядку, в (30) буде сума доданків з різними степенями x. Прирівняємо кожен з них до нуля, матимемо систему рівнянь, з якої отримаємо коефіцієнти розкладу як функції t_1. Як при обчисленні синуса і косинуса, вибір коефіцієнта при лінійному члені визначає, в яких одиницях підставляється в тригонометричну функцію її аргумент. Для того, щоб він був в радіанах, обираємо $t_1 = 1$. Тоді

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots. \tag{31}$$

Ряд (31) збігається при $|x| < \pi/2$.

7. Представлення арктангенса у вигляді степеневого ряду

Отримаємо розклад оберненої тригонометричної функції в ряд на прикладі арктангенса. Беручи до уваги, що арктангенс – непарна функція, записуємо його представлення у вигляді степеневого ряду як

$$\operatorname{arctg} x = r_1 x + r_3 x^3 + \cdots. \tag{32}$$

Обчислюємо тангенс обох частин (32) з точністю до четвертого порядку за x, використовуючи вираз (31) для тангенса у вигляді степеневого ряду:

$$x = r_1 x + x^3 \left(r_3 + \frac{r_1^3}{3} \right) + \cdots. \tag{33}$$

Формально процедуру отримання рівняння (33) можна описати так. Тангенс лівої частини (32) обчислюється за означенням – він дорівнює x. Обчислюємо тангенс правої частини (32). Записуємо (31), замінивши x на y:

$$\operatorname{tg} y = y + \frac{y^3}{3} + \cdots. \tag{34}$$

Потім замість y підставляємо в (34) праву частину рівняння (32) і в результаті маємо її тангенс – праву частину рівняння (33).

З рівняння (33) випливає $r_1 = 1, r_3 = -\frac{1}{3}$. Тоді арктангенс x можна записати у вигляді

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots. \tag{35}$$

8. Висновки

Ми пояснили, як знаючи властивості елементарних функцій, можна отримати вирази для них у вигляді степеневих рядів. Для скорочення математичних обчислень ми обрали найменшу кількість членів рядів, необхідну для пояснення. Більш точні обчислення очевидні. Наведемо тепер представлення розглянутих тут елементарних функцій з точністю до сьомого порядку за x:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \cdots,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \cdots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Метод невизначених коефіцієнтів міг використати відомий індійський математик XIV–XV століть Мадхава (див. Plofker, 2009) для пошуку розкладів тригонометричних функцій в ряди задовго до виникнення математичного аналізу, що може бути можливим поясненням, як йому вдалося це зробити.

Список використаних джерел

Давидов, М. О. (1990) *Курс математичного аналізу*: *у 3 ч.: Частина 1: Функції однієї змінної*. Київ: Вища школа. 380 с.

Мироненко, Л. П., & Рубцова, О. А. (2013). Approximations of Some Functions by Polynomial sand the Method of Undefined Coefficients. *Наукові праці ДонНТУ. Серія: обчислювальна техніка та автоматизація* №2 (25). с. 128–135. https://ea.donntu.edu.ua/jspui/handle/123456789/22814 (in Russian).

Plofker, K. (2009). *Mathematics in India*. Princeton University Press. 384 p.

Romanenko, V. I., & Romanenko, A. V. (2024). Series expansion of some elementary functions without using mathematical analysis. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1–15. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2353371

Отримано редакцією журналу: 25.11.2024
Прорецензовано: 05.12.2024
Схвалено до друку:19.12.2024

Victor ROMANENKO, Dr. of Sci. (Phys&Math), Leading Researcher
ORCID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Alexander ROMANENKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID: 0009-0000-1860-496X
e-mail: oleksandr.romanenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

EXPANSION OF ELEMETNARY FUNCTIONS INTO A POWER SERIES USING ALGEBRAIC METHODS

Abstract. *As is well known, power series-based methods are one of the pillars of mathematical analysis. For analytic functions, the power series can be easily obtained from Taylor's theorem in the form of Maclaurin series by calculating the derivatives of these functions at x=0. At the same time, it would be useful to be able to expand functions into series without using the concept of a derivative. Such expansions, in particular, would be helpful in calculating limits, which are fundamental to mathematical analysis. In the work of L. P. Myronenko and O. A. Rubtsova (2013), the idea was proposed that the properties of elementary functions can be used for series expansion, and the first terms of their power series expansions were obtained. In the work of V. I. Romanenko and A. V. Romanenko (2024), a generalization of this approach allowed for obtaining the series terms for sine, cosine, and exponential functions in a general form. In the article presented to the reader, the main results of the cited works are provided in a simplified form, supplemented by deriving a formula for the power series expansion of the tangent function. The presentation is structured in such a way that the core idea and the mathematical derivations are accessible to readers with knowledge of the school curriculum. The possibility of an algebraic approach to function series expansion might explain how the Indian mathematician Madhava (14th–15th century) managed to derive the first few terms of the series expansion for sine, cosine, and arctangent long before function analyses methods in the modern form.*

Keywords: *power series; method of undetermined coefficients; elementary functions; history of mathematics.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 51:004.92 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.8**

Олена ВАЩІЛІНА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-6867-6216
e-mail: olenavashchilina@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ

Анотація. *В основі комп'ютерної графіки закладені математичні методи, які забезпечують можливість створення, маніпуляції та візуалізації графічних об'єктів. У статті досліджено основні математичні підходи, що використовуються для реалізації графічних алгоритмів, включаючи геометричні моделі, лінійну алгебру, тригонометричні функції, чисельні методи та алгоритми моделювання фізичних процесів. Особлива увага приділяється афінним перетворенням (зсув, поворот, масштабування), які є базовими операціями у графічному середовищі, розглянуто матричні представлення цих трансформацій з використанням однорідних координат, наведено приклад та завдання для самоперевірки. Практичне значення дослідження полягає у популяризації математичних знань серед школярів, демонстрації їхньої практичної важливості у створенні сучасних технологій. Це сприяє інтеграції математичних методів у шкільну програму та формуванню STEM-компетенцій у здобувачів освіти.*

Ключові слова: *комп'ютерна графіка; математичні методи; афінні перетворення; однорідні координати; матриці.*

1. Вступ

Комп'ютерна графіка є однією з ключових складових сучасних цифрових технологій, що активно використовується у різноманітних сферах: від розваг (відеоігри, анімація) до серйозних наукових досліджень і медичної діагностики. Технологічний прогрес у галузі віртуальної та доповненої реальності, 3D-моделювання, а також штучного інтелекту підсилює значущість графіки у сучасному світі. Водночас основою більшості методів та алгоритмів у комп'ютерній графіці є фундаментальні математичні принципи (геометрія, алгебра, тригонометрія тощо), які вивчаються у шкільному курсі математики. Популяризація цих математичних концепцій серед школярів через їх практичне застосування дозволить не лише підвищити інтерес до математики, а й показати її значущість у сучасних технологіях.

Об'єктом цього дослідження є математичні методи та алгоритми, які лежать в основі побудови та обробки графічних зображень у комп'ютерній графіці.

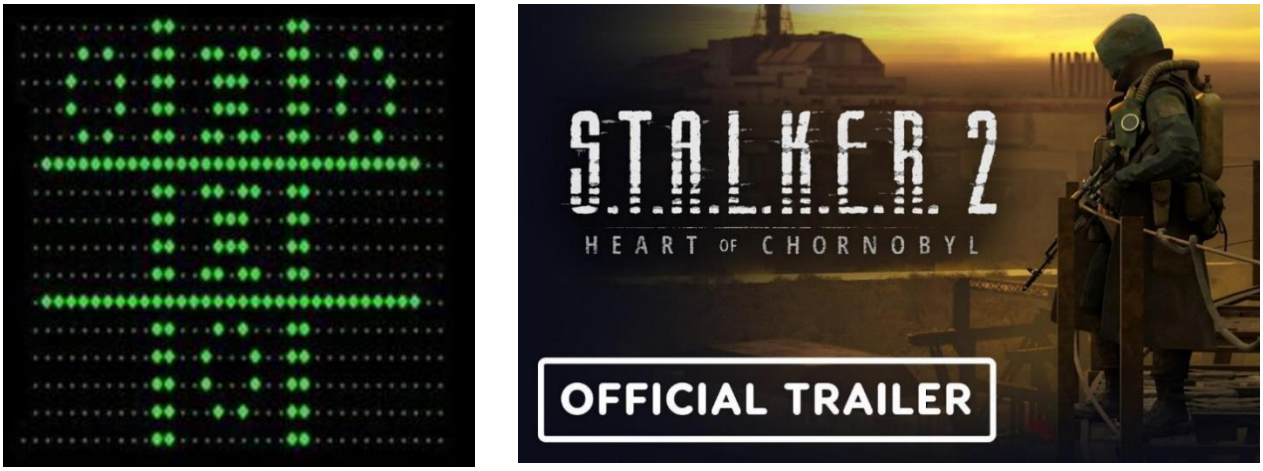
Метою дослідження є аналіз і систематизація математичних принципів, що застосовуються в комп'ютерній графіці, а також популяризація математики серед здобувачів освіти через демонстрацію її використання в реальних технологіях.

2. Основна частина

Комп'ютерна графіка – розділ інформатики, який вивчає засоби і способи створення й обробки графічних зображень за допомогою комп'ютерної техніки.

Комп'ютерна графіка розвинулася в окрему галузь завдяки багатьом технологічним проривам. Починаючи з винаходу електронно-променевої трубки (ЕПТ) компанією Westinghouse в 1930 році ми бачимо як менше ніж за 100 років комп'ютерна графіка з простого візуального інструменту перетворилася на ключовий компонент у взаємодії між людьми і комп'ютерами.

На рис. 1 можемо порівняти як виглядала графіка першої комп'ютерної гри «ОХО» – реалізація «хрестиків-нуликів», створена у 1952 році (рис. 1 а)) та сучасної відеогри (рис. 1 б)).



а) Перша комп'ютерна гра «ОХО» б) Сучасна гра «S.T.A.L.K.E.R. 2»

Рис. 1. Порівняння графіки першої та сучасної відеогри

У наш час комп'ютерна графіка відіграє центральну роль у багатьох галузях, включаючи дизайн, анімацію, кіно, відеоігри, візуалізацію даних, архітектуру, науку та медицину. Сучасні тенденції включають використання віртуальної та доповненої реальності, тривимірної графіки, штучного інтелекту і машинного навчання для покращення реалістичності та продуктивності.

Математика відіграє ключову роль у комп'ютерній графіці, дозволяючи створювати, маніпулювати та візуалізувати віртуальні об'єкти та сцени. Ось деякі з основних застосувань математики в цій галузі.

Геометрія. Геометричні поняття, такі як точки, лінії, поверхні, використовуються для опису форм об'єктів. Алгебраїчні рівняння допомагають визначити положення та властивості цих об'єктів, визначити відстані, кути та інші характеристики об'єктів, що необхідно для точного розташування об'єктів на сцені. Робота з перспективними проєкціями та іншими методами, що використовуються в 3D-графіці для створення ефектів глибини та перспективи тощо.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Лінійна алгебра. Матриці використовуються для трансформації об'єктів у тривимірному просторі. За допомогою матриць можна обертати, масштабувати та переміщувати об'єкти.

Алгебра поліномів. Використовується для побудови кривих та поверхонь, таких як сплайни (наприклад, B-сплайни, криві Безьє), що є важливим при моделюванні гладких об'єктів і шляхів руху.

Тригонометрія. Синус, косинус та інші тригонометричні функції використовуються для обчислення кутів та координат, що є важливим у визначенні положення камер, освітлення та інших аспектів сцени.

Теорія ймовірностей. Ця дисципліна використовується в процесі створення реалістичних ефектів, таких як випадкові рухи або розсіювання світла, анімації та симуляції випадкових ефектів, наприклад, поведінка натовпу, падіння частинок, динаміка рідин та газів.

Диференціальні рівняння. Використовуються в симуляціях, які моделюють фізичні процеси, такі як рух рідини або поведінка тканин.

Фур'є-аналіз. Дозволяє здійснювати перетворення сигналів і зображень, що може використовуватися для обробки зображень, створення текстур, або ефектів візуалізації, таких як шум.

Чисельні методи. Допомагають розв'язувати складні математичні проблеми, які виникають у процесі обчислювальної графіки, такі як обчислення зіткнень, розрахунок фізичних симуляцій, або визначення оптимальних шляхів у сценах.

Таким чином, математика є фундаментом для більшості методів та алгоритмів, які використовуються в комп'ютерній графіці.

Для роботи з комп’ютерною графікою застосовують спеціалізоване програмне забезпечення, яке називають *графічними редакторами*. Найбільш популярними серед них є Microsoft Paint, Adobe Photoshop, Adobe Illustrator, Corel Draw тощо. У всіх програмах MS Office є вбудовані графічні редактори. При користуванні такими редакторами часто виникає потреба повернути, масштабувати або перенести певний об’єкт. При цьому ми не задумуємося які дії виконує при цьому комп’ютер. А насправді для їх виконання комп’ютер застосовує алгоритми в основі яких лежать математичні методи. Розглянемо деякі з них (Маценко, 2023).

Паралельний зсув координат точки на вектор (m,n) в системі координат Oxy визначається за формулами:

$$x' = x + m, \qquad y' = y + n. \tag{1}$$

При цьому точка $M(x,y)$перейде в точку $M'(x',y')$ (рис.2).

Об’єкт можна перенести, застосовуючи рівняння (1) до кожної його точки. Якщо об’єкт складається з відрізків прямих, можна перенести крайні точки відрізків і сполучивши їх накреслити нові відрізки.

Поворот точки відносно початку координат на кут φ проти годинникової стрілки (рис. 3) описується формулами:

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \tag{2}$$

При цьому точка $M(x,y)$перейде в точку $M'(x',y')$ (рис.3).

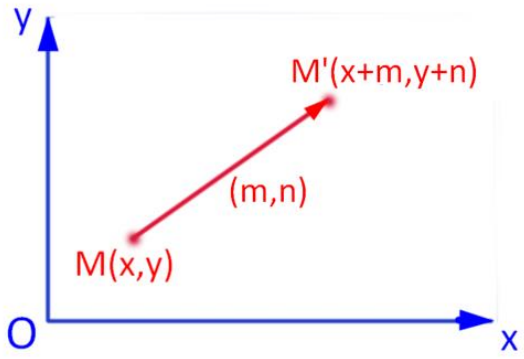


Рис. 2. Перетворення зсуву

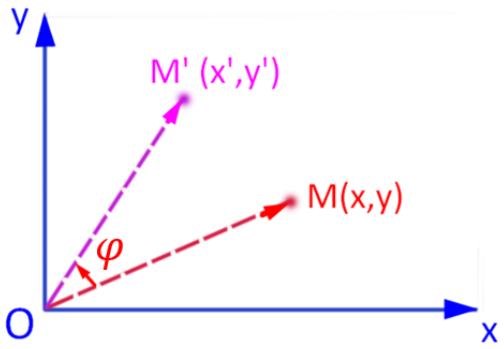


Рис. 3. Перетворення повороту

Масштабування (розтяг / стиск) вздовж координатних осей можна записати формулами:

$$x' = ax, \qquad y' = dy. \tag{3}$$

Якщо в формулі (3) $a = d$, то маємо пропорційне масштабування, якщо $a \neq d$, то масштабування – непропорційне.

- При $a = d > 1$ відбувається збільшення зображення, при $a = d < 1$ – рівномірний стиск.
- При $a = 1,\ d = -1$, одержуємо дзеркальне відображення відносно осі Ox.
- При $a = -1,\ d = 1$ – дзеркальне відображення відносно осі Oy.

Зсуви, масштабування та повороти є складовими частинами перетворень, які називаються *афінними перетвореннями*. В аналітичній геометрії доведено, що довільне афінне перетворення можна задати за допомогою композиції елементарних перетворень (1) – (3).

Для ефективного використання розглянутих формул у задачах комп'ютерної графіки переходять до їх матричного запису.

Перетворення зсуву (1) з матрицею зсуву T має вигляд:

$$X' = X + T = (x,y) + (m,n). \tag{1*}$$

Перетворення повороту (2) матрицею повороту R:

$$X' = X \cdot R = (x,y)\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{2*}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Перетворення масштабування (3) з матрицею масштабування D:

$$X' = X \cdot D = (x, y)\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \qquad a, d \neq 0. \tag{3*}$$

Неважко помітити, що операції обертання та масштабування описуються у вигляді добутку матриць, а операція переносу – як сума матриць. У випадку послідовного виконання довільної комбінації операцій обертання та масштабування можна отримати результуючу матрицю виконаних поворотів та масштабувань. Матричний добуток в комп'ютерній графіці називають композицією. Очевидно, що ефективніше застосовувати одне результуюче перетворення, ніж ряд перетворень один за одним.

Окрім того, композиції дають можливість здійснювати обернені перетворення, тобто точку (об'єкт) X' можна легко повернути в початковий стан X. Наприклад, для повороту обернене перетворення $X = X' \cdot R^{-1}$ задається оберненою до R матрицею R^{-1}:

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

У вказаний спосіб неможливо отримати результуючу матрицю перетворення, якщо серед послідовності перетворень присутнє хоча б одне перенесення. Було б зручніше мати математичний апарат, який дозволяє включати в композиції перетворень усі три розглянуті перетворення. При цьому отримали би значний виграш в швидкості обчислень. Таким математичним апаратом є перехід до однорідних координат. При цьому довільній точці $M(x, y)$ площини Oxy ставиться у відповідність точка $M'(x, y, 1)$ у просторі $Oxyz$. Між однорідними та декартовими координатами існує взаємно однозначна відповідність.

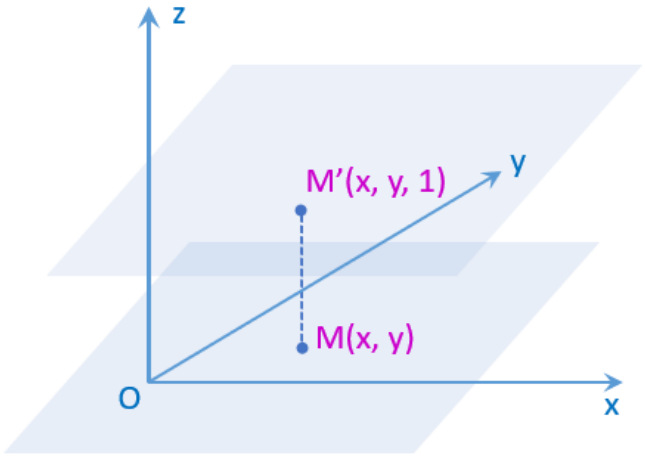


Рис. 4. Однорідні координати

За допомогою однорідних координат можна описати довільне афінне перетворення у вигляді композиції матриць третього порядку:

$$(x', y', 1) = (x, y, 1)\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де елементи a, b, c, d визначають масштабування і поворот, а m, n – сумарний зсув.

Випишемо матриці основних елементарних перетворень:

- матриця перенесення (translation) точки на вектор (m, n):

$$T = T(m, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

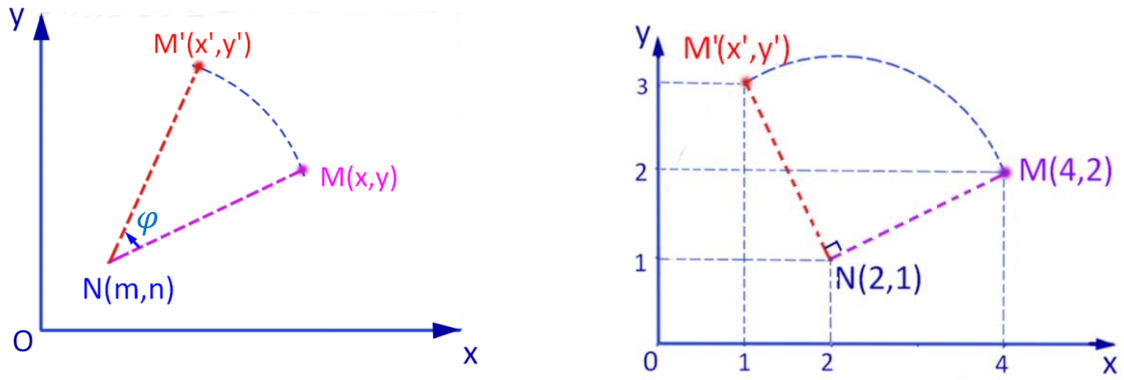
- матриця повороту (rotation) точки відносно початку координат у додатному напрямку:

$$R = R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

- матриця розтягу/стиску (dilation) відносно початку координат:

$$D = D(a, d) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Приклад 1. *Побудувати матрицю повороту точки $M(x, y)$ відносно довільної точки $N(m, n)$ на кут φ у додатному напрямі (рис. 5 а)) та визначити координати нового положення точки – $M'(x', y')$, якщо $M(4,2)$, $N(2, 1)$, $\varphi = 90^\circ$ (рис. 5 б)).*



а) б)

Рис. 5. Поворот точки M у додатному напрямі відносно точки N

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язання: Матриця R задає поворот точки відносно початку координат. Однорідні координати дають можливість знайти матрицю повороту відносно довільної точки. У загальному випадку поворот відносно довільної точки може бути реалізований шляхом композиції таких базових перетворень:

1) переміщення точки $N(m,n)$ на вектор $(-m,-n)$ так, щоб центр повороту сумістився з початком координат O. Матриця цього перетворення:

$$T^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{pmatrix};$$

2) повороту точки на кут φ у додатному напрямку відносно початку координат. Матриця цього перетворення R визначається формулою (6);
3) переміщення одержаного результату назад так, щоб центр повороту сумістився з точкою N. Матриця цього перетворення T визначається формулою (5).

Отже, для знаходження результуючого повороту точки $M(x,y)$ відносно точки $N(m,n)$ потрібно перемножити матриці T^{-}, R, T у вказаному порядку. В результаті одержимо шукане перетворення у вигляді:

$$(x',y',1) = (x,y,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Зокрема, поворот точки $M(x,y)$ на 90^0 у додатному напрямку відносно точки $N(m,n)$ виконується перетворенням:

$$(x',y',1) = (x,y,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ n+m & n-m & 1 \end{pmatrix}.$$

В останнє співвідношення підставимо координати точок $M(4,2)$ та $N(2,1)$:

$$(x',y',1) = (4,2,1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (-2+3, 4-1, 1) = (1,3,1).$$

Відповідь: Координати нового положення точки – $M'(1,3)$.

3. Практичне завдання

Виконати наступні трансформації 2D-об'єкта-трикутника з вершинами $A(1,1), B(3,1), C(2,4)$.

1. Зсув на вектор $(2,-1)$.

2. Поворот на 90^0 проти годинникової стрілки відносно початку координат.
3. Масштабування з коефіцієнтами $a = 2, d = 3$.
4. Побудуйте в системі координат початковий трикутник і всі його трансформації.
5. Побудуйте в однорідних координатах матрицю K композиції перетворень та використайте її для одночасного застосування всіх перетворень до початкових координат об'єкта.
6. Виконайте обернене перетворення K^{-1} для повернення об'єкта у початкове положення.

Відповідь: Координати після зсуву: $A'(3,0)$; $B'(5,0)$; $C'(4,3)$.

Координати після повороту: $A''(0,3)$; $B''(0,5)$; $C''(-3,4)$.

Координати після масштабування: $A'''(0,9)$; $B'''(0,15)$; $C'''(-6,12)$.

4. Висновки

Проведене дослідження продемонструвало, що математика відіграє фундаментальну роль у розвитку комп'ютерної графіки, забезпечуючи теоретичну основу для реалізації алгоритмів, що використовуються у візуалізації та моделюванні. Використання геометрії, лінійної алгебри, тригонометрії та інших розділів математики дозволяє ефективно вирішувати завдання, пов'язані з трансформацією об'єктів, створенням тривимірних зображень та реалістичних візуальних ефектів. Матеріали статті демонструють приклади застосування інструментів алгебри та геометрії, які школярі вивчають у класі, і як ці теми дозволяють вирішувати завдання візуалізації, моделювання та створення ефектів у графічних програмах. Це допоможе їм зрозуміти практичне значення математичних концепцій, підвищуючи їхню мотивацію до навчання та розширюючи кругозір щодо майбутніх кар'єрних можливостей у сфері інформаційних технологій та інженерії.

Список використаних джерел

Betar. *Історія виникнення, становлення, розвитку комп'ютерних відеоігор*: http://betar.org.ua/istoriya-viniknennya-stanovlennya-rozvitku-kompyuternih-videoigor-26-foto/

Маценко В.Г. (2023) *Обчислювальна геометрія та комп'ютерна графіка*: Навчальний посібник, Чернівці: Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича. 440 с.

Тмєнова Н.П. (2017) *Комп'ютерна графіка*: навчально-методичний посібник, Київ: ВПЦ «Київський університет». 111 с.

Пічугін М.Ф., Канкін І.О., Воротніков В.В. (2013) *Комп'ютерна графіка*: Навчальний посібник, Київ: Центр учбової літератури. 346 с.

Різник О.Я. (2004) *Технічні, математичні та алгоритмічні основи комп'ютерної графіки*: Підручник, Львів: Львівська політехніка. 162 с.

Отримано редакцією журналу: 25.11.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Olena VASHCHILINA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0001-6867-6216
e-mail: olenavashchilina@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

APPLICATION OF MATHEMATICS IN COMPUTER GRAPHICS

Abstract. *Computer graphics are based on mathematical methods that provide the ability to create, manipulate and visualize graphic objects. The article examines the main mathematical approaches used to implement graphic algorithms, including geometric models, linear algebra, trigonometric functions, numerical methods and algorithms for modeling physical processes. Particular attention is paid to affine transformations (shift, rotation, scaling), which are basic operations in the graphic environment, matrix representations of these transformations using homogeneous coordinates are considered, an example and tasks for self-testing are given. The practical significance of the study lies in the popularization of mathematical knowledge among schoolchildren, demonstrating their practical importance in the creation of modern technologies. This contributes to the integration of mathematical methods into the school curriculum and the formation of STEM competencies in students.*

Keywords: *computer graphics; mathematical methods; affine transformations; homogeneous coordinates; matrices.*

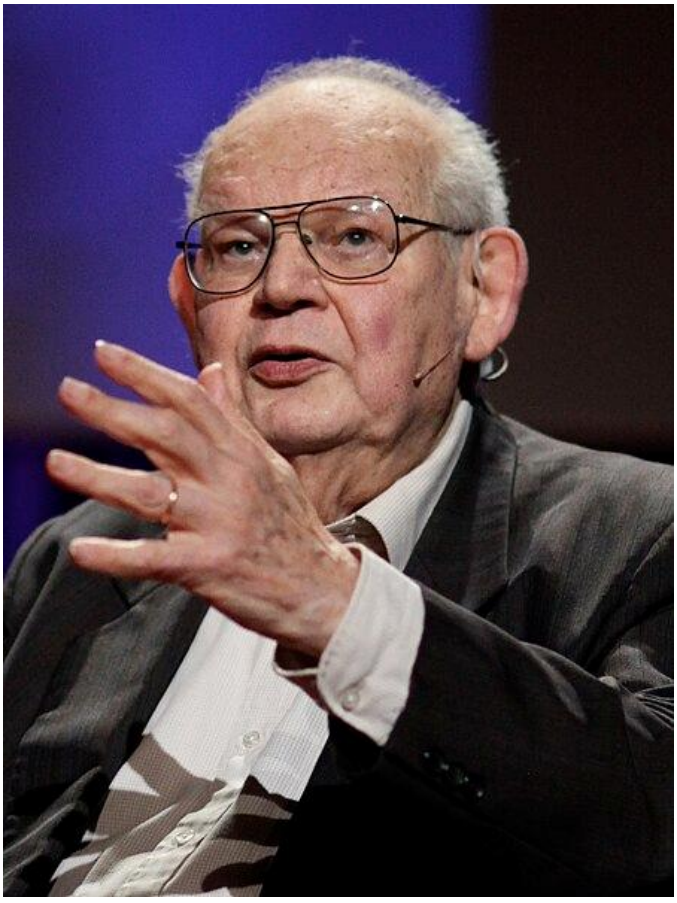
Обрії математики

УДК 515.12:514.8(091)Мандельброт **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.9**

Віктор ГРІНЧЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

FRACTALIST[1]



https://www.flickr.com/photos/jurvetson/4770047266/

Анотація. *Стаття присвячена 100-річчю з дня народження Бенуа Мандельброта, людини, яка придумала слово «фрактал»' і, по суті, стала автором нового напряму в науці – фрактальної геометрії. У статті стисло наведені дані його біографії, обговорюється визначення поняття фрактала. Певна увага приділена попередникам Мандельброта і обмірковується, що саме*

[1] Назва останньої книги Бенуа Мандельброта

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Б. Мандельброт завдяки своїй ерудиції та енциклопедичним знанням зміг систематизувати величезну кількість відомих раніше і знову відкритих фракталів. Сьогодні фрактали становлять важливий розділ сучасної науки. У цьому полягає головна заслуга Мандельброта. Його роботи продовжують надихати дослідників і митців, доводячи, що математика є не лише інструментом для розуміння Всесвіту, але й джерелом краси та творчості.

Ключові слова: *фрактальна геометрія; розмірність; ітерації; множина; зв'язність.*

1. Вступ

Ще з найдавніших часів, починаючи з китайського філософа Конфуція (прибл. 551 – прибл. 479 до н.е.) та грецького філософа Аристотеля (384 – 322 до н.е.), привертали увагу поняття імені та сам процес найменування. На початку XX століття, про роль процесу співвіднесення певним об'єктам їхніх імен, видатний французький математик Анрі Пуанкаре (1854 – 1912) відмітив (Puancare, 2019): «Дивуєшся силі, яку може мати одне слово. Ось об'єкт, про який нічого було сказати, поки він не був охрещений. Достатньо було дати йому ім'я, щоб відбулося диво».

Про одне з таких чудес йдеться у даній статі.

Термін «*фрактал»* (*fractal*) був утворений Бенуа Мандельбротом від латинського слова *fractus* (фрагментований, розбитий на уламки). Мандельброт мабуть без наміру, можливо тільки завдяки натхненню, добудував в останній склад слова «фрактал» важливу асоціацію (FRACT_AL) – алгоритм. Нагадаємо, що слово «алгоритм» – це латинізована форма імені перського математика Мухаммад ібн Муса ал-Хорезмі (прибл. 783 – прибл. 850).

Алгоритм – це правило, інструкція, суть якої зводиться до формули «роби так, потім роби ось так». Чому комп'ютери люблять алгоритми? Тому що вони люблять чітко прописані операції. Завдяки властивості комп'ютера виконувати рутинні задачі без стомлення стало можливим створення фрактальної геометрії.

Звісно, представити матеріал статті у вигляді послідовного викладення математичних основ теорії фракталів, застосування цієї концепції в дослідженні різних явищ природи і в мистецтві, подати історичні події, що спонукали до народження такої теорії, та, зрештою, сказати про характер героїв оповідання практично неможливо в обмежених рамках статті. Тому автори вирішили, як то кажуть, мазками, висвітлити окремі фрагменти опису життя і творчості Мандельброта. При цьому ми прагнули зберегти певну цілісність оповідання та його доступність. Отже, спробуймо пройти по цьому шляху разом з читачами від сторінки до сторінки так, щоб у дорозі не розгубити наших попутників.

2. Визначення фракталу

Мандельброт завжди уникав остаточних формулювань, пов'язаних зі словом фрактал: «У 1975 році я вигадав термін фрактал, щоб дати назву моїй першій роботі в цій галузі. Однак я не став наводити математичне визначення, відчуваючи, що це поняття, як і хороше вино, вимагає витримки, перш ніж воно буде «розлите по пляшках». Усі фігури, які я досліджував і називав фракталами, у моїй уяві мали

властивість бути «нерегулярними, але самоподібними». Слово «подібний» не завжди має класичний сенс «лінійно збільшений або зменшений», але завжди узгоджується зі зручним і широким тлумаченням слова «схожий» (Mandelbrot, (1977). І далі Мандельброт пише, що «...найкраще обійтися зовсім без визначення... Найпростіший аргумент на користь такого небажання полягає в тому, що справжнє визначення ...виключає з сімейства фракталів деякі множини, які не хотілося б втрачати».

Все ж таки, нагадаємо читачу визначення фрактала, яке спирається на дві основні його властивості.

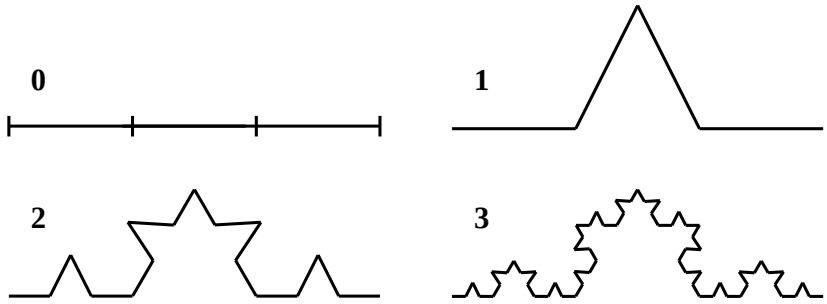


Рис. 1. Перші кроки побудови лінії Коха

Фрактал – це геометрична множина точок евклідового простору, що має властивість самоподібності та дробову розмірність. Самоподібність означає, що будь-який фрагмент множини подібний до всієї множини. Іншими словами, говорять про властивість *масштабної інваріантності* (від латинського *invarians* – незмінний) або *скейлінга* (від англійського слова *scaling* – вимірювати, масштабувати).

Відомим прикладом фрактальної лінії є крива Коха (рис. 1), на ім'я шведського математика Х. фон Коха (1870 – 1924), який уперше описав подібний феномен 1904 року. Схема побудови лінії Коха така: вибираємо відрізок одиничної довжини (йому приписуємо номер $n = 0$). Потім ділимо його на три частини, виймаємо середню частину і добудовуємо кут зі сторонами довжиною $1/3$ (на рис. 1 це відповідає $n = 1$) – маємо, так званий, утворюючий елемент. Далі, на кожному кроці побудови ми замінюємо відрізочки, що формують криву Коха, зменшеним утворюючим елементом і так до нескінченності.

Процес побудови лінії Коха дозволяє усвідомити основну властивість фракталів, а саме, внутрішню подібність. Інша властивість, яка відразу привертає увагу, полягає в тому, що фрактальна крива, в ідеалі, на будь-яких, навіть найменших, масштабах не зводиться до прямої лінії і є в загальному випадку геометрично нерегулярною, тобто для неї характерна зламаність. Очевидно, поняття дотичної в точці для такої кривої не існує.

Лінія Коха є прикладом побудови строго самоподібного фракталу, оскільки вона однаково сконструйована в будь-якому масштабі, тобто маленькі фрагменти фрактала повністю повторюють великі. Зрозуміло, що ця властивість характерна лише для *регулярних фракталів*.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

У продовженні знайомства з масштабно-інваріантними фрактальними кривими розглянемо функцію Вейєрштрасса, яка була запропонована німецьким математиком Карлом Вейєрштрассом (1815–1897) як приклад неперервної, але ніде не диференційовної функції (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013). Функція Вейєрштрасса задається формулою

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x). \tag{1}$$

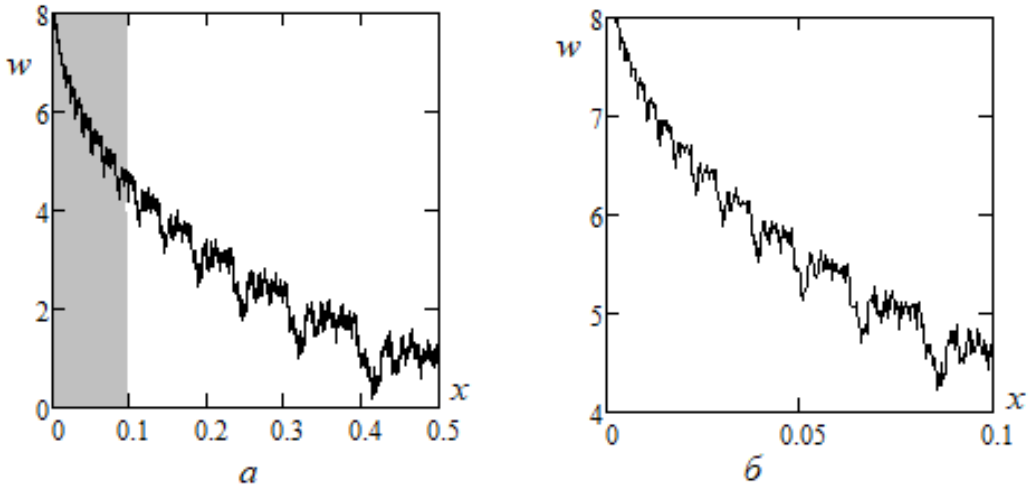


Рис. 2. Крива Вейєрштрасса

Така функція недиференційовна у жодній точці за умови: $a < 1$, $b > 1$, $ab > 1$. Уяву про функцію Вейєрштрасса дає рис. 2, а для $a = 0{,}9$; $b = 1{,}3$. Якісно зрозуміти причину її недиференційовності можна з наступного. Згідно з формулою (1) для побудови $w(x)$ спочатку береться гладка функція $w_1 = a\cos(bx)$. Потім на цю гладку функцію накладаються «брижі» $w_2 = a^2\cos(b^2x)$, що мають меншу амплітуду і більшу частоту. Потім додаються ще більш дрібні і густі «брижі» $w_3 = a^3\cos(b^3x)$ і так далі. На рис. 2, *а* наведено графік $w(x)$ для $0 \le x \le 0{,}5$. Якщо виділити діапазон зміни змінної $0 \le x \le 0{,}1$ і потім збільшити цю область до розмірів графіка на рис. 2, *а*, то можна отримати майже (адже при розрахунку за формулою (1) беремо скінчену суму доданків) таку ж вихідну криву, рис. 2, *б*. Повторюючи побудову, можна переконатися, що крива відтворюється на будь-якому як завгодно малому масштабі, тобто крива Вейєрштрасса є прикладом строго самоподібного фракталу.

Якщо замість детермінованого способу побудови в алгоритм їхнього створення внести деякий елемент випадковості, то виникнуть так звані випадкові фрактали. Дуже важливим прикладом випадкового фрактального об'єкта є траєкторія броунівської частинки. Графік кривої залежності координати броунівської частинки від часу також ніде не диференціюється. Основна їхня відмінність від регулярних фракталів полягає у тому, що властивість самоподібності справедлива лише після відповідного

усереднення за всіма статистично незалежними реалізаціями об'єкта. Причому збільшена частина фрактала неточно ідентична початковому фрагменту, проте їхні статистичні характеристики збігаються.

Повернемося до лінії Коха (рис. 1) і обчислимо її довжину. На n-му кроці побудови довжина відрізків, з яких складається лінія Коха, становить $1/3^n$, а їхня кількість – $3 \cdot 4^n$. Тоді довжина лінії Коха на n-му кроці буде $3(4/3)^n$, а при $n \to \infty$ вона прямує до нескінченності. Отже, на відміну від гладкої кривої, довжина не може бути характерною величиною для фрактальної кривої.

3. Фрактальна розмірність множини

Представлені результати вимірювання довжини лінії Коха здаються абсолютно несподіваними. Справді, чим меншою є довжина лінійки, тим більша виміряна довжина лінії. Найпростіша процедура вимірювання довжини виявляється не такою простою, як здається спочатку. Виникає питання: яка розмірність може бути у такої лінії?

Мандельброт звернув увагу на те, що думка про розмірність як про внутрішню характеристику тіла, поверхні або кривої, неправильна. Насправді розмірність об'єкта залежить від спостерігача, точніше від зв'язку об'єкта із зовнішнім світом.

Наведемо наочний приклад. Уявімо, що ми розглядаємо клубок ниток. Якщо відстань, що відокремлює нас від клубка, досить велика, то клубок ми бачимо як точку, позбавлену будь-якої внутрішньої структури. Перед нами геометричний об'єкт із топологічною розмірністю $D_T = 0$. Підійшовши до клубка досить близько, ми побачимо, що він складається з ниток. Тепер топологічна розмірність клубка стане $D_T = 1$.

Отже, якщо розмірність залежить від конкретних умов, то її можна вибирати по-різному! Можна сказати, що труднощі визначення поняття розмірності у тому, що намічений шлях не єдиний. Можна сформулювати й інші, настільки ж природні, підходи до такого визначення. Раціональний вибір вказаного визначення залежить від того, для чого ми хочемо його використовувати.

Суть варіанта визначення розмірності множини, який для нас виявився цікавим, полягає у тому, що множина характеризується мінімальним числом шаблонів (елементів покриття), необхідних для її покриття. В ролі шаблонів можуть використовуватися кубики, кульки, квадратики, відрізки тощо.

Міркуючи далі, можна дійти до такого визначення *фрактальної розмірності*. Спочатку згадаємо про поняття міри множини. Власне, *міра* – це деяка числова функція μ, яка ставить у відповідність кожній множині (з деякого сімейства множин) деяке невід'ємне число.

Нехай треба визначити міру приміщення. Для цього покриємо його множиною кубиків з розміром ребра δ, що не мають спільних об'ємів. Тоді загальна міра, яка в даному випадку є об’ємом приміщення, дорівнює сумі мір кубиків (міра окремого кубика – δ^3). Для деякої поверхні, мірою якої є площа, використовуємо покриття шаблонами у вигляді квадратиків, для лінії, тут мірою є довжина, застосовуємо шаблони у вигляді відрізочків.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, якщо множину можна покрити $N(\delta)$ непорожніми і неперетинними шаблонами розміром δ, то її міра $\mu = N(\delta)\delta^D$. Міра – величина скінченна і показник D можна вважати розмірністю. Що робити, якщо ми не знаємо її заздалегідь для довільної множини, структура якої не така проста, як у евклідових об'єктів? Все ж таки, спробуємо знайти розмірність, використовуючи вираз $\mu = N(\delta)\delta^D$. Будемо перебирати пробні значення D, домагаючись того, щоб μ була скінченна при зменшенні δ, тобто

$$0 < \lim_{\delta \to 0}[N(\delta)\delta^D] < \infty. \tag{2}$$

Дамо коментар до формули (2). Щоб зрозуміти її, розглянемо найпростіший приклад. Нехай наша множина – це фрагмент лінії завдовжки L. Покриємо її відрізочками, що не перетинаються, розміром δ. Очевидно, що для цього нам знадобиться $N(\delta) = L/\delta$ відрізочків. Тоді формула для міри набуває вигляду

$$\mu = \frac{L}{\delta}\delta^D = L\delta^{D-1}. \tag{3}$$

Бачимо, що для $D < 1$ міра прагне до нескінченності у разі зменшення δ. З іншого боку, міра прямує до нуля, якщо $D > 1$. Правильне значення $D = 1$ визначається точкою переходу міри від нескінченного значення до нульового! Цей факт має вирішальне значення для визначення розмірності.

З виразу $\mu = N(\delta)\delta^D$ маємо асимптотичне співвідношення між кількістю $N(\delta)$ елементів покриття множини і характерним розміром елемента покриття δ, а саме

$$N(\delta) \sim \delta^{-D}. \tag{4}$$

Тут необхідно зробити одне пояснення. Згідно з проведеними міркуваннями під ***фрактальною розмірністю*** розуміємо показник степені D у співвідношенні (4). Але число N – безрозмірна величина, тому воно має виражатися у вигляді безрозмірного відношення

$$N(\delta) \sim \left(\frac{L}{\delta}\right)^D, \tag{5}$$

де L – характерний розмір множини. Це пов’язано з тим, що у фрактала немає свого виділеного масштабу, окрім власного розміру. Дійсно, адже самоподібність означає, що в структурі фрактала відсутні будь-які характерні розміри. Тому фрактальна розмірність D, з одного боку, показує, як зі зменшенням масштабу δ зростає кількість елементів, необхідних для покриття даної фрактальної множини. З іншого боку, цей показник степені показує, як ця ж кількість зростає зі збільшенням розміру самого фрактала.

З формули (4) визначимо розмірність за допомогою границі

$$D = -\lim_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta} \tag{6}$$

за припущення, що границя існує. Фрактальну розмірність D, яка визначається за допомогою покриття множини шаблонами визначеної форми і розміру, називають ємністю множини і це не обов'язково ціле число! Визначення ємності фігурує в основі більшості числових методів оцінювання розмірності.

Недолік визначення фрактальної розмірності як ємності полягає у тому, що покриття фрактальної множини проводиться шаблонами однакового розміру і їхній підрахунок є досить «грубим» вимірюванням. Більш точний результат можна отримати, якщо множина покривається шаблонами довільної форми і розміру, з тим обмеженням, що діаметр окремого шаблону не перевищує заданої величини δ. Строге визначення такої процедури приводить до *розмірності Хаусдорфа* D_H (Feder, 1988), (Schroeder, 1991), яка названа іменем німецького математика Фелікса Хаусдорфа (1868 – 1942), який дав строге визначення цієї розмірності.

Визначення розмірності Хаусдорфа має важливе теоретичне значення. Але на практиці ним не користуються з двох причин: по-перше, безпосереднє обчислення D_H, навіть за допомогою ЕОМ, неможливе, а по-друге, у важливих для практики «хороших» фракталів розмірність Хаусдорфа і ємність збігаються.

Топологічна розмірність, ємність і розмірність Хаусдорфа відносяться до самого об'єкта, який розглядається, а евклідова розмірність – до простору, в якому розміщено об'єкт. Розмірність Хаусдорфа, обчислена для зліченної кількості точок, відрізка лінії, частини поверхні, скінченного об'єму, дорівнює їхній топологічній розмірності.

Застосуємо описаний підхід до визначення розмірності лінії Коха (рис. 1). На n-му кроці побудови довжина відрізків (елементів покриття) становить $\delta = 1/3^n$, а їхня кількість $N(\delta) = 3 \cdot 4^n$. Тоді згідно з (6) фрактальна розмірність лінії Коха (границя $\delta \to 0$ відповідає границі $n \to \infty$)

$$D = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3 \cdot 4^n)}{\ln(1/3)^n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3)}{\ln(1/3)^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(4^n)}{\ln(1/3)^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1{,}2618.$$

Як бачимо, фрактальна розмірність лінії Коха виявилася нецілою величиною, причому більшою за топологічну розмірність лінії $D_T = 1$ і меншою за евклідову розмірність простору $D_T = 2$ (у цьому випадку площини), в якому міститься лінія Коха. Той факт, що ємність лінії Коха більша одиниці, говорить про те, що швидкість зростання кількості шаблонів, які покривають лінію Коха у випадку зменшення розміру шаблону, більша аніж $1/\delta$, як це виконується для гладкої кривої. Фактично значення ємності характеризує ступінь нерегулярності кривої Коха.

Отже, дробова розмірність означає, що множина займає проміжне положення між системою нульвимірних точок і одновимірною лінією, між одновимірною лінією і двовимірною поверхнею, між двовимірною поверхнею і тривимірним тілом і так далі.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Дробова розмірність розуміється у широкому смислі: не як дріб, а як нецілe дійсне число.

Для фізичних застосувань визначення (6) не підходить. Фрактальні властивості реальних об'єктів проявляються на масштабах, які перевищують деяку характерну величину. Наприклад, для траєкторії броунівської частинки на малих масштабах дається взнаки скінченність маси і розмірів броунівської частинки, а також скінченність часу співударів. Хоча, слід відмітити, що в броунівському русі діапазон зміни масштабів, у межах якого зберігається статистична самоподібність, дуже великий. При врахуванні зазначених обставин траєкторія броунівської частинки стає плавною лінією, і поняття самоподібності втрачається. Тому перехід до границі, необхідний згідно з формальним визначенням (6), неможливий. Типовий фізичний підхід полягає не у знаходженні границі (6), а в побудові графіка залежності $\log N(\delta)$ від $\log \delta$ (див. формулу (4)). Кут нахилу прямої, яку отримуємо під час побудови, визначає ємність D (Feder, 1988).

4. Сторінки біографії Мандельброта

Народився Б. Мандельброт (1924 – 2010) у Варшаві. У 1936 році сім'я Мандельбротів переїхала до Парижа, де Бенуа у 1947 році закінчив Політехнічну школу. У 1948 році в Каліфорнійському технологічному інституті (Калтех) у Пасадені він захистив магістерську дисертацію з аерокосмічних наук, а вчений ступінь доктора філософії (з математики) він отримав у 1952 році в Паризькому університеті. До 1958 року, коли Мандельброт остаточно переїхав до США, він був запрошеним професором в університетах Прінстона, Женеви та Парижа. З 1974 – став членом ради з наукових досліджень фірми IBM, а з 1984 – професором математики Гарвардського університету. Цей короткий опис його життя наповнений багатьма подіями: тут воєнні роки, життя в окупації, переїзд до США, робота, відстоювання своїх наукових позицій і, зрештою, визнання.

Цікаво відзначити одну його природну особливість. У Бенуа була прекрасна просторова уява – геометричними засобами він розв’язував навіть алгебраїчні задачі. Згадуючи свою початкову освіту в Польщі, Мандельброт казав, що він ніколи не вчив алфавіт чи таблицю множення. Замість цього його ранні роки були сформовані візуальними спогадами: досі пам’ятає геометричні візерунки, котрими був вкритий килимок, на якому він робив перші кроки. Коли його дядько почав домашнє навчання Бенуа, то заучування ніколи не використовувалося. «Все, що я робив, – це грав у шахи та читав карти», – каже Бенуа.

Перу Мандельброта належить багато статей і три класичні монографії про фрактали та їх важливу роль у природничих і соціальних науках, в математиці (Mandelbrot, 1975), (Mandelbrot, 1977), (Mandelbrot, 1983): «Фрактальні об'єкти: форма, випадковість і розмірність», «Фрактали, випадок та фінанси», Фрактальна геометрія природи".

Мабуть, назва останньої з них якнайкраще відображає реальну суть: «Чому успадкована від Евкліда геометрія так часто удостоюється визначення «холодної» і

«сухої»? До певної міри тому, що вона нездатна описати форму фінансової хроніки, хмари, гори, морського берега чи дерева. Фінансові хроніки – це не періодичні коливання, не висхідні чи низхідні прямі, що зображують «тенденції»; хмари – не сфери; гори – не конуси; береги островів – не кола, кора дерева відмінна від поверхні циліндра, а блискавка вдаряє аж ніяк не по прямій.

Лише художники завжди це розуміли, а французький художник Ежен Делакруа (1798–1863) якось, говорячи про архітектуру, дуже вдало зауважив: людина все ідеалізує. Пряма лінія – його винахід, у природі прямих немає» (Mandelbrot, 1983).

Остання книга, яку задумав Бенуа Мандельброт, отримала назву Fractalist (Mandelbrot, 2012). Але її вже дописували його друзі та дружина. Мандельброт вибрав епіграф для своєї книги, що, певною мірою, відображає його власний погляд на життя, а саме написав таке посвячення: «Пам'яті Йоганна Кеплера, який об'єднав стародавні дані та стародавні прилади та заснував науку».

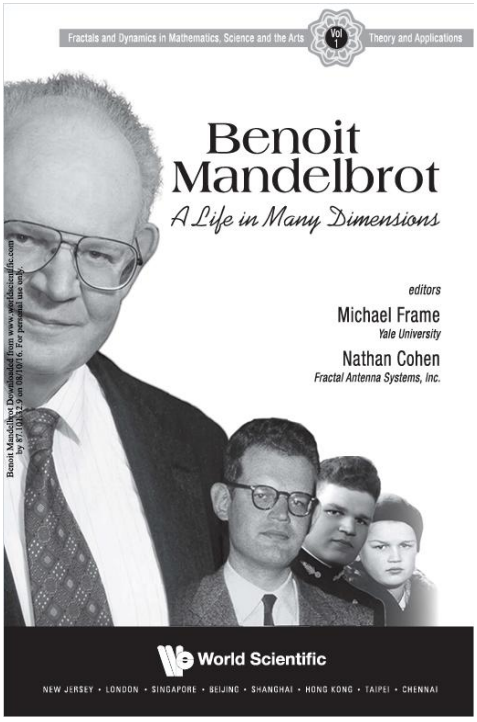


Рис. 3. Обкладинка до збірника статей [6]

На рис. 3 показана обкладинка збірника статей обсягом понад 500 сторінок (Frame & Cohen, 2015), який видано 2015 року. Відкривається книга розділом, написаним дружиною Мандельброта. Всього збірник має 26 розділів, написаних різними авторами.

5. Степеневі закони

Отримавши в 1952 році ступінь доктора філософії, Мандельброт заглибився у все, від теорії фінансових ринків до визначення довжини берегових ліній. Його методи

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

часто були незвичними. Замість того, щоб доводити теореми, як це робить більшість математиків, Мандельброт використовував моделі та графіки, щоб будувати припущення щодо фізичних законів. Звернемося до статті 1963 року (Mandelbrot, 1963) про коливання цін на бавовну, яку Мандельброт тепер описує як свій «великий вибух». У той час більшість економістів вважали, що такі зміни цін відбуваються згідно з нормальним законом розподілу (законом Гаусса). По суті, вони припускали, що ціни часто робили невеликі стрибки вартості, а великі коливання були рідкістю.

Проте, коли Мандельброт подивився на графіки цін на бавовну, він помітив дивне явище. Якщо мітка була видалена з часової осі, то неможливо було визначити, чи охоплюють діаграми один тиждень чи один рік; схема піків і спадів виглядала однаково на кожній шкалі. Мандельброт, який тоді працював у дослідницькому центрі IBM Томаса Дж. Уотсона в Йорктаун-Гайтс, Нью-Йорк, знав, що такі самоподібні системи мають інший розподіл, відомий як степеневий закон. Важливо те, що великі стрибки вартості набагато більш поширеніші в цих розподілах. Мандельброт показав, що це також стосується цін на бавовну – і таким чином він допоміг змінити спосіб управління ризиками у фірмах фондового ринку. Отриманий результат мав велике значення в творчому житті Мандельброта.

Дамо для читача маленький коментар (Грінченко, Маципура & Снарський, 2024). Нормальний розподіл (розподіл Гаусса) завжди відігравав центральну роль в теорії ймовірностей, оскільки виникає дуже часто як результат впливу множини факторів, внесок будь-якого одного з них незначний.

Однак, існує клас явищ, обумовлених випадковими процесами, що не описуються розподілом Гаусса. Такі процеси почали активно досліджуватися лише в останній чверті минулого століття. Відзначимо, що до теперішнього часу виявлено багато фізичних прикладів де має місце така ситуація.

Одним з прикладів виявився опис процесів міграції тварин. До недавнього часу вважалося, що тварини поводяться подібно класичним броунівським частинкам. Однак пошук їжі завдяки рівномірному «замітанню» області проживання навряд чи можна назвати раціональною стратегією виживання. Численні дані останніх років підтверджують, що більшість «розумних» тварин використовують стратегію пошуку, згідно з якою процес характерної локалізації пошуку чергується з рідкими довгими стрибками. Саме так рухаються акули і бджоли в пошуках нектару. Такі дані говорять про те, що подібний рух тварин обумовлений раціональним пошуком їжі при дослідженні території з невідомо розподіленим ресурсом.

Наша інтуїція «налаштована» на існування певних масштабів у навколишньому світі. Фізіологи, психологи, антропологи стверджують, що фізичні, інтелектуальні та інші характеристики людей прекрасно описуються кривою Гаусса

$$f(x) = \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{7}$$

Нехай $f(x)$ – щільність розподілу якої-небудь ознаки в популяції (наприклад, зросту), a – середнє значення, σ^2 – дисперсія. Життєва мудрість, яка відповідає виразу (7), – «Чудес не буває».

Оскільки зріст розподілений згідно з законом Гаусса, то функція $f(x)$ спадає дуже швидко (з ймовірністю $0{,}997$, тобто практично достовірно, можна вважати, що відхилення нормальної величини від її середнього значення a не перевищує 3σ), то ми з легким серцем можемо нехтувати ймовірністю зустрічі як з $2{,}5$-метровим гігантом, так і 30-сантиметровим карликом. Очевидно, тут є характерний розмір об'єкта a і характерна міра середнього відхилення від нього σ.

Але так буває далеко не завжди. Виявилося, у багатьох випадках у нелінійних системах відбуваються масштабно-інваріантні процеси, які не мають власних характерних величин. Їхнім статистичним виразом є степеневі розподіли ймовірності. Саме такі закономірності типові і для фракталів.

Відмітимо загальну властивість *самоподібності фракталів*. *Самоподібність* означає, що в структурі фрактала відсутні будь-які характерні розміри. За відсутності характерних розмірів система повинна мати однакові властивості у всіх масштабах, оскільки жодна область масштабів не виділена у порівнянні з іншими. Тому самоподібність інакше називають *масштабною інваріантністю*.

Отже, самоподібність (або масштабна інваріантність) означає, що будь-яка кількісна характеристика фрактала Q при зміні масштабу l в деяке число разів змінюється незалежно від величини l. Математичне співвідношення, яке виражає цю властивість, можна записати у вигляді

$$Q(\eta l) = \eta^D Q(l). \tag{8}$$

Розглядаючи це рівняння як функціональне рівняння для функції $Q(l)$, отримуємо

$$Q(l) = l^D, \tag{9}$$

тобто степеневу залежність. Експоненціальна залежність $g(x) = \exp(x/x_0)$ такої властивості не має (щоб показник експоненти був безрозмірним, до нього має входити характерний масштаб x_0).

Таким чином, самоподібність фракталів призводить до того, що їхні властивості описуються степеневими законами. Можна стверджувати, що наявність степеневого закону (9), висловлюючись образно, є невичерпним джерелом створення самоподібних структур, зокрема і фрактальних множин.

6. Від Ламберта до Мандельброта

Мабуть, усім знайомий вислів видатного англійського вченого Ісаака Ньютона (1643–1727), який казав про свій успіх тому, що стояв на плечах гігантів.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Велику кількість талановитих попередників мав і Б. Мандельброт. Але ми маємо можливість поговорити тільки про декількох з них.

Німецький фізик і математик Йоганн Генріх Ламберт (1728 – 1777) запропонував ієрархічну модель будови Всесвіту. Іншими словами, Всесвіт був представлений ним у вигляді фрактальної множини. Ламберт багато працював з нескінченними неперервними дробами та нескінченними рядами, що дозволило йому 1766 року першим довести ірраціональність числа π. Розказують, що прогулюючись того дня він зустрів друзів, які запитали у нього, чому він такий радісний, начебто довів ірраціональність числа π. На що він відповів: «Так я сьогодні це зробив».

Глибокий інтерес Ламберта до нескінченності багато в чому визначив напрямок його роздумів про структуру Всесвіту на великих просторових масштабах. У результаті народилася ієрархічна або, як сьогодні заведено говорити, фрактальна модель Всесвіту. Можливо, це був перший фрактал у науці. Обговоренню ієрархічної моделі Всесвіту свої роботи також присвятили у XVIII ст. німецький філософ Іммануїл Кант (1724 – 1804), а на початку XX ст. – французький математик Поль Леві (1886 – 1971) та ірландський вчений Фурн'є д'Альба (1868 – 1933). Фурн'є зробив припущення, що ієрархічні сходи тягнуться не тільки в бік великих просторових масштабів, а також усередину матерії у бік зменшення. Взагалі, у двадцятому столітті досить багато вчених розмірковували над ієрархічними моделями Всесвіту.

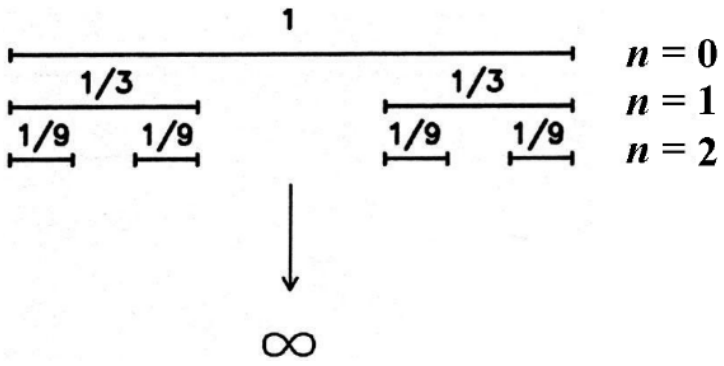


Рис. 4. Перші кроки побудови множини Кантора

Намагаючись знайти нескінченні множини, потужність яких займає проміжне положення між N_0 (потужність множини натуральних чисел) і N (потужність континууму), німецький математик Георг Кантор (1845 – 1918) побудував на прямій фрактальні множини, які пізніше отримали назву канторова множина (інакше, канторовий пил). Найпростішою є класична множина Кантора (Feder, 1988), (Schroeder, 1991), (Crownover, 1995), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013), схема побудови якої показана на рис. 4. Вибираємо відрізок одиночної довжини (йому приписуємо номер $n = 0$). Потім ділимо його на три частини і виймаємо середню частину (без кінців), це відповідає $n = 1$. І так, згідно з рис. 4, до нескінченності. Отримана гранична множина є підмножиною одиничного відрізка прямої, що має потужність континууму і нульову довжину (рис. 4). Дійсно, неважко переконатися у тому, що сумарна довжина інтервалів, видалених при побудові множини Кантора,

точно дорівнює 1, а між точками множини Кантора і точками відрізка $[0,1]$ має місце взаємно однозначна відповідність (Crownover, 1995), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013).

Згідно з формулою (6), обчислимо фрактальну розмірність множини Кантора. На n-ому кроці побудови (рис. 4) маємо 2^n відрізків довжиною $1/3^n$ кожний. Утворимо покриття множини Кантора кубиками зі стороною, що дорівнює довжині відрізка на відповідному кроці. Тоді $N(\delta) = 2^n$ і $\delta = 1/3^n$. Границя $\delta \to 0$ відповідає границі $n \to \infty$, тому фрактальна розмірність

$$D = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln(1/3)^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}6309.$$

Вона виявляється нецілим числом, причому більшою топологічної розмірності $D_T = 0$ елементів (точок) множини Кантора. Фрактальні властивості множини Кантора мають велике значення, оскільки багато відомих фракталів мають подібні властивості.

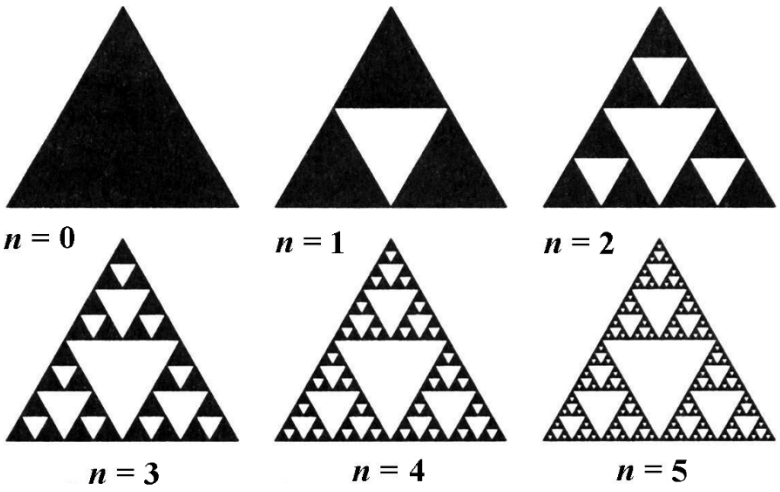


Рис. 5. Перші кроки побудови серветки Серпінського

Польський математик Вацлав Серпінський (1882 – 1969) побудував двовимірний аналог канторової множини – серветка Серпінського (1916 р.). Тут початковою множиною є рівносторонній трикутник, рис. 5 (Crownover, 1995), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013). Ділимо його на чотири області, з'єднавши середини сторін початкового трикутника відрізками. Видалимо внутрішність центральної трикутної області. Потім повторимо процес для кожного з трьох трикутників, що залишилися. Продовжуючи цей процес до нескінченності, отримуємо множину, яка і є серветкою Серпінського. Із побудови видно, що на n-ому кроці кількість елементів покриття у вигляді рівносторонніх трикутників зі стороною $\delta = 1/2^n$ дорівнює $N(\delta) = 3^n$. Тоді фрактальна розмірність серветки Серпінського має значення

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}5849.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, тканина такої серветки вийшла досить дірявою. Видалена площа, при побудові серветки, точно дорівнює площі початкового трикутника. Іншими словами, площа серветки дорівнює нулю, а периметр її дірок стає нескінченним.

Тривимірний аналог множини Кантора придумав австрійський математик Карл Менгер (1903 – 1985) – *губка Менгера*, рис. 6 (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013). Фрактальна розмірність губки Менгера $D \approx 2{,}7268$. Оскільки $2 < D < 3$, то це говорить про те, що губка Менгера має нульовий об'єм, але, як фрактальний об'єкт, володіє нескінченною площею своєї поверхні.

Ми побудували та дослідили кілька фракталів. Сподіваємося, що у читача склалося уявлення про фрактальну розмірність як про корисну концепцію. По суті, розмірність Хаусдорфа – це необхідне розширення поняття розмірності на фрактальні об'єкти, що моделюють, хоч і приблизно, величезну кількість явищ у реальному світі: навколо нас і всередині нас.

Для усіх розглянутих множин справедлива нерівність $D > D_T$. Так, для лінії Коха значення фрактальної розмірності $D \approx 1{,}2618$ більше за топологічну розмірність лінії $D_T = 1$. Нерівності $D > D_T$ можна надати певного фізичного змісту. Вона характеризує ускладнення множини. Якщо це лінія ($D_T = 1$), то її можна ускладнити, зробивши більш нерегулярною шляхом нескінченного числа вигинів. При цьому, значення фрактальної розмірності відображає ступінь нерегулярності фрактальної кривої.

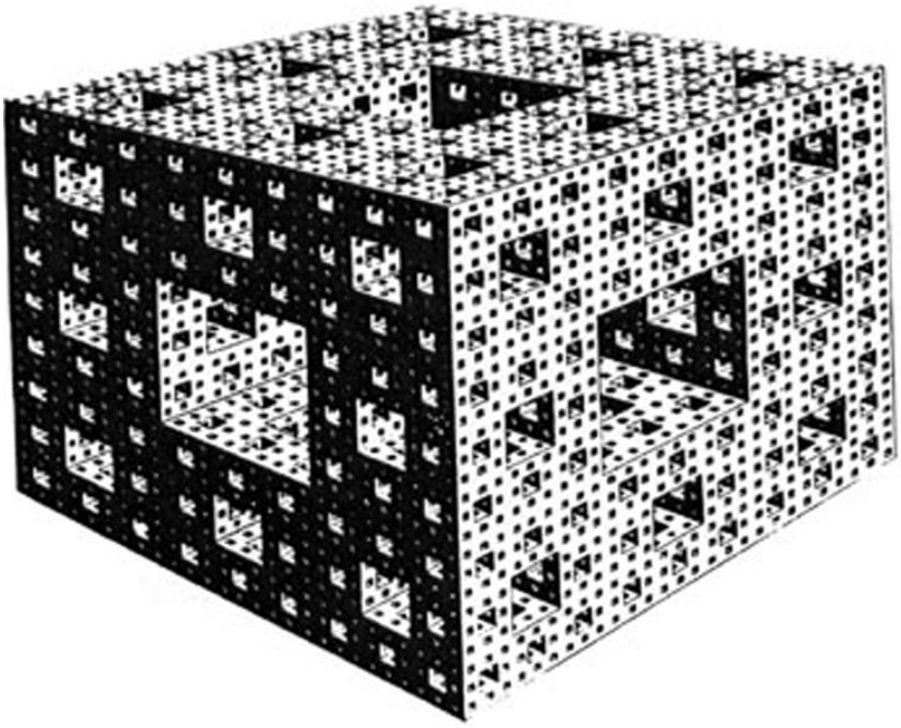


Рис. 6. Губка Мегнера

Зауважимо, що, для всіх розглянутих вище регулярних фракталів, фрактальна розмірність виявилася меншою, ніж евклідова розмірність простору, в якому міститься

даний фрактальний об'єкт. Так, для лінії Коха, яка розташовується на площині, маємо нерівність $1 < D < 2$.

Виникає питання: чи існують фрактали, у яких $D > D_T$? Відповідь: «так». Ще у 1890 році італійський математик Джузеппе Пеано (1858 – 1932) малює неперервну криву (крива Пеано), що повністю заповнює квадрат, тобто проходить через усі його точки. На рис. 7 показано, як кожна зі сторін початкового одиничного квадрата замінюється утворюючим елементом, який складається з дев'яти відрізків довжиною $1/3$ кожний. Потім кожний з відрізків утвореної фігури перетворюється подібним чином, і так до нескінченності. Виникає самоподібна неперервна крива з фрактальною розмірністю

$$D = -\frac{\ln 9}{\ln(1/3)} \approx 2.$$

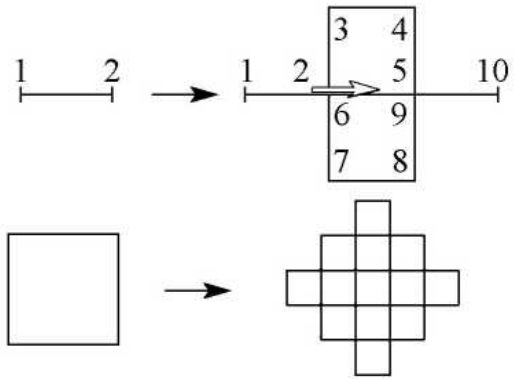


Рис. 7. Побудова кривої Пеано

Крива Пеано є регулярним фракталом. Виявляється, подібний результат можна привести і для випадкового фрактала, яким є траєкторія броунівської частинки. Нехай броунівська частинка рухається у площині. На рис. 8, *а* маємо повну траєкторію частинки, що виконала 10^5 переміщень (проєкції кожного випадкового переміщення на осі декартової системи координат x і y визначалися як випадкові величини з нормальним законом розподілу, математичним сподіванням рівним нулю і дисперсією рівною одиниці), а на рис. 8, *б* – збільшений фрагмент траєкторії, який на рис. 8, *а* виділений прямокутником (Грінченко, Маципура & Снарський, 2024).

Хоча траєкторія на рис. 8 має дуже складний звивистий характер, визначити її фрактальну розмірність дуже просто. Для цього відмітимо, що, коли, в процесі дифузії, частинка віддалилась на відстань R, то середня кількість «кроків», які вона зробила, дорівнює $N = R^2/\delta^2$, де δ – характерна довжина одного кроку. Покриємо траєкторію частинки шаблонами розміром δ і, використовуючи формулу (6), знаходимо значення розмірності

$$D = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln N}{\ln \delta} = -\lim_{\delta\to 0}\frac{\ln R^2}{\ln \delta} + \lim_{\delta\to 0}\frac{\ln \delta^2}{\ln \delta} = 2,$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

оскільки перша границя прагне до нуля внаслідок скінченності величини R.

Отриманий результат означає, що характерний розмір дифузійної траєкторії на певній площині пропорційний величині цієї площини, тобто траєкторія на площині є достатньо густою (див. рис. 8). Разом з тим, це не означає скінченності площини, котру замітає сама дифузійна крива. Причиною цього є безліч самоперетинів дифузійної кривої. Виявляється, що для двовимірного броунівського руху ймовірність повернення в будь-який, як завгодно малий окіл довільно вибраної точки, дорівнює 1.

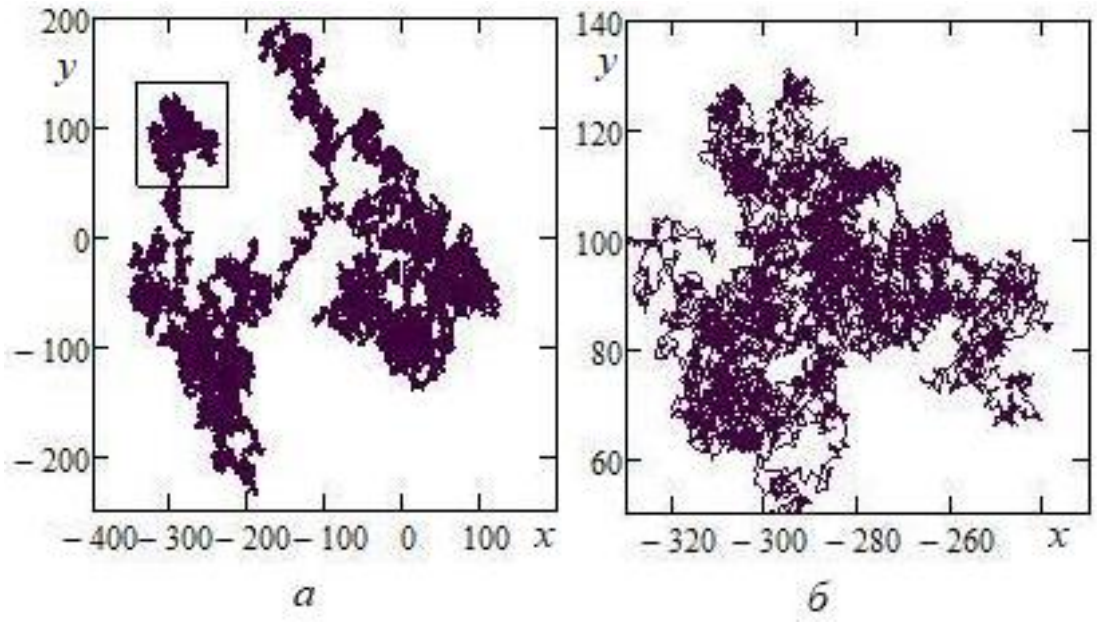


Рис. 8. Траєкторія броунівської частинки

У випадку дифузії в тривимірному просторі траєкторія броунівської частинки є, навпаки, дуже пухкою (її фрактальна розмірність залишається рівною 2) і не заповнює усього об’єму, в якому вона зосереджена. В цьому випадку ймовірність повертання виявляється меншою одиниці. Можливо по цій важливій причині багато хімічних реакцій, котрі необхідні для підтримання життя в природі, відбуваються не в тривимірному просторі, а на всіляких поверхнях. Прикладом є процес газообміну, що відбувається на поверхнях альвеол легенів людини. Їх кількість в обох легенях становить порядку 600 мільйонів, а загальна площа на видиху дорівнює приблизно 30 м^2, а на глибокому вдиху – 100 м^2.

Починаючи з кінця XIX ст. з'являється багато різних прикладів фрактальних множин. У 1879 році англійський математик Артур Келі (1821 – 1895) застосував ітераційний метод Ньютона (метод дотичних) для знаходження комплексних коренів многочленів і досліджував для кожного кореня даного многочлена геометричну форму комплексної області притягання, інакше кажуть басейну притягання (область притягання складається зі всіх початкових наближень до кореня, котрі забезпечують збіжність до нього ітерацій Ньютона). Келі виявив, що коли степінь многочлена вище двох, то межі областей притягання мають складну і незрозумілу структуру, що вимагає подальшого вивчення. Комп’ютерні дослідження в кінці XX століття зразу показали, що ці границі є фрактальними.

7. Ітерації Фату та Жюліа

Тісний зв'язок теорії ітерацій з фракталами було помічено вже понад сто років тому. Поява на початку XX ст. теорії ітерацій раціональних відображень комплексної площини дозволила визначити нові фрактальні множини, що породжуються ітераціями. Основи цієї теорії розробили два французькі математики П'єр Жозеф Луї Фату (1878 – 1929) та Гастон Моріс Жюліа (1893 – 1978).

Фату все життя працював у Паризькій обсерваторії. У грудні 1917 року він опублікував свої дослідження з теорії ітерацій.

Жюліа 1914 року, у зв'язку з Першою світовою війною, був мобілізований в армію. У січні 1915 року отримав тяжке поранення в голову і з 1915 по 1918 рік лежав у госпіталі. У госпіталі Жюліа, людина вольова і цілеспрямована, зміг поступово отямитися, став активно займатися математикою і у 1918 році опублікував мемуари про ітерації раціональних функцій обсягом 199 (!) сторінок.

Результати Фату та Жюліа виявилися близькими та схожими. У другій половині XX століття стало ясно, наскільки багатим за змістом є обраний ними науковий напрямок: було виявлено та відкрито цілу низку фундаментальних властивостей ітерацій нелінійних відображень, що описуються у термінах фрактальної геометрії.

Суть відображення на комплексній площині полягає у тому, що одному комплексному числу $z_n = x_n + iy_n$ ставиться у відповідність інше комплексне число $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$, що визначається за певною ітераційною процедурою $z_{n+1} f(z_n, c)$, де $f(z)$ – нелінійна функція, c – параметр, n – номер ітерації. Якщо z_0 – початкова точка, тоді послідовність ітерацій, котру також називають орбітою точки z_0, має вигляд:

$$z_0, \qquad z_1 = f(z_0, c), \qquad z_2 = f(z_1, c), \dots , \qquad z_{n+1} = f(z_n, c), \dots .$$

У залежності від значень параметра c та координати $z_o = x_0 + iy_0$ послідовності розпадаються на дві підсистеми. В одній із них члени послідовності z_n прямують до нескінченності, в другій прямують до певної скінченної величини. Прикладом нелінійної функції, що часто використовується для організації такої ітераційної процедури, є найпростіше нелінійне відображення $z_{n+1} = z_n^2 + c$ $(n = 0,1,2, \dots,$ c – комплексна стала).

8. Множина Мандельброта

Множина комплексних значень параметра c, для яких ітерації $z_{n+1} = z_n^2 + c$ початкової точки $z_0 = 0$ не дають послідовність, що прямує до нескінченності, утворює множину Мандельброта (рис. 9). Позначають цю множину літерою M. Фактично множину M вперше виявив і визначив Фату. Але, подібно до іспанського мореплавця Христофора Колумба (1451 – 1506), який відкрив Америку і не знав, як виглядає її карта, Фату, за відсутності комп'ютерних технологій, не міг навіть грубо уявити собі «карту» множини M. Тільки в 1980 році Мандельброт зміг, нарешті, вперше побачити

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

цю множину за допомогою комп'ютера і гідно оцінити її красу та нескінченне різноманіття структури.

Додатком до рис. 9 може служити словесний опис множини M, представлений французьким математиком Адріаном Дуаді (1935 – 2006) в книзі (Peitgen & Richter, 1986).

Якщо подивитись на множину Мандельброта, то перше, що кидається в очі – це область, обмежена кардіоїдою з вістрям у точці $0{,}25$ і заокругленою вершиною в точці –0,75. Потім бачимо дотичний до кардіоїди круг радіуса $0{,}25$ з центром у точці -1 і, зрештою, незліченну множину менших областей, які також дотичні до кардіоїди, і за формою нагадують круг. Більшість з них дуже малі.

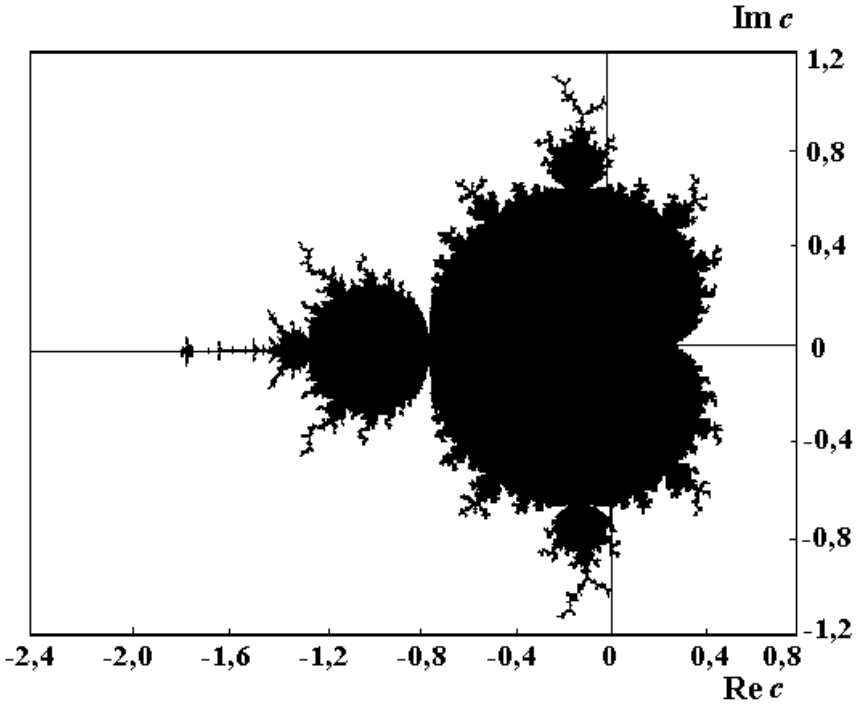


Рис. 9. Множина Мандельброта

До кожного з цих компонентів у свою чергу прикріплено нескінченну кількість менших областей, також схожих на круг, а в кожному з менших знову ж приєднано нескінчений набір ще менших, також таких, що мають форму круга областей і так далі. Але і це ще не все! Якщо ми, вийшовши з великої кардіоїди і рухаючись вліво, потрапимо в круг, потім (знову вліво) в наступну область і продовжимо рух вліво далі, то при цьому будемо весь час наближатися до точки, що має координату $-1{,}401\ldots$. Відрізок від цієї точки до точки -2 також належить множині M. І на ньому є маленька, подібна до кардіоїди, область із загостреною вершиною в точці $-1{,}75$ (її центр знаходиться в точці $-1{,}754877666\ldots$). До цієї маленької кардіоїди прикріплюється точно таке ж сімейство круглих областей, як і для великої. На рис. 10 показано фрагмент множини Мандельброта в околі кругової області з центром у точці -1; на своєрідній «антені» чітко видно контур маленької копії множини M.

Виявляється, що число таких «кадіоїдних» областей нескінченно велике. Окрім того, вони зустрічаються не тільки на дійсній осі. Так, Б. Мандельброт виявив кардіоїду з центром в точці $-0{,}1565201668 + 1{,}032247109\,i$ і багато інших. Фактично він довів, що існує нескінченно багато кардіоїд. Всі вони настільки маленькі, що їх важко відрізнити від плямочок на комп'ютерних рисунках (це можна зробити тільки завдяки тому, що вони з'являються симетрично). Але якщо зробити збільшену картинку, то в кожному випадку виявиться як сама кардіоїда, так і її супровідна компанія із круглих областей. Звісно технічні можливості комп'ютера, як пристрою, який формує зображення, обмежені роздільною здатністю монітора.

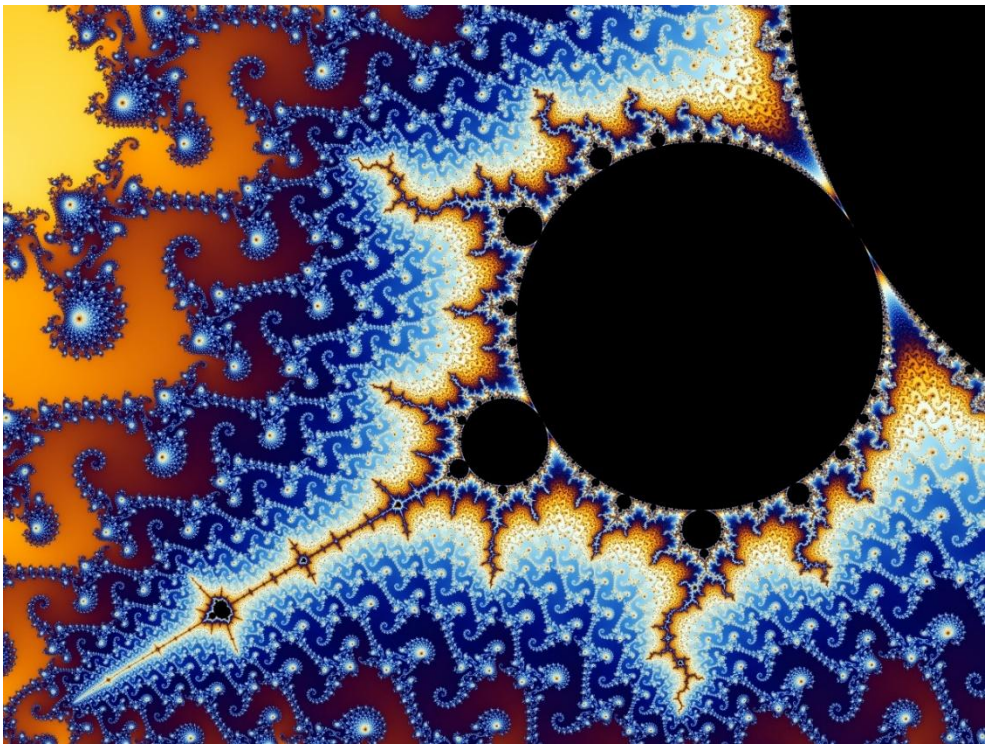


Рис. 10. Фрагмент множини Мандельброта

І це ще не все. Усі схожі на кардіоїду компоненти зв'язані з головною кардіоїдою за допомогою «ниток», насичених малими областями типу кардіоїд, кожна з яких супроводжується набором областей. Ці нитки розгалужуються, утворюючи дуже складні візерунки. Завдяки таким ниткам множина M виявляється зв'язною.

Відзначимо, що зв'язність множини M була доведена А. Дуаді і американським математиком Дж. Хаббардом (нар. 1945 р.).

Зазначимо, що множина Мандельброта M не володіє властивістю самоподібності: так, M дійсно містить нескінченну кількість малих копій самої себе, і, відповідно, в будь-якому місці подивившись на границю M в мікроскоп, ми побачимо малі копії M. Але ці копії вплетені в сітку ниток, вигляд котрої дуже сильно залежить від того, в якій точці дивитися. Більше того, якщо розглядати дві копії порівнянного розміру, то відношення відстані між ними до їхнього розміру буде сильно залежати не тільки від точки, в якій

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

ми спостерігаємо, але і від збільшення мікроскопу. Мабуть, такий вид «нелінійної самоподібності» ще треба осмислити і сформулювати в математичних термінах.

Дійсно, множина M має дуже нетривіальні властивості і їх дослідження далеко в чому не завершено. Так, як показано Міцухіро Шісікура (Shishikura, 1998), розмірність Хаусдорфа границі множини Мандельброта дорівнює 2. Той факт, що це ціле число більше, ніж його топологічна розмірність, яка дорівнює 1, відображає екстремальну фрактальну природу границі множини Мандельброта. Грубо кажучи, результат Шісікури стверджує, що границя множини Мандельброта настільки нерегулярна, що локально заповнює простір так само ефективно, як і двовимірна плоска область.

Особлива природа границі множини Мандельброта визначає складність обчислення площі множини M. Розглядаючи на комплексній площині круги з центром у нульовій точці (див. рис. 9), можна прийти до висновку, що існує максимальний круг, що міститься в множині M і мінімальний круг, який включає в себе M, а саме: $\{|\, z \,| \leq 1/4\} \subset M \subset \{|\, z \,| \leq 2\}$. Максимальний і мінімальний круги дають нижню і верхню оцінки для площі: $\pi/16 < S < 4\pi$.

У статті (Bittner, 2017) представлені нові вдосконалені розрахунки верхньої границі для площі множини M. Формула для обчислення площі A множини M має вигляд ряду

$$A = \pi\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} m|b_m|^2\right], \tag{10}$$

де визначення коефіцієнтів b_m пов'язано зі складними розрахунками (Bittner, 2017). Звісно, при чисельних розрахунках величини A_N утримується скінченна кількість N членів ряду (10).

Дані в табл. 1, де наведені верхні межі для площі множини M, чітко показують повільну збіжність величини площі A_N, а в табл. 2 наведено час роботи сучасного комп'ютера Computing Cluster at Rowan University для розрахунку коефіцієнтів b_m у партіях по $500\,000$. Як-то кажуть, коментарі зайві.

Таблиця. 1.

Верхні границі для площі множини M

N (мільйони)	A_N
0,5	1,72
1,0	1,70393
1,5	1,69702
2,0	1,69388
2,5	1,69096
3,0	1,68895
3,5	1,68740
4,0	1,68633
4,5	1,68447
5,0	1,68288

Інший підхід до визначення площі множини M полягає у підрахунку пікселів, які потрапляють до множини M. Тут громіздкі і складні розрахунки дають значення $1{,}50659$.

Якщо виявиться, що точне значення площі A лежить ближче до $1{,}50659$, тоді, звичайно, використання A_N для наближення A є непрактичною процедурою через надзвичайно велику кількість доданків у формулі (10). З іншого боку, якщо точне значення площі A виявиться ближче до величини $1{,}68$, то це означатиме, що границя множини Мандельброта може мати додатну площу.

Таблиця. 2.

Час розрахунку коефіцієнтів b_m у партіях по $500\ 000$

Діапазон m (мільйони)	Час роботи для обчислення b_m (дні)
2,5–3,0	9,0
3,0–3,5	10,8
3,5–4,0	12,5
4,0–4,5	14,4
4,5–5,0	16,2

Як пишуть автори статті (Bittner, 2017), наступні два десятиліття покажуть, як зміняться їхні розрахунки A_N при використанні більш потужних комп'ютерів, якщо тільки нам не пощастить побачити точну площу A, обчислену раніше.

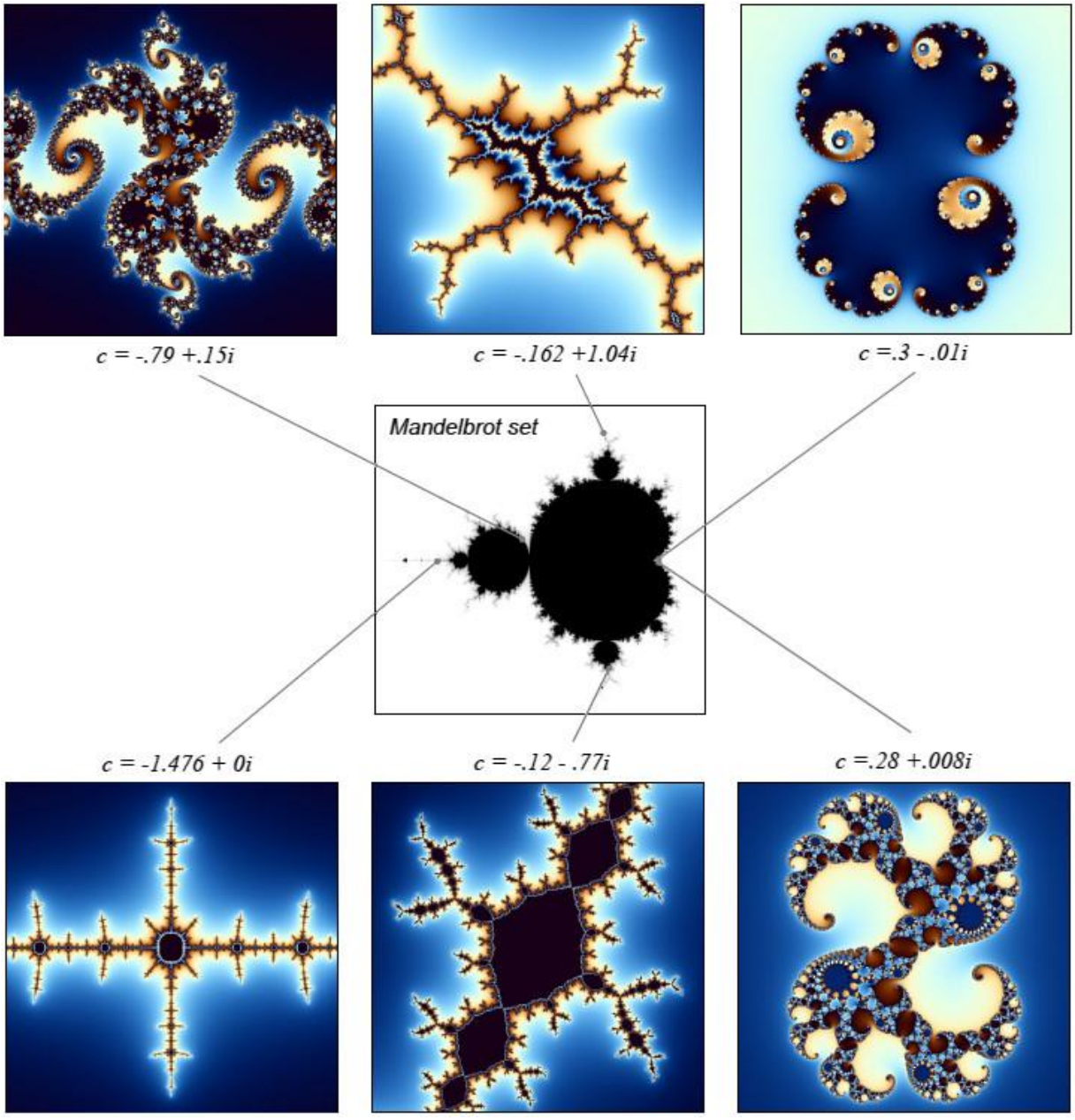
Тепер дамо визначення множини Жюліа, яка має тісний зв'язок з множиною Мандельброта. *Наповненою множиною* Жюліа $K(f)$ для відображення $z \mapsto f(z) = z^2 + c$ називають множину точок комплексної множини, орбіти яких обмежені, тобто в процесі ітерацій не прагнуть до нескінченності. Жюліа визначив множину $J(f)$, як множину, що є границею множини $K(f)$. Множина $J(f)$ називається просто множиною Жюліа. Множина $J(f)$ є підмножиною множини $K(f)$, але в будь-якому ε-околі ($\varepsilon > 0$) точки із множини $J(f)$ присутні як точки, орбіти яких обмежені, так і точки, орбіти яких йдуть у нескінченність.

Множина $J(f)$, на відміну від множини Мандельброта, є самоподібною множиною, тобто одна і та ж форма зустрічається в різних місцях і має різні розміри. При цьому, відображення $z \mapsto f(z) = z^2 + c$ перетворює $J(f)$ в себе, тобто множина $J(f)$ є інваріантною множиною відносно перетворення f. Іншими словами, якщо початкова точка z_0 знаходиться на множині Жюліа, то її орбіта ніколи не залишить множину $J(f)$.

Жюліа і Фату, незалежно один від одного, довели важливу теорему про те, що множина $J(f)$ для відображення $z \mapsto f(z) = z^2 + c$ зв'язна тоді і тільки тоді, коли $c \in M$. Іншими словами, множина Мандельброта для відображення $z \mapsto z^2 + c$ є каталогом всіх зв'язних множин Жюліа цього відображення: *кожній зв'язній множині Жюліа ставиться у взаємно-однозначну відповідність точка множини Мандельброта*. Кожна незв'язна множина Жюліа (фрактальний пил або пил Фату) відповідає деякій точці, розташованій поза множиною Мандельброта.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, в залежності від значення сталої c, тобто від положення точки c на множині Мандельброта (чи поза нею) вигляд множини Жюліа суттєво змінюється. Різноманіття форм тут величезне. Тому ми не беремося зробити опис цих форм в межах цієї статті, а рекомендуємо читачу звернутись до відповідної літератури (Peitgen & Richter, 1986), (Crownover, 1995), (Dewdney, 1987), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013) і познайомитися з алгоритмами побудови множини Жюліа. Оскільки ці алгоритми відносно прості для програмування на комп'ютері, то, проводячи розрахунки, ви не один раз відчуєте здивування і захоплення. Не забувайте також і про можливості Інтернету.



http://www.karlsims.com/julia.htm

Рис. 11. Множина Мандельброта і супутні множини Жюліа для відображення $z \mapsto z^2 + c$ при різних значеннях параметра c

Можна стверджувати, що множини Жюліа належать до групи найбільш прекрасних фракталів. Мабуть, неможливо навести приклад такого комп'ютерного експерименту, який враженням від результату перевершував би те почуття здивування і захоплення, що викликає графічна побудова множин Жюліа і Мандельброта. Для прикладу, на рис. 11 показані множина Мандельброта і супутні множини Жюліа для відображення $z \mapsto z^2 + c$ за різних значень параметра c. Стрілочки вказують, які множини Жюліа відповідають виділеним точкам на множині Мандельброта.

Відзначимо, що існує багато способів візуалізації та розфарбування фракталів, щоб надати їм більш естетично цікавого вигляду. Загальний метод полягає в тому, щоб підрахувати кількість ітерацій, за яких величина $|z|$ перевищить дане вихідне значення (зазвичай це 2), тобто в процесі ітерацій орбіта точки вийде за межі кола радіуса 2. У справедливості даного твердження неважко переконатися. Якщо в процесі ітерацій маємо $|z| > 2$ (вважаємо, $|c| < 2$), то відношення двох, послідовних одна за одною ітерацій

$$\frac{|f(z)|}{|z|} = \frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq \frac{|z^2| - |c|}{|z|} = |z| - \frac{|c|}{|z|} > |z| - 1 > 1$$

і, отже, в подальшому ітерації прагнуть до нескінченості. Це твердження служить критерієм, згідно з яким можна відрізнити точки z комплексної площини, орбіти яких йдуть на нескінченність, від точок z, що утворюють наповнену множину Жюліа.

Як варіант можна запропонувати такий план дій. Якщо зазначена умова $|z| > 2$ виконується для точок z при числі ітерацій $n \leq 10$, їх можна пофарбувати у перший колір; другим кольором пофарбувати точки зі значеннями ітерацій від 11 до 20; третім кольором – точки зі значеннями від 21 до 30; потім для наступних десяти значень можна повернутися до першого кольору і так далі. Тут можлива повна свобода творчості.

Доречно звернутися до статті Дуаді (Dewdney, 1987), де він наводить такі міркування німецького математика Хайнца-Отто Пайтгена (нар. 1945 року), одного з авторів чудової книги (Peitgen & Richter, 1986): «Пайтген охарактеризував множину Мандельброта як свого роду величезну книгу, в якій кожна множина Жюліа – не більше ніж сторінка. За тим положенням, яке займає точка в множині Мандельброта, можна передбачити поведінку змінної в процесі ітерацій, характеризуючи загальну форму і розмір супутньої множини Жюліа. Тут справа не тільки в тому, чи буде вона зв'язною або незв'язною ... Аналогія, згідно з якою множина Мандельброта є як би словником для множин Жюліа, передбачає фундаментальну відмінність між цими множинами. Структура множини Жюліа самоподібна (в різних масштабах), в той час як для множини Мандельброта (навіть для границі) це не так. В іншому випадку, як говорить Пайтген, множина Мандельброта не мала б здатності кодувати в собі незліченну кількість споріднених множин Жюліа».

Цікаві й думки самого А. Дуаді: «... дивлячись на малюнки, що зображують множини Мандельброта і Жюліа, дивуєшся величезній кількості інформації, що міститься в них.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Це нескінченне різноманіття форм і конструкцій, що відкривається нашому погляду, ніяк не можна порівняти з банальною простотою формули, яка їх породжує: $z_{n+1} \to z_n^2 + c$. Можна вважати, що ітераційний процес, який визначається цією формулою, – це надзвичайно ефективний спосіб розшифрування інформації, що міститься у вихідних даних (значення комплексного параметра c і положення початкової точки z_0), які є своєрідним ключем. Перед нами приклад того, як найпростіша динамічна система може розвинути незначну інформацію, що міститься в ключі, і породити різноманітні високоорганізовані структури».

9. Хто відкрив множину Мандельброта?

Це питання не є тестом на кмітливість і відповісти на нього виявляється не просто. Множина Мандельброта є дуже складним і найвідомішим математичним об'єктом, яка привертає до себе величезну увагу громадськості. Мандельброт стверджував, що він і тільки він відкрив цю множину. Про зображення множини M він говорив як про свій «підпис».

Слід сказати, що незвичні властивості цієї множини були описані П'єром Фату ще у 1906 році. Перші зображення були отримані кількома дослідниками раніше Мандельброта. Прикладом є спільна праця американських математиків Роберта Брукса і Пітера Мательскі (Brooks & Matelski, 1978). Але Мандельброт зауважив, що Брукс і Мательскі створили «грубу версію» множини і «не подумали» про її особливий характер. Не будемо говорити про результати інших дослідників, а процитуємо Дуаді: «Мандельброт був перший, хто отримав зображення на дисплеї комп'ютера і описав його в літературі». Саме Дуаді запропонував називати множину M множиною Мандельброта.

Щоб поставити логічну крапку в цьому питанні, звернемо увагу на суттєве зауваження американського гідромеханіка Мілтона Ван Дайка (1922–2010) з приводу коренів методу пограничного шару (Horgan, 2009), (Van Dyke, 1975). Перифразуючи його, зазначимо, що слід говорити не про корені створення множини M, а про її зерна, причому зерна непроростілі, оскільки зазначені праці не мали продовження в роботах їхніх авторів або учнів. І це зовсім невипадково.

Тому саме Бенуа Мандельброта і слід вважати творцем множини Мандельброта.

10. Фрактали в геометрії природи

Фрактальна самоподібність присутня у багатьох реальних системах. Вона проявляється в геометрії дерев і русел річок, будові легень, розгалуженні кровоносних судин, динаміці серцевого ритму, зміні рівнів водних поверхонь, турбулентності тощо (Mandelbrot, 1975), (Mandelbrot, 1977), (Mandelbrot, 1983), (Feder, 1988), (Schroeder, 1991), (Goldberger, Rigney & West, 1990), (Гринченко, Мацыпура & Снарский, 2013).

Якщо розглядати нейрони (нервові клітини) через мікроскоп із невеликим збільшенням, то можна чітко побачити клітини, що відходять від тіла нейрона, як асиметричні розгалужені відростки (дендрити). У подальшому збільшенні можна

спостерігати ще менші відгалуження, що відходять від великих гілок. У ще більшому збільшенні виявляється новий рівень структури: відгалуження від відгалужень і т. д. На кожному рівні масштабу структура гілок нейрона подібна (хоча й не обов'язково ідентична, як у випадку ідеальних фракталів) структурам, що спостерігаються як у більших, так і у дрібніших масштабах (Goldberger, Rigney & West, 1990).

Взагалі, багато фракталоподібних утворень міститься у людському організмі, де вони відіграють важливу роль у підтримці нормального функціонування організму. Наприклад, фракталоподібна структура артерій і вен здійснює рівномірне кровопостачання різних ділянок органів, фрактальні відгалуження та складки значно збільшують поверхню всмоктування в кишечнику. Уявіть, як хитромудро влаштовані легені, нирки, за своєю структурою вони нагадують дерева з гіллястою кроною. Всі ці системи організму людини чудово описуються фрактальними конфігураціями та розмірностями Хаусдорфа (Goldberger, Rigney & West, 1990).

Послідовні злами, вигини та розгалуження дозволяють лінійній структурі «майже» заповнити певну область площини. Так само лінійна система артерій майже суцільно пронизує тривимірний організм, забезпечуючи його безперебійне кровопостачання. Тут фрактал постає як спосіб організувати взаємодію просторів різної розмірності.

Мабуть, можна стверджувати, що реальні фрактальні структури є слідом хаотичних процесів. Де б у природі, в результаті хаотичного процесу, не формувався той чи інший об'єкт (берег моря, атмосфера, геологічний розлом тощо), скрізь із великою імовірністю можна виявити фрактали (у контурі берегової лінії, у формі хмар, у конфігурації скельних утворень) (Schroeder, 1991).

Спостереження зображень фракталів заспокоює і викликає почуття полегшення й упевненості. Так само діє сталий ритм церковного богослужіння або рефрен колискової пісні.

Музичні твори в основі також фрактальні, оскільки правила їхнього створення аналогічні правилам, які за допомогою повторювань дозволяють творити фрактальні образи (Schroeder, 1991).

Ба більше, як влучно відмічено Мандельбротом, природа любить фрактали не менше (якщо не більше) регулярних форм. На кожну гладку криву або поверхню в навколишньому світі припадає багато (щоб не сказати дуже багато) нерегулярних, а нерідко фрактальних, кривих і поверхонь, наділених найтоншою структурою в різноманітних масштабах. Зрозуміло, що подібно до інших геометричних понять, таких як точка, лінія, поверхня, фрактал – це насамперед абстракція, теоретична модель реальності, результат граничного переходу, недосяжний в реальності.

Ерудиція та енциклопедичні знання Мандельброта допомогли йому систематизувати величезну кількість відомих раніше і знову відкритих фракталів, а також зібрати разом відповідні історичні факти. Його головна книга (Mandelbrot, 1983) про фрактали містить 670 літературних посилань, а кількість посилань на його головну книгу, на час написання цієї статті, дорівнює 55 252.

Сьогодні фрактали становлять важливий розділ сучасної науки. У цьому полягає головна заслуга Мандельброта. Його роботи продовжують надихати дослідників і

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

митців, доводячи, що математика є не лише інструментом для розуміння Всесвіту, але й джерелом краси та творчості.

Бенуа Мандельброт був далекоглядним математиком, чиї ідеї змінили наше уявлення про навколишній світ. Завдяки своїй роботі з фракталами він продемонстрував, що математика може бути як строгою дисципліною, так і джерелом дива, розкриваючи приховані закономірності, які лежать в основі хаотичної та непередбачуваної природи Всесвіту.

Спадщина Мандельброта продовжує надихати нові покоління вчених, митців і мислителів досліджувати нескінченну складність світу крізь призму фрактальної геометрії.

11. Про третю культуру

Беручи до уваги, з одного боку, глибоке наукове наповнення поняття фрактала, а, з іншого боку, красу їх зображень, ми вирішили в останньому розділі статті познайомимо читача з деякими думками авторів книг (Peitgen & Richter, 1986), (National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine, 2018), які, на наш погляд, є особливо актуальними в теперішній час.

Наука і мистецтво – два взаємодоповнюючих способи пізнання світу природи – один аналітичний, інший інтуїтивний. Ми звикли бачити в них протилежні полюси, але хіба вони не залежать один від одного? Мислитель, який намагається своїм розумінням проникнути в природні явища, прагнучи звести всю складність до кількох фундаментальних законів, – чи не мріє він також, занурюючись у багатство форм бачити себе частиною вічної гри природних явищ?

Цей досвід єдності, який може відчувати кожен з нас, не знаходить аналогів в інтелектуальній історії останніх двохсот років. Ніби відчуваючи себе занадто замкнутими в одній душі, розум мистецтва і розум науки розділилися. Єдиний Фауст став двома одновимірними сутностями. Цей поділ здається незворотним, і сьогодні вже не береться до уваги те, що обидві частини разом сприяли розвитку в епоху Просвітництва. Сміливість користуватися власним розумом перетворилася на зухвалість. Холодна раціональність науки й техніки пронизала й змінила світ до такої міри, що саме існування людини опинилося під загрозою. На жаль, мистецтво перед цим виявилося безсилим.

Звичайно, ця напруга позначається на природничих науках. Багато зрілих мислителів усвідомлюють неадекватність усталеної мудрості. Незважаючи на великі, об'єднуючі успіхи у фізиці елементарних частинок або у молекулярній генетиці, кредо «фундаменталістів» втратило свою виняткову привабливість. Вже недостатньо відкрити основні закони і зрозуміти, як «в принципі» влаштований світ.

Дедалі важливішим стає з’ясування закономірностей, через які ці принципи проявляються в реальності. Найточніші фундаментальні закони діють у реально існуючому світі. Будь-який нелінійний процес веде до точок розгалуження, до розгалужень шляху, на яких система може вибрати ту чи іншу гілку. Приймаються

рішення, наслідки яких неможливо передбачити, оскільки кожне рішення має характерне підсилення.

Інший приклад зв'язку фундаментальної науки і мистецтва обумовлений результатами досліджень в астрофізиці. Зображення елементів Всесвіту, які раніше телескоп Габбл, а тепер Вебер доставляють землянам, мають величезний емоційний вплив на сучасних людей.

Математики, і особливо фізики, завжди мислили образами; навіть більше того, вони використовують естетичні категорії як критерії, якщо не істинності, то, принаймні, повноти. Видатний німецький математик Герман Вейль (1885–1955) відкрито визнав: «У своїй роботі я завжди прагнув поєднати істинне з прекрасним, і коли мені доводилося вибирати між ними, я зазвичай вибирав прекрасне». У подібних висловлюваннях промовляє глибоке почуття єдності науки і мистецтва.

Список використаних джерел

Mandelbrot B. B. (1975). *Les objects fractals: forme, hasard et dimension*. Flammarion, 190 p.

Mandelbrot B. B. (1977). *Fractals: form, chance and dimension*. W.H. Freeman, San Francisco, 365 p.

Mandelbrot B. B. (1983). *The fractal geometry of nature*. W.H. Freeman, N.Y., 1983. 485 p.

Mandelbrot B. B. (2012). *Fractalist. Memoir of Scientific Maverick*. Pantheon Boors, N. Y., 352 p.

Mandelbrot B. B. (1963). The variation of speculative prices // *The Journal of Business*. 36, No 4, – p. 394-419.

Frame M. and Cohen N. Eds. (2015). *Benoit Mandelbrot. A Life in Meny Dimensions*. World Scientific Publisheng, 553 p.

Puancare Henri.(2019). *Last Thoughts*. Multimeda Publishing, 142 p.

Peitgen H.-O., Richter P. H. (1986). *The Beauty of Fractals*. Images of Complex Dynamical Systems, Spriner, 199 p.

Feder J. (1988). *Fractals*. Plenum Press, N. Y. 283 p.

Schroeder M. (1991). *Fractals, Chaos, Power Laws*. Minutes from an Infinite Paradise, W. H. Freeman, 429 p.

Crownover R. M. (1995). *Introduction to Fractals and Chaos*. Jones and Bartlett Publisher, 299 p.

Goldberger, A. L., Rigney, D. R., & West, B. J. (1990). Science in Pictures: Chaos and Fractals in Human Physiology // *Scientific American*, 262(2). – pp. 42–49.

A. K. Dewdney.(1987). Beauty and profundity, the Mandelbrot set and a flock of its cousins called Julia // *Scientific American*, vol. 257, No 5. – pp. 118–122.

Shishikura Mitsuhiro. (1998). The Harsdorf dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets // *Annals of Mathematics. Second Series*., 147 (2). – pp. 225–267.

Bittner, Daniel, etal. (2017). New approximations for the area of the Mandelbrot set // *Involve, a Journal of Mathematics* 10.4. – pp. 555–572.

Horgan J. (2009). Who discovered the Mandelbrot set? // *Scientific American*. № 36. – pp. 1-4.

Brooks R. & Matelski J. P. (1978). in Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (Eds. Kra, I. &Maskit, B.) 65–71 (Princeton University Press, Princeton, 1981).

Van Dyke Milton. (1975). Computer extension of perturbation series in fluid mechanics. // *SIAM Journal on Applied Mathematics* 28.3 (1975). – pp. 720-734.

Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. (2013). *Фракталы: от удивления к рабочему инструменту. Учебное пособие*. К.: Наукова думка. 270 с.

Грінченко В. Т., Маципура В. Т., Снарський А. О. (2024). *Крок до таємниць нелінійного світу: хаос і фрактали. Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ "Київський університет", 416 с.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. (2018). *The Integration of the Humanities and Arts with Sciences, Engineering, and Medicine in Higher Education: Branches from the Same Tree*. Washington, DC: The National Academies Press, 282 p.

Отримано редакцією журналу: 29.11.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Victor GRINCHENKO, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

Volodymyr MATSYPURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

FRACTALIST

Abstract. *The article is dedicated to the 100-th anniversary of the birth of Benoit Mandelbrot, the man who coined the word "fractal" and, in fact, became the author of a new direction in science - fractal geometry. The article briefly presents his biography, discusses the definition of the concept of fractal. Some attention is paid to Mandelbrot's predecessors and it is considered that it was B. Mandelbrot, thanks to his erudition and encyclopedic knowledge, who was able to systematize a huge number of previously known and newly discovered fractals. Today, fractals constitute an important section of modern science. This is Mandelbrot's main merit. His works continue to inspire researchers and artists, proving that mathematics is not only a tool for understanding the Universe, but also a source of beauty and creativity.*

Keywords: *fractal geometry; dimension; iterations; set; connectedness.*

Обрії математики

УДК 514.13/.132:514.7 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.10**

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРАВИЛЬНІ ВОСЬМИКУТНИКИ В ГІПЕРБОЛІЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. *При побудові гіперболічних структур на замкнених поверхнях можна використати гіперболічну геометрію (геометрію Лобачевського) на площині. Для цього потрібно подати поверхню у вигляді $2n$-кутника на гіперболічній площині і задати дію дискретної групи, що є підгрупою рухів гіперболічної площини, для якої $2n$-кутник є фундаментальною областю. Якщо такою поверхнею є подвійний тор (орієнтована поверхня роду 2), то її можна отримати, склеївши протилежні сторони восьмикутника. Фактично площина Лобачевського розбивається на восьмикутники. Наявність симетрій спрощує обчислення. Тому природно виникає задача про розбиття на правильні восьмикутники. Крім того, важливо навести приклади таких восьмикутників, задавши координати їх вершин в одній з моделей гіперболічної геометрії.*
Використовуються моделі верхньої півплощини та модель Пуанкаре на одиничному диску, для яких задана ріманова метрика (формула для знаходження довжин дуг кривих). Ми описуємо основні властивості гіперболічних прямих та групи рухів (групи ізометричних відображень) гіперболічної геометрії на площині за допомогою дробово-лінійних відображень комплексної площини з дійсними коефіцієнтами.
Отримано формулу для координат вершин та довжин діагоналей правильного восьмикутника з центром в початку координат у моделі Пуанкаре. Побудовано такі правильні восьмикутники, якими можна замістити гіперболічну площину, для чотирьох найбільших можливих кутів.

Ключові слова: *геометрія Лобачевського; гіперболічна пряма; неевклідова геометрія; гіперболічна тригонометрія; ріманова метрика.*

1. Вступ

Актуальність. У диференціальній геометрії, в залежності від знаку гаусової кривини K, точки поверхні поділяються на три типи: 1) еліптичні ($K > 0$), 2) параболічні ($K = 0$) та 3) гіперболічні ($K < 0$). Відповідно до цього в розмірності два існує три геометрії: 1) еліптична (або проєктивна), 2) евклідова, 3) гіперболічна (або геометрія Лобачевського). Геометричні та топологічні властивості проективної площини вивчалися у статті Пришляка та Білун (Пришляк, 2024). Евклідова геометрія детально вивчається у шкільному курсі математики. Робота присвячена вивченню геометричних властивостей гіперболічної площини.

Нагадаємо, що гаусова кривина в точці може бути визначена формулою

$$K = \lim_{S \to \infty} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S},$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

де α, β, γ – кути, а S – площа криволінійного трикутника, що містить дану точку і сторони якого – геодезичні лінії (найкоротші на поверхні криві між двома точками) (Пришляк, 2004).

Отже, в проєктивній геометрії сума кутів довільного трикутника більша за π, в евклідовій – дорівнює π, а в гіперболічній геометрії менша за π.

Для задання геометричних властивостей просторів (поверхонь, многовидів) часто використовується Ріманова метрика. Вона задає скалярний добуток дотичних векторів у кожній точці і може бути виражена за допомогою квадрата диференціала дуги:

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}du\,dv + g_{11}dv^2,$$

де u, v – локальні координати на поверхні. Прикладом ріманової метрики є перша квадратична форма поверхні, яка індукована евклідовою метрикою тривимірного простору, в який вкладена поверхня. Зауважимо, що гаусова кривина, геодезичні довжини дуг, кути між кривими та площі областей можуть бути знайдені за допомогою ріманової метрики.

За глобальною теоремою Гауса-Боне для замкненої поверхні Φ

$$\int_{\Phi} K\,dS = 2\pi\chi(\Phi),$$

де $\chi(\Phi) = |V| - |E| + |F|$ – ейлерова характеристика поверхні Φ, $|V|$ – число вершин, $|E|$ – число ребер, $|F|$ – число граней довільної триангуляції або клітkового розбиття поверхні Φ.

Серед замкнених поверхонь в тривимірному просторі тільки сфера та поверхні, їй гомеоморфні, мають додатну ейлерову характеристику ($\chi(S^2) = 2$) (Пришляк, 2023). Тому тільки на таких поверхнях можливо задати еліптичну геометрію (ріманову метрику з гаусовою кривиною $K = 1$).

Ейлерова характеристика тора і гомеоморфних йому поверхонь дорівнює 0. Ріманова метрика $ds^2 = du^2 + dv^2$ має нульову гаусову кривину на торі в кожній точці, де u, v – локальні координати тора як поверхні обертання. Ця метрика є евклідовою метрикою на площині, а тору відповідає квадрат на площині зі склеєними за осьовими симетріями протилежними сторонами. Також тор можна розглядати як множину орбіт дії групи $Z \oplus Z$ на площині. Це означає, що площину можна розбити на квадрати. Також тор можна отримати з правильного шестикутника, склеївши протилежні сторони. Це відповідає розбиттю площини на правильні (рівні між собою) шестикутники.

Ейлерова характеристика решти замкнених поверхонь від'ємна. Тому на них може існувати тільки гіперболічна геометрія. Основна ідея побудови такої геометрії полягає в поданні поверхні як правильного $2n$-кутника зі склеєними сторонами і задання на цьому $2n$-кутнику гіперболічної геометрії. Для того, аби при склеюванні сторін не виникло особливостей на сторонах та у вершинах, повинна виконуватися властивість,

що $2n$-кутником можна замістити всю гіперболічну площину (розбити площину на області, кожна з яких ізометрична заданому 2n-кутнику).

Об'єктом дослідження є гіперболічна площина. Ми описуємо дві моделі гіперболічної площини – модель верхньої півплощини та модель Пуанкаре на одиничному крузі. Кожна з них визначається за допомогою ріманової метрики, заданої на відповідній області.

Метою роботи є опис геометричних властивостей гіперболічної площини та побудова правильних восьмикутників (за координатними їх вершин та середин сторін у моделі Пуанкаре), якими можна замостити всю гіперболічну площину. Це дозволяє побудувати гіперболічну метрику на подвійному торі.

Ми доводимо геометричні властивості для моделі верхньої півплощини, потім показуємо, що модель Пуанкаре ізометрична моделі верхньої півплощини. З цього випливає, що доведені геометричні властивості також виконуються в моделі Пуанкаре.

В усіх виразах типу dx^2 спочатку відбувається операція диференціювання, а потім піднесення до квадрату.

2. Основні твердження

2.1 Модель верхньої площини геометрії Лобачевського

Гіперболічна метрика на півплощині $y > 0$ (модель верхньої півплощини геометрії Лобачевського) має вигляд

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Гранична пряма $y = 0$ називається *абсолютом*.

Гіперболічними прямими називаються перетин прямих або кіл, перпендикулярних абсолюту з верхньою півплощиною відповідно. Відстань між точками знаходиться як довжина відрізка гіперболічної прямої з кінцями в цих точках у гіперболічній метриці.

Ізометрія (ізометричне перетворення) – це такий гомеоморфізм, який зберігає довжини дуг кривих. При такому відображенні ріманові метрики у відповідних точках будуть еквівалентні, а, отже, зберігаються і кути між кривими.

Дробово-лінійне відображення – це відображення комплексної площини виду

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

де a, b, c, d – комплексні числа і $ad - bc \neq 0$.

Теорема 1. *Кожне дробово-лінійне відображення є композицією таких відображень:*

1) $f(z) = az$ – *розтягнення (гомотетія) та поворот*,

2) $f(z) = z + b$ – *паралельне перенесення*,

3) $f(z) = \frac{1}{z}$ – *інверсія з симетрією відносно осі*.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Теорема 2. *Дробово-лінійні перетворення переводять кола та прямі в кола та прямі.*

Теорема 3. *Композиція двох дробово-лінійних перетворень є дробово-лінійним перетворенням, а матриця композиції є добутком матриць цих перетворень.*

Теорема 4. *Група ізометрій площини Лобачевского, що зберігають орієнтацію, ізоморфна групі дійсних дробово-лінійних перетворень площини з* $\det A = 1$ *та ізоморфна* $PSL(2, \mathbb{R})$.

Теорема 5. *Гіперболічна пряма є найкоротшою між двома точками на площині Лобачевского*.

Теорема 6. *Якщо точки верхньої півплощини задавати за допомогою комплексних чисел, то відстань між ними може бути обчислена за формулами*

$$d(z,w) = \ln \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|}, \qquad \operatorname{th} \frac{d(z,w)}{2} = \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|.$$

Теорема 7. *Сума кутів трикутника на площині Лобачевського дорівнює* $\pi - S$, *де* S *– площа трикутника*.

2.2 Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського

Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського була розроблена французьким математиком Анрі Пуанкаре в 1880-х роках. Він був зацікавлений в дослідженні нелінійних диференціальних рівнянь та проблемах топології, які виникали в контексті геометрії Лобачевського.

У своїх дослідженнях Пуанкаре застосовував ідеї проєктивної геометрії, яка дозволяла вивчати властивості геометричних об'єктів, зберігаючи при цьому їх взаємне розташування. Він запропонував модель геометрії Лобачевського, яка використовувала властивості проєктивної геометрії для зображення гіперболічної площини в тривимірному просторі.

Згідно з моделлю Пуанкаре, гіперболічна площина може бути зображена у вигляді круга, що розташований всередині сфери, яка називається сферою Пуанкаре. Ця сфера має ряд специфічних властивостей, які дозволяють зображати геометричні об'єкти в гіперболічній площині та виконувати різноманітні геометричні операції.

Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського є однією з найбільш відомих та поширених моделей геометрії Лобачевського, яка знаходить застосування в різних галузях математики, фізики та комп'ютерних наук.

Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського на одиничному крузі $x^2 + y^2 < 1$ задається рімановою метрикою

$$ds^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Граничне коло $x^2 + y^2 = 1$ називається абсолютом для моделі Пуанкаре.

Гіперболічними прямими називаються перетин прямих або кіл, перпендикулярних абсолюту з кругом Пуанкаре, відповідно. Відстань між точками знаходиться як довжина відрізка гіперболічної прямої з кінцями в цих точках у відповідній рімановій метриці.

Теорема 8. *Між моделлю верхньої півплощини та моделлю Пуанкаре існує ізометричне відображення*.

З цієї теореми випливає, що всі властивості (крім відстані між двома точками), що виконуються в моделі верхньої півплощини, виконуються і в моделі Пуанкаре.

Теорема 9. *Якщо в моделі Пуанкаре точки задавати за допомогою комплексних чисел, то відстань між ними може бути обчислена за формулами*

$$d(z,w) = \ln\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}, \qquad \operatorname{th}\frac{d(z,w)}{2} = \frac{z-w}{1-z\overline{w}}.$$

2.3 Гіперболічна тригонометрія

Гіперболічний трикутник – це трикутник, сторони якого є відрізками гіперболічних прямих.

Теорема 10. (Піфагора для гіперболічного трикутника). *Для прямокутного трикутника ABC з прямим кутом B та сторонами a, b, c має місце рівність:*

$$\cosh b = \cosh a \cosh c. \tag{1}$$

де $\cosh$ *є гіперболічним косинусом.*

Теорема 11. (Синусів для гіперболічного трикутника). *Для будь-якого гіперболічного трикутника зі сторонами a, b та c та відповідними протилежними кутами α, β та γ:*

$$\frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}, \tag{2}$$

де $\sinh$ *є гіперболічним синусом.*

Теорема 12. (Косинусів для гіперболічного трикутника). *Для гіперболічного трикутника зі сторонами a, b та c та відповідними протилежними кутами α, β та γ:*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \cos\gamma, \tag{3}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh a, \tag{4}$$

де $\cosh$ *є гіперболічним косинусом,* $\sinh$ *є гіперболічним синусом.*

Формула (4) дозволяє знаходити сторони трикутника за їх кутами.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2.4 Правильні восьмикутники в моделі Пуанкаре

Якщо правильний восьмикутник розрізати за всіма осями симетрії (прямими, що проходять через протилежні кути, та прямими, що проходять через центри протилежних сторін), то отримаємо 16 прямокутних трикутників, один з яких зображений на рис. 1.

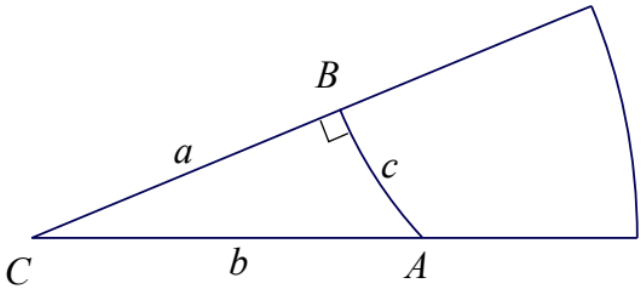


Рис. 1. Прямокутний трикутник у моделі Пуанкаре

В цьому трикутнику $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/8$.

З теореми 12 маємо:

$$\cosh a = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\sin\pi/8},$$

$$\cosh b = \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha\cos\pi/8}{\sin\alpha\sin\pi/8}.$$

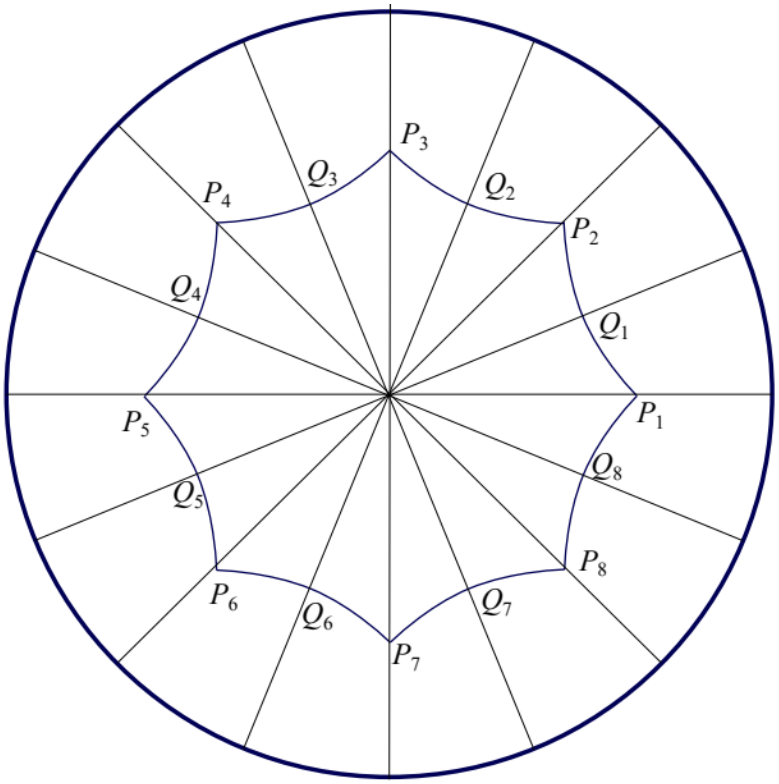


Рис. 2. Позначення точок на правильному восьмикутнику

Позначимо вершини правильного восьмикутника $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$, а центри сторін $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8$ (див. рис. 2).

Координати вершин. Будемо розглядати модель Пуанкаре в одиничному крузі $x^2 + y^2 < 1$. $O\ (0,0)$ – початок координат.

Нехай вершини мають координати $P_i(x_i, y_i)$, а середини сторін $Q_i(u_i, v_i)$.

Нехай α дорівнює половині внутрішнього кута восьмикутника.

Знайдемо координати першої вершини P_1. Трикутник P_1Q_1O збігається з прямокутним трикутником ABC, що розглядався вище. Тому

$$\cosh b = \cosh|OP_1| = \frac{\cos\alpha\cos\pi/8}{\sin\alpha\sin\pi/8} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\pi/8.$$

З іншого боку OP_1 дорівнює довжині відрізка прямої $x = t, y = 0, t \in [0, x_1]$. За формулою довжини дуги в моделі Пуанкаре маємо

$$b = |OP_1| = \int_0^{x_1} \frac{2dx}{1-x^2} = \log\frac{1+x_1}{1-x_1}.$$

Звідси отримаємо

$$x_1 = \frac{e^b - 1}{e^b + 1}.$$

Підставляючи одну формулу у іншу, маємо

$$x_1 = \frac{e^{\cosh^{-1}\left(\cot\frac{\pi}{8}\cot\alpha\right)} - 1}{e^{\cosh^{-1}\left(\cot\frac{\pi}{8}\cot\alpha\right)} + 1}.$$

Оскільки $OP_2 = OP_1$, а кут P_1OP_2 дорівнює $\pi/4$, то

$$x_2 = y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{2}}.$$

Зважаючи на симетрії правильного восьмикутника, знаходимо координати решти вершин:

$$P_3(0, x_1),\ \ P_4(-x_2, x_2),\ \ P_5(-x_1, 0),\ \ P_6(-x_2, -x_2),\ \ P_7(0, -x_1),\ \ P_8(x_2, -x_2).$$

Проведемо аналогічні обчислення для координат середин сторін (позначимо $u = u_1,\ v = v_1$):

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\cosh a\,|OQ_1| = \frac{\cos\alpha}{\sin\pi/8}.$$

Тоді

$$u = \frac{e^a-1}{e^a+1}\cos\frac{\pi}{8}, \qquad v = \frac{e^a-1}{e^a+1}\sin\frac{\pi}{8}\ .$$

Решта координат середин сторін знаходяться із симетрій:

$$Q_2(v,u),\ \ Q_3(-v,u),\ \ Q_4(-u,v),\ \ Q_5(-u,-v),$$
$$Q_6(-v,-u),\ \ Q_7(v,-u),\ \ Q_8(u,-v).$$

3. Доведення

3.1 Розклад дробово-лінійних відображень в композицію простих

Покажемо, що кожне дробово-лінійне перетворення є композицією розтягнень з поворотом, паралельних перенесень та інверсій з симетріями.

Якщо в дробово-лінійному відображенні

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

коефіцієнт $c = 0$, то $d \neq 0$ (оскільки $ad - bc \neq 0$) і

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

що є композицією розтягнення із поворотом з коефіцієнтом a/d та паралельного перенесення на b/d.

Якщо $c \neq 0$, то

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z+\frac{d}{c}\right)-\frac{ad}{c^2}+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{z+\frac{d}{c}}.$$

Отже, $f(z)$ є композицією паралельного перенесення на d/c, інверсії із симетрією, розтягненням з поворотом на коефіцієнт $\frac{bc-ad}{c^2}$ та паралельного перенесення на a/c.

3.2 Інваріантність кіл та прямих при дробово-лінійних відображеннях

Для доведення того, що дробово-лінійні відображення відображають кола та прямі в кола та прямі, подамо їх як композиції розтягнень з поворотом, паралельних

перенесень та інверсій з симетріями. Оскільки кожне з цих відображень відображає кола та прямі на кола та прямі, то це робить і їх композиція.

3.3 Композиція дробово-лінійних відображень

Знайдемо композицію відображення $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ та $g(z) = \frac{kz+l}{mz+n}$:

$$g\big(f(z)\big) = \frac{k\big(f(z)\big) + l}{m\big(f(z)\big) + n} = \frac{k\dfrac{az+b}{cz+d} + l}{m\dfrac{az+b}{cz+d} + n} = \frac{k(az+b) + l(cz+d)}{m(az+b) + n(cz+d)} =$$

$$\frac{(ak+cl)z + (bk+dl)}{(am+cn)z + (bm+dn)}.$$

Отже, композиція є дробово-лінійним відображенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} ak+cl & bk+dl \\ am+cn & bm+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3.4 Група ізометрій гіперболічної площини

Розглянемо ті дробово-лінійні перетворення, що переводять верхню півплощину на верхню півплощину.

Якщо $c = 0$, то після ділення всіх коефіцієнтів на d, дробово-лінійне перетворення набуде вигляду $f(z) = az + b$. Підставивши дві точки з прямої $y = 0$, отримаємо, що $a, b \in \mathbb{R}$, а умова, що образ i лежить у верхній півплощині, рівносильна тому, що $a > 0$.

Якщо $c \neq 0$, то після ділення всіх коефіцієнтів на c, дробово-лінійне перетворення набуде вигляду $f(z) = \frac{az+b}{z+d}$. Воно відображає дійсну пряму в себе, якщо всі коефіцієнти дійсні: $a, b, d \in \mathbb{R}$. Крім того, умова, що $\Im f(i) > 0$ рівносильна нерівності $ad - bc > 0$.

Розділивши всі коефіцієнти на деяке число, можна досягти умови $ad - bc = 1$.

Отже, дробово-лінійні перетворення, що зберігають верхню півплощину, задаються матрицями з $SL(2, \mathbb{R})$. Оскільки, якщо всі коефіцієнти помножити на -1 (матрицю перетворення помножити на $-I$), то вийде те саме перетворення, тобто множина перетворень задається групою проєктивних спеціальних матриць

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{I, -I\}.$$

Те, що композиція перетворень відповідає множенню матриць, було доведено раніше.

Покажемо, що дробово-лінійні перетворення з матрицями з $SL(2, \mathbb{R})$ є ізометричними відображеннями. Як і в загальному випадку розкладемо їх на відображення розтягнення (з додатнім коефіцієнтом), паралельне перенесення (на дійсне число) та інверсію з симетрією ($f(z) = -1/z$). Тому досить довести ізометричність цих трьох типів відображень.

1) $f(x + iy) = kx + iky$, $k > 0$:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$ds^2\big(f(z)\big) = \frac{d(kx)^2 + d(ky)^2}{(ky)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = ds^2(z).$$

2) $f(x+iy) = x + b + iy$, $b \in \mathbb{R}$:

$$ds^2\big(f(z)\big) = \frac{d(x+b)^2 + dy^2}{(y)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = ds^2(z).$$

3) $f(x+iy) = \frac{-1}{x+iy} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2}$:

$$ds^2\big(f(z)\big) = \frac{d\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)^2 + d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2}{\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{-(x^2+y^2)dx + 2x^2dx + 2xydy}{(x^2+y^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{(x^2+y^2)dx - 2y^2dy - 2xydx}{(x^2+y^2)^2}\right)^2}{\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\big((x^2-y^2)dx + 2xydy\big)^2 + \big((x^2-y^2)dy - 2xydx\big)^2}{y^2(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{\big((x^2-y^2) + 4x^2y^2\big)\,(dx^2+dy^2)}{y^2(x^2+y^2)^2} = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} = ds^2(z).$$

Те, що крім дробово-лінійних відображень немає інших ізометричних відображень, випливає з того факту, що будь-яку гіперболічну пряму можна відобразити в будь-яку іншу дробово-лінійним відображенням (будь-яке півколо відображається на півколо за допомогою паралельних перенесень та розтягнень, а півколо відображається на півпряму інверсією з симетрією). Отже, група ізометрій, що зберігають орієнтацію гіперболічної площини, ізоморфна групі $PSL(2,\mathbb{R})$.

3.5 Мінімальність довжин гіперболічних прямих

Досить довести мінімальність довжини дуги у однієї гіперболічної прямої. Після застосування ізометрії, яка переводить цю пряму в будь-яку іншу гіперболічну пряму, отримаємо цю властивість для довільної прямої. Нехай гіперболічна пряма має рівняння $x = 0$, $y = t$, $t \in [y_1, y_2]$. Тоді $x' = 0$, $y' = 1$:

$$s_1 = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2}}\, dt = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1}{t^2}}\, dt = \ln y_2 - \ln y_1 = \ln \frac{y_2}{y_1}. \quad (5)$$

Розглянемо іншу криву між точками $(0, y_1)$ та $(0, y_2)$. Нехай параметричне рівняння цієї кривої буде $x = f(t)$, $y = t$, $t \in [y_1, y_2]$. Тоді її довжина

$$s_1 = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2}}\, dt = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{((f')^2) + 1}{t^2}}\, dt > \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1}{t^2}}\, dt = s_1.$$

3.6 Відстань між точками в моделі верхньої півплощини

Формула (5) задає відстань між довільними двома точками вертикальної прямої. Перевіримо, чи узгоджується вона з формулою

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \overline{w}| + |z - w|}{|z - \overline{w}| - |z - w|}. \quad (6)$$

Отже, $z = iy_1$, $w = iy_2$, $(y_2 > y_1)$,

$$d(z, w) = \ln \frac{|y_1 + y_2| + |y_1 - y_2|}{|y_1 + y_2| - |y_1 - y_2|} = \ln \frac{y_1 + y_2 - y_1 + y_2}{y_1 + y_2 - y_2 + y_1} = \ln \frac{2y_2}{2y_1} = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Легко бачити, що формула (6) не змінюється, якщо до обох точок застосувати розтягнення, паралельні перенесення та інверсію з симетрією. Оскільки гіперболічну криву можна ізометрією відобразити у вертикальну пряму, то ця формула справедлива для довільної пари точок гіперболічної площини. Аналогічно доводиться виконання другої формули для тангенса гіперболічного половини відстані між точками.

По-іншому, формулу для відстані між двома точками, що мають різні абсциси, можна вивести, склавши рівняння гіперболічної прямої, що проходить через них, і скориставшись формулою для довжини дуги кривої. Ця гіперболічна крива є півколом з центром у точці перетину серединного перпендикуляра до точок з віссю абсцис $(y = 0)$, а радіус дорівнює евклідовій відстані від центру до однієї з точок.

3.7 Сума кутів гіперболічного трикутника

За формулою Гауса, гаусова (повна) кривина K в гіперболічної геометрії дорівнює -1 в кожній точці. Оскільки гіперболічні криві найкоротші між двома точками, то їх геодезична кривина k_g дорівнює 0. Для знаходження суми кутів α, β, γ трикутника скористаємося формулою Гауса-Боне з диференціальної геометрії:

$$\int_U K\, DS + \sum \int k_g ds + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - y = 2\pi.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Звідси, $-S+3\pi\ -\alpha\ -\beta-\gamma=\pi$, що рівносильне рівності

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi-S.$$

Отже, сума кутів гіперболічного трикутника менше за π.

3.8 Ізометрія моделі верхньої півплощини на модель Пуанкаре

Ізометричне відображення моделі Паункаре на модель верхньої півплощини будемо шукати у вигляді дробово-лінійного відображення $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ комплексної площини. З комплексного аналізу відомо, що таке відображення задається образами трьох точок. Виберемо одну внутрішню точку (0) і дві точки на абсолюті ($-i$ та i). Нехай $f(0)=i,\ f(-i)=0,\ f(i)=\infty$. Покладемо $d=1$. Тоді $f(0)=b/d=b=i.\ f(-i)=0$ рівносильно $a(-i)+b=-ai+i=0,$ тобто $a=1.$ З рівності $f(i)=\infty$ випливає $ci+d=ci+1=0,\ c=i$. Отже,

$$f(x+iy)=\frac{(x+iy)+i}{i(x+iy)+1}=\frac{2x+i(1-x^2-y^2)}{(1-y)^2+x^2}. \tag{7}$$

Підставимо точки образу в рівняння гіперболічної метрики верхньої півплощини:

$$ds^2=\frac{\left(d\frac{2x}{(1-y)^2+x^2}\right)^2+\left(d\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}\right)^2}{\left(\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(d\frac{2x}{(1-y)^2+x^2}\right)^2+\left(d\frac{2y}{(1-y)^2+x^2}\right)^2}{\left(\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2+x^2}\right)^2}=4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Це значить, що побудована дробово-лінійна функція є ізометрією між моделлю Пуанкаре та моделлю верхньої півплощини.

3.9 Відстань між точками в моделі Пуанкаре

Для доведення формули відстані між точками в моделі Пуанкаре

$$d(z,w)=\ln\frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|} \tag{8}$$

можна скористатися формулою (6), в яку слід підставити значення перетворення (7), як це ми робили в попередньому підрозділі.

3.10 Співвідношення між сторонами та кутами гіперболічного трикутника

Для доведення гіперболічних теорем Піфагора, синусів та косинусів можна вибрати трикутник, у якого дві вершини лежать на координатній осі y і одна з них i в моделі верхньої півплощини або 0 в моделі Пуанкаре. Далі скористатися формулами для відстані між вершинами трикутника у відповідній моделі.

Так, для доведення гіперболічної теореми Піфагора виберемо такий прямокутний трикутник у моделі Пуанкаре: $A(x,0)=x$, $B(0,0)=0$, $C(0,y)=iy$.

Скористаємось формулою (8) для знаходження відстаней:

$$c=|AB|=\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad a=|BC|=\ln\frac{1+y}{1-y},$$
$$b=|AC|=\ln\frac{\sqrt{1+x^2y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Тоді для гіперболічних косинусів:

$$\cosh c=\frac{\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}}{2}=\frac{1+x^2}{1-x^2},\qquad \cosh a=\frac{1+y^2}{1-y^2},$$
$$\cosh\ b=\frac{\frac{\sqrt{1+x^2y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{1+x^2y^2}-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}}{2}=\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Отже, $\cosh b=\cosh a\cosh c$.

Оскільки кожний прямокутний трикутник ізометрично відображається на прямокутний трикутник з катетами на координатних осях, то ця формула справедлива для кожного прямокутного трикутника.

4. Приклади візуалізації восьмикутників

Для візуалізації восьмикутників проведемо їх сторони – це кола, що проходять через 3 точки: $P_1Q_1P_2$, $P_2Q_2P_3$ тощо.

Для цього скористаємося формулою для знаходження центру кола, що проходить через три точки $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ та $C(x_3,y_3)$

$$x_0=\frac{(y_2-y_1)(y_3-y_1)(y_3-y_2)+x_1(y_2-y_3)^2+x_2(y_3-y_1)^2+x_3(y_1-y_2)^2}{2(x_2-x_1)(y_3-y_1)-2(x_3-x_1)(y_2-y_1)},$$

$$y_0=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)+y_1(x_3-x_2)^2+y_2(x_1-x_3)^2+y_3(x_2-x_1)^2}{2(y_2-y_1)(x_3-x_1)-2(y_3-y_1)(x_2-x_1)}.$$

Радіус кола рівний відстані від центру до довільної з трьох точок.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Отже, треба знати координати перших трьох точок (решта кіл та точок знаходяться за допомогою симетрій відносно осей координат чи бісектрис між ними).

Результати обчислень за наведеними вище формулами:

Випадок $\alpha = \pi/3$.

$$x_1 = 0{,}405616; \quad y_1 = 0;$$
$$u = 0{,}336816; \quad v = 0{,}139514;$$
$$x_2 = 0{,}286814; \quad y_2 = 0.286814.$$

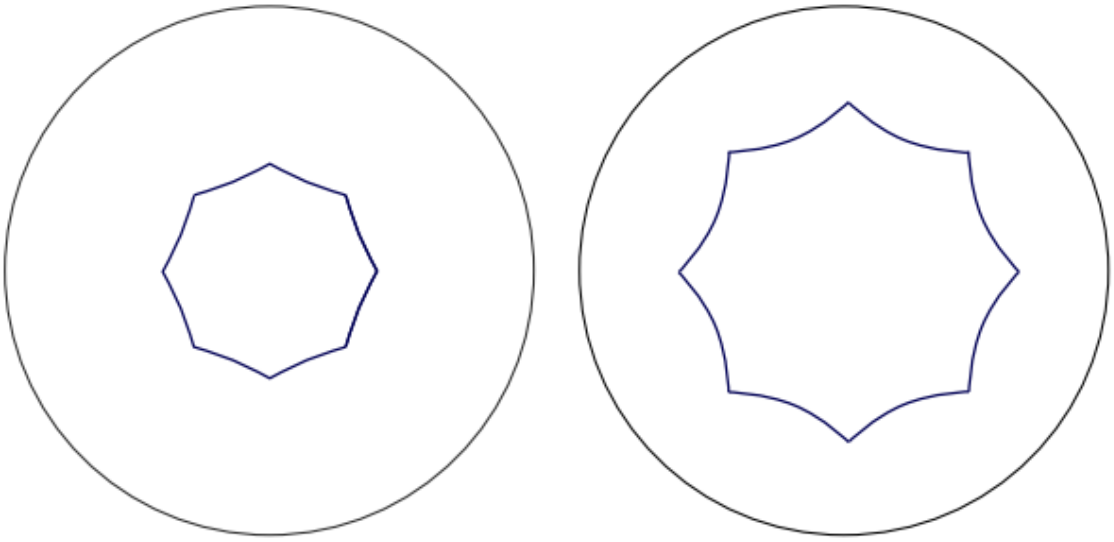


Рис.3. Правильні восьмикутники з внутрішніми кутами $2\alpha = 2\pi/3$ і $2\alpha = \pi/2$

Випадок $\alpha = \pi/4$.

$$x_1 = 0{,}643594; \quad y_1 = 0;$$
$$u = 0{,}504081; \quad v = 0{,}208797;$$
$$x_2 = 0{,}45509; \quad y_2 = 0{,}45509.$$

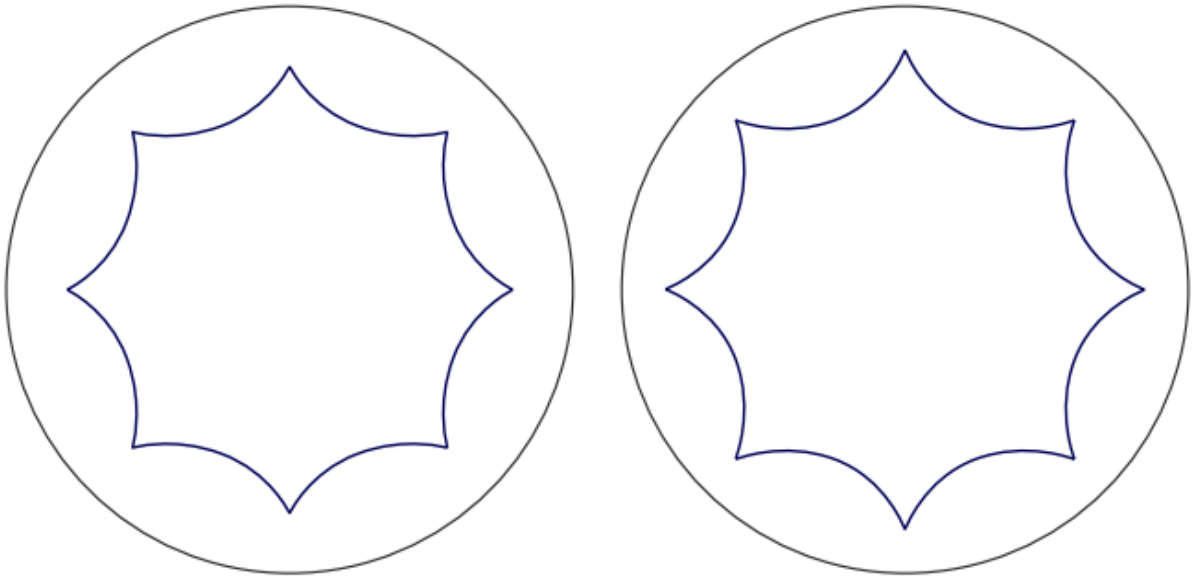


Рис. 4. Правильні восьмикутники з внутрішніми кутами $2\alpha = \pi/3$ і $2\alpha = \pi/4$

Випадок $\alpha = \pi/6$.

$$x_1 = 0{,}783591; \quad y_1 = 0;$$
$$u = 0{,}574794; \quad v = 0{,}238087;$$
$$x_2 =, .554082; \quad y_2 = 0{,}554082.$$

Випадок $\alpha = \pi/8$.

$$x_1 = 0{,}840896; \quad y_1 = 0,$$
$$u = 0{,}594604; \quad v = 0{,}246293;$$
$$x_2 = 0{,}594604; \quad y_2 = 0{,}246293.$$

Наведені приклади показують, що чим менший кут при вершині правильного восьмикутника, тим візуально ближче до абсолюту розташовані вершини восьмикутника.

4. Висновки

У моделі Пуанкаре геометрії Лобачевського були побудовані правильні восьмикутники з різними внутрішніми кутами. Знайдені довжини їх діагоналей та координати вершин, за умови, що центр восьмикутника знаходиться у початку координат, а одна з вершин на осі абсцис. Зроблено візуалізацію таких восьмикутників для внутрішніх кутів $2\pi/3$, $\pi/3$, $\pi/3$, $\pi/4$.

Отримані восьмикутники можуть бути використані для моделювання системи координат і ріманової метрики на подвійному торі, яка має постійну гаусову кривину, рівну -1. Методи, якими були знайдені правильні восьмикутники, можуть бути використані також для побудови правильних $2n$-кутників у гіперболічній геометрії.

Список використаних джерел

Погорелов А.В.(2008). *Вибрані праці:Т.2. Основи геометрії, механіка, фізика*. Київ: Наукова думка. 393 с.

Пришляк О.О.(2004). *Диференціальна геометрія*. Київський університет. 66 с.

Пришляк О.О. (2015). *Топологія многовидів*. Київський університет. 83 с. http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/topolog-pryshljak.pdf

Пришляк О. (2023). *Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології та теорії динамічних систем*. Навчальний посібник. 212 с. https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/12/algkom.pdf

Пришляк О., Білун С. (2024). Геометрія та топологія проєктивної площини. *У світі математики*, 1: 70-76. DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.8

Anderson, J. W.(2005). *Hyperbolic Geometry*. Springer. 276 p. https://www.academia.edu/25421476

Ratcliffe, J. (2006). *Foundations of Hyperbolic Manifolds. Second Edition*. Springer. 794 p.

Ryan, P. J. (1986). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*. Cambridge University Press. 234 p. https://www.scribd.com/document/439040367

Wolfe, H. E. (2013). *Non-Euclidean Geometry*: A Primer. CRC Press. 272 p. https://www.perlego.com/book/112293/introduction-to-noneuclidean-geometry-pdf

Отримано редакцією журналу: 10.11.2024
Прорецензовано: 25.11.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Aleksandr PRISHLYAK, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

REGULAR OCTAGONS IN HYPERBOLIC GEOMETRY

Abstract. *When constructing hyperbolic structures on closed surfaces, one can use hyperbolic geometry (Lobachevsky geometry) on the plane. To do this, the surface must be represented as a 2n-gon on the hyperbolic plane, and a discrete group action, which is a subgroup of the movements of the hyperbolic plane, must be defined, for which the 2n-gon serves as a fundamental domain. If such a surface is a double torus (an oriented surface of genus 2), it can be obtained by gluing opposite sides of an octagon. In fact, the Lobachevsky plane is divided into octagons. The presence of symmetries simplifies calculations. Therefore, a natural problem arises regarding the partitioning into regular octagons. Additionally, it is important to provide examples of such octagons by specifying the coordinates of their vertices in one of the models of hyperbolic geometry.*

The models of the upper half-plane and the Poincaré model on the unit disk are used, for which the Riemannian metric is defined (the formula for finding the lengths of arcs of curves). We describe the main properties of hyperbolic lines and the group of movements (the group of isometric transformations) of hyperbolic geometry on the plane using fractional-linear transformations of the complex plane with real coefficients.

A formula has been obtained for the coordinates of the vertices and the lengths of the diagonals of a regular octagon centered at the origin in the Poincaré model. Such regular octagons with four largest angles have been constructed. We can replace the hyperbolic plane by them.

Keywords*: Lobachevsky geometry; hyperbolic line; non-Euclidean geometry; hyperbolic trigonometry; Riemannian metric.*