КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

У СВІТІ МАТЕМАТИКИ

№1, 2025

У світі математики, випуск №1, 2025

Журнал «У світі математики» – єдине українське науково-популярне видання з математики, яке містить науково-популярні, наукові та методичні математичні статті. Покликаний відкривати математичні здібності, усебічно розвивати особистість читача, задовольняти спрагу до математичних знань, привертати увагу до математики як професії.

У журналі містяться результати нових досліджень у різних галузях математики та методики навчання математики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, студентів. Адресований насамперед школярам, водночас буде цікавим студентам, учителям, методистам, викладачам, аспірантам і всім, хто не байдужий до математики.

Друкується за рекомендацією вченої ради механіко-математичного факультету.

Редакційна колегія:

головний редактор:

Валентин Собчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

заступники головного редактора:

Юлія Мішура

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

Вадим Радченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

члени редакційної колегії:

Orest Artemovych

Cracow University of Technology, Poland;

Sergey Dashkovskiy

University of Würzburg, Germany;

Nataliia Gorban,

Bauhaus University Weimar, Germany;

Ivane Kiguradze,

Tbilisi Mathematical Institute, Georgia;

Konrad Kulakovsky,

AGH University of Krakow, Poland;

Oleksandr Misiats,

Virginia Commonwealth University, USA;

Dariusz Sala

AGH University of Krakow, Poland;

Petro Feketa

Victoria University of Wellington, New Zealand;

Efim Zelmanov,

University of California, San Diego, USA;

Оксана Безущак

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;

Олена Бахчеджиоглу

Креативна Міжнародна Дитяча Школа, Україна

Інна Вишенська

Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Україна;

Ярослав Винишин
Київський природничо-науковий ліцей № 145, Україна;
Яніна Гончаренко
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Михайло Городній
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ярослав Жук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Казмерчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Король
ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Україна;
Олександр Курченко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Лавренюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Оксана Литвин
Київський столичний університет імені Бориса Грінченка, Україна;
Тетяна Лукашова
Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка, Україна;
Ольга Мартинюк
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
Олексій Нестеренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Дмитро Номіровський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Андрій Олійник
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Михайло Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Україна;
Ігор Парасюк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олег Перегуда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Анатолій Петравчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Микола Працьовитий
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Богдан Рубльов
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Станжицький
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Катерина Терлецька
Національний центр "Мала академія наук України", Україна;

Григорій Торбін
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Андрій Чайковський
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Ольга Чашечникова
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Україна;
Михайло Чемерис
Науковий ліцей №208 Дніпровського району м. Києва, Україна;
Ольга Швай
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Україна;
Ігор Шевчук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна;
Олександр Школьний
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Україна;
Ростислав Ямненко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна.

Редакційний відділ:
Світлана Бабич

Відповідальний секретар:
Євгенія Кочубінська

Адреса редакційної колегії:
Механіко-математичний факультет,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
проспект академіка Глушкова, 4-е, 03127, Україна
тел.: +38 (044) 259-01-35
e-mail: usm@knu.ua
сайт: https://usm.knu.ua
ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Засновник:
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Свідоцтво про державну реєстрацію
KV No 22695-12595ПР від 24.03.2017

Ідентифікатор медіа / Номер ліцензії
R30-04577 від 25.04.2024
DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1

Безкоштовно

Зміст

Обрії математики

Голомозий В.В., Майборода Р.Є., Мішура Ю.С., Ямненко Р.Є. *Про теорію ймовірностей, статистику і штучний інтелект* …….. 7

Про математику та математиків

Романенко В.І., Лебедєва І.В. *Елементарна математика: обчислення вручну…* 18

Математичні олімпіади

Перегуда О.В., Борисейко О.В. *Всеукраїнська олімпіада Київського національного університету імені Тараса Шевченка з математики 2025. Фінальний тур* …… 33

Математичні досягнення

Антошина К.О., Ковалевська С.С. *Конкатенація та мультиплікація орієнтованих графів спеціального класу* ……..……... 39

Математичний гурток

Лебедєва І.В., Чубикіна А.О. *25 способів підкорити теорему Піфагора: від класики до сучасності*……..... 54

Грисенко М.В., Ткаченко А.А. *Як навчити учнів розв'язувати ймовірнісні задачі, застосовуючи алгоритм Поя*…….. 78

Курченко О.О., Синявська О.О. *Одне доведення формули об'єму зрізаної піраміди* 92

Юсипів В., Юсипів Т.В. *Метод нескінченного спуску, метод чакравала та числа Пелля*……... 99

Вишенська О.В., Шевчук Л.В. *Метод фазового простору в задачах про рух двох точок*…… 109

Кушніренко С.В, Вишенська І.Я. *Геометричні ймовірності* …….. 120

Проблеми і гіпотези, рішення

Грінченко В.Т., Маципура В.Т. *Погляд* н*ематематика на побудову загального розв'язку граничних задач в неканонічних областях* ……..…… 132

Пришляк О.О. *Занурення пляшки Клейна в тривимірний простір* …….. 153

Креативна математика

Безущак О.О., Боднарчук І.М., Касімова Н.В., Креневич Я.А., Кушніренко С.В., Лебедєва І.М., Левченко К.К., Перегуда О.В., Собчук В.В., Теня С.І., Циганівська І.М. *Математика без меж: як «Бінго-мехмат» об'єднав університет і школу* …….. 162

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Обрії математики

УДК 519.21:519.22:004.8 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.1**

Віталій ГОЛОМОЗИЙ, д-р фіз.-мат. наук, доц.
ORCID ID: 0000-0002-3174-9781
e-mail: vitaliy.golomoziy@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ростислав МАЙБОРОДА, д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0002-3899-558X
e-mail: rostmaiboroda@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Юлія МІШУРА, д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0002-6877-1800
e-mail: yuliyamishura@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ростислав ЯМНЕНКО, д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0002-9612-7959
e-mail: rostyslav.yamnenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ТЕОРІЮ ЙМОВІРНОСТЕЙ, СТАТИСТИКУ І ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ

Анотація. *Статтю присвячено деяким історичним аспектам статистики, її сучасним застосуванням і зв'язку між теорією ймовірностей, статистикою і штучним інтелектом.*

Ключові слова: *статистика; теорія ймовірностей; машинне навчання; штучний інтелект.*
Класифікація відповідно до AMS 2020: 60-01 62-01 62-03 68T01 97P80

Вступ

Статтю присвячено деяким історичним аспектам застосування статистики та її сучасному значенню в оточуючому світі. Яке місце статистики у сучасному суспільстві і у вашому особистому житті? Чим статистика і теорія ймовірностей завдячують одна одній? Як статистика допомогла народитися штучному інтелекту і що буде далі? Чому у Лондоні регулярно судять дерев'яну скриньку з грошима і до чого тут статистика? Про це і про багато іншого ми хочемо розповісти у цій статті.

Ми обговоримо прикладні задачі, які розв'язуються статистичними методами. Висвітлимо науковий аспект статистики, який дає можливість калібрувати математичні моделі реальних процесів, і тим самим передбачати їх розвиток у майбутньому. Окрім того, у статті наведено історичний огляд появи та в еволюції систем штучного інтелекту, дано короткий опис їх функціональності, а також показано, яким чином сучасні моделі штучного інтелекту використовують статистичні методи та техніки для досягнення тих неймовірних результатів, що ми їх спостерігаємо останніми роками.

1. Статистика та її застосування в реальному житті

Коли ви купуєте білет на літак чи поїзд, то частка його вартості відраховується страховій компанії, яка страхує вас і перевізника від нещасних випадків під час поїздки. Як визначити – скільки за це треба заплатити? Вочевидь, потрібно зібрати дані про попередні поїздки – скільки у них було таких випадків, і які були виплати постраждалим. Ці статистичні дані дають змогу оцінити ризик вашої поїздки. Він дуже малий, звичайно, ви доїдете без проблем! Але раптом щось – страхова компанія має відшкодувати ваші збитки. Тому ви платите за страховку мало, а гарантується вам справедлива компенсація. Якщо занизити ціну страховки – страхова компанія може збанкрутувати. Якщо завищити – ви будете платити зайве. Балансування ризиків – серйозна справа, що вимагає нетривіальної науки.

Так само лікарі-епідеміологи, коли вирішують, чи треба вам проходити вакцинацію, повинні оцінити ризики захворювання даною хворобою і порівняти їх з ризиками можливих наслідків вакцинації. І тут знову не обійдешся без аналізу статистичних даних.

Коли ви розмовляєте по телефону, звукова та відео інформація стискаються для більш швидкої передачі. Якщо стиснення зробити дуже сильним, випадкові шуми можуть погіршити якість сигналу. Для забезпечення кращої якості можна дублювати інформацію, тоді швидкість передачі сповільниться. Для вибору правильного балансу між швидкістю і якістю сигналу потрібно враховувати статистичні характеристики можливих шумів та каналів зв'язку. Коли ви сплачуєте гроші банківською карткою, ваша інформація передається у шифрованому вигляді. Щоб правильно обрати алгоритм шифрування, потрібно збалансувати ризики небажаного витоку інформації та витрати на ускладнення алгоритму.

Археологи, досліджуючи залишки минулих цивілізацій, проводять статистичний аналіз ДНК знайдених решток біологічного матеріалу і за ним дізнаються про особливості розвитку людства у давні часи. Філологи аналізують розвиток поезії, підраховуючи, як часто у віршах зустрічаються ті чи інші ритмічні особливості. Психологи для дослідження індивідуальних особливостей психіки використовують рольові ґратки, що дозволяють статистичними методами аналізувати психіку окремої людини. Методи статистики дозволяють нам краще зрозуміти не лише навколишній світ, а й самих себе.

2. Теорія ймовірностей та статистика

Статистика має справу з випадковими явищами, у яких можна помітити певні закономірності. Для виявлення та опису закономірностей у випадковості статистики часто використовують математичну науку, що зветься теорією ймовірностей. Це – молода наука. Якщо геометрія веде свій родовід від давнього Єгипту і Месопотамії, то початки теорії ймовірностей були закладені у роботах європейських вчених 17–18-го століть, зокрема П. Ферма, Б. Паскаля, Г. Гюйгенса, Я. Бернуллі, А. Муавра. А власне математична статистика склалась іще пізніше – у роботах К. Пірсона, Р. Фішера та ін.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

(рис. 1), наприкінці дев'ятнадцятого, на початку двадцятого століття. Чудовий нарис з історії розвитку теорії ймовірностей можна знайти у книзі (Гнєденко, 2010).



Рис. 1. Карл Пірсон (1857–1936) та Рональд Фішер (1890–1962)

Чому так вийшло? Можливо це пояснюється тим, що у людей немає інтуїтивного відчуття ймовірності випадкових подій. Будь-хто відчує різницю між кругом і квадратом, просто глянувши на них. Для цього не треба вчити геометрію в університеті. А от відрізнити на око за числовими даними нормальний розподіл від розподілу Лапласа не зможе і кваліфікований статистик – тут потрібні спеціальні засоби перевірки. Геометрія інтуїтивна, статистика – ні. (Про це цікаво написано у книзі відомого американського психолога Даніела Канемана (Канеман, 2017), а також у книзі Філіпа Тетлока (Тетлок, Ґарднер, 2018). Те, що статистика працює, підтверджується практикою її застосування. Але, коли статистичні міркування розглядають лише з погляду «здорового глузду», вони часто виглядають дивно і парадоксально. Вміння правильно застосовувати статистику та ймовірності не приходить саме собою – цьому треба вчитись. І знати для цього потрібно не лише власне статистичні методи, а й багато розділів сучасної математики – математичний і функціональний аналіз, дискретну математику, теорію ймовірностей.

3. Процеси вибіркового контролю якості

В Англії, у спеціальній каплиці Вестмінстерського абатства, знаходиться опечатана скринька, на ім’я Пікс (англійською Рух). Коли на королівському монетному дворі у Лондоні карбують монети, то з кожних десяти фунтів срібла одну монетку відбирають і кидають у прорізь у верхній кришці Пікса (рис. 2).

Раз на рік відбувається Суд над Піксом. У присутності судді королівського суду і присяжних Пікс відкривають, всі монетки, які є в ньому, зважують разом. Перший раз – у повітрі, вдруге – занурені у воду. В результаті можна дізнатись загальну вагу всіх монеток, а за законом Архімеда – вирахувати їхню середню густину. За густиною можна визначити, яким є відсоток срібла у сплаві. А отже, і зрозуміти, скільки срібла

пішло на виготовлення цих монет. Далі треба подивитись, яку частку від всіх виготовлених монет становлять ті, що потрапили до Пікса, і ми дізнаємось, скільки срібла є всіх у монетах, виготовлених Лондонським монетним двором за минулий рік. Тепер досить порівняти це з кількістю срібла, що було взято на карбування з королівської скарбниці, і різниця покаже, скільки загубилось по дорозі. (Аналогічна процедура і для золотих монеток.) Якщо загубилось занадто багато, то голова королівського монетного двору має покрити різницю, а може й покласти свою голову на плаху (Stigler, 1977).



Рис. 2. Скринька Рух

Така процедура діє в Англії з тринадцятого століття (Тут описано її порядок до 1870 року. Нині Пікс знаходиться вже не в каплиці, а у приміщенні Почесної гільдії ювелірів у Лондоні. На суді над Піксом монети вже не зважують, а лише перевіряють якість їх карбування). З відомих формально встановлених процедур вибіркового контролю якості продукції це, мабуть, найдавніша в світі. Нині схожі статистичні процедури використовують дуже широко не лише при карбуванні монет, а й для перевірки якості харчових продуктів, ліків, тощо. При цьому виникає багато запитань щодо надійності результатів перевірок. Вага і вміст срібла у монетах коливаються: десь трохи більше, десь менше. Чи відображають монети, що потрапили до Пікса, розподіл срібла у тих монетах, які пішли у обіг? А навіть якщо відображають, то все ж, через випадкові коливання, наша оцінка кількості срібла у всіх монетах ніколи не буде абсолютно точною. Як далеко ця оцінка може відхилитися від справжнього значення? Відповідь на це можна дати лише на основі строгих міркувань математичної теорії ймовірностей.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

4. Науковий аспект статистики

Уявіть собі певну динамічну систему, що змінюється з часом, це може бути як фізичний процес, так і наприклад фінансовий ринок. Як описати цю систему математично, дослідити її властивості і спрогнозувати її поведінку в майбутньому? З тих чи інших міркувань, обирається опис, який включає як регулярну складову, так званий тренд, так і хаотичну – шум, який описується тим чи іншим випадковим процесом. Добре, але тепер цю модель потрібно калібрувати, тобто знайти відповідні числові значення параметрів, які найкраще наближають цю модель до реального процесу. Тут на сцену і виходить статистика – на основі реальних даних, за допомогою статистичних методів параметри моделі оцінюються. Непогано ще й довести властивості оцінок, цим і займаються спеціалісти як з теоретичної, так і прикладної статистики, біотехнологій, фізики, демографії, фінансів та економіки. Один з гарних методів прикладного статистичного аналізу – це так званий метод Монте-Карло. Він не має відношення до грального бізнесу, його придумав видатний математик Станіслав Улям (до речі, він родом зі Львова, рис. 3), який працював у Лос-Аламосі, у Мангеттенському проєкті зі створення атомної бомби, і в ході розрахунків зрозумів, що неможливо точно підбити математичні підсумки розрахунків руху мільйонів елементарних частинок, потрібен статистичний підхід. Він і дав назву цьому методу.



Рис. 3. Станіслав Улям (1909-1984)

4. Статистика в сучасному світі

У сучасному світі майже всі числові розрахунки люди переклали на крем'яні мізки комп'ютерів (Майборода, 2019). Це дає можливість обробляти гігантські обсяги статистичної інформації, про які раніше не можна було й мріяти. В результаті вдається виявляти та використовувати такі закономірності, які ми ніколи не побачили б без допомоги комп'ютера. На цьому побудовані алгоритми статистичного машинного навчання, коли на вибіркових даних комп'ютер тренують розпізнавати усну мову, зорові образи, керувати автомобілем, відповідати на запитання... Робота дресирувальника роботів може стати найбільш перспективною професією нинішнього

століття. Правильний підбір даних для навчання комп'ютера і контроль результатів цього навчання потребують знання законів теорії ймовірностей і технологій статистичного аналізу.

5. Різниця між теорією ймовірностей та статистикою

Отже, маємо два напрямки роботи з випадковими даними – теорія ймовірностей та математична статистика. Що в них спільного? Обидві науки націлені на пошук закономірностей у випадковості і використання цих закономірностей для покращення життя людей. А що різного?

Ці дві науки передбачають принципово різний підхід до моделювання процесів та явищ нашого світу. Ймовірнісний підхід передбачає наявність певних попередніх знань, щодо досліджуваного процесу. Скажімо, ми знаємо, у якому напрямку полетить снаряд, випущений із гармати, але не точне місце, куди він впаде. Таким чином, ми моделюємо цю задачу за допомогою певного ймовірнісного розподілу, який поєднує наше знання із нашим незнанням. З філософської точки зору це відповідає платонічному підходу до вивчення світу – споглядання, та спроби осягнути світ за допомогою розуму.

Статистичний підхід полягає у тому щоб робити висновки на основі спостережень (та можливо певних додаткових імовірнісних припущень). Цей підхід передбачає розробку певних алгоритмів, які даватимуть відповідь на питання, що цікавить дослідника на основі даних. Варто зазначити, що розробка таких алгоритмів та доведення їхніх властивостей – це часто дуже нетривіальні математичні задачі, тому статистику за правом називають «математичною». Таким чином, статистичний підхід відповідає емпіричному способу дослідження (від імені грецького філософа-скептика Секста Емпірика) – тобто вивчення світу на основі спостережень та чуттєвого досвіду.

Отже можемо підсумувати:

- ✓ **Теорія ймовірностей** – це математична наука, в ній ви доводите теореми, виходячи з загальних принципів – аксіом. Ці теореми можуть бути складними або легко зрозумілими, корисними для практиків або цікавими самі по собі. Найголовніше, що вони є коректно доведеними і дають нам впевненість у правильності тих алгоритмів, які на них спираються.
- ✓ **Статистика** – це теж математична наука, в ній ви робите висновки на основі експерименту або спостережуваних даних. Такий підхід передбачає не лише механічне перетворення даних але і їх інтерпретацію, що часто вимагає окрім математичних навиків, ще і навиків роботи з людьми. Статистик має не просто побачити закономірності у даних, а й пояснити своїм замовникам, що він побачив, чому це важливо, і як це можна уточнити, а потім – і розумно використати. Статистик має розуміти теореми, працювати із комп'ютером, але найголовніше – вміти спілкуватись із людьми. Як виглядає така робота, та які при цьому виникають підводні камені, чудово описано у книзі Девіда Шпігельхальтера «Мистецтво статистики» (Шпігельхальтер, 2023).

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

6. Яке відношення має статистика до штучного інтелекту (AI – artificial intelligence)?

На це питання можна почути найрізноманітніші відповіді, часто прямо протилежні. Спробуємо розібратися.

Для початку з'ясуємо, що собою являє штучний інтелект у тому розумінні, яке існує сьогодні. Це не настільки просте питання, як здається на перший погляд. Запитайте у пересічної людини, що таке штучний інтелект, і, можливо, у відповідь почуєте щось про ChatGPT або Gemini, про чат-боти чи навіть мовленнєві моделі. Однак отримати чітку відповідь на питання, що можна вважати штучним інтелектом, а що ні, буде складно.

7. Історія розвитку штучного інтелекту

Поняття «штучний інтелект» зародилося в першій половині XX століття. У тогочасному науковому середовищі панували піднесені настрої, пов'язані з рядом передових фундаментальних відкриттів, що перевернули наше уявлення про фізику. Паралельно активно розвивалася сучасна математика – адже «нова фізика» потребувала «нової математики». І разом із цим з'явилася нова наука – кібернетика.

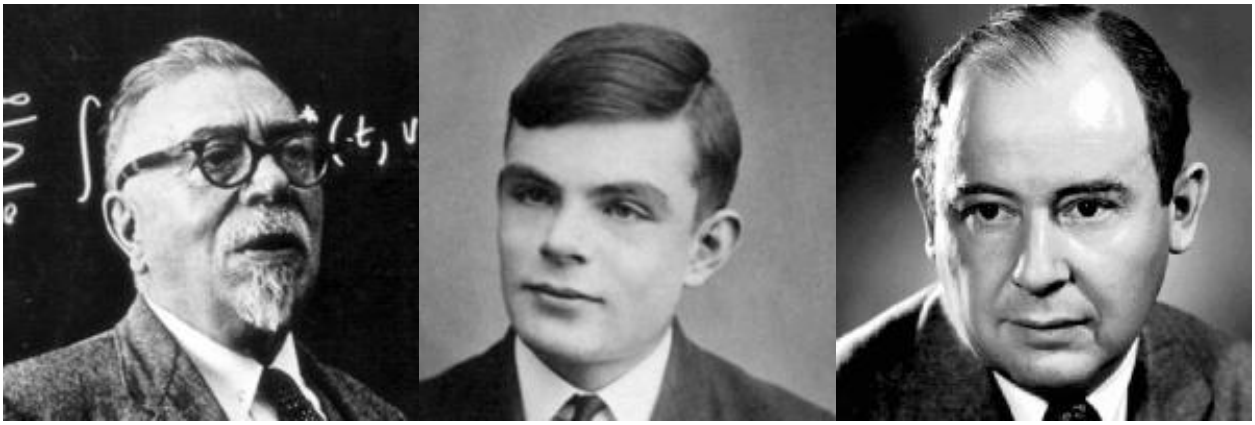


Рис. 4. Норберт Вінер (1894–1964), Алан Тюрінг (1912–1954) та Джон фон Нейман (1903–1957)

Тогочасну фізику, математику та кібернетику розвивали часто одні й ті самі люди, наприклад Н. Вінер, А. Тюрінг, Дж. фон Нейман та інші (рис. 4). Саме в той час з'явилася думка, що цивілізація розвинулася настільки, що ми можемо замахнутися на досі немислиме – створити мислячу машину!

Визначення «мислячої машини» дав видатний британський учений Алан Тюрінг. Він сказав, що машина може вважатися мислячою, якщо вона здатна спілкуватися з іншою людиною так, що людина не зможе визначити, чи вона розмовляє з машиною чи з іншою людиною. Подібний уявний експеримент отримав назву «тест Тюрінга».

Таким чином, поняття «мислення», «розуму» чи «інтелекту» стали нерозривно пов'язані зі здатністю машин розуміти та генерувати природну мову.

8. Практичне значення штучного інтелекту

З практичної точки зору така постановка питання виявилася надзвичайно важливою. Наприклад, у часи холодної війни уряди, зокрема США, виділяли великі кошти на проєкти, пов'язані з машинним перекладом (що підпадає під тюрінгівське визначення «розумної машини»).

Окрім машинного перекладу, існував ще ряд важливих прикладних задач, пов'язаних з автоматичним аналізом або генерацією текстів.

9. Розвиток штучного інтелекту: від математичної логіки до машинного навчання

В основі створення «розумних машин» першого покоління лежали такі науки, як математична логіка та дискретна математика, а джерелом натхнення для перших розробників стали нещодавні (на той час) відкриття у галузі нейронауки, зокрема дослідження будови та функціональності людського мозку. Так, перші моделі штучного інтелекту намагалися відтворити роботу мозку, яка, як тоді вважалося, полягала у передачі сигналів між великою кількістю нейронів. Кожен нейрон мав так званий поріг збудження, тобто «вирішував», чи передавати сигнал далі, чи ні.

Таким чином, як бачимо, ніякої статистики в початкових моделях штучного інтелекту не було. Однак ця задача виявилася складнішою, ніж вважали провідні вчені того часу. Методи математичної логіки виявилися недосконалими, що яскраво продемонструвала знаменита теорема Геделя про неповноту. Інші підходи також не спрацювали: уявлення про мозок як просту мережу нейронів виявилося занадто спрощеним і примітивним, а будь-які спроби формалізувати природні мови призводили до задач, які неможливо було розв'язати математично. Таким чином, десь у 70–80-х роках ці підходи остаточно втратили актуальність, як і спроби створювати «розумні машини».

10. Статистичні методи та машинне навчання

У той же час паралельно розвивалися прикладні науки, такі як статистика, методи чисельної оптимізації, теорія випадкових процесів, варіаційне числення та інші. Ці науки мали на меті розв'язання конкретних задач, наприклад:

- розпізнавання емоційного забарвлення тексту,
- генерація рекомендацій користувачам на основі відгуків,
- розпізнавання зображень (скажімо, рукописних цифр на конвертах).

Для всіх цих задач використовувалися методи статистики, а саме – обробка великої кількості даних, для яких були відомі «правильні відповіді», з метою створення алгоритмів, здатних прогнозувати результати на нових даних. До таких алгоритмів

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

належать лінійна та логістична регресії, метод k-найближчих сусідів, опорні машини векторів, метод матричної факторизації, кластерний аналіз та інші.

Суть подібних алгоритмів зводилася до того, що «рішення» приймалося на основі деякої цільової функції. Наприклад, людина класифікувалася як хвора, якщо певна функція від медичних показників (тиску, рівня лейкоцитів, температури тощо) набувала великих значень. Проте явний вигляд такої функції залежав від наявних даних – так званих тренувальних даних. Як правило, використовувалися параметричні моделі – тобто функції відомі з точністю до деякого числового чи векторного параметра. Такі параметри оцінювалися статистичними методами. Цей процес і є «навчанням» або «тренуванням».

Дуже часто оцінка параметрів зводилася до розв'язання задачі оптимізації – пошуку мінімуму чи максимуму деякої функції багатьох змінних, що є типовим підходом у математичній статистиці. З часом такі алгоритми отримали назву «алгоритмів машинного навчання».

Цей підхід був продуктивним і дозволяв успішно вирішувати широкий клас прикладних задач. Однак про мислячі машини мова не йшла.

11. Розвиток обчислювальних можливостей та революція в ШІ

Все змінилося, коли компанія Nvidia опублікувала бібліотеку CUDA для роботи з графічними чіпами (відеокартами) власного виробництва. Згодом виявилося, що ці чіпи чудово підходять для множення великих матриць – ключової операції, необхідної для тренування алгоритмів машинного навчання.

Найбільший вплив ці нові обчислювальні можливості справили на розвиток нейронних мереж. Варто зазначити, що нейронні мережі протягом тривалого часу не були «головними» алгоритмами, що використовувалися на практиці, зокрема через складнощі з їх тренуванням. Однак стало зрозуміло, що ці алгоритми мають величезний потенціал до узагальнення даних, але водночас потребують значних обчислювальних потужностей. Коли такі потужності стали доступними, нейронні мережі швидко поширилися в тих галузях, де раніше домінували інші алгоритми.

Зокрема, так звані рекурентні нейронні мережі демонстрували чудові результати в задачах обробки тексту, таких як:

- визначення емоційного забарвлення,
- пошук сутностей у реченнях,
- прості переклади з однієї мови на іншу.

Проте, незважаючи на успіхи, про «розумні машини» все ще не йшлося.

12. Поява генеративного штучного інтелекту

Справжня революція відбулася, коли компанія OpenAI випустила свою флагманську модель – ChatGPT (GPT-3.5). Цей алгоритм був реалізований у вигляді чат-бота, який демонстрував вражаючі можливості у генерації тексту, пошуку інформації та звичайному спілкуванні.

Однак що собою являє ця модель? Хоча точної інформації з цього приводу немає, прийнято вважати, що ChatGPT (принаймні версії 3.5) та аналогічні моделі ґрунтуються на алгоритмах, які називаються *великими мовними моделями* (*Large Language Models*, LLM). Це складні нейронні мережі, що використовують так звану архітектуру «трансформер». Вони тренуються на величезних масивах даних (фактично на всій оцифрованій інформації, яка лише доступна).

Під час навчання такий алгоритм отримує на вхід речення із деякими пропущеними (замаскованими) словами і вчиться передбачати ці пропущені слова. Це відбувається шляхом обчислення ймовірностей того, що наступне слово в реченні буде тим чи іншим словом зі словника. Таким чином формується розподіл умовних ймовірностей для всього словника відповідної мови. Ці ймовірності обчислюються статистичними методами на основі великої кількості тренувальних речень.

13. Статистичний підхід у сучасних нейромережах

Як бачимо, сучасні алгоритми штучного інтелекту – це складні нейронні мережі, які використовують статистичні методи для генерації ймовірнісних розподілів. Такі алгоритми називаються «генеративними» і вже давно вивчаються в межах статистики. Зокрема, існує цілий розділ статистики, присвячений задачам оцінки щільностей ймовірнісних розподілів на основі спостережуваних даних. Фактично, саме це й робить штучний інтелект.

Проте в класичній статистиці не використовували мовні моделі – це відносно новий напрям у розвитку алгоритмів. Водночас безперечно те, що сучасні моделі штучного інтелекту побудовані на основі статистичних та ймовірнісних методів, а також із застосуванням сучасних методів оптимізації, теорії алгоритмів тощо.

Дискусія та висновки

Підсумовуючи, можна зробити висновок, що методи штучного інтелекту пройшли довгий шлях, еволюціонувавши від моделей, заснованих на математичній логіці, до сучасних статистичних та ймовірнісних моделей.

Тому, щоб стати фахівцем у галузі штучного інтелекту, необхідно мати ґрунтовну підготовку зі статистики, теорії ймовірностей та методів оптимізації.

Ми закликаємо молодих людей, які мають хист до точних наук і математики, ставати спеціалістами у сфері теорії ймовірностей та математичної статистики й будувати кар’єру в галузі штучного інтелекту, ставши частиною найпрогресивнішої (і дуже високооплачуваної) спільноти!

Подяка

Автори висловлюють щиру подяку професору Михайлу Моклячуку за ідею створення статті та цінні коментарі, надані під час її написання.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Список використаних джерел

Канеман, Д. (2017). *Мислення швидке й повільне*. Наш Формат.

Майборода, Р. Є. (2019). *Комп'ютерна статистика*. ВПЦ «Київський університет».

Тетлок, Ф., & Ґарднер, Д. (2018). *Суперпрогнозування. Мистецтво та наука передбачення*. Наш Формат.

Шпігельхальтер, Д. (2023). *Мистецтво статистики. Прийняття аргументованих рішень на основі даних*. Видавнича група КМ-БУКС.

Отримано редакцією журналу: 24.02.2025
Прорецензовано: 14.03.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Vitaliy GOLOMOZIY, Dr. Sci. (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-3174-9781
e-mail: vitaliy.golomoziy@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Rostyslav MAIBORODA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-3899-558X
e-mail: rostmaiboroda@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Yuliya MISHURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-6877-1800
e-mail: yuliyamishura@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Rostyslav YAMNENKO, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-9612-7959
e-mail: rostyslav.yamnenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON PROBABILITY THEORY, STATISTICS AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Abstract. *The article is devoted to some historical aspects of statistics, its modern applications, and the relationship between probability theory, statistics, and artificial intelligence.*

Keywords: *statistics; probability theory; machine learning; artificial intelligence.*

Про математику та математиків

УДК 511.14 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.2**

Віктор РОМАНЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Пров. наук. співроб.
ORCID ID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Інститут фізики НАН України, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА: ОБЧИСЛЕННЯ ВРУЧНУ

Анотація. *Учень знайомиться з чисельними розрахунками на початкових етапах вивчення математики. Учень опановує виконання чотирьох арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) вручну. Для обчислення тригонометричних та показникових функції, квадратних та кубічних коренів зазвичай використовують арифметичні калькулятори чи таблиці, це також стосується обчислення логарифмів. Водночас впевнене володіння математикою обов'язково передбачає здатність, хоча б з невеликою точністю (2–3 значущих цифри), виконувати обчислення вручну для будь-якої задачі з природничих дисциплін та математики в межах шкільної програми. Така компетенція дозволяє учню не сприймати комп'ютерні розрахунки чи обчислення на калькуляторі як щось незрозуміле – як фокус, «чорну скриньку», де на вході задають дані, а на виході отримують результат. Зрозуміло, автори не закликають відмовлятися від використання калькулятора при розв'язанні шкільних задач. Однак учень не повинен повністю залежати від цього інструменту. У статті демонструється, як обчислювати значення показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій, розширюється множина точних значень тригонометричних функцій понад ту, що відома зі шкільної програми (для аргументу* $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$*), і показується метод знаходження квадратного та кубічного коренів з числа.*

Ключові слова: *обчислення вручну; тригонометричні функції; показникова функція; логарифмічна функція; квадратний корінь; кубічний корінь.*
Класифікація відповідно до AMS 2020: 00A05, 00A09, 97F40, 97F50

1. Вступ

Загальновідомо, що викладанню математики в шкільних програмах відводиться все менше і менше часу. Внаслідок цього значно зменшується обсяг знань, особливо активних, які засвоює учень протягом навчання в школі. У той же час швидкий розвиток високих технологій потребує спеціалістів зі знанням технічних і фізико-математичних наук, що неможливо без глибокого знання математики. Одним з аспектів математичної освіти є обчислення вручну. Впевнене володіння математикою обов'язково передбачає здатність, хоча б з невеликою точністю (2–3 значущих цифри), виконувати обчислення вручну для будь-якої задачі з природничих дисциплін та математики в межах шкільної програми. Така компетенція дозволяє учню уникнути сприйняття комп'ютерних розрахунків чи обчислень на калькуляторі як чогось незрозумілого – фокусу, «чорної скриньки», де на вході задають дані, а на виході отримують результат.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Навички обчислення ручкою на папері надійно формулися середньою школою ще кілька десятиліть тому і були невід'ємною частиною освіти професійних математиків, інженерів та спеціалістів з природничих наук. Зараз більшість обчислень, навіть у побуті, виконується за допомогою калькулятора чи комп'ютера, створюючи тим самим почуття повної залежності людини від цих інструментів.

Зрозуміло, автори не закликають відмовлятися від використання калькулятора при розв'язанні шкільних задач. Однак учень не повинен повністю залежати від цього інструменту. У статті демонструється, як можна вручну обчислити значення квадратного та кубічного кореня, а за необхідності і кореня довільного степеня. Вже цього досить, щоб хоча б з невеликою точністю (дві-три значущих цифри) оцінити значення показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій. Також наведено множину точних значень тригонометричних функцій понад ту, що відома зі шкільної програми (для аргументів 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$).

2. Квадратний корінь

Спосіб обчислення квадратного кореня з числа цифра за цифрою (іноді його називають алгоритмом довгого ділення), який дає оцінку його значення з недостачею (Castle, 1905), раніше викладався у середній школі. Ми пояснимо математичну основу цього методу і покажемо на прикладах, як він працює. Потім викладемо ітераційну формулу Ньютона, яка призводить до збільшення удвічі кількості значущих цифр при кожній ітерації. У кінці підрозділу виведемо ітераційну формулу для обчислення кубічного кореня з числа.

В основі обчислення квадратного кореня цифра за цифрою лежить формула для квадрата суми двох чисел, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Нехай треба обчислити квадратний корінь з числа c, що є квадратом двозначного числа. Позначимо результат обчислень літерою d, у якому кількість десятків дорівнює n, а кількість одиниць дорівнює m. Таким чином, $c = 100n^2 + 20nm + m^2$. Очевидно, m дає внесок в останні 2 цифри c, $20nm$ — в другу і третю цифри від правого краю c, $100n^2$ — в третю і четверту (якщо вона є) цифри від правого краю. Дивлячись на третю і четверту цифри, легко можна вгадати значення n, а потім, розглядаючи $c - 100n^2$, підібрати m так, щоб виконувалася рівність $c - 100n^2 = 20nm + m^2$. Продемонструємо цю процедуру на прикладі.

Обчислимо квадратний корінь з $c = 7569$. Розбиваємо число на грані — по дві цифри від правого краю (якщо число тризначне, у лівій грані буде одна цифра). Маємо 75'69. Найближчий знизу до 75 квадрат цілого числа $64 = 8^2$, так що $n = 8$. Тепер шукаємо таке m, щоб $7569 - 6400 = 20 \times 8 \times m + m^2$. Маємо рівняння $1169 = 160m + m^2$. Оскільки $8 \times 160 = 1280$ вже перевищує ліву частину рівності, то перевіряємо можливість $m = 7$. Маємо $1169 = 1120 + m^2$, що дає $m^2 = 49$, і, відповідно, $m = 7$. Таким чином, $\sqrt{7569} = 87$. Проведені обчислення зручно виконувати у записі, показаному на рис. 1. Прокоментуємо його.

Число, квадратний корінь якого ми обчислюємо, розбито на грані справа наліво по дві цифри: $75'69$. Виходячи з того, що $8^2 < 75 < 9^2$, знаходимо першу цифру відповіді, 8, і записуємо її після знаку рівності. Під першою гранню, яка в нашому випадку дорівнює 75, записуємо квадрат першої цифри відповіді, $64 = 8^2$. Потім ми віднімаємо його від першої грані й отримуємо число 11, до якого приписуємо другу грань. Ліворуч від вертикальної риски пишемо подвоєну першої цифри відповіді ($16 = 2 \times 8$), залишаючи біля вертикальної риски місце для другої цифри відповіді. Підбираємо її таким чином, щоб добуток цієї цифри на 160 плюс ця цифра був найближчим до 1169, але не перевищував його. Це 7. Виконавши множення 167×7, записуємо результат під 1169 (він теж дорівнює 1169). Різниця цих двох чисел дорівнює нулю, тому 7569 – квадрат цілого числа 87 (воно записано справа після знаку рівності). Якби тут був не нуль, то це означало б, що квадратний корінь не ціле число. Більше того, якщо ми обчислюємо квадратний корінь з цілого числа і він не ціле число, то корінь — ірраціональне число. Проілюструємо цей випадок. Обчислимо квадратний корінь з 70. Процедуру розрахунку показано на рис 2.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{75'69} = 87 \\ - & 64 \\ \hline \times 167 & 1169 \\ 7 & - 1169 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Рис. 1.

Як тільки ми отримуємо всі цифри цілої частини відповіді, ставимо після 70 кому і записуємо ще одну грань цього числа, 00. Далі процедуру продовжуємо точно так само, як і при обчисленні квадратного кореня з $7\,569$. Після того, як ми отримали десяті частини кореня, дописуємо ще одну грань і аналогічно отримуємо соті частини значення кореня.

У випадках, коли число більше $10\,000$, ми його теж розбиваємо на грані і обчислюємо послідовно, цифра за цифрою, значення кореня. Метод розрахунку кореня ми описували, виходячи з формули для квадрата суми двох чисел, причому перше число – число десятків, помножене на 10. Ніде ми не накладали обмеження на кількість десятків; якщо їх сотні і тисячі, ми застосовуємо по суті ту ж саму процедуру для визначення цифр десятків, що ми раніше використовували для обчислення квадратного кореня з чотиризначного числа.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{70{,}00'00} = 8{,}36 \\ - & 64 \\ \hline \times 163 & 600 \\ 3 & - 489 \\ \hline \times 1666 & 11100 \\ 6 & - 9996 \\ \hline & 1104 \end{array}$$

Рис. 2.

Зазначимо, що методом цифра за цифрою ми відразу отримуємо точні значення цифр кореня і ніякої додаткової оцінки точності розрахунків робити не потрібно. Розв’язання кількох вправ цим методом сприяє розумінню основ математики, тренуванню математичної логіки та терплячості. Для перевірки правильності розрахунків наведемо кілька значень квадратних коренів:

$$\sqrt{70} \approx 8.366002653407554797817202578 5,$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562373095048801688724 20,$$

$$\sqrt{3} \approx 1.732050807568877293527446341 50.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Перейдемо тепер до ітераційного методу обчислення квадратного кореня, який дає значно швидшу збіжність, проте не гарантує точності отриманих цифр без оцінювання результату. Нехай A – число, квадратний корінь якого нам треба знайти, a_n – n-не наближення до відповіді. Ітераційна формула, яку ще називають формулою Ньютона, для пошуку $(n+1)$-го наближення має вигляд:

$$a_{(n+1)} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right). \quad (1)$$

По суті ітераційна процедура (1) – це процедура Ньютона (Burden & Faires, 2010) для випадку пошуку нуля функції $f(a) = a^2 - A$.

Математичний смисл виразу (1) прозорий. Нехай a_n трохи менше за $\sqrt{A}$. Тоді дріб у дужках у формулі (1) трохи більший за $\sqrt{A}$. Можна чекати, що півсума доданків у дужках формули (1), тобто наступне ітераційне наближення $a_{(n+1)}$, буде ближче до $\sqrt{A}$, ніж попереднє a_n. Проаналізуємо, наскільки швидко ітераційний процес збігається до $\sqrt{A}$ зі зростанням n. Припустимо, що a_n відрізняється від $\sqrt{A}$ на відносну похибку ε, тобто $\mathrm{a_n} = \sqrt{A}(1+\varepsilon)$. Тоді

$$a_{(n+1)} = \frac{\sqrt{A}}{2}\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1+\varepsilon}\right). \quad (2)$$

Дріб у дужках – сума геометричної прогресії зі знаменником $-\varepsilon$, тобто він дорівнює $1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \ldots$. Обмежуючись квадратичними за ε членами, маємо $a_{(n+1)} = \sqrt{A}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\right)$. Таким чином, якщо відносна похибка при обчисленні квадратного кореня складала ε, то після першої ітерації ця похибка буде $\frac{1}{2}\varepsilon^2$, після другої $\frac{1}{8}\varepsilon^4$, а після третьої $\frac{1}{128}\varepsilon^8$. Наприклад, при $\varepsilon = 0.1$ маємо відповідно похибки $5 \cdot 10^{-3}$, $1.25 \cdot 10^{-5}$, $0.8 \cdot 10^{-10}$. Очевидно, для більшості випадків, залежно від вибору початкового значення, досить 1-3 ітерацій. Зразу ж зазначимо, що незалежно від того, чи початкове значення кореня було взяте з надвишком чи недостачею, результат обчислення завжди буде з надвишком.

При обчисленнях зовсім не обов'язково підставляти як чергове наближення число з багатьма десятковими знаками; досить обмежитись бажаною точністю, наприклад, три знаки після коми і проводити ітерації, поки остання цифра у відповіді перестане змінюватися. Наприклад, при обчисленні квадратного кореня з двох маємо: початкове значення 2, після першої ітерації 1.5, потім 1.416 і нарешті 1.414, при підстановці якого в формулу (2) принаймні три знаки після коми вже не змінюються. Реальна точність обчислення при цьому – сім знаків після коми, 1.4142135.

Щоб скоротити обсяг обчислень, можна користуватися звичайними дробами, а не десятковими. Наприклад, при обчисленні маємо таку послідовність (для наочності ми також записуємо наближені значення звичайного дробу через десяткові): 2, $3/2 = \underline{1}.5$, $17/12 \approx \underline{1.41}6$, $577/408 \approx \underline{1.414215}$, $665857/470832 \approx \underline{1.414213562374}$. Підкреслено

правильні цифри результату. Видно, що з кожної ітерацією кількість правильних цифр приблизно подвоюється: $1, 3, 6, 12$.

3. Кубічний корінь

Виведемо формулу для ітераційного методу пошуку кубічного кореня. Спроба просто поставити в рівняння (1) замість дробу A/a_n^2 не дає бажаної швидкої збіжності процесу ітерацій. Можна очікувати, що внески першого і другого доданку повинні бути різними. Спробуємо їх підібрати. Шукаємо формулу для ітераційного обчислення кубічного кореня з A у вигляді

$$a_{(n+1)} = \alpha a_n + \beta \frac{A}{a_n^2}. \tag{3}$$

Нехай $a_n = \sqrt[3]{A}(1+\varepsilon)$, де ε – відносна похибка на n-ій ітерації. Тоді (3) набуває вигляду

$$a_{(n+1)} = \sqrt[3]{A}[\alpha(1+\varepsilon) + \beta(1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\cdots)^2]. \tag{4}$$

Обмежуємося надалі квадратичними за ε членами. З рівняння (4) випливає

$$a_{(n+1)} = \sqrt[3]{A}[\alpha+\beta+\varepsilon(\alpha-2\beta)+3\varepsilon^2\beta]. \tag{5}$$

Це рівняння дозволяє знайти коефіцієнти α і β. Виходимо з того, що при $\varepsilon = 0$ повинно бути $a_{(n+1)} = \sqrt[3]{A}$, що вимагає виконання рівності $\alpha + \beta = 1$. Крім того, для швидкої збіжності процесу ітерації похибка має бути квадратичною за ε, тобто коефіцієнт при ε^1 повинен дорівнювати нулю. Ця вимога записується рівнянням $\alpha - 2\beta = 0$. У результаті маємо $\alpha = 2/3, \beta = 1/3$, так що (3) набуває вигляду

$$a_{(n+1)} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{A}{a_n^2}\right). \tag{6}$$

Проілюструємо, як працює ітераційний алгоритм обчислення кубічного кореня. Обчислимо кубічний корінь з 10. Початковим наближенням кореня виберемо $a_0 = 2$, оскільки $2^3 = 8$ близьке до 10. Три послідовні ітерації дають (підкреслено правильні цифри кубічного кореня):

$$a_1 = 13/6 \approx \underline{2.1}66,$$

$$a_2 = 3277/1521 \approx \underline{2.1545}0,$$

$$a_3 = 105569067476/49000820427 \approx \underline{2.1544346}9224.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Остання ітерація дає результат, дуже близький до $\sqrt[3]{10} \approx 2.15443469003188372$. Наведені результати ітерацій наочно підтверджують зменшення похибки пропорційно квадрату похибки попередньої ітерації – спочатку одна цифра точна (ми її вгадали; можна починати з будь-якої, наприклад, з одиниці, просто процес обчислень буде дещо довшим), потім дві, чотири, дев'ять цифр.

4. Корінь n-го степеня

Користуючись методом, використаним нами при виведенні формули для ітераційного обчислення квадратного кореня, можна отримати аналогічну формулу для обчислення кореня n-степеня числа:

$$a_{(m+1)} = \frac{1}{n}\left((n-1)a_m + \frac{A}{a_m^{n-1}}\right). \qquad (7)$$

Відразу видно складність, що виникає у випадку великих n. Якщо початкове наближення занадто велике, то другий доданок в круглих дужках буде значно менший за перший і, завдяки близькій до одиниці величині $\frac{n-1}{n}$, кожне нове ітераційне наближення буде мало відрізнятися від попереднього, допоки відносна похибка обчислень не стане малою. Далі точність обчислень зростатиме досить швидко, як це мало місце для обчислень квадратного і кубічного коренів. Якщо ж вибрати початкове наближення занадто малим, то більший внесок в (7) буде від другого доданка, але вже після ітерації наступне наближення стане помітно більшим за $\sqrt[n]{A}$, яке далі поступово, а потім все швидше, прямувати до $\sqrt[n]{A}$. Для ілюстрації цих тверджень наведемо обчислення кореня сьомого степеня від 10 для початкових значень $a_0 = 2$ та $a_0 = 1$ (підкреслено правильні цифри кореня сьомого степеня з 10), який приблизно дорівнює $\sqrt[7]{10} \approx 1.3894954943731376371$.

Для $a_0 = 2$ маємо: $a_1 = \underline{1}.73,\ a_2 = \underline{1}.54,\ a_3 = \underline{1}.42,\ a_4 = \underline{1.3}92,\ a_5 = \underline{1.3895}1,\ a_6 = \underline{1.3894954950}$, $c_7 = \underline{1.3894954943731376382}$.

Для $a_0 = 1$ маємо: $a_1 = 2.28,\ a_2 = \underline{1}.96,\ a_3 = \underline{1}.71,\ a_4 = \underline{1}.52,\ a_5 = \underline{1}.42,\ a_6 = \underline{1.3}91,$ $a_7 = \underline{1.389503}$.

Як бачимо, швидка збіжність ітераційного процесу починається у першому випадку після третьої, а в другому після п'ятої ітерації, коли відносна похибка обчислень складає величину порядку 10%. У наших розрахунках обчислення при початковій умові $a_0 = 1$ виявилися на дві ітерації довшими, оскільки після першої ж ітерації наближене значення кореня перевищило початкове значення за початкової умови $a_0 = 2$.

Зазначимо, що ще одним методом обчислення кореня n-го степеня є застосування ряду Тейлора для експоненціальної функції (як отримати цей ряд без знання вищої математики див. в роботах Л. П. Мироненка і О. А. Рубцової (Mironenko & Rubtsova, 2013), В. І. Романенка і О. В. Романенка (Romanenko & Romanenko, 2024), В. І. Романенка, О. В. Романенка та І. В. Лебедєвої (Романенко, Романенко &

Лебедєва, 2024) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$. Для цього $\sqrt[7]{10}$ записуємо у вигляді $\sqrt[7]{10} = e^{\frac{1}{7}\log_e 10}$ і застосовуємо ряд Тейлора для e^x з $\mathrm{x} = \frac{1}{7}\log_e 10$, де $\log_e 10 \approx 2.302585092994045684$. Поглянемо, як змінюється результат обчислення залежно від кількості врахованих членів при обчисленні ряду, від одного до семи: $\underline{1.3}28$, $\underline{1.38}30$, $\underline{1.38}897$, $\underline{1.3894}61$, $\underline{1.38949}36$, $\underline{1.3894954}08$, $\underline{1.38949540}8$. Як бачимо, точність обчислень ряду зі збільшенням кількості врахованих членів зростає приблизно лінійно, на одну-дві цифри на кожен член, значно повільніше, ніж при розрахунку методом ітерацій. При розрахунку методом ітерацій за 7 ітерацій (з початковою умовою $a_0 = 2$) було досягнуто точності 10^{-17}, тоді коли при розрахунку за розкладом експоненти в ряд Тейлора лише 10^{-7}. Зазначимо, що при розрахунку з використанням розкладу в ряд ми завжди отримуємо відповідь з недостачею, а при розрахунку ітераційним методом – завжди з надвишком.

5. Показникова функція

Знаючи, як обчислювати корені з числа, можна вручну розрахувати й значення показникової функції. Ми не будемо тут цікавитися показниковою функцією від цілого аргументу, яка зводиться до обчислення основи у певному степені. Розглянемо приклад з дробовою частиною, скажімо $3^{0.23}$. По суті цей вираз означає $\sqrt[5]{3}\left(\sqrt[100]{3}\right)^3$. Наведені значення коренів можна розрахувати ітераційним методом, наведеним у попередньому розділі. Оскільки степінь другого кореня доволі високий, є смисл зробити кілька попередніх обчислень, щоб краще вибрати значення початкової ітерації a_0. Покажемо на прикладі, як це може виглядати. Беремо якесь пробне значення кореня, робимо одну ітерацію. Якщо результат розрахунку виявився вище початкового значення, значить воно взято з недостачею, якщо нижче – з надвишком. Дивимося, на скільки початкове значення і перша ітерація відрізняються, і, якщо ця різниця значна, пробуємо інше a_0. При обчисленні $\sqrt[100]{3}$ починаємо з $a_0 = 1$, отримуємо $a_1 = 1.02$. Оскільки значення $\sqrt[100]{3}$ лежить між 1 і 1.02, щоб зменшити обсяг обчислень, беремо $a_0 = 1.01$. Ми не будемо 99 разів виконувати операцію множення, щоб знайти 1.01^{99} досить дев'яти операцій. Спочатку обчислюємо квадрат 1.01: $d_2 = a_0^2 \approx 1.020$ (обмежуємося трьома знаками після коми), потім розраховуємо $d_4 = d_2^2 \approx 1.040$, $d_8 = d_4^2 \approx 1.081$, $d_{16} = d_8^2 \approx 1.168$, $d_{32} = d_{16}^2 \approx 1.364$, $d_{64} = d_{32}^2 \approx 1.860$, $d_{96} = d_{64}d_{32} \approx 2.537$, $d_{98} = d_{96}d_2 \approx 2.587$, $d_{99} = d_{98}a_0 \approx 2.613$, що з точністю до двох значущих цифр збігається з розрахунком, зробленим з високою точністю (2.678). Подальші обчислення дають $a_1 \approx 1.011$ що з точністю до трьох значущих цифр збігається зі значенням кореня $\sqrt[100]{3} = 1.01138$. Процедуру розрахунку кореня п'ятого степеня не описуємо, вона аналогічна наведеній у попередньому підрозділі. Різниця лише в кількості врахованих значущих цифр – тут ми обмежуємося трьома цифрами після коми. Маємо, починаючи обчислення з $a_0 = 1.5$ після четвертої ітерації, на якій три цифри після коми такі ж, як у попередній: $a_4 \approx 1.245$. З урахуванням зроблених обчислень маємо: $3^{0.23} \approx 1.245 \times 1.011^3 \approx 1.286$. Обчислення цієї ж величини за

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

допомогою комп'ютерної математики дає $3^{0.23} \approx 1.287$. Різниця у третьому знаку після коми. Таким чином, вміючи обчислювати корені з числа з точністю $10^{-2} - 10^{-3}$, можна зробити досить точну оцінку значення показникової функції.

Щоб виконати описані вище обчислення, треба вміти добувати корінь довільного степеня з числа. Можна обійтися зовсім мінімальним вмінням – досить вміти добувати квадратний корінь з числа. Обчислимо $3^{0.23}$ в такий спосіб. Для цього запишемо 0.23 у вигляді суми доданків вигляду $\frac{1}{2^n}$ тобто по суті переведемо 0.23 у двійкову систему числення. Кількість таких доданків нескінченна, і нам доведеться певною кількістю членів обмежитися. Маємо у двійковій системі $0.23 = 0.0011101011\cdots_2$. Ми обмежилися десятьма знаками, оскільки вони вже дають десяткове число з достатньою точністю, 0.2294. Тепер можна записати, користуючись лише операцією обчислення квадратного кореня, $3^{0.23} \approx \sqrt[8]{3} \times \sqrt[16]{3} \times \sqrt[32]{3} \times \sqrt[128]{3} \times \sqrt[512]{3} \times \sqrt[1024]{3}$ оскільки $\sqrt[8]{3} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$, $\sqrt[16]{3}$ обчислюється чотирикратним добуванням кореня і т. д.

Перш ніж перейти до обчислень, наведемо алгоритм переходу від десяткового дробу до двійкового. Множимо дріб на 2, якщо результат не має цілої частини, то в першому розряді нуль. Якщо має, то пишемо 1 і відкидаємо цілу частину. Далі процес повторюємо. Для нашого прикладу початок перетворення в двійковий дріб виглядає так: Розряд 1: $0.23 \times 2 = 0.46$, пишемо 0. Розряд 2: $0.46 \times 2 = 0.92$, пишемо 0. Розряд 3: $0.92 \times 2 = 1.84$, пишемо 1. Розряд 4: $0.84 \times 2 = 1.68$, пишемо 1. Далі продовжуємо так само.

Обчислення робимо з точністю до трьох цифр після коми. Маємо:

$$\sqrt{3} \approx 1.732,\ \sqrt[4]{3} \approx 1.316,\ \sqrt[8]{3} \approx 1.147,\ \sqrt[16]{3} \approx 1.070,\ \sqrt[32]{3} \approx 1.034,$$
$$\sqrt[64]{3} \approx 1.016,\ \sqrt[128]{3} \approx 1.008,\ \sqrt[256]{3} \approx 1.004,\ \sqrt[512]{3} \approx 1.002,\ \sqrt[1024]{3} \approx 1.001.$$

В останньому рядку дробова частина після кожного обчислення квадратного кореня (наприклад, $\sqrt[256]{3} = \sqrt{\sqrt[128]{3}}$) зменшується удвічі у відповідності з тим, що при малому x маємо $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$.

Знаходимо добуток коренів, що входять у вираз для $3^{0.23}$, отримуємо 1.283, з точністю до двох знаків після коми близький до результату обчислення $3^{0.23} \approx 1.287$ за допомогою комп'ютерної математики.

Як бачимо, математичного арсеналу елементарної математики цілком досить, щоб обчислити показникову функцію бажаного аргументу.

6. Логарифмічна функція

У попередньому пункті ми показали як, маючи набір значень послідовного обчислення квадратного кореня, наприклад, 3, можна знайти будь-який дробовий степінь числа. Ми зумисно обмежили точність наших обчислень третім знаком після коми, маючи на увазі показати, що при обчисленнях вручну, з допомогою ручки і

папірця, можуть бути непоганої точності, достатньої для розв'язання більшості шкільних задач. Зрозуміло, що наявність найпростішого калькулятора, який вміє виконувати лише чотири арифметичні дії, збільшить точність наших обчислень до 6–8 знаків після коми. Покажемо тепер, як той же набір значень квадратного кореня дозволить нам обчислити логарифм числа з бажаною основою.

Наприклад, ми хочемо обчислити логарифм числа $X = 3.75$ за основою 3. Оскільки $X > 3$, ділимо його на 3, можливо, кілька разів, доки частка від ділення не стане менше 3 (у нашому випадку вистачить одного ділення). Маємо: $3.75 = 3 \times 1.25$. Виходячи з властивостей логарифма (див., наприклад, (Castle, 1905; Гайштут, Ушаков, & Шамович, 2018), а саме, з того, що логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників, маємо:

$$\log_3 3.75 = \log_3 3 + \log_3 1.25 = 1 + \log_3 1.25. \qquad (8)$$

Наше завдання тепер обчислити $\log_3 1.25$. Для цього треба записати 1.25 у вигляді добутку степенів 3, і тоді сума степенів дасть нам значення $\log_3 1.25$.

Ми скористаємося набором значень послідовного обчислення квадратного кореня з 3, отриманого у попередньому розділі. Зручність такого підходу полягає в тому, що сума показників кореня дорівнює одиниці (вона обчислюється як сума геометричної прогресії $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$). Це дозволяє будь-яке число між 1 і 3 записати як добуток коренів з 3. Якщо ж число менше за 1, ми множимо його на 3 кілька разів, доки воно не стане більшим за одиницю. Кількість операцій множення потім врахуємо при обчисленні логарифму так само, як ми враховуємо операції ділення у прикладі, що ми зараз розглядаємо.

У множині послідовних квадратних коренів 3 (див. попередній розділ), шукаємо найбільше з чисел, менших за 1.25. Це $\sqrt[\frac{1}{8}]{3} \approx 1.147$. Ділимо 1.25 на це число, отримуємо 1.090. Тепер ми знаємо, що $1.25 \approx \sqrt[8]{3} \times 1.090$. Далі в тій же множині коренів шукаємо найбільше з чисел, менших за 1.090. Це $\sqrt[\frac{1}{16}]{3} \approx 1.070$. Ділимо на нього 1.090, отримуємо 1.017. Тепер ми знаємо, що $1.25 \approx \sqrt[8]{3} \times \sqrt[16]{3} \times 1.017$. Повторюємо ту ж процедуру з 1.017, ділимо його на $\sqrt[\frac{1}{64}]{3} \approx 1.016$ і отримуємо $1.25 \approx \sqrt[8]{3} \times \sqrt[16]{3} \times \sqrt[64]{3} \times 1.001$. Оскільки $1.001 \approx \sqrt[1024]{3}$, маємо $1.25 \approx 3^{\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{1024}} \approx 3^{0.204}$. За визначенням логарифма маємо $\log_3 1.25 \approx 0.204$, тоді $\log_3 3.75 \approx 1.204$. Обчислення цієї ж величини за допомогою комп'ютерної математики дає 1.203, тобто похибка відповідає точності наших розрахунків.

7. Тригонометричні функції

Розраховуючи значення тригонометричних функцій, досить знати, як обчислити одну з них, інші можна обчислити з тригонометричних тотожностей. Ми оберемо за основу $\sin x$ в першу чергу через те, що для малого аргумента (в радіанній мірі) маємо $\sin x \approx x$. Нас цікавитимуть обчислення з точністю до третього знаку після коми.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Оцінимо, для яких значень аргументу наведена наближена формула для синуса кута дає правильний результат з цією точністю. Для $x = 0.14$ маємо $\sin x \approx 0.13954 \approx 0.14$, таким чином, при наближених обчисленнях з точністю до 0.001 значення аргумента в $\sin x$ не повинно перевищувати 0.14 (8° в градусній мірі кута). Якщо досить точності 0.01, наближеною формулою $\sin x \approx x$ можна користуватися до $x = 0.3$ (17° в градусній мірі кута).

Користуючись цими знаннями та кількома відомими значеннями синуса і косинуса на інтервалі від 0 до $\frac{1}{2}\pi$ і використовуючи властивості тригонометричних функцій (див., наприклад, (Гайштут, Ушаков, & Шамович (2018)), можна обчислити синус для будь-якого значення аргументу.

Щоб можна було скористатися наближеними формулами для синуса і косинуса малого аргументу

$$\sin x \approx x, \tag{9}$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2, \tag{10}$$

(друга формула отримана з першої та тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ із врахуванням припущення $x \ll 1$ при обчисленні квадратного кореня), ми запишемо аргумент, для якого ми проводимо обчислення, як суму двох доданків, тригонометричні функції одного з яких ми знаємо, а другий доданок малий. Покажемо це на прикладі. Візьмемо до уваги, що для учня закладу загальної середньої освіти відомі значення тригонометричних функцій для аргументів 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $2\pi/3$, $\pi/2$.

Обчислимо, наприклад, $\sin\frac{2}{15}\pi$. Найближче значення аргументу, для якого тригонометричні функції відомі — $\frac{\pi}{6}$ ($\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$). Різниця цих аргументів дорівнює $\alpha = \frac{1}{6}\pi - \frac{2}{15}\pi = \frac{1}{30}\pi$. Оскільки $\alpha \approx 0.1047$ порядку 0.1, ми можемо розрахувати $\sin\frac{2}{15}\pi$ з точністю порядку 0.001, користуючись формулами (9), (10). Для $\alpha = \frac{1}{30}\pi$ обчислення за (9), (10) дають

$$\sin\alpha \approx \frac{1}{30}\pi \approx 0.1047, \tag{11}$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \left(\frac{1}{30}\pi\right)^2 \approx 0.9945. \tag{12}$$

Далі обчислимо синус лівої і правої частин рівності

$$\frac{2}{15}\pi = \frac{1}{6}\pi - \alpha, \tag{13}$$

користуючись виразом для синуса різниці двох кутів:

$$\sin\frac{2}{15}\pi = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cdot\cos\alpha - \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cdot\sin\alpha \approx 0.4066. \quad (14)$$

Як і очікувалося, результат обчислення за формулою (14) менш ніж на 0.001 відрізняється від результату обчислення за допомогою комп'ютерної математики, 0.4067.

Для підвищення точності обчислень різниця між аргументом, який ми шукаємо, і аргументом, для якого тригонометричні функції відомі, повинна бути якомога меншою. Звертає на себе увагу нерівномірність розподілу аргументів, точні значення тригонометричних функції яких відомі школярам – різниця між 0 і $\frac{1}{6}\pi$ та $\frac{2}{3}\pi$ і $\frac{1}{2}\pi$ складає $\frac{1}{6}\pi$, тоді як між $\frac{1}{6}\pi$ і $\frac{1}{4}\pi$ та $\frac{1}{4}\pi$ і $\frac{2}{3}\pi$ різниця удвічі менша, тому при обчисленні значень тригонометричних функцій із застосуванням формул (9), (10) на перших двох інтервалах точність в середньому буде меншою. Непогано було б знати точні значення на серединах зазначених інтервалів, а саме аргументів $\frac{1}{12}\pi$ та $\frac{5}{12}\pi$. Насправді досить знати синуси і косинуси одного з аргументів, наприклад, $\frac{1}{12}\pi$, оскільки $\sin\frac{5}{12}\pi = \cos\frac{1}{12}\pi$ і $\cos\frac{5}{12}\pi = \sin\frac{1}{12}\pi$ завдяки $\frac{1}{12}\pi + \frac{5}{12}\pi = \frac{1}{2}\pi$. Знайдемо ці функції для $\frac{1}{12}\pi$.

Оскільки $\frac{1}{12}\pi = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi$, то

$$\sin\frac{1}{12}\pi = \sin\frac{1}{4}\pi\cdot\cos\frac{1}{6}\pi - \sin\frac{1}{6}\pi\cdot\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right). \quad (15)$$

$$\cos\frac{1}{12}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi\cdot\cos\frac{1}{6}\pi + \sin\frac{1}{4}\pi\cdot\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right). \quad (16)$$

Наведених вище значень тригонометричних функцій аргументів 0, $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ досить для обчислення тригонометричних синуса і косинуса довільного кута з похибкою, меншою за 0.001. Крім цих значень аргументів існує і безмежна кількість інших, для яких тригонометричні функції обчислюються точно. Наведемо далі деякі з них і обчислимо відповідні їм значення тригонометричних функцій.

Знайдемо $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ для $\alpha = \frac{1}{10}\pi$. Помічаємо, що

$$2\alpha + 3\alpha = \frac{1}{2}\pi. \quad (17)$$

Звідси випливає

$$\cos 3\alpha - \sin 2\alpha = 0. \quad (18)$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Після нескладних обчислень із застосовуванням формул для синуса і косинуса суми двох кутів рівняння(18) набуває вигляду

$$\cos\alpha\,(1-2\sin\alpha-4\sin^2\alpha)=0. \tag{19}$$

Рівність нулю першого множника відповідає $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, що суперечить рівнянню (17). Поява зайвих коренів рівняння просто пояснюється – множина розв'язків рівняння (18) включає ті, що лежать у першій чверті і задовольняє умову (17), але не тільки їх. Рівність нулю другого множника дає

$$\sin\frac{1}{10}\pi=\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right). \tag{20}$$

Той самий результат отримуємо, якщо спочатку додамо аргументи у лівій частині (17), а потім обчислимо синус або косинус обох частин рівності $5\alpha=\frac{1}{2}\pi$.

Знаючи $\sin\frac{1}{10}\pi$, обчислюємо $\cos\frac{1}{10}\pi$:

$$\cos\frac{1}{10}\pi=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}. \tag{21}$$

Знаючи (20), (21), ми знаємо, відповідно, $\sin\frac{2}{5}\pi=\cos\frac{1}{10}\pi$ і $\cos\frac{2}{5}\pi=\sin\frac{1}{10}\pi$.

Зазначимо, що подібним же чином обчислюються і добре відомі зі шкільної програми тригонометричні функції аргументів $\frac{1}{4}\pi$ та $\frac{1}{6}\pi$. У першому випадку обчислюємо синус (чи косинус) обох частин рівності $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{4}\pi$, у другому виходимо з рівності $\frac{1}{6}\pi=\frac{1}{2}\pi-2\frac{1}{6}\pi$ з наступним обчисленням синуса обох частин рівності та використанням формули для косинуса подвійного кута.

Ще одне сімейство аргументів, для яких синус і косинус обчислюються точно, можна отримати діленням аргумента, для якого тригонометричні функції відомі, на 2 (скільки завгодно разів). Наприклад, нехай $\alpha=\frac{1}{8}\pi$. Тоді, беручи до уваги, що $2\alpha=\frac{1}{4}\pi$, маємо рівняння

$$2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2}. \tag{22}$$

Обчислюємо квадрат обох частин, робимо заміну $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, розв'язуємо біквадратне рівняння і знаходимо

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}. \tag{23}$$

У таблиці 1 подано значення тригонометричних функцій деяких аргументів, точні і наближені (з недостачею, тобто останній знак буде правильним і при збільшенні точності).

Ми додали в таблицю тригонометричні функції аргументів $\frac{1}{5}\pi$ $(36°)$ та $\frac{3}{10}\pi$ $(54°)$ з огляду на те, що вони можуть корисними в задачах з правильними десятикутниками і п'ятикутниками. Їх неважко обчислити як синус і косинус подвійного і потрійного аргументу $\frac{1}{10}\pi$, тригонометричні функції якого обчислено вище і наведено в таблиці. Зазначимо принагідно, що $\sin\frac{3}{10}\pi = \cos\frac{1}{5}\pi$ – це половина золотого перетину.

Таблиця 1

Тригонометричні функції деяких аргументів

α, радіани	α, градуси	$\sin\alpha$, точне	$\sin\alpha$, наближене	$\cos\alpha$, точне	$\cos\alpha$, наближене
0	0	0	0	1	1
$\pi/12$	$15°$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	0.258819045	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	0.965925826
$\pi/10$	$18°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	0.309016994	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	0.951056516
$\pi/8$	$22°30'$	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	0.382683432	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	0.923879532
$\pi/6$	$30°$	$\frac{1}{2}$	0.500000000	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.866025403
$\pi/5$	$36°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	0.587785252	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0.809016994
$\pi/4$	$45°$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.707106781	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0.707106781
$3\pi/10$	$54°$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0.809016994	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	0.587785252
$\pi/3$	$60°$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0.866025403	$\frac{1}{2}$	0.5
$3\pi/8$	$67°30'$	$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	0.923879532	$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	0.382683432
$2\pi/5$	$72°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	0.951056516	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	0.309016994
$5\pi/12$	$75°$	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$	0.965925826	$\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$	0.258819045
$\pi/2$	$90°$	1	1	0	0

Користуючись формулами для тригонометричних функцій суми і різниці аргументів, можна, спираючись на дані, наведені в таблиці, обчислити точні значення тригонометричних функцій ще для низки аргументів. При наближеному обчисленні тригонометричних функцій довільного аргументу β в межах від 0 до $\frac{1}{2}\pi$ обираємо

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

найближчий до нього аргумент α з таблиці 1 і подаємо його як суму – аргумент з таблиці плюс різниця між довільним аргументом і аргументом з таблиці: $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$. Далі користуємося виразом для синуса чи косинуса суми α і $(\beta - \alpha)$ і обчислюємо наближені значення довільного аргументу, використовуючи формули (9) та (10).

8. Висновки

Ми показали, як можна, користуючись лише чотирма арифметичними діями, вручну обчислити елементарні функції для довільного аргументу. Це уміння – необхідна основа глибокого розуміння математики, можливості виконати чисельні розрахунки в математичних та фізичних задачах за відсутності комп'ютера чи калькулятора. Наведена розширена порівняно зі шкільною програмою таблиця точних значень тригонометричних функцій деяких аргументів може використовуватися не лише для чисельного оцінювання синуса чи косинуса довільного аргументу, а й при розв'язанні задач з тригонометрії, геометрії чи стереометрії.

Список використаних джерел

Гайштут О. Г., Ушаков Р. П. & Шамович О. А. (2018). Математика: довідник для абітурієнтів та учнів загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Літера ЛТД. https://litera-ltd.com.ua/index.php?route=product/product&product_id=63&search=%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0&category_id=0

Романенко В. І., Романенко О. В. & Лебедєва І. В. (2024). Розкладання елементарних функцій у степеневі ряди методами алгебри. У світі математики. Вип. 2. https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/51

Burden, R. L. & Faires J. D. (2010). Numerical analysis. Cengage Learning. https://openlibrary.org/books/OL28549995M/Numerical_Analysis

Castle, F. (1905). Practical mathematics for beginners. New York: The Macmillian Company. https://archive.org/details/practicalmathema00castrich/mode/2up

Mironenko, L. P., & Rubtsova, O. A. (2013). Approximations of some functions by polynomials and the method of undefined coefficients (in Russian). Scientific papers of Donetsk National Technical University (Ukraine). Series: Computing and Automation 2 (25) (p. 128–135). https://ea.donntu.edu.ua/jspui/handle/123456789/22814

Romanenko, V. I. & Romanenko A. V. (26 May 2024): Series expansion of some elementary functions without using mathematical analysis, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2353371

Отримано редакцією журналу: 01.03.2025
Прорецензовано: 15.04.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Victor ROMANENKO, Dr. of Sci. (Phys&Math), Leading Researcher
ORCID: 0000-0001-8554-0214
e-mail: victor.romanenko@gmail.com
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDYEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ELEMENTARY MATHEMATICS: MANUAL CALCULATIONS

Abstract. *The student is introduced to numerical calculations at the initial stages of studying mathematics. The student masters the execution of four arithmetic operations (addition, subtraction, multiplication, division) manually. For calculating trigonometric and exponential functions, square and cubic roots, arithmetic calculators or tables are usually used; this also applies to logarithms. At the same time, confident proficiency in mathematics necessarily involves the ability to perform calculations manually, with at least some accuracy (2–3 significant figures), for any task in natural sciences and mathematics within the school curriculum. This competence enables the student not to perceive computer computations or calculator-based calculations as something incomprehensible — like a trick or a "black box," where input data is provided and output results are obtained. It is understood that the authors do not advocate abandoning calculators when solving school tasks. However, the student should not become entirely dependent on this tool. The article demonstrates methods for calculating the values of exponential, logarithmic, and trigonometric functions, extends the set of exact values of trigonometric functions beyond what is known from the school curriculum (for arguments* 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$*), and illustrates methods for finding square and cubic roots of a number.*

Keywords: *manual calculations; trigonometric functions; exponential functions; logarithmic functions; square root; cubic root.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні олімпіади

УДК 51(079) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.3**

Олександр БОРИСЕЙКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА З МАТЕМАТИКИ. ФІНАЛЬНИЙ ТУР

Анотація. *Розглянуто розв'язки задач Всеукраїнської олімпіади Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фінальний тур.*

Ключові слова: *олімпіада; рівняння; нерівність; координати точки.*

1. Вступ

Фінальний тур Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка у 2025 році зібрав цілу когорту зацікавлених випускників серед школярів. Майбутнім абітурієнтам була запропонована низка цікавих різнопланових задач з математики. Багато хто з них розглядав олімпіаду як черговий етап перевірки своїх знань та підготовки до національного мультимедійного тесту. Олімпіада відбувалася 6 квітня 2025 року на базі механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У фінальному турі олімпіади прийняли участь 75 учасників з різних регіонів України.

2. Задачі фінального туру

Наведемо умови завдань фінального туру олімпіади з відповідними розв'язками або вказівками.

Задача 1. *Обчислити значення виразу* $\sqrt{7\sqrt{3}-12}-\sqrt{4\sqrt{3}-6}+\sqrt{13\sqrt{3}-12}$.

Розв'язання: Для розв'язання поставленої задачі перетворимо підкореневі вирази за допомогою винесення спільного множника і виділимо повні квадрати підкореневих виразів:

$$\sqrt{7\sqrt{3}-12}=\sqrt[4]{3}\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt[4]{3}\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt[4]{3}\left(2-\sqrt{3}\right);$$

$$\sqrt{4\sqrt{3}-6}=\sqrt[4]{3}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt[4]{3}\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt[4]{3}\left(\sqrt{3}-1\right);$$

$$\sqrt{13\sqrt{3}-12}=\sqrt[4]{3}\sqrt{13-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{3}\sqrt{12-4\sqrt{3}+1}=\sqrt[4]{3}\sqrt{\left(2\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt[4]{3}(2\sqrt{3}-1).$$

Таким чином, отримуємо відповідь $2\sqrt[4]{3}$.

Відповідь: $2\sqrt[4]{3}$.

Задача 2. *Знайти розв'язки нерівності*

$$(x^2-5x+3)\lg\left(1-\frac{x}{3}\right)\geq\lg\left(\frac{3}{3-x}\right).$$

Розв'язання: Визначаємо область допустимих значень невідомої змінної. Згідно визначення логарифмічної функції ця область є розв'язком системи нерівностей

$$\begin{cases}1-\dfrac{x}{3}>0,\\ \dfrac{3}{3-x}>0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,3).$$

Далі проводимо перетворення вихідної нерівності і розкладаємо отриманий у лівій частині вираз на множники:

$$(x^2-5x+3)\,lg\left(\frac{3-x}{3}\right)\geq-\lg\left(\frac{3-x}{3}\right);$$

$$(x^2-5x+4)\lg\left(\frac{3-x}{3}\right)\geq 0;$$

$$(x-1)(x-4)\lg\left(\frac{3-x}{3}\right)\geq 0.$$

З використанням методу інтервалів отримаємо відповідь.

Відповідь: $x\in(-\infty,0]\cup[1,3)$.

Задача 3. *Задано квадрат $ABCD$. Точка M розташована всередині квадрата. Відомо, що відстань $AM=\sqrt{27}$ см, відповідно $DM=\sqrt{6}$ см, $CM=\sqrt{3}$ см. Визначити значення площі квадрата.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язання: Розглянемо квадрат $ABCD$, розташований у першій чверті прямокутної декартової системи координат з точкою A у початку координат. Сторони квадрата AB та AD розташовані на осях Ax та Ay (див. рис. 1).

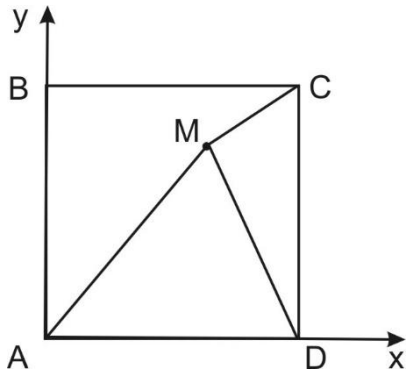


Рис. 1. Рисунок до задачі 3.

Покладемо довжину сторони квадрата рівною a; невідомі координати точки M позначимо (x, y); точки C та D будуть мати координати (a, a) та $(a, 0)$, відповідно.

Далі розглянемо квадрати відстаней між точкою M та точками A, C та D:

$$AM^2 = x^2 + y^2 = 27;$$

$$DM^2 = (x-a)^2 + y^2 = 6;$$

$$CM^2 = (x-a)^2 + (y-a)^2 = 3.$$

Отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими. Виключимо з рівнянь системи x та y і отримаємо рівняння для визначення a:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 6, \\ x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 = 3, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ a^2 - 2ax = -21, \\ a^2 - 2ax + a^2 - 2ay = -24, \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ a^2 - 2ax = -2, \\ a^2 - 2ay = -3, \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 27, \\ x = \dfrac{a^2 + 21}{2a}, \\ y = \dfrac{a^2 + 3}{2a}. \end{cases}$$

Підставимо вирази для x та y у перше рівняння і, таким чином, отримаємо біквадратне рівняння, яке має наступний розв'язок:

$$\left(\frac{a^2+21}{2a}\right)^2+\left(\frac{a^2+3}{2a}\right)^2=27;$$

$$a^4+42a^2+441+a^4+6a^2+9=108a^2;$$

$$2a^4-60a^2+450=0;$$

$$a^4-30a^2+225=0.$$

Отже, $a^2=15$.

Відповідь: 15 см^2.

Задача 4. *Знайти розв'язки рівняння*

$$\frac{5}{7-3\sin^2 2x}=\frac{9+4\sin 6x}{4\sin^2 6x}.$$

Розв'язання. Легко помітити, що

$$\frac{5}{7-3\sin^2 2x}\le\frac{5}{4} \quad \text{і} \quad \frac{5}{4}\le\frac{9+4\sin 6x}{4\sin^2 6x}.$$

Тому рівність можлива за умови

$$\begin{cases}\sin^2 2x=1,\\ \sin 6x=-1,\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\\ 6x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\end{cases}\qquad k,n\in\mathbb{Z}.$$

Знаходимо спільні значення множин розв'язків першого та другого рівнянь:

$$\frac{1}{4}+\frac{n}{2}=-\frac{1}{12}+\frac{k}{3}\quad\Rightarrow\quad\frac{n}{2}=-\frac{1}{3}+\frac{k}{3}\quad\Rightarrow\quad n=\frac{2k-2}{3};$$

Тоді $2k-2=3mi$, $\quad k=1+\frac{3m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}$. Отже, $m=2i$ – парне і $x=\frac{\pi}{4}+\pi i$, $i\in\mathbb{Z}$.

Відповідь: $x=\frac{\pi}{4}+\pi i$, $i\in\mathbb{Z}$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 5. *Визначити значення параметра* $a > 0$*, для якого найбільше значення виразу* $\sqrt{2-x-2y}+\sqrt{x+2}+\sqrt{ay+3a}$ дорівнює 5.

Розв'язання. Розглянемо наступні вектори:

$$\left(1;1;\sqrt{\frac{a}{2}}\right) \text{ та } \left(\sqrt{2-x-2y};\sqrt{x+2};\sqrt{2y+6}\right).$$

Очевидно, що вираз який ми досліджуємо є їх скалярним добутком. Застосуємо нерівність для скалярного добутку:

$$\vec{a}\vec{b} \le |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|.$$

Тоді найбільше значення виразу буде мати вигляд:

$$\sqrt{1+1+\frac{a}{2}}\sqrt{2-x-2y+x+2+2y+6}=\sqrt{\frac{4+a}{2}}\sqrt{10}=\sqrt{4+a}\sqrt{5}.$$

За умовою найбільше значення дорівнює 5:

$$\sqrt{4+a}\sqrt{5}=5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4+a}=\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad a=1.$$

Відповідь: $a=1$.

3. Висновки

Участь у математичних олімпіадах – це неоціненний досвід для усіх хто щиро захоплюється математикою. Навіть якщо ви не здобудете призового місця, сам процес розв'язання складних задач допоможе вам краще зрозуміти матеріал, розвинути критичне мислення та підвищити рівень підготовки до вступних випробувань. Нехай вас не зупиняють виклики, адже кожна олімпіада – це крок до особистісного зростання. Бажаємо успіхів у подальшому вивченні математики та досягненні нових вершин!

Список використаних джерел

Федак І. В.(2003) Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для ЗНЗ.

Сарана О.А. (2005) Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник.

Отримано редакцією журналу: 01.05.2025
Прорецензовано: 15.05.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Oleksandr BORYSEIKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ALL-UKRAINIAN MATHEMATICS OLYMPIAD OF TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV FROM MATHEMATICS. FINAL ROUND

Abstract. *Solutions to the tasks of the Olympiad of Taras Shevchenko Kyiv National University were considered.*

Keywords: *Olympiad; equation; inequality; solution; point coordinates.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні досягнення

УДК 519.172.3 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.4**

Катерина АНТОШИНА, аспірант
ORCID: 0009-0005-9221-1351
e-mail: kantoshyna@imath.kiev.ua
Інститут математики НАН України, Київська школа економіки, Київ, Україна

Софія КОВАЛЕВСЬКА, учениця 10 класу
e-mail: sofia.s.kovalevska@gmail.com
Криворізький ліцей №95 Криворізької міської ради, Кривий Ріг, Україна

КОНКАТЕНАЦІЯ ТА МУЛЬТИПЛІКАЦІЯ ОРІЄНТОВАНИХ ГРАФІВ СПЕЦІАЛЬНОГО КЛАСУ

Анотація. *На множині орієнтованих графів із рівно одним стоком та рівно одним джерелом розглядаються дві бінарні операції. Конкатенація ототожнює стік першого орграфа з джерелом другого, а мультиплікація замінює всі дуги першого орграфа на другий орграф, ототожнюючи джерело з початком дуги, а стік – із кінцем. Множина досліджуваних графів замкнена відносно цих двох операцій, а сукупність орієнтованих ланцюгів із операціями конкатенації та мультиплікації утворює напівкільце, ізоморфне напівкільцю натуральних чисел. У роботі проаналізовані попередні роботи в галузі орієнтованих графів, і зокрема, результатів, пов'язаних із прикладним застосуванням досліджуваного класу графів як моделей транспортних мереж. Отримані теоретичні результати про властивості нових операцій та описи королів отриманих орграфів дають можливість працювати з цими операціями для подальших досліджень, побудови узагальнень та моделювання більш складних систем для прикладних задач.*

Ключові слова: *орієнтовані графи; бінарні операції; королі; транспортні мережі; мережеві потоки.*
Класифікація відповідно до AMS 2020: 05C76, 05C90, 68R10, 94C15.

1. Вступ

Теорія графів бере свій початок ще з 18-го століття, коли Леонард Ойлер винайшов графи як спрощену модель взаємозв'язків між об'єктами. У 1736 році він опублікував розв'язок знаменитої задачі про мости Кенігсберга (Euler, 1736), чим поклав початок теорії графів і орієнтованих графів зокрема. Самі орієнтовані графи слугують дуже наочними й зручними моделями для математичного опису й дослідження різних процесів, що нас оточують. У більшості книг із класичної теорії графів (таких, як (Bondy & Murty, 2009), (Harary, 1969), (West, 2002)) завжди є розділ про орієнтовані графи, де наведено основні теоретичні результати, необхідні для подальшого розвитку цього наукового напряму. Мотивацією розгляду орієнтованих графів із одним джерелом і одним стоком слугували транспортні мережі – напрямлені структури із заданим потоком. Моделювання мереж орграфами з подальшим дослідженням (зокрема, оптимізаційні задачі) почалося зі статті (Harris & Ross, 1956). Основні теоретичні відомості та результати в темі мережевих потоків описані в класичній книзі (Ford & Fulkerson, 1962).

Статтю структуровано наступним чином. У пункті другому наведено базові означення теорії орієнтованих графів і попередні відомі результати, опрацьовані для отримання нових тверджень, узагальнень і занурень абстракцій у прикладний контекст. Строго введено нові бінарні операції на орієнтованих графах із рівно одним джерелом і рівно одним стоком – це конкатенація (Означення 1) та мультиплікація (Означення 2). Конкатенація орієнтованих графів є частковим випадком поняття послідовного *з*'єднання графів із виділеними вершинами (див. (Büsing, Koster & Schmitz, 2022) , (Valdes, Tarjan & Lawler, 1982)), а мультиплікація є новою концепцією, що виникла внаслідок бажання узагальнити операції додавання і множення натуральних чисел на складніші об'єкти.

У третьому і четвертому пунктах висвітлено результати проробленого дослідження у трьох різних перерізах, описано властивості введених бінарних операцій та їхній зв'язок. У п'ятому пункті сформульовано й доведено критерії існування королів для конкатенації (Теорема 1) та мультиплікації (Теорема 2).

У шостому пункті введено операції конкатенації та мультиплікації на транспортних мережах із потоками, встановлено умови для допустимого потоку на результуючих мережах.

Актуальність даної роботи полягає у тому, що нові операції конкатенації та мультиплікації орієнтованих графів розширюють операції додавання та множення натуральних чисел. Отримана алгебраїчна структура (множина орієнтованих графів із цими двома операціями) має нетривіальні властивості (наприклад, жодна з операцій не є комутативною, і тут виконується лише один із двох дистрибутивних законів), які потребують ґрунтовного дослідження. Результати, отримані в роботі, є першим кроком до подальших досліджень у цій області. Вони можуть бути застосовані до дослідження транспортних мереж, а саме: "розбиття" мережі на менші мережі через конкатенацію та мультиплікацію, і навпаки.

Основною задачею і метою роботи є дослідити введені нами бінарні операції, їх властивості, властивості орграфів при дії цих операцій, вивчення графових параметрів та прикладного застосування отриманих результатів.

Об'єктом дослідження є слабко зв'язні, прості орієнтовані графи з рівно одним джерелом і рівно одним стоком.

Предметом дослідження є дві нові бінарні операції: конкатенація і мультиплікація.

2. Основні означення

Орієнтованим графом (або коротко *орграфом*) називається впорядкована пара $D = (V, A)$, де V – множина довільної природи, елементи якої називаються *вершинами*, а $A \subset V \times V$ – множина впорядкованих пар вершин, що називаються *дугами* або *стрілками*. На письмі позначатимемо коротко uv або $u \to v$. Для дуги $e = (u, v)$ будемо казати, що u є її *початком*, а v – *кінцем*. Записувати це коротко будемо так: $u = t(e)$, $v = h(e)$ від англійських слів *tail* і *head*, що є загальноприйнятим для позначення цих вершин. *Дезорієнтацією* орграфа D називається неорієнтований граф $[D]$, який отриманий із D "забуванням" стрілок.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Степенем входу $d^-(u)$ вершини u називається кількість дуг, для яких u є кінцем. *Степенем виходу* $d^+(u)$ вершини u називається кількість дуг, для яких u є початком.

Джерелом в орграфі називається вершина, степінь входу якої дорівнює нулю. *Стоком* в орграфі називається вершина, степінь виходу якої дорівнює нулю.

Усі орграфи в роботі є скінченними та *слабко зв'язними*, що означає, що дезорієнтація такого орграфа є зв'язним неорієнтованим графом.

Знак "=" між орграфами означає *ізоморфізм*, тобто взаємно однозначну відповідність між вершинами, що зберігає дуги в обидва боки.

Об'єктами нашого дослідження є слабко зв'язні орієнтовані графи, що мають рівно одне джерело і рівно один стік. Множину таких орграфів позначимо $\mathcal{A}$. Оскільки кожен $D \in \mathcal{A}$ має рівно одне джерело і рівно один стік, введемо позначення s_D – джерело, а t_D – стік у D.

Однією з ключових задач даної роботи було сформулювати та дослідити аналоги операцій додавання та множення натуральних чисел для орієнтованих графів. У роботі (Valdes, Tarjan & Lawler, 1982) було введено операцію послідовного з'єднання (series composition) орієнтованих графів, які можуть мати більше одного джерела та стоку. Взявши за основу це поняття та провівши різні експериментальні побудови, було прийнято рішення оперувати орграфами із рівно одним джерелом і одним стоком. Зокрема, і тому, що орграф, отриманий шляхом такого з'єднання, також матиме рівно одне джерело і рівно один стік. Тому, введемо наступне означення.

Означення 1. *Конкатенацією (series composition) двох орграфів* $D, G \in \mathcal{A}$ *називається орграф* $D \boxplus G$*, у якого:*

$$V(D \boxplus G) = V(D - t_D) \sqcup V(G - s_G) \sqcup \{b_{(t_D, s_G)}\},$$

$$A(D \boxplus G) = A(D - t_D) \sqcup A(G - s_G) \sqcup$$

$$\sqcup \{(x, b_{(t_D, s_G)}) \mid x \in N^-(t_D)\} \sqcup \{(b_{(t_D, s_G)}, x) \mid x \in N^+(s_G)\}.$$

Тобто $D \boxplus G$ утворений шляхом ототожнення стоку t_D із джерелом s_G. Відповідну вершину в новоутвореному графі називатимемо *точкою з'єднання* і позначатимемо $b_{(t_D, s_G)}$.

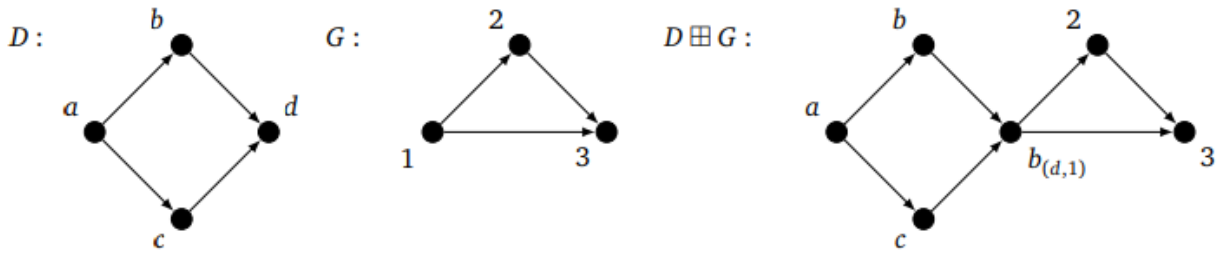


Рис. 1. Орграфи D, G та $D \boxplus G$

Приклад 1. *Нехай орграфи D і G такі:*

$$V(D) = \{a, b, c, d\}, \qquad A(D) = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$$

$$V(G) = \{1, 2, 3\}, \qquad A(G) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Тоді (рис. 1):

$$V(D \boxplus G) = \{a, b, c, b_{(d,1)}, 2, 3\},$$
$$A(D \boxplus G) = \{(a, b), (a, c), (b, b_{(d,1)}), (c, b_{(d,1)}), (b_{(d,1)}, 2), (b_{(d,1)}, 3), (2, 3)\}.$$

Наступний результат є очевидним із означення конкатенації.

Спостереження 1. *Якщо ототожнити орієнтований ланцюг P_n із числом $n-1$ (яке відповідає кількості дуг у ланцюгу), то операція $\boxplus$ буде в точності відповідати операції $+$ на множині $\mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Дійсно,

$$k + m - 2 = (k - 1) + (m - 1) \equiv P_k \boxplus P_m = P_{k+m-1} \equiv k + m - 2.$$

Означення 2. *Мультиплікацією двох орграфів $D, G \in \mathcal{A}$ називається орграф $D \boxdot G$ у якого:*

$$V(D \boxdot G) = \{v' \mid v \in V(D)\} \sqcup \{u'_e \mid u \in V(G) \setminus \{s_G, t_G\}, e \in A(D)\},$$

$$A(D \boxdot G) = \{u'_e v'_e \mid uv \in A(G), e \in A(D)\} \sqcup$$

$$\sqcup \{v' u'_e \mid u \in N^+(s_G), v = t(e), e \in A(D)\} \sqcup$$

$$\sqcup \{u'_e\, v' \mid u \in N^-(t_G), v = h(e), e \in A(D)\}.$$

Приклад 2. *Нехай в орграфі D: $V(D) = \{a, b, c\}$, $A(D) = \{e_1 = ab\,, e_2 = bd\,, e_3 = ad\}$, а в орграфі G: $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $A(G) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.*

Тоді (рис. 2):

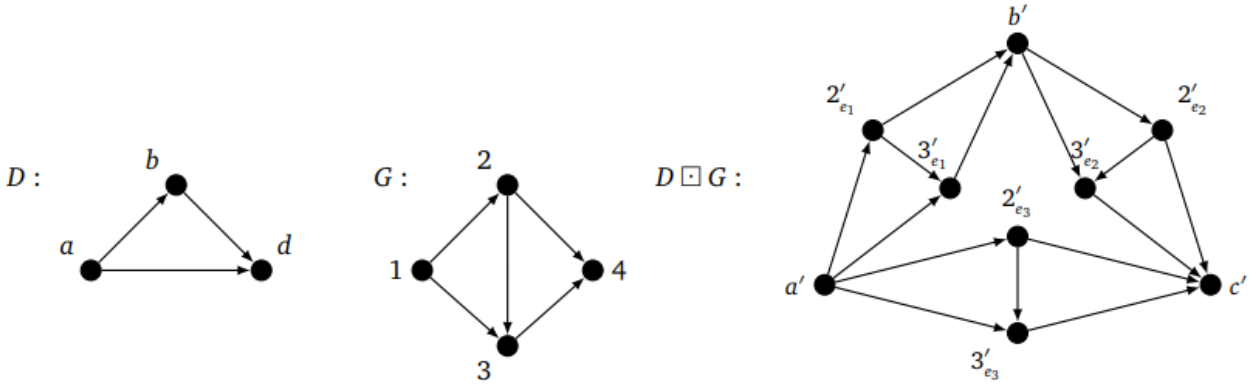


Рис. 2. Орграфи D, G та $D \boxdot G$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$V(D \boxdot G) = \{a', b', c'\} \sqcup \{2'_{e_1}, 3'_{e_1}\} \sqcup \{2'_{e_2}, 3'_{e_2}\} \sqcup \{2'_{e_3}, 3'_{e_3}\},$$

$$A(D \boxdot G) = \{(2'_{e_1}, 3'_{e_1}), (2'_{e_2}, 3'_2), (2'_{e_3}, 3'_{e_3})\} \sqcup \{(a', 2'_{e_1}), (a', 3'_{e_1})\} \sqcup$$

$$\sqcup \{(b', 2'_{e_2}), (b', 3'_{e_2})\} \sqcup \{(a', 2'_{e_3}), (a', 3'_{e_3})\} \sqcup \{(2'_{e_1}, b'), (3'_{e_1}, b')\} \sqcup$$

$$\sqcup \{(2'_{e_2}, c'), (3'_{e_2}, c')\} \sqcup \{(2'_{e_3}, c'), (3'_{e_3}, c')\}.$$

Наступний результат є простим, і слідує з означення мультиплікації.

Твердження 1. *Якщо в орграфі $D \in \mathcal{A}$ кількість вершин дорівнює n_D, а дуг – e_D, а в орграфі $G \in \mathcal{A} - n_G$ вершин і e_G дуг, то в орграфі $D \boxdot G$ буде $n_D + (n_G - 2) \cdot e_D$ вершин і $e_D \cdot e_G$ дуг.*

3. Властивості конкатенації

Для введеної операції конкатенації на орієнтованих графах у пошуках аналогії з додаванням натуральних чисел досліджено її властивості, зокрема наявність нейтрального та одиничного елементів.

Твердження 2. *Конкатенація має такі властивості:*

1. Орграф-вершина P_1 є нейтральним елементом;

2. Для довільних ланцюгів P_k, P_m справедливо $P_k \boxplus P_m = P_m \boxplus P_k$;

3. Асоціативність: для всіх орграфів D_1, D_2, D_3 із $\mathcal{A}$ справедливо, що

$$(D_1 \boxplus D_2) \boxplus D_3 = D_1 \boxplus (D_2 \boxplus D_3).$$

Доведення. Дійсно, за означенням конкатенації, орграф-вершина P_1 буде просто ототожнюватися з джерелом або зі стоком орграфа D, тож $\forall D \in \mathcal{A}$:

$$D \boxplus P_1 = P_1 \boxplus D = D.$$

2. Справді, згідно зі Спостереженням 1, для довільних ланцюгів P_k, P_m справедливо $P_k \boxplus P_m = P_{k+m} = P_{m+k} = P_m \boxplus P_k$. Тобто, дійсно, ланцюги поводять себе, як натуральні числа, комутуючи відносно додавання.

3. За означенням конкатенації результатом операції $D_1 \boxplus D_2$ буде копія орграфа D_1, з'єднана через точку з'єднання з D_2 . Після конкатенації з D_3 буде отримано орграф, у якому по черзі йтимуть D_1, D_2, D_3 із ототожненими стоком D_1 із джерелом D_2 та стоком D_2 із джерелом D_3. Якщо ж спочатку сконкатенувати D_2 і D_3, то вийде копія орграфа D_2, з'єднана через точку з'єднання з D_3. Після конкатенації з D_1 зліва буде отримано орграф, у якому по черзі йтимуть D_1, D_2, D_3 із ототожненими стоком D_1 із джерелом D_2 та стоком D_2 із джерелом D_3.

■

Зауваження 2. *Таким чином, можна коректно ввести позначення nD для натуральних чисел n та $D \in \mathcal{A}$, і казати, що орграф $G \in \mathcal{A}$ є кратним деякому іншому орграфу D, якщо $G = nD$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

4. Властивості мультиплікації

Оскільки ми ввели узагальнене додавання, мультиплікація відіграє роль узагальненого множення, задовольняючи деякі природні властивості, включно з існуванням нейтрального та нульового елементів:

Твердження 3. *Мультиплікація має такі властивості:*

1. Орграф-дуга P_2 є нейтральним елементом;

2. Орграф-вершина P_1 є нульовим елементом;

3. Асоціативність: для всіх орграфів D_1, D_2, D_3 із $\mathcal{A}$ справедливо, що

$$(D_1 \boxdot D_2) \boxdot D_3 = D_1 \boxdot (D_2 \boxdot D_3).$$

4. Дистрибутивність справа відносно конкатенації.

Доведення. 1. Дійсно, за означенням при мультиплікації справа кожна дуга довільного орграфа D замінюватиметься на дугу, таким чином D не зміниться. При мультиплікації зліва P_2 замінятиметься на орграф D, тобто також D не зміниться: $\forall D \in \mathcal{A}$: $D \boxdot P_2 = P_2 \boxdot D = D$.

2. Дійсно, за означенням при мультиплікації справа кожна дуга довільного орграфа D замінюватиметься на вершину, таким чином, у D не залишиться дуг, тобто, він сам перетвориться на вершину P_1. При мультиплікації зліва, кожна дуга P_1 має замінятися на орграф D, проте у P_1 немає дуг. Таким чином, $\forall D \in \mathcal{A}$: $D \boxdot P_1 = P_1 \boxdot D = P_1$.

3. Розглянемо $(D_1 \boxdot D_2) \boxdot D_3$. Першою дією усі дуги орграфа D_1 замінюються на копії орграфа D_2. Другою дією усі дуги отриманого орграфа (по суті, це всі дуги всіх копій D_2) замінюються на орграф D_3.

Тепер розглянемо $D_1 \boxdot (D_2 \boxdot D_3)$. Першою дією усі дуги орграфа D_2 замінюються на копії орграфа D_3. Другою дією усі дуги орграфа D_1 замінюються на копії отриманого в першій дії орграфа. Бачимо, що в обох випадках вийшли орграфи з ідентичною структурою: кожна дуга орграфа D_1 замінена на орграф D_2, кожна дуга якого замінена на D_3.

4. Розглянемо $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$. За означенням, у результаті першої операції отримаємо такий орграф: копія орграфа D_1, з'єднана через точку з'єднання з D_2. При мультиплікації з D_3 справа усі дуги $D_1 \boxplus D_2$ замінюватимуться на копії орграфа D_3.

Якщо ж спочатку виконати операції $D_1 \boxdot D_3$, то отримаємо D_1, усі дуги якого замінені на копії орграфа D_3. У результаті операції $D_2 \boxdot D_3$ аналогічно отримаємо D_2, усі дуги якого замінені на копії орграфа D_3. Сконкатенувавши два отримані орграфи, отримаємо те саме, що і в $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$. Отже,

$$(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3 = (D_1 \boxdot D_3) \boxplus (D_2 \boxdot D_3).$$

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Проілюструємо асоціативність операції мультиплікації.

Приклад 3. *Нехай D_1, D_2 і D_3 такі, як зображені на рисунку 3.*

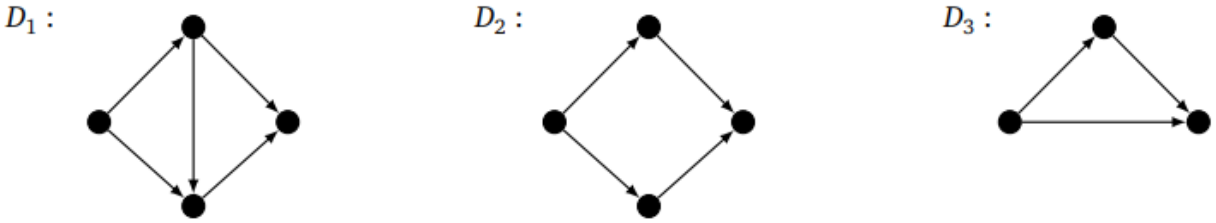


Рис. 3. Орграфи D_1, D_2 і D_3

Тоді результат $(D_1 \boxdot D_2) \boxdot D_3$ і $D_1 \boxdot (D_2 \boxdot D_3)$ буде таким як на рисунку 4.

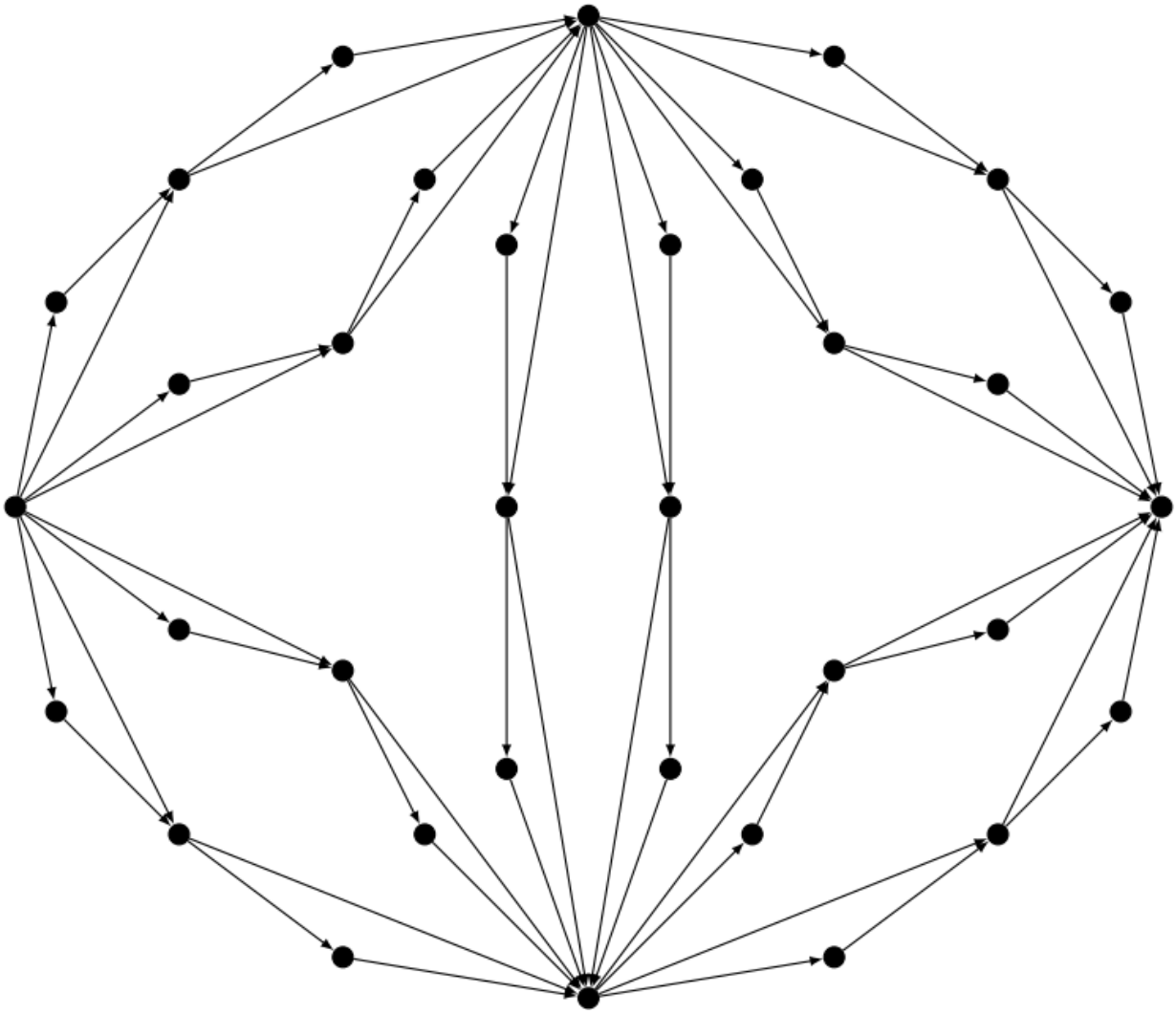


Рис. 4. : Результат мультиплікації $D_1 \boxdot D_2 \boxdot D_3$

Наступний приклад ілюструє дистрибутивність справа мультиплікації відносно конкатенації.

Приклад 4. *Нехай D_1, D_2 і D_3 такі, як зображені на рисунку 5.*

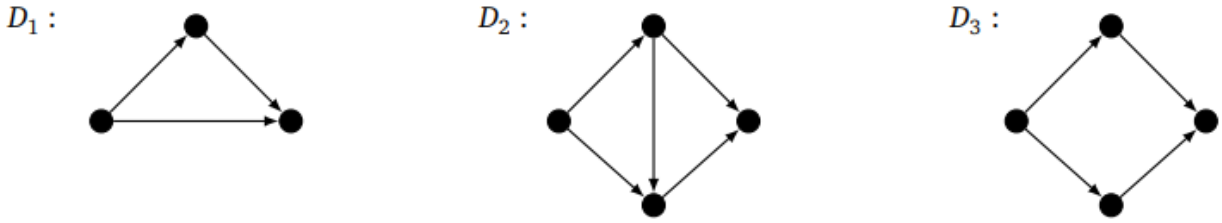


Рис. 5. Орграфи D_1, D_2 і D_3

Тоді результати $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$ і $(D_1 \boxdot D_3) \boxplus (D_2 \boxdot D_3)$ будуть такими як на рисунках 6 та 7 відповідно.

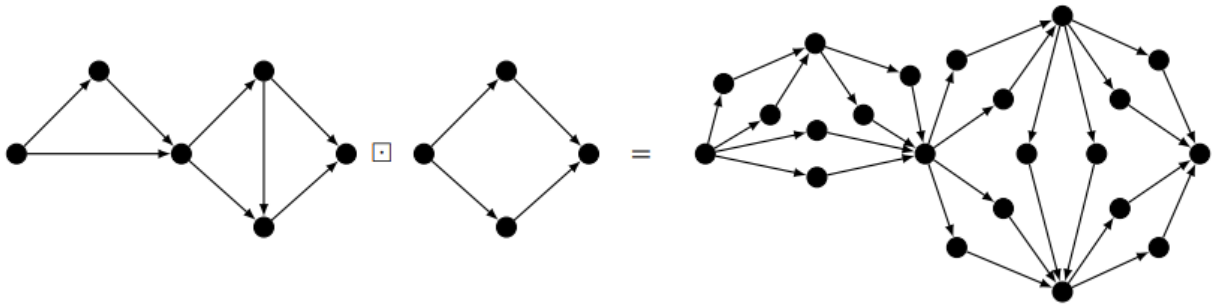


Рис. 6. : Результат мультиплікації $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$

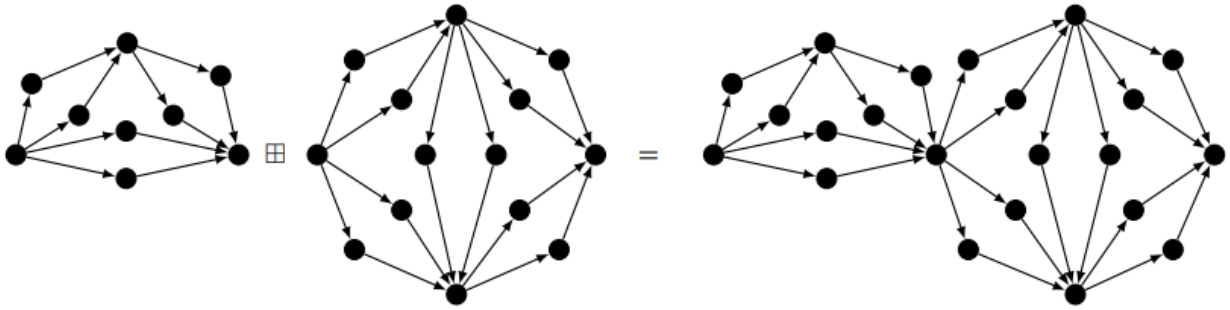


Рис. 7. Результат операцій $(D_1 \boxdot D_3) \boxplus (D_2 \boxdot D_3)$

Приклад 5. *Розглянемо орграф D – трикутник, і побудуємо $D \boxdot (D \boxplus D)$ (рис. 8) та $(D \boxdot D) \boxplus (D \boxdot D)$ (рис. 9). Бачимо, що в результаті вийшли два зовсім різні орграфи.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

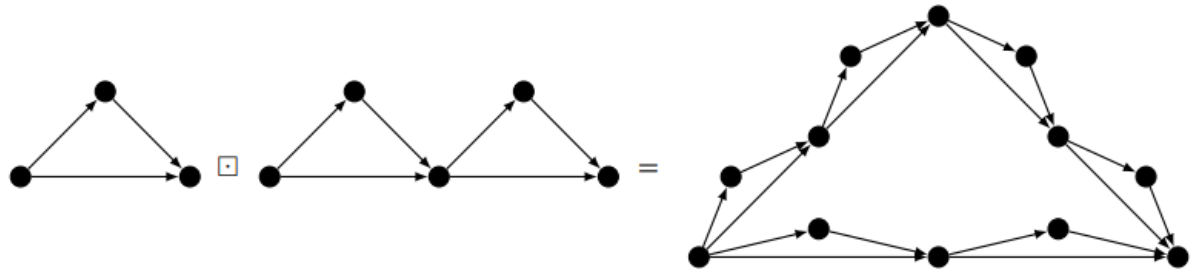


Рис. 8. Результат мультиплікації $D \boxdot (D \boxplus D)$

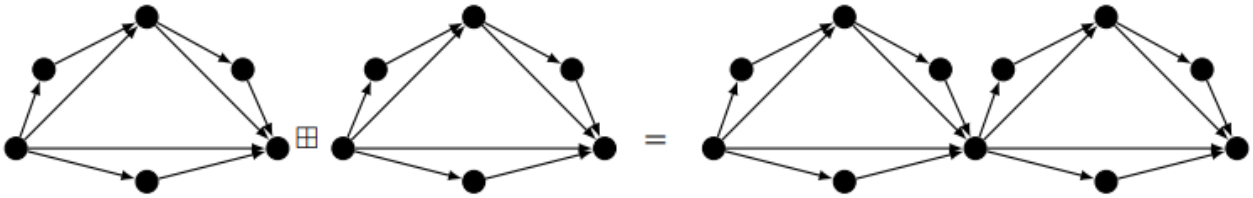


Рис. 9. Результат операцій $(D \boxdot D) \boxplus (D \boxdot D)$

У загальному випадку ми отримали наступне спостереження.

Спостереження 2. *Якщо орграф $D_3 \in \mathcal{A}$ такий, що його дезорієнтація є двозв'язним графом (тобто щоб отримати з нього незв'язний граф, необхідно видалити принаймні дві вершини), то дезорієнтація $[D_3 \boxdot (D_1 \boxplus D_2)]$ не матиме точок з'єднання, а $[(D_3 \boxdot D_1) \boxplus (D_3 \boxdot D_2)]$ матиме рівно одну.*

Наслідок 1. *Операції мультиплікації та конкатенації узгоджені в наступному сенсі: $nD = P_{n+1} \boxdot D$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $D \in \mathcal{A}$.*

Доведення. Доведемо методом математичної індукції.

База: $n = 1$. Справді, бо $D = P_2 \boxdot D$.

Крок: нехай $n > 2$. Тоді за означенням nD (Зауваження 2): $nD = D \boxplus (n-1)D$. За припущенням індукції $(n-1)D = P_n \boxdot D$. Тоді $nD = D \boxplus (P_n \boxdot D)$. Скориставшись ще раз рівністю $D = P_2 \boxdot D$ та дистрибутивністю справа мультиплікації відносно конкатенації (Твердження 3, властивість 4), отримаємо наступне:

$$nD = (P_2 \boxdot D) \boxplus (P_n \boxdot D) = (P_2 \boxplus P_n) \boxdot D = P_{n+1} \boxdot D.$$

■

Це є аналогом очевидної властивості додавання та множення натуральних чисел: $nd = d + \cdots + d$ (сума береться n раз).

5. Теореми про королів

Розглянемо тепер задачу існування королів для орграфів, отриманих внаслідок застосування операцій конкатенації та мультиплікації орграфів із класу $\mathcal{A}$. Нагадаємо, що *королем* в орграфі називається вершина, із якої існують орієнтовані шляхи до кожної іншої вершини, і довжини найкоротших таких шляхів не перевищують 2. Це

поняття виникло через дослідження Ландау (Landau, 1953) явища домінування в зграях тварин. У цій же роботі він довів, що у будь-якому повному орієнтованому графі K_n (які ще називаються *турнірами*) обов'язково буде король. Задача існування короля в орграфі виникає при дослідженні поведінки тварин, задіюючи також і теорію ймовірностей. Наприклад, у статті (Maurer, 1980) розглядаються курячі зграї та ймовірність того, що серед n курок знайдеться k "курячих королів". Також мають місце обернені задачі.

Розглядаючи операції конкатенації та мультиплікації, одержимо питання дослідження і таких різних тем, пов'язаних із орграфами. Тому ми дослідили й повністю описали орграфи, отримані внаслідок застосування операцій конкатенації та мультиплікації, що мають королів. З означення елементів $\mathcal{A}$ відразу випливає наступний простий результат.

Лема 1. *Якщо орграф $D \in \mathcal{A}$ має короля, то ним є s_D, і цей король єдиний.*

Доведення. Справді, із жодної вершини $v \neq s_D$ немає орієнтованого шляху в s_D.

■

Наступна теорема характеризує пари орграфів із $\mathcal{A}$, конкатенація яких має короля.

Теорема 1. *Нехай $D \in \mathcal{A}$ і $x \in V(D)$ – король в D. Тоді для $G \in \mathcal{A}$ орграф $D \boxplus G$ матиме короля тоді й лише тоді, коли*

1. $G = K_1$, або

2. $N^+(s_G) = V(G)\backslash\{s_G\}$ і $(x, t_D) \in A(D)$.

Умова 2 означає, що джерело в G суміжне з усіма вершинами G, і в D є дуга з джерела в стік.

Доведення. Достатність. Якщо $G = K_1$, то $D \boxplus G = D$ має короля. Якщо $G \neq K_1$, позначимо точку з'єднання $b_{(t_D, s_G)}$ через s.

Оскільки $N^+(s_G) = V(G)\backslash\{s_G\}$, то $\forall y \in V(G - s)$: $d(s, y) = 1$. Зауважимо, що s лежить на всіх шляхах із x в G. Оскільки $d(x, s) = 1$, то $\forall y \in V(G - s)$: $d(x, y) = 2$. Таким чином, x – король в $D \boxplus G$.

Необхідність. По-перше, оскільки $x \in V(D)$ – король, то x – джерело. Розглянемо відстань від x до s (тобто, $b_{(t_D, s_G)}$).

- Якщо $d(x, s) = 2$, то $d(x, G - s) > 2$. Тоді в $D \boxplus G$ є король тоді й лише тоді, коли $V(G) = \{s\}$, тобто $G = K_1$.
- Якщо $d(x, s) = 1$, то x є королем в $D \boxplus G$ тоді й лише тоді, коли
  1. існують шляхи із s до будь-якої вершини $y \in V(G)$,
  2. $d(s, y) \leq 1$, $\forall y \in V(G)$.

Дійсно, якщо $d(x, s) = 1$ і x є королем в $D \boxplus G$, то пункти 1 і 2 виконуються за означенням короля. З іншого боку, якщо $d(x, s) = 1$ і виконуються пункти 1 і 2, то $d(x, y) \leq 2$, $\forall y \in V(G)$.

■

Лема 2. *Нехай $D \in \mathcal{A}$ має короля, причому $D \neq P_2$. Тоді в D існує ланцюг P_3, що починається з s_D.*

Доведення. Позаяк $D \neq P_2$ і D слабко зв'язний, то існує вершина $w \in V(D)\backslash\{s_D, t_D\}$ така, що $s_D \to w$ або $w \to t_D$. Якщо $s_D \to w$, то, оскільки $w \neq t_D$, існує такий x, що $w \to x$. Маємо ланцюг P_3, що починається в s_D: $s_D \to w \to x$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Нехай тепер $w \to t_D$. Оскільки s_D – король в D, то відстань $d_D(s_D, w) \leq 2$. Якщо $d_D(s_D, w) = 1$, то $s_D \to w$, і $s_D \to w \to t_D$ – ланцюг P_3, що починається в s_D. Якщо ж $d_D(s_D, w) = 2$, то будь-який найкоротший ланцюг від s_D до w матиме довжину 2, тобто, в D буде P_3.

■

Для операції мультиплікації орграфів маємо наступний результат.

Теорема 2. *Нехай $D, G \in \mathcal{A}$. Тоді орграф $D \boxdot G$ має короля тоді й лише тоді, коли D має короля і*

1. якщо в D існує $u \in V(D) \backslash \{t_D\}$ із $d_D(s_D, u) = 2$, то $G = P_2$;

2. якщо в D є ланцюг P_3, що починається з s_D, то $N^+(s_G) = V(G) \backslash \{s_G\}$;

3. якщо $D = P_2$, то G має короля.

Доведення. Достатність. Покажемо, що за виконання умов 1–3, $s_{D \boxdot G}$ є королем у $D \boxdot G$. Із третьої умови відразу випливає, що якщо $D = P_2$, то $D \boxdot G = G$ має короля. Припустимо, $D \neq P_2$. Тоді, за лемою 2, у D є ланцюг P_3, що починається з s_D. Розглянемо довільну вершину $x \in V(D \boxdot G)$. За означенням мультиплікації, маємо наступні випадки.

Випадок 1: $x = u'$ для деякого $u \in V(D)$. Тоді, оскільки D має короля, то цим королем є s_D (Лема 1). Отже, в D є шлях із s_D до u довжини ≤ 2. Враховуючи те, що у D є ланцюг P_3, що починається з s_D, за умовою 2 у G є дуга $s_G \to t_G$, а отже, $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = d_D(s_D, u) \leq 2$.

Випадок 2: $x = u'_e$ для деяких $u \in V(G)$ і $e \in A(D)$. Нехай e – це дуга $v \to w$. Тоді за побудовою $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, v') + d_G(s_G, u)$. Оскільки s_D – король у D, то $d_D(s_D, v) \leq 2$.

- Якщо $d_D(s_D, v) = 2$, то за умовою 1, $G = P_2$, тому $D \boxdot G = D$ має короля.
- Якщо $d_D(s_D, v) = 1$, тоді, оскільки s_G є універсальною вершиною в G, $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, v') + d_G(s_G, u) = 1 + 1 = 2$.
- Якщо $d_D(s_D, v) = 0$, то $s_D = v$ і вершина x належить копії G, що розташовується на дузі $s_D \to w$. Оскільки s_G є універсальною вершиною в G, то $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = 1$.

Бачимо, що в обох випадках відстань від $s_{D \boxdot G}$ до x не перевищує 2. Отже, $s_{D \boxdot G}$ є королем в $D \boxdot G$.

Необхідність. Нехай в $D \boxdot G$ є король.

Покажемо, що в D є король. Точка з'єднання $b(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)})$ двох копій орграфа G, розміщених на дугах e_1 і e_2 орграфа D відповідає вершині $h(e_1)$ в D. Тобто вершини, по яких "склеюються" копії G в $D \boxdot G$, відповідають нетривіальним вершинам (не стоку й не джерелу) в D. Оскільки в $D \boxdot G$ є король – це джерело $s_{D \boxdot G}$ (див. Лему 1), то $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) \leq 2$, де x – точка з'єднання копій G вигляду $b\left(t_{G(e_i)}, s_{G(e_j)}\right)$. А отже, і в орграфі D справедливо, що $d_D(s_D, y) \leq 2$ для будь-якої вершини $y \in V(D)$.

- Якщо в D є вершина u на відстані 2 від джерела, і яка при цьому не є стоком, то вона є початком якоїсь наступної дуги (з означення стоку) uv. Якщо в G є нетривіальні вершини, то в $G(uv)$ є вершина x така, що $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) > 2$.

Дійсно, $d_{D\boxdot G}\left(s_{D\boxdot G}, x\right) = 2$. Ця відстань не може дорівнювати 1, адже в орграфі D вершині $s_{G(uv)}$ відповідає вершина u на відстані 2 від джерела. Таким чином, у G немає нетривіальних вершин. Тобто, $G = P_2$.

- Якщо в D є ланцюг P_3, що починається з джерела, покажемо, що s_G є універсальною вершиною в G. Зафіксуємо такий P_3 і позначимо його дуги за e_1, e_2. Припустимо, що в G є вершина y, у яку не йде дуга з s_G. Тоді $d_G(s_G, y) \geq 2$. Розглянемо відповідний їй y' в копії $G(e_2)$:

$$d_{D\boxdot G}\left(s_{D\boxdot G}, y'\right) = d_{D\boxdot G}\left(s_{D\boxdot G}, b\left(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)}\right)\right) + d_{D\boxdot G}\left(b\left(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)}\right), y'\right) =$$

$$= d_{D\boxdot G}\left(s_{D\boxdot G}, b\left(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)}\right)\right) + d_G(s_G, y) \geq 3.$$

Суперечність. Король не може бути так далеко. Тому всі нетривіальні вершини з'єднані з джерелом. А отже, s_G – універсальна вершина в G.

Зрештою, якщо $D = P_2$, то $G = D \boxdot G$ має короля.

■

6. Мережеві потоки

Розглянемо мережу труб, де клапани пропускають потоки лише в одному напрямку. Кожна труба має пропускну здатність на одиницю часу. Ми моделюємо це за допомогою вершин для кожного з'єднання та зваженої дуги для кожної труби. Ми також припускаємо, що потік не може затримуватися й накопичуватися у вершині. Маючи джерело s та стік t у мережі, питання пошуку допустимого та максимального потоку виникає в багатьох контекстах.

Мережа може представляти дороги з інтенсивністю руху, або зв'язки в комп'ютерній мережі з можливостями передачі даних, або струми в електричній мережі. Також знаходяться застосування в промислових умовах і комбінаторних теоремах мінімального та максимального значення. Моделювання транспортних мереж орграфами та перші задачі вперше зустрічаються 1955 року в секретному науковому документі (Harris & Ross, 1956). Пізніше, уже в 1962 році, було сформовано теорію і написано класичну книгу про мережеві потоки Л. Фордом і Д. Фалкерсоном (Ford & Fulkerson, 1962).

Означення 3. *Мережею називається орієнтований граф із виділеними єдиними джерелом s та стоком t, кожна дуга якого має невід'ємну вагу, що називається ємністю або пропускною здатністю і позначається $c(e)$.*

Означення 4. *Потоком на мережі називається функція $f(e)$, яка ставить у відповідність кожній дузі невід'ємне число (тобто це кількість "речовини", що "тече" по дузі). Позначатимемо (D, f) – мережа з потоком.*

Для кожної вершини v орграфа мережі позначимо $f^+(v)$ – загальна сума вихідного потоку, та $f^-(v)$ – сума потоків на дугах, що входять у v.

Потік є *допустимим*, якщо він задовольняє дві умови:

1. $0 \leq f(e) \leq c(e)$ для всіх дуг e – закон обмеження ємності;

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. $f^+(v) = f^-(v)$ для всіх вершин, окрім джерела і стоку – закон збереження потоку. Бачимо, що мережі моделюються саме орграфами з досліджуваної множини $\mathcal{A}$. Тому в нас виникло запитання: що можна сказати про потоки на конкатенаціях чи мультиплікаціях мереж?

Введемо ще означення для того, щоб можна було порівнювати потоки.

Означення 5. *Значенням допустимого потоку f називається число $val(f) = f^+(s)$ або, що те саме, $f^-(t)$. Потік називається максимальним, якщо його значення є найбільшим із-поміж усіх допустимих.*

Введемо позначення $f \boxplus g$ – потік на конкатенації мереж (D, f) і (G, g). Він задається так, що $f \boxplus g = f$ на дугах копії D і $f \boxplus g = g$ на дугах копії G.

Для конкатенації очевидним є наступний результат.

Твердження 4. *Нехай на мережах D і G потоки f і g допустимі. Тоді на $D \boxplus G$ потік $f \boxplus g$ буде допустимий тоді й лише тоді, коли $val(f) = val(g)$.*

Доведення. Справді, для конкатенації мереж із допустимими потоками необхідно і достатньо виконання умови збереження потоку.

■

Якщо ж ми маємо дві мережі з різними значеннями потоків, то можна з'єднати їх конкатенацією як орграфи, але допустимий потік буде обмежуватися меншим із них.

Наслідок 2. *Нехай на мережах D і G потоки f і g допустимі. Тоді на $D \boxplus G$ існує допустимий потік зі значенням* $\min\big(val(f), val(g)\big)$.

Зауважимо, що це можливо, оскільки, маючи допустимий потік, завжди можна знайти менший за значенням допустимий потік. Доведення цього факту ми наводити не будемо, воно спирається на теорему про мінімальний розріз Форда–Фалкерсона, (Ford & Fulkerson, 1962, Theorem 5.1).

Для мультиплікації ситуація цікавіша. Треба формально означити, як ми множимо мережі. У загальному випадку, оскільки наші орграфи мають рівно одне джерело і рівно один стік, і ми, відповідно, можемо заміняти дуги одного орграфа на копії іншого орграфа, то аналогічним чином можна "насаджувати" на один орграф цілу транспортну мережу з допустимим потоком. Тому постає питання, як, маючи потоки на D і G, задати потік на $D \boxdot G$. Розглянемо конструкцію, за допомогою якої можна ввести допустимий потік на мультиплікації двох мереж із допустимими потоками.

Означення 6. *Нехай (D, f) і (G, g) – мережі з заданими потоками, c_D і c_G – функції пропускної здатності відповідно. Мультиплікацією цих двох мереж буде орграф $D \boxdot G$, на якому потік визначений таким чином: якщо на дузі $e \in A(D)$ потік f набуває значення $f(e)$, то на копії $G(e)$ орграфа G всі значення потоків на дугах будуть множитися на $f(e)$.*

Позначати цей потік будемо $f \boxdot g$. Пропускна здатність для кожної дуги отриманої мережі буде обчислюватися за формулою

$$c_{D \boxdot G}(e) = c_D(e') \cdot c_D(e''),$$

де e' – відповідна дуга в мережі D, а e'' – дуга в мережі G, копією якої є e.

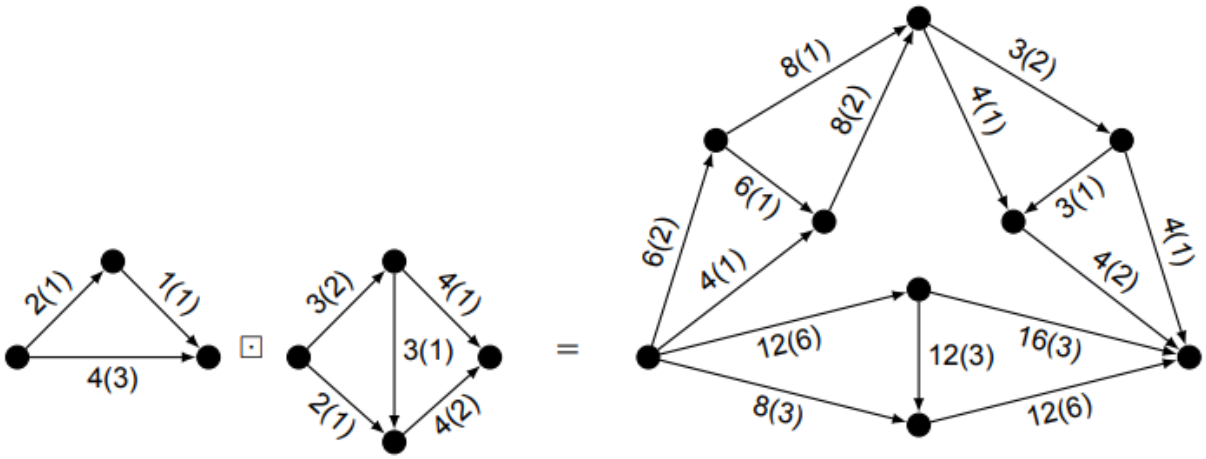


Рис. 10. Результат мультиплікації $D \boxdot G$

Приклад 6. *Проілюструємо на прикладі, як відбувається мультиплікація мереж (рис. 10). Графічно прийнято зображувати транспортні мережі як орграфи, дуги яких помічені* $c(f)$, *де* $c = c(e)$, $f = f(e)$.

Маючи таке означення мультиплікації, отримуємо наступний результат.

Твердження 5. *Для мультиплікації* $D \boxdot G$ *двох мереж потік* $f \boxdot g$ *буде допустимим тоді лише тоді, коли допустимими є і* f, *і* g.

7. Висновки

У роботі проведено ґрунтовне дослідження двох бінарних операцій на множині $\mathcal{A}$ орієнтованих графів із рівно одним джерелом і рівно одним стоком. Операції конкатенації та мультиплікації (Означення 1 та 2) є узагальненням операцій додавання і множення натуральних чисел. Отримана структура $(\mathcal{A}, \boxplus, \boxdot)$ має безліч алгебраїчних властивостей. Окрім опису алгебраїчної структури, отримано описи орграфів, для яких конкатенація або мультиплікація матиме короля (Теореми 1 та 2). Орієнтовані графи із розглядуваного класу $\mathcal{A}$ слугують моделями транспортних мереж. Тому введено операції конкатенації та мультиплікації мереж із заданими потоками та надано умови для допустимості потоків на отриманих мережах.

Введені в роботі бінарні операції на орграфах відкривають нові ідеї для подальших досліджень. Дистрибутивність конкатенації відносно мультиплікації справа, при недистрибутивності зліва, заслуговує на детальніший розгляд, як і підклас орієнтованих ланцюгів. Оскільки для ланцюгів справедлива комутативність розглядуваних операцій, то для них справедлива і дистрибутивність мультиплікації відносно конкатенації зліва. Цікавою темою для подальшого дослідження є опис трійок орграфів із $\mathcal{A}$, для яких виконується дистрибутивність зліва. Також варто дослідити потоки на турнірах та роль ациклічності орграфів у контексті застосування до транспортних мереж.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Список використаних джерел

Bondy A., Murty U. S. R. (2009). Graph Theory. Springer London. 655 p.

Büsing, C., Koster, A, M. C. A., Schmitz, S. (2022). Robust minimum cost flow problem under consistent flow constraints. Ann. Oper. Res., 312(2), 691–722.

Euler L. (1736). Solutio problematis ad geometriarn situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8, 128–140.

Ford, L. R., Jr., Fulkerson, D. R. (1962). Flows in networks. Princeton University Press, Princeton, NJ, xii+194 p.

Harary F. (1969). Graph Theory. Addison–Wesley Publishing, 274 p.

Harary F., Norman R. Z., Cartwright D. (1965). Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. Wiley, 415 p.

Harris, T. E., Ross, F. S. (1956). “Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities” (U) The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1573, October 24, (Secret).

Landau, H. G. (1953). On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure. Bull. Math. Biophys. 15, 143–148.

Maurer S. B. (1980). The King Chicken Theorems, Mathematics Magazine, 53(2), 67–80.

Valdes, J., Tarjan, R. E., Lawler, E. L. (1982). The recognition of series parallel digraphs. SIAM J. Comput., 11(2), 298–313.

West D. B. (2002). Introduction to Graph Theory. Pearson Education, 589 p.

Отримано редакцією журналу: 26.02.2025
Прорецензовано: 28.03.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Kateryna ANTOSHYNA, PhD student
ORCID ID: 0009-0005-9221-1351
e-mail: kantoshyna@imath.kiev.ua
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv School of Economics, Kyiv, Ukraine

Sofiia KOVALEVSKA, 10-th grade student
e-mail: sofia.s.kovalevska@gmail.com
Kryvyi Rih Gymnasium №95, Kryvyi Rih, Ukraine

CONCATENATION AND MULTIPLICATION OF DIRECTED GRAPHS OF A SPECIAL CLASS

Abstract. *On the set of oriented graphs with exactly one sink and exactly one source, two binary operations are considered. Concatenation identifies the sink of the first digraph with the source of the second, while multiplication replaces all arcs of the first digraph with the second digraph, identifying the source with the start of an arc and the sink with the end. The set of studied graphs is closed under these two operations, and the collection of oriented paths with concatenation and multiplication operations forms a semiring isomorphic to the semiring of natural numbers. The paper analyzes previous works in the field of oriented graphs, particularly results related to the applied use of the studied class of graphs as models of transport networks. .The obtained theoretical results on the properties of the new operations and the descriptions of the kings of the resulting digraphs provide a foundation for further research, the development of generalizations, and the modeling of more complex systems for applied problems.*

Keywords: *directed graphs; binary operations; kings; transport networks; network flows.*

Математичний гурток

УДК 514.112 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.5**

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ангеліна ЧУБИКІНА, студентка
ORCID: 0009-0008-4340-6787
e-mail: chubykinaangelina@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

25 СПОСОБІВ ПІДКОРИТИ ТЕОРЕМУ ПІФАГОРА: ВІД КЛАСИКИ ДО СУЧАСНОСТІ

Геометрія володіє багатьма скарбами: один з них – це теорема Піфагора
Йоганн Кеплер

Анотація. *Читачам пропонується глибоке та всебічне дослідження теореми Піфагора, однієї з найвідоміших та найважливіших теорем геометрії. У статті представлено двадцять п'ять різних способів доведення цієї теореми, що охоплюють широкий спектр математичних методів та концепцій. Власне демонструється, що теорема Піфагора може бути доведена як із використанням класичних геометричних підходів, так і за допомогою сучасних математичних інструментів. Читачі зможуть ознайомитися з доведеннями, що базуються на метричних співвідношеннях у трикутнику, тригонометричних властивостях кутів, елементах векторної алгебри, властивостях кола, дотичної, хорди та січної, а також з більш складними доведеннями, що використовують диференціальні рівняння та механіку. Стаття буде цікава та корисна для широкого кола читачів, включаючи учнів старших класів, студентів математичних спеціальностей, вчителів математики та всіх, хто цікавиться історією та розвитком математичних знань.*

Ключові слова: *геометрія; теорема Піфагора; прямокутний трикутник; алгебра; диференціальні рівняння; механіка.*

1. Вступ

Теорема Піфагора була відома ще до Піфагора Самоського (близько 570 - 490 рр. до н.е.), але саме він вважається її автором та першим, хто дав їй строге математичне обґрунтування. Сучасні антикознавці обґрунтовано вважають, що Піфагор не написав жодного твору. Ба більше, інформація про життя та вчення Піфагора ґрунтується на відомостях із джерел, написаних через століття після його смерті. У створеній Піфагором однойменній школі як звеличували мудрість свого засновника, так і приписували йому всі досягнення наступних поколінь. Відтак встановити, кому ж саме належить те чи інше положення – Піфагору чи його послідовникам V-IV століть, – нині неможливо.

Безпосередні учні Піфагора також не залишили письмових свідчень про його вчення. Перша книга про піфагорійців та напрямки їх досліджень написана Філолаєм

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Кротонським (470 - 400 рр.), який народився через 20 років після смерті Піфагора. Піфагор та його учні займалися широким колом проблем. Це не тільки математика, але й філософія, музика та інші науки.

Піфагорійці вірили, що числа мають містичне значення та впливають на всі аспекти життя. Саме з нумерології Піфагора виникла ідея, згідно з якою навколишній фізичний світ є «матрицею», в основі якої лежать числа. У матриці немає можливості побачити числову суть буття. Числова сутність світу доступна душі після смерті, після виходу із тіла. Математика дає можливість пригадати колишній досвід і збагнути справжню реальність. У цьому контексті математика виступає основою метафізики.

Все ж легендарним математичним фактом, який невід'ємно асоціюють з Піфагором, є відома теорема про співвідношення сторін у прямокутному трикутнику. Вона має велике значення не лише в геометрії, а й в інших галузях математики – використовується для розв'язування багатьох задач, пов'язаних з прямокутними трикутниками, зокрема, для знаходження довжин сторін, площі та інших параметрів, обчислення відстаней, кутів, координат тощо. Теорема Піфагора також має застосування в фізиці, інженерії, будівництві та інших науках і прикладних сферах.

2. Основна частина

Теорема Піфагора є однією з найвідоміших теорем геометрії, яка встановлює співвідношення між сторонами прямокутного трикутника. Учні вивчають цю теорему у курсі геометрії 8 класу (Істер, 2021; Мерзляк, Полонський & Якір, 2021).

Теорема 1. (теорема Піфагора). *У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сума квадратів катетів*.

Якщо позначити довжини катетів як a і b, а довжину гіпотенузи як c, то теорему Піфагора можна записати формулою:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Існує близько 500 різних доведень теореми Піфагора, деякі з них є досить простими та наочними, інші – більш складними та абстрактними. У даній статті ми підібрали двадцять п'ять доведень цього математичного факту, так щоб у читачів сформувалось розуміння непересічності цього, поза усяким сумнівом, геніального твердження.

2.1 Доведення теореми Піфагора з використанням метричних співвідношень та тригонометричних властивостей кутів

Доведення 1. (*Доведення за означенням косинуса кута*). Нехай ΔABC – прямокутний трикутник, $\angle B$ – прямий кут (рис. 1). З вершини B опустимо висоту BH

на гіпотенузу AC. За означенням косинуса знайдемо $\cos\angle A$ двома способами: з прямокутного трикутника AHB та з прямокутного трикутника ABC:

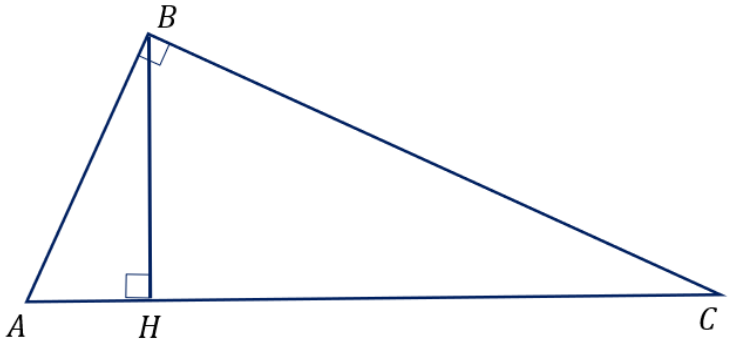


Рис. 1. Прямокутний трикутник ABC

$$\cos\angle A = \frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

звідки випливає, що

$$AB^2 = AC \cdot AH \qquad (1)$$

Аналогічно, знайдемо $\cos\angle C$ двома способами: з прямокутного трикутника BHC та з прямокутного трикутника ABC:

$$\cos\angle C = \frac{HC}{BC} = \frac{BC}{AC},$$

звідки випливає, що

$$CB^2 = HC \cdot AC \qquad (2)$$

Додамо почленно рівності (1) і (2), дістанемо

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AH + HC \cdot AC = AC(AH + HC) = AC \cdot AC = AC^2.$$

Отже, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, що й потрібно було довести.

■

Доведення 2. (*Доведення із застосуванням метричних співвідношень у прямокутному трикутнику).* Розглянемо прямокутний трикутник ABC (рис. 1) з доведення 1, де $\angle B$ – прямий кут, BH – висота, опущена з вершини B на гіпотенузу AC. За метричними співвідношеннями у прямокутному трикутнику можемо записати:

$AB = \sqrt{AH \cdot AC}$ – середнє геометричне AH і AC,

$BC = \sqrt{HC \cdot AC}$ – середнє геометричне HC і AC.

Піднесемо обидві рівності до квадрату, дістанемо співвідношення (1) і (2), далі має місце доведення 1. ■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

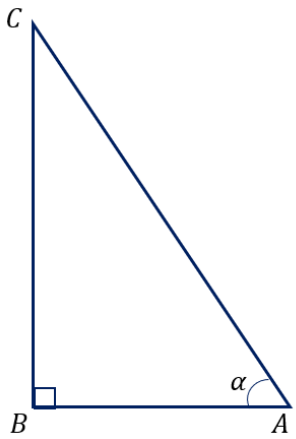


Рис. 2. Ілюстрація до міркувань доведення 3.

Доведення 3. (*Доведення на підставі основної тригонометричної тотожності).* Нехай ABC – прямокутний трикутник, $\angle B$ – прямий кут (рис. 2). Позначимо $\angle A = \alpha$. Тоді, прилеглий катет

$$AB = AC\cos\alpha \tag{3}$$

Протилежний катет

$$BC = AC\sin\alpha \tag{4}$$

Піднесемо обидві частини рівностей (3) і (4) до квадрату і результати почленно додамо. Тоді

$$AB^2 + BC^2 = AC^2\cos^2\alpha + AC^2\sin^2\alpha = AC^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = AC^2.$$

Звідси $AC^2 = AB^2 + BC^2$, що й потрібно було довести.

■

Доведення 4. (*Доведення за подібністю трикутників).* Нехай ABC – прямокутний трикутник, $\angle B$ – прямий кут (рис. 1). З вершини B опустимо висоту BH на гіпотенузу AC. Маємо три подібні (за двома кутами) трикутники: ΔABC, ΔAHB, ΔBHC.

$$\Delta ABC \sim \Delta AHB \quad \Longrightarrow \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}, \quad \Longrightarrow \quad AB^2 = AC\cdot AH; \tag{5}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta BHC \quad \Longrightarrow \quad \frac{BC}{AC} = \frac{HC}{BC}, \quad \Longrightarrow \quad BC^2 = AC\cdot AH. \tag{5}$$

Очевидно, рівності (5) і (6) ідентичні рівностям (1) і (2), тому далі, знову має місце доведення 1, а саме: додамо почленно рівності (5) і (6):

$$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AH + HC \cdot AC = AC(AH + HC) = AC \cdot AC = AC^2.$$

Отже, $AC^2 = AB^2 + BC^2$, що й потрібно було довести.

■

2.2 Доведення теореми Піфагора з використанням елементів векторної алгебри

Доведення 5 (*Доведення із застосуванням векторної алгебри).* Нехай задано два ненульові взаємно перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $(\vec{a} \perp \vec{b} \Longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$ (рис. 3). Знайдемо їх суму – вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Обчислимо $\vec{c}^2$. Піднесемо до квадрату обидві частини останньої рівності, скориставшись властивостями скалярного добутку двох векторів:

$$\vec{c}^2 = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{=0} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2.$$

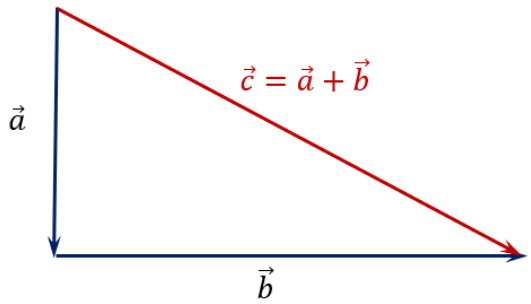


Рис. 3. Взаємно перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, тому з останньої рівності знаходимо $\vec{c}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$, що й потрібно було довести.

■

Доведення 6 (*Доведення методом координат).* Нехай AOB – прямокутний трикутник з катетами a і b, $\angle O$ – прямий кут. Введемо прямокутну декартову систему координат Oxy як показано на рис. 4. Початок координат – точка O лежить у вершині прямого кута, катети – на осях Ox та Oy відповідно. Тоді вершини трикутника мають координати: $A(a, 0)$, $O(0,0)$, $B(0, b)$,

Довжина гіпотенузи AB дорівнює відстані між точками A і B, яку знайдемо за формулою

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

За умовою $x_A = a$, $y_A = 0$, $x_B = 0$, $y_B = b$, тому

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$AB^2 = (0-a)^2 + (b-0)^2 = a^2 + b^2.$$

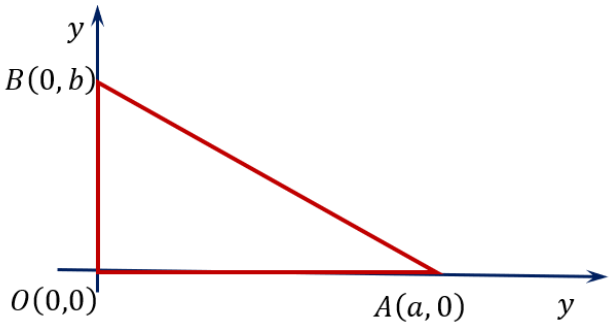


Рис. 4. Трикутник AOB в прямокутній декартовій системі координат

Очевидно, що $OA^2 = a^2$, $OB^2 = b^2$. Відтак, $AB^2 = OA^2 + OB^2$, що й потрібно було довести.

■

2.3 Доведення теореми Піфагора із застосуванням властивостей кола, дотичної, хорди, січної.

Доведення 7 (*Доведення за властивістю січної)* (Бондар, 2024). Нехай ABC – прямокутний трикутник, $\angle C$ – прямий кут. Побудуємо коло з центром у точці B і радіусом BC (рис. 5). Оскільки $AC \perp BC$, то AC – дотична до кола. Пряма AK є січною і перетинає коло в точках D і K. За *властивістю січної і дотичної, проведених до кола з однієї точки*, маємо:

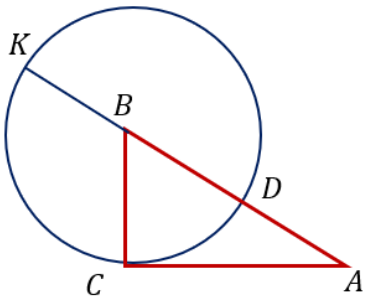


Рис. 5. Трикутник ABC

$$AC^2 = AD \cdot AK. \qquad (7)$$

Легко бачити, що

$$AK = AB + BK = AB + BC, \qquad AD = AB - BD = AB - BC.$$

Підставимо останні рівності у співвідношення (7). Отримаємо:

$$AC^2 = AD \cdot AK = (AB - BC)(AB + BC) = AB^2 - BC^2.$$

Звідси $AB^2 = AC^2 + BC^2$, що й потрібно було довести

■

Доведення 8 (*Доведення за допомогою вписаного кола)* (Технар, 2022). Нехай задано прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Впишемо у нього коло радіуса r (рис. 6).

Обчислимо площу трикутника двома способами:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ab, \qquad S_\Delta = \frac{1}{2}pr,$$

де $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – півпериметр трикутника, $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ – радіус вписаного в прямокутний трикутник кола. Прирівняємо праві частини, підставивши вирази для p і r:

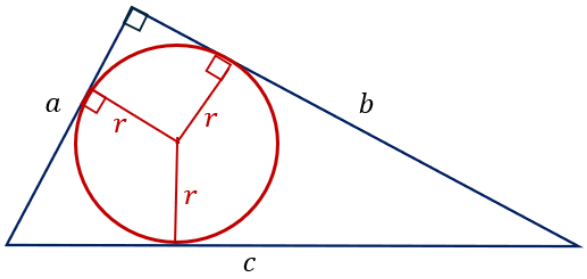


Рис. 6. Коло радіуса r вписане в прямокутний трикутник

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot \frac{1}{2}(a + b - c) \quad \Longrightarrow \quad ab = \frac{1}{2}((a + b)^2 - c^2).$$

Звідки отримуємо $c^2 = a^2 + b^2$, що й потрібно було довести.

■

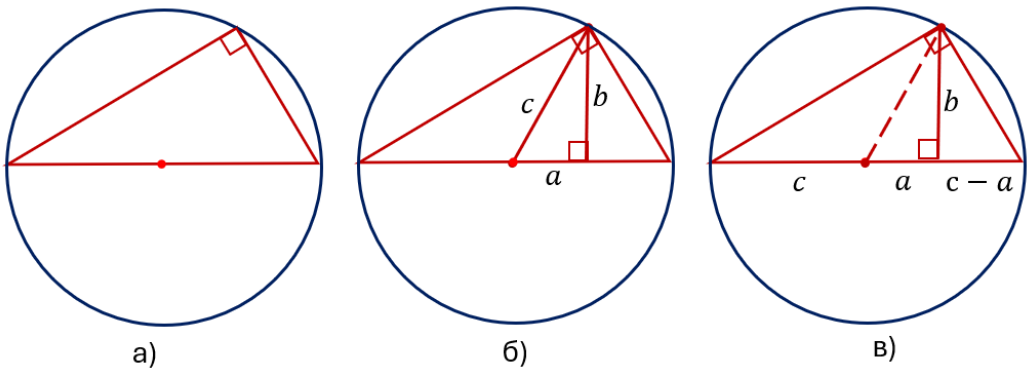


Рис. 7. Коло описане навколо прямокутного трикутника

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Доведення 9 (*Доведення за допомогою описаного кола)* (Технар, 2022). Нехай задано прямокутний трикутник. Опишемо навколо нього коло, центр кола збігається з серединою гіпотенузи (рис. 7 а)). Виконаємо допоміжні побудови: з вершини прямого кута опустимо висоту на гіпотенузу та сполучимо цю вершину з центром кола. Утворився маленький прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c (рис. 7 б)). З центра кола виходять три радіуси довжини c. Приберемо один радіус (рис. 7 в)). За побудовою висота, опущена з вершини прямокутного трикутника має довжину b і ділить гіпотенузу на два відрізки довжинами $c + a$ та $c - a$.

Застосуємо метричні співвідношення, описані у доведенні 2, згідно з якими

$$b = \sqrt{(c + a)(c - a)}.$$

Піднесемо обидві частини останньої рівності до квадрату:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Що й потрібно було довести.

■

Доведення 10 (*Доведення за допомогою теореми про перетин хорд).* Нехай ABC – трикутник із прямим кутом у вершині C, AB – діаметр описаного кола (O – центр кола і середина AB), $BC = a,\ AC = b$, $AB = c$.

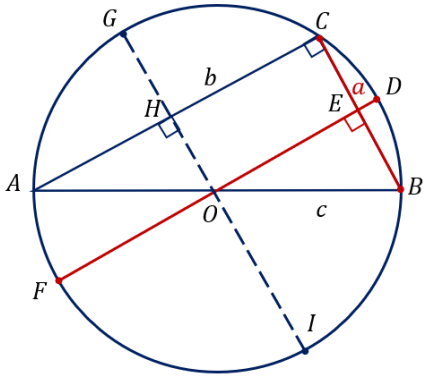


Рис. 8. Ілюстрація доведення 10

На рис. 8 DF – діаметр, перпендикулярний до сторони BC, який ділить її навпіл. E і H – середини BC і AC відповідно, тобто $EO = CH$. *За теоремою про перетин хорд* можемо записати рівність

$$CE \cdot EB = DE \cdot EF,$$

або, через довжини сторін a, b, c:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{c}{2} + \frac{b}{2}\right).$$

Після спрощення дістанемо $a^2 = c^2 - b^2$, звідки $c^2 = a^2 + b^2$.

Той самий результат отримаємо, застосувавши теорему про хорди, що перетинаються, у точці H. Дійсно, оскільки $HO = a/2$, то за теоремою маємо

$$GH \cdot HI = AH \cdot HC \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2,$$

що й потрібно було довести.

■

Доведення 11 (*Доведення за допомогою теореми Архімеда).* (Bogomolny, 2004). Нехай ABC – трикутник із прямим кутом у вершині C, AB – діаметр описаного кола (O – центр кола і середина AB). Якщо P – середина дуги ACB, APB – прямокутний рівнобедрений трикутник із прямим кутом у P. Припустимо, що $AC > BC$, нехай M – ортогональна проєкція точки P на AC. Пряма PM перетинає AB в точці N, B' є ортогональною проєкцією точки B на PM, як зображено на рис. 9.

Використовуючи традиційні позначення, нехай $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

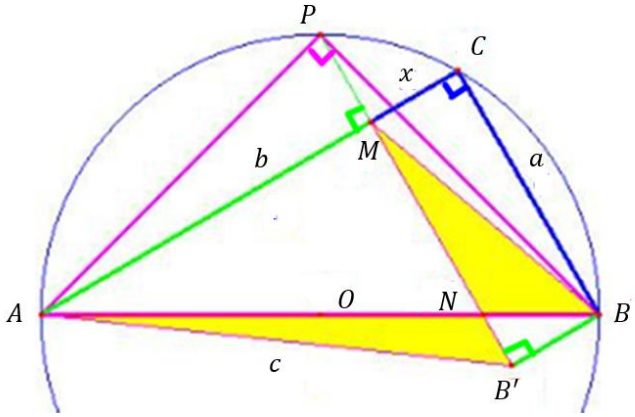


Рис. 9. Ілюстрація доведення 11

Оскільки $BCMB'$ є прямокутником, то

$$MB' = CB = a. \tag{8}$$

Скористаємося *теоремою Архімеда про «зламану хорду»* («*broken chord*»), згідно з якою

$$BC + MC = AM.$$

Нехай $MC = x$. Тоді

$$a + x = b - x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{b-a}{2} \quad \Longrightarrow \quad AM = b - x = b - \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \quad \Longrightarrow$$

$$AM = \frac{a+b}{2}, \tag{9}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$MC = \frac{b-a}{2}. \tag{10}$$

Оскільки PMC – рівнобедрений прямокутний трикутник з прямим кутом у вершині M, то

$$MP = MC = \frac{b-a}{2}. \tag{11}$$

Далі,

$$S_{\Delta MNB} = S_{\Delta ANB'}, \tag{12}$$

оскільки $AM \parallel B'B$.

Площа ΔAPB дорівнює $c^2/4$. Знайдемо цю площу двома способами:

I. $S_{\Delta APB} = c^2/4$.

II. $S_{\Delta APB} = S_{\Delta APM} + S_{\Delta PMB} + S_{\Delta AMN} + S_{\Delta MNB} =$

$$= S_{\Delta APM} + S_{\Delta PMB} + S_{\Delta AMN} + S_{\Delta ANB'} = S_{\Delta APM} + S_{\Delta PMB} + S_{\Delta AMB'}.$$

Використовуючи (8), (9), (10), (11) для обчислення площ трикутників, отримуємо:

$$S_{\Delta APB} = MP \cdot \frac{AM}{2} + MP \cdot \frac{MC}{2} + AM \cdot \frac{MB'}{2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot a}{2} = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Тобто, $c^2/4 = (a^2 + b^2)/4$ або $c^2 = a^2 + b^2$, що й потрібно було довести.

■

Доведення 12 (*Доведення за допомогою теореми Птолемея).* Скористаємось теоремою Птоломея: *добуток довжин діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін*.

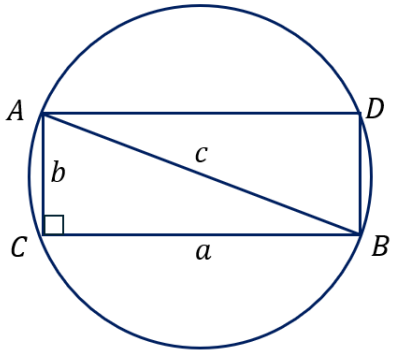


Рис. 11. Ілюстрація доведення 12

Тобто (рис. 11):

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |DB| + |CB| \cdot |AD| \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad a \cdot a + b \cdot b = c \cdot c \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

■

2.4 Доведення теореми Піфагора із застосуванням допоміжних побудов, геометричних перетворень та формул обчислення площ

Доведення 13 (*Доведення за допомогою площі трапеції*) (Технар, 2022). Нехай задано відрізок AD. Розіб'ємо його точкою K на дві частини з довжинами a і b (рис. 12 а)). Опустимо до його кінців A і D перпендикуляри довжинами b та a відповідно (рис. 12 б)).

Сполучимо верхні точки перпендикулярів між собою, дістанемо трапецію $ABCD$. Також додатково сполучимо точки B і K та C і K як показано на рис. 12 в). Отримали два рівні прямокутні трикутники з катетами a, b та гіпотенузою c.

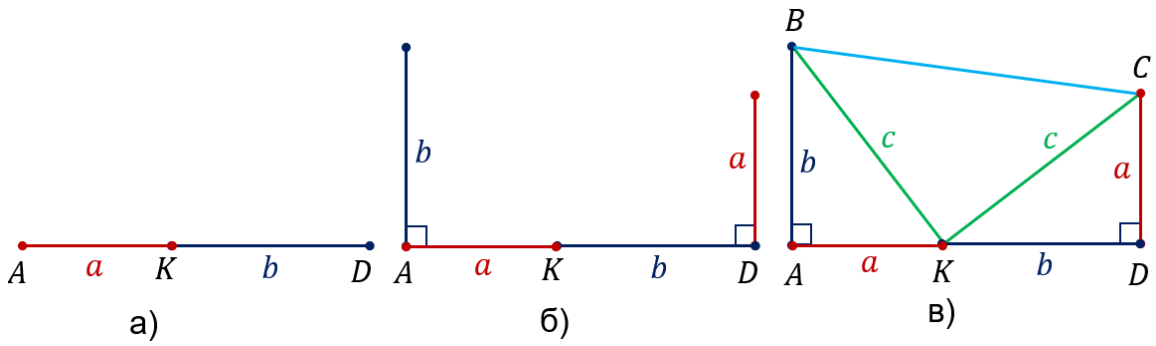


Рис. 12. Ілюстрація доведення 13

$ABCD$ – прямокутна трапеція з основою $CD = b$, та $AB = a$, $DA = a + b$ – висота трапеції. Обчислимо її площу двома способами.

За формулою площі трапеції маємо:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(CD + AB) \cdot AD = \frac{1}{2}(a + b)(a + b) = \frac{1}{2}(a + b)^2.$$

З другого боку, трапеція складається з прямокутних трикутників ABK, BKC, CDK. Тому її площа дорівнює сумі площ цих трикутників, тобто

$$S_{ABCD} = S_{ABK} + S_{BKC} + S_{CDK}.$$

Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку катетів. Отже:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$S_{ABK} = \frac{1}{2}BA \cdot AK = \frac{1}{2}ab, \qquad S_{BKC} = \frac{1}{2}BK \cdot KC = \frac{1}{2}c^2, \qquad S_{CDK} = \frac{1}{2}CD \cdot DK = \frac{1}{2}ab.$$

Тоді

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2.$$

Прирівняємо праві частини рівностей:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 = ab + \frac{1}{2}c^2,$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) = ab + \frac{1}{2}c^2,$$

$$\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2 - ab = \frac{1}{2}c^2, \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

■

2.5 Доведення теореми Піфагора без слів

Доведення 14 (*Доведення під девізом «Спостерігай»)* (Бондар, 2024). Див. рис. 13.

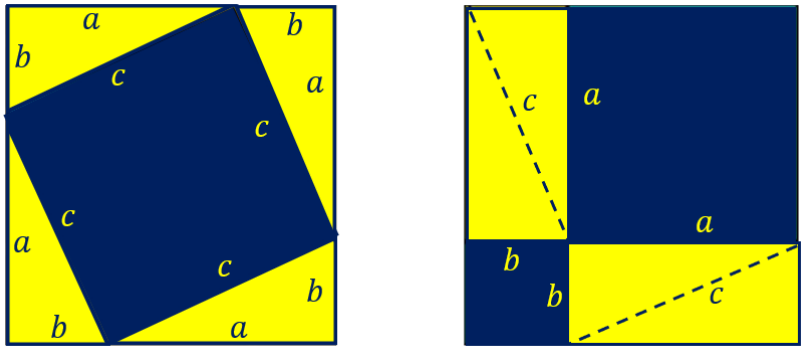


Рис. 13. Спостерігай

$$a^2 + b^2 = c^2$$

■

Доведення 15 (*Доведення без слів)* (Bogomolny, 2004). Авторський підхід від Едгардо Аландете з Колумбії (рис. 14).

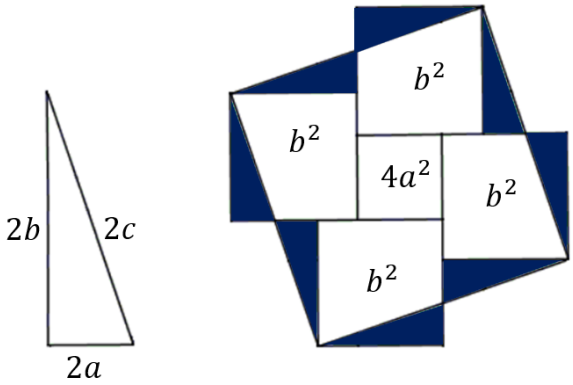


Рис. 14. Доведення теореми Піфагора без слів

■

Доведення 16 (*Доведення без коментарів)* (Bogomolny, 2004). Авторський підхід від Джона Молокача: «*A proof without words»* (рис. 15). (College Mathematical Journal, Volume 48, Number 5, November 2017, p 364).

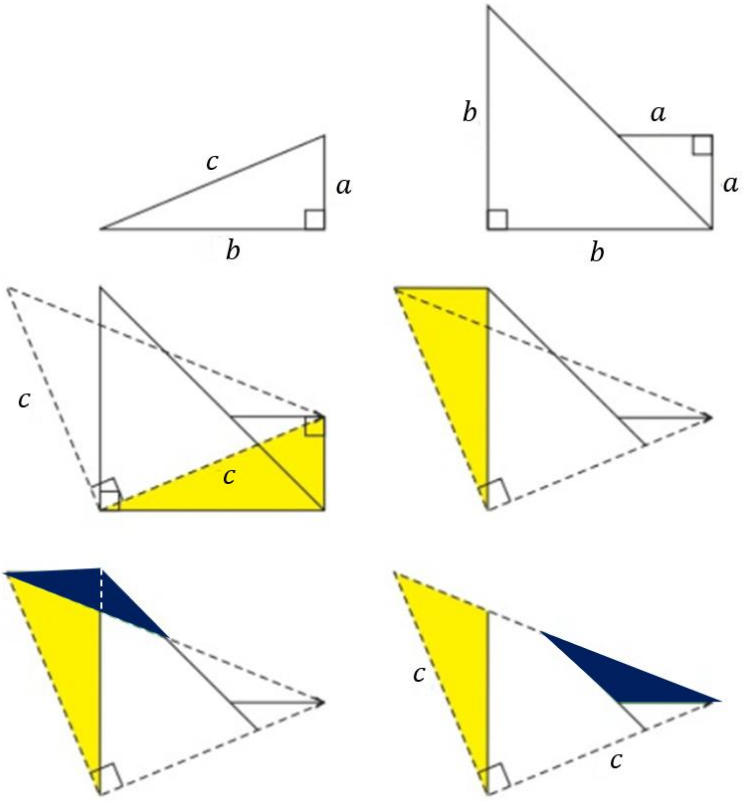


Рис. 15. Авторський підхід від Джона Молокача

$$\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}=\frac{c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad c^2=a^2+b^2.$$

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2.6 Стародавні способи доведення теореми Піфагора

Доведення 17 *(Давньоіндійське доведення).*

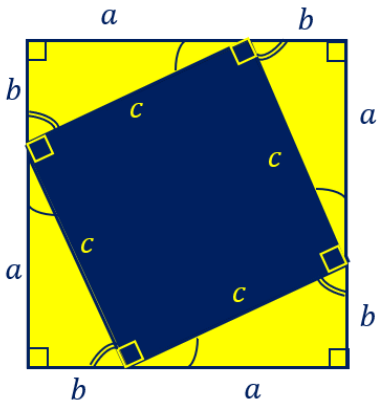


Рис. 16. Ілюстрація давньоіндійського доведення теореми Піфагора

Розташуємо чотири однакові прямокутні трикутники так, як це зображено на рисунку 16.

Чотирикутник зі сторонами c є квадратом, оскільки сума двох гострих кутів 90°, а розгорнутий кут – 180°.

Площа всієї фігури дорівнює, з одного боку, площі квадрата зі стороною $a+b$, а з другого – сумі площ чотирьох трикутників і внутрішнього квадрата зі стороною c:

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

■

В індійській мові санскрит, якою написані багато давньоіндійських текстів, теорема Піфагора звучить так:

«दीर्घचतुरश्रस्य अक्षण्या रज्जुः पार्श्वमानी तिर्यग्मानी च यत् पृथग् भूते कुरुतस् तयोः योगः कर्णस्य कृतिः»

(*dīrghacaturaśrasya akṣṇayā rajjūḥ pārśvamānī tiryagmānī ca yat pṛthag bhūte kurutas tayoḥ yogaḥ karṇasya kṛtiḥ*)

Це можна перекласти приблизно так: «*Мотузка, що проходить по діагоналі прямокутника, утворена окремо квадратами його ширини та висоти, їх сума є квадратом гіпотенузи*».

Важливо зазначити, що цей варіант формулювання є одним з найбільш поширених та відповідає класичному формулюванню теореми на санскриті, хоча в різних регіонах Індії можуть використовуватися інші варіанти перекладу або формулювання теореми Піфагора.

Доведення 18 *(Давньокитайське доведення **勾股弦定理**).* (Bogomolny, 2004; Технар, 2022).

Теорема Піфагора не має окремого ієрогліфа в китайській мові. Для її позначення використовують поєднання ієрогліфів та математичних символів. Зазвичай це виглядає так:

勾股定理 (gōu gǔ dìnglǐ) – теорема Піфагора, де:

- 勾 (gōu) – коротший катет прямокутного трикутника
- 股 (gǔ) – довший катет прямокутного трикутника
- 定理 (dìnglǐ) – теорема

Розташуємо чотири однакові прямокутні трикутники так, як це зображено на рисунку 17. Всередині утворився квадрат зі стороною $b - a$.

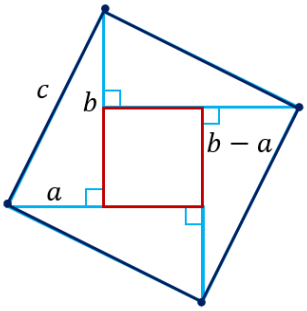


Рис. 16. Ілюстрація давньокитайського доведення теореми Піфагора

Площа всієї фігури дорівнює, з одного боку, площі квадрата зі стороною $a + b$, а з другого – сумі площ чотирьох трикутників і внутрішнього квадрата:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (b - a)^2,$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

■

Доведення 19 *(Доведення Евкліда)* (Bogomolny, 2004; Технар, 2022). Нехай ABC – прямокутний трикутник ($\angle BAC = 90^\circ$). Побудуємо квадрати $BCED$, $AHKC$, $ABFG$. Проведемо $AL \perp BC$. Доведемо, що прямокутник $BMLD$ рівновеликий квадрату $ABFG$, а прямокутник $MCEL$ – квадрату $AHKC$ (рис. 17).

Проведемо відрізки FC і AD. Дійсно,

$$S_{\Delta FBC} = \frac{1}{2} S_{ABFG}, \qquad S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{BMLD},$$

$$\Delta ABD = \Delta FBC \quad \Longrightarrow \quad S_{BMLD} = S_{ABFG}.$$

Проведемо відрізки KB і AD.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$S_{\Delta KBC} = \frac{1}{2} S_{AHKC}\,, \qquad S_{\Delta ACE} = \frac{1}{2} S_{CMLE},$$

$$\Delta KBC = \Delta ACE \quad \Longrightarrow \quad S_{MCEL} = S_{AHKC}.$$

Тобто, $S_{BMLD} = S_{ABFG}$, $S_{MCEL} = S_{AHKC}$. Очевидно, що площа квадрата $BCED$ дорівнює сумі площ прямокутників $BMLD$ та $MCEL$:

$$S_{BCED} = S_{BMLD} + S_{MCEL} \quad \Longrightarrow \quad S_{BCED} = S_{ABFG} + S_{AHKC} \quad \Longrightarrow \quad BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

■

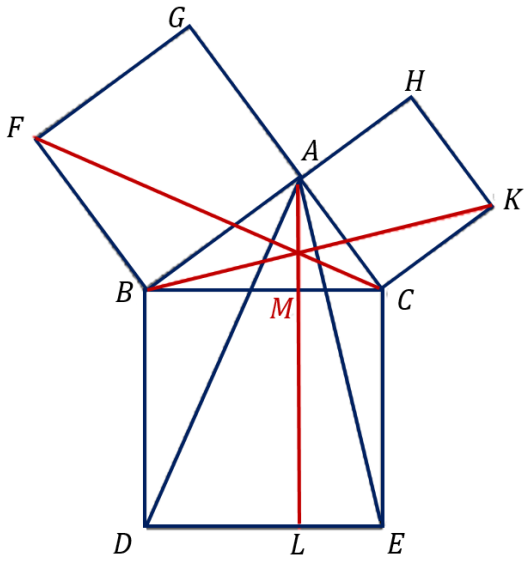


Рис. 17. Ілюстрація доведення Евкліда

2.7 Доведення теореми Піфагора з використанням основ аналізу та диференціальних рівнянь

Розглянемо авторський підхід, запропонований у 1988 році Майклом Харді з Університету Толедо (Bogomolny, 2004).

Доведення 20 *(Доведення Майкла Харді).* Нехай ABC – прямокутний трикутник із гіпотенузою BC. Позначимо $AC = x$ і $BC = y$. Тоді, коли C рухається вздовж прямої AC, x змінюється, а, отже, змінюється й y. Надамо змінній x нескінченно малого приросту dx. Тоді змінна y також дістала нескінченно малий приріст dy (рис. 18).

Трикутник CDE можна *наближено вважати прямокутним** (з точністю до малих другого порядку, якщо вважати dx та dy малими першого порядку). Тоді трикутники CDE та ABD подібні (за двома кутами: спільний кут D і прямий кут):

$$\Delta CDE \sim \Delta ABD \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{dy}{dx} \tag{13}$$

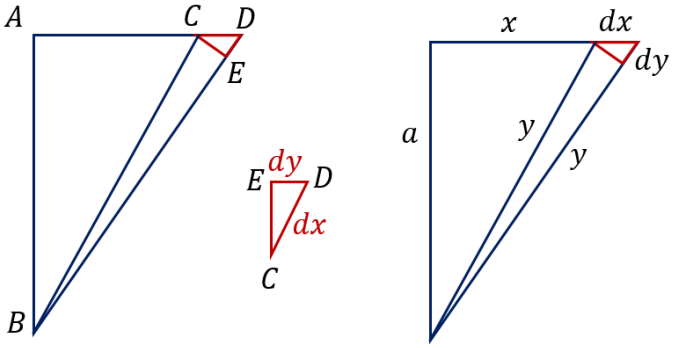


Рис. 18. Ілюстрація доведення Майкла Харді

Розглядаючи (13) як пропорцію, зробимо перетворення, яке називають відокремлення змінних у диференціальному рівнянні. В результаті отримуємо:

$$y\,dy - x\,dx = 0. \tag{14}$$

Інтегруючи (14), дістанемо:

$$y^2 - x^2 = c.$$

Значення константи c визначається з початкової умови: при $x = 0$, $y = a$, тобто $y(0) = a \quad \Longrightarrow \quad c = a$ для всіх x. Відтак

$$y^2 = x^2 + a^2.$$

■

*Що означає, що *трикутник приблизно прямокутний*? Можна запропонувати таке пояснення. Трикутники ABC і ABD за побудовою прямокутні. За теоремою Піфагора ми маємо $AB^2 + AC^2 = BC^2$, а також $AB^2 + AD^2 = BD^2$ (рис. 19). У термінах x та y для цих трикутників теорему можна записати таким способом:

$$x^2 + a^2 = y^2,$$

$$(x + dx)^2 + a^2 = (y + dy)^2.$$

Після перетворень можемо записати:

$$y \cdot dy - x \cdot dx = \frac{dx^2 - dy^2}{2}.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Для малих dx і dy, dx^2 і dy^2 навіть менші (вони є малими другого порядку, якщо вважати dx і dy малими першого порядку), і ними можна знехтувати. А отже, дріб у правій частині можна прирівняти до 0 і, як наслідок, перейти до наближеної рівності (14): $y \cdot dy - x \cdot dx = 0$.

Розширена, але, очевидно, незалежна версія цього доведення була опублікована Майком Старінгом у 1996 році (Bogomolny, 2004). Розглянемо запропонований підхід.

Доведення 21 *(Доведення Майкла Харді II).* Припустимо, що $\Delta x > 0$ і розглянемо подібні прямокутні трикутники ABC і RCD, ABC і PCD:

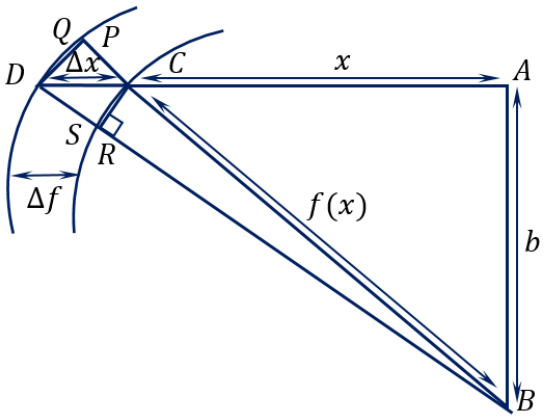


Рис. 19. Ілюстрація доведення Майкла Харді II

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{CQ}{CD} > \frac{CP}{CD} = \frac{CA}{CB} = \frac{x}{f(x)},$$

але також,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{SD}{CD} < \frac{RD}{CD} = \frac{AD}{BD} = \frac{x + \Delta x}{f(x) + \Delta f} < \frac{x}{f(x)} + \frac{\Delta x}{f(x)}.$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0+$, отримаємо

$$\frac{df}{dx} = \frac{x}{f(x)}. \tag{15}$$

Випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно.

Відокремимо змінні у диференціальному рівнянні (15):

$$f(x)df = x\,dx. \tag{16}$$

Після інтегрування отримаємо

$$f^2(x) = x^2 + c. \tag{17}$$

Константа c знаходиться з граничної умови $f(0) = b$, звідки випливає, що $c = b^2$. Підставимо значення c у загальний розв'язок (17), знайдемо

$$f^2(x) = x^2 + b^2.$$

■

2.8 Доведення теореми Піфагора методами алгебри

У лінійній алгебрі добре відомий факт, що визначник розміром 2×2 вигляду

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

визначає площу паралелограма, побудованого на двох векторах

$$\binom{a}{c} \text{ і } \binom{b}{d}.$$

Джон Молокач застосував цю властивість визначників до наступної діаграми (рис. 20).

Доведення 22 *(Доведення Джона Молокача).* Дано два квадрати зі стороною c і площею c^2. Один із них визначається як паралелограм, побудований на векторах $\binom{-a}{b}$ і $\binom{-b}{-a}$. Площа цього паралелограма виражається як

$$\begin{vmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{vmatrix} = (-a)(-a) - b(-b) = a^2 + b^2.$$

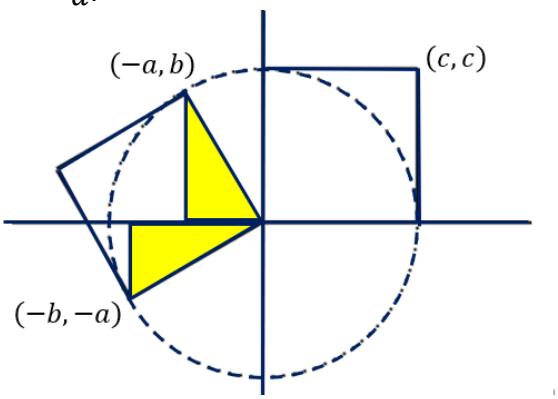


Рис. 20. Ілюстрація доведення Джона Молокач

Оскільки площі обох квадратів рівні, то $c^2 = a^2 + b^2$.

■

Варто зауважити, що останню формулу можна записати через визначники:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{vmatrix}.$$

Доведення 23 *(Доведення з використанням апарату комплексних чисел).*

Будь-яке комплексне число z може бути зображено формальною сумою $z = x + iy$, де x та y – дійсні числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *уявна одиниця*. $x = Re\, z$ – *дійсна частина комплексного числа* z, $y = Im\, z$ – *уявна частина комплексного числа* z. Комплексне число z можна визначити як упорядковану пару дійсних чисел (точку, вектор) (x, y) у комплексній площині (рис. 21).

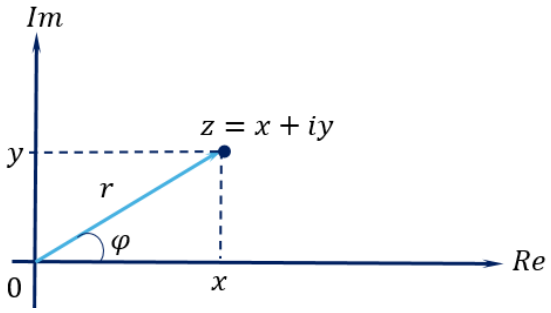


Рис. 21. Ілюстрація комплексної площини

Число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ *називається модулем комплексного числа* z (позначається літерою r).

Зобразимо на площині два комплексних числа $z_1 = a + 0i$ та $z_2 = 0 + bi$ (рис. 22). Побудуємо на цих векторах прямокутний трикутник з катетами a і b. Гіпотенуза c буде відповідати сумі цих чисел, її довжина дорівнює модулю суми $z_1 + z_2$:

$$c = |\, z\,| = |z_1 + z_2| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Longrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

■

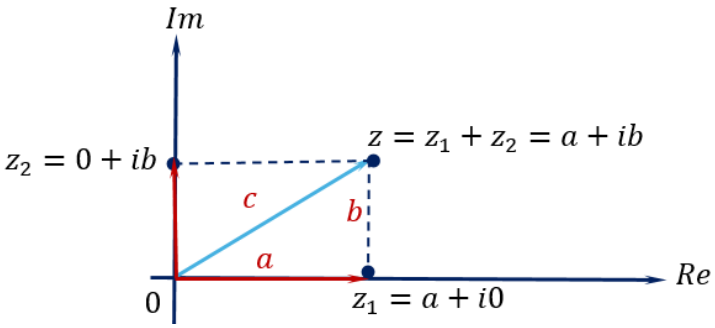


Рис. 22. Ілюстрація доведення 23

Доведення 24 *(Доведення з використанням апарату кватерніонів).*

Кватерніон – це розширення поняття комплексного числа у 4-вимірному просторі. Кватерніон q визначається як

$$q = a + bi + cj + dk,$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, а i, j, k – уявні одиниці, що задовольняють співвідношення:

$$i^2 + j^2 + k^2 = ijk = -1.$$

Дійсне число a називають *скалярною частиною кватерніона*, а $\vec{v} = bi + cj + dk$ – його *векторною частиною*.

Будь-який кватерніон $q = a + bi + cj + dk$ можна представити як пару комплексних чисел у вигляді

$$q = (a + bi) + (c + di)j.$$

Цей запис еквівалентний наступному:

$$q = z_1 + z_2 j,$$

де $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ – комплексні числа.

Кватерніон $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ називають *спряженим* до q.

Нормою кватерніона називається число $| q | = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Норма є мірою "довжини" кватерніона і слугує аналогом довжини вектора у багатовимірному просторі.

Застосуємо кватерніони для доведення теореми Піфагора.

Нехай у площині задано прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Представимо сторони трикутника як кватерніони, де катети – це компоненти уявної частини, а гіпотенуза – це довжина, пов'язана з повним кватерніоном.

Виберемо кватерніони. Нехай q_1 і q_1 – кватерніони, що представляють вектори вздовж катетів a і b:

$$q_1 = ai, \qquad q_2 = bj,$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, а i, j – уявні одиниці кватерніонів.

Обчислимо суму катетів у трикутнику (як векторів):

$$q = q_1 + q_2 = ai + bj.$$

Норма цієї суми дорівнює довжині гіпотенузи c:

$$| q | = \sqrt{a^2 + b^2} = c.$$

Таким способом отримали, що $c^2 = a^2 + b^2$.

■

Описаний підхід показує, як абстрактні математичні об'єкти (кватерніони) можуть бути використані для доведення класичних геометричних властивостей.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2.9 Механічна інтерпретація теореми Піфагора

Доведення 25. Нехай задано прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Виріжемо з пластини, виготовленої з однорідного матеріалу густиною ρ, три квадратні пластинки (квадрати) з площами a^2, b^2 та c^2 (рис.23).

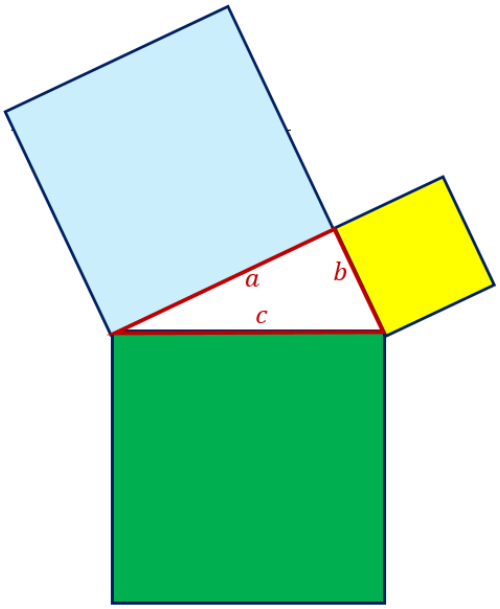


Рис. 23. Ілюстрація розкрою пластинок

Маси квадратів дорівнюють відповідно

$$m_a = \rho a^2, \qquad m_b = \rho b^2, \qquad m_c = \rho c^2.$$

Сконструюємо важіль довжиною $2h$, на одному кінці якого закріпимо квадрати з площами a^2 та b^2, а на другому – квадрат з площею c^2 (рис.24).

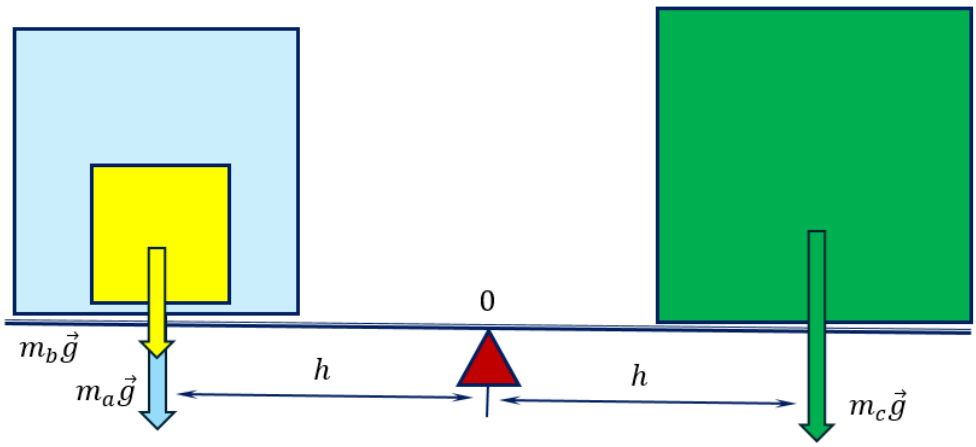


Рис. 24. Ілюстрація конструкції важеля

Точка опори важеля розміщена в центрі, тобто на відстані h до прямої дії сили ваги. На кожен квадрат діє сила ваги:

$$m_a\vec{g} = \rho a^2\vec{g}, \qquad m_b\vec{g} = \rho b^2\vec{g}, \qquad m_c\vec{g} = \rho c^2\vec{g}.$$

Якщо важіль перебуває у рівновазі, то сума моментів активних сил відносно осі Oz, що проходить через точку опори перпендикулярно до площини рисунка, дорівнює нулю:

$$m_a g \cdot h + m_b g \cdot h - m_c g \cdot h = 0 \implies \rho a^2 g + \rho b^2 g = \rho c^2 g \implies c^2 = a^2 + b^2.$$

■

3. Висновки

Теорема Піфагора є однією з найважливіших теорем у геометрії, яка має численні застосування в різних галузях науки і техніки. Її значення важко переоцінити, адже вона є фундаментом для багатьох інших математичних тверджень та концепцій. Вище проілюстровано, що математика є невід'ємною складовою загальнолюдської культури. Одне, на перший погляд, усім відоме твердження має широке застосування в різних галузях. Матеріал підібрано таким способом, щоб використовуючи різні методи та прийоми, зацікавити читачів та допомогти їм зрозуміти суть теореми, розширити математичний світогляд та розвинути логічне мислення. Важливо, щоб як професіонали математики так і початківці усвідомлювали важливість теореми Піфагора та вміли ефективно використовувати її глибину у своїй практичній діяльності.

Список використаних джерел

Alex Bogomolny (2004). An interactive column using Java applets. Pythagorean Theorem from the Intersecting Chords Theorema. – Режим доступу: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/proof79.shtml (дата звернення 20.10.24). – Назва з екрана.

Бондар Г.Я. (2024). Бібліотека методичних матеріалів. *Теорема Піфагора. Різні способи доведень*. – Режим доступу: https://vseosvita.ua/library/teorema-pifahora-rizni-sposoby-doveden-783584.html (дата звернення 01.11.24). – Назва з екрана.

Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти / О.С Істер – 2-ге вид., переробл. Київ.: Генеза, 2021. 240.

Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – 2-ге видання, переробл. Х.: Гімназія, 2021. 208 с.: іл.

Технар. (2022, вересень 22). Як довести теорему Піфагора?: 10 способів [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=V6DQYAo5mSs

Турчин С.О. (2023). На урок. Різні способи доведення теореми Піфагора – методичний посібник. – Режим доступу: https://naurok.com.ua/metodichniy-posibnik-rizni-sposobi-dovedennya-teoremi-pifagora-267269.html (дата звернення 25.10.24). – Назва з екрана.

Отримано редакцією журналу: 15.12.2024
Прорецензовано: 10.03.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Iryna LEBEDEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Angelina CHUBYKINA, Student
ORCID: 0009-0008-4340-6787
e-mail: chubykinaangelina@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

25 WAYS TO CONQUER THE PYTHAGOREAN THEOREM: FROM THE CLASSICS TO THE MODERN

Abstract. *Readers are offered a deep and comprehensive study of the Pythagorean theorem, one of the most famous and important theorems in geometry. The article presents twenty-five different ways to prove this theorem, covering a wide range of mathematical methods and concepts. It actually demonstrates how the Pythagorean theorem can be proven using classical geometric approaches, as well as using modern mathematical tools. Readers will be able to get acquainted with proofs based on metric relations in a triangle, trigonometric properties of angles, elements of vector algebra, properties of a circle, tangent, chord and secant, as well as more complex proofs using differential equations and mechanics. The article will be interesting and useful for a wide range of readers, including high school students, students of mathematical specialties, mathematics teachers and everyone who is interested in the history and development of mathematical knowledge.*

Keywords: *geometry; Pythagoras' theorem; right triangle; algebra; differential equations; mechanics.*

Математичний гурток

УДК 519.21:519.1 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.6**

Марина ГРИСЕНКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0816-4734
e-mail: magryss@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Анастасія ТКАЧЕНКО, студентка
e-mail: nastyatkachenko0711@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЯК НАВЧИТИ УЧНІВ РОЗВ'ЯЗУВАТИ ЙМОВІРНІСНІ ЗАДАЧІ, ЗАСТОСОВУЮЧИ АЛГОРИТМ ПОЯ

Анотація. *Досліджуються особливості застосування алгоритмічного методу Дьордя Поя під час проведення занять математичного гуртка, присвячених вивченню елементів комбінаторики та теорії ймовірностей. Акцент зроблено на алгоритмі Поя як універсальному засобі структурування процесу розв'язування задач та розвитку логічного мислення учнів та учениць. Розглядаються переваги поетапного підходу до навчання, що включає осмислення умови задачі, складання плану, реалізацію та аналіз отриманого результату. Окрему увагу приділено дослідженню емоційного стану учнів та учениць під час занять у гуртку з використанням проєктивної методики «Дерево», спрямованої на вивчення рівня мотивації та адаптації школярів.*

Ключові слова: *алгоритм Поя; система запитань; комбінаторика; теорія ймовірностей; граф–дерево; проєктивна методика «Дерево».*

1. Вступ

Стрімкий прогрес у галузі науки, техніки та інформаційних технологій суттєво впливає на розвиток сучасного суспільства, вимагаючи постійного вдосконалення методів викладання в галузі математичної освіти.

В Україні втілюється в життя освітня реформа НУШ (Нова українська школа), яка зосереджується на індивідуальних особливостях кожного учня. Відбувається переорієнтації навчального процесу на практичну значущість знань та розвиток особистості. Математична освіта покликана формувати фахові «жорсткі» навички (hard skills), які повинні поєднуватися з м'якими навичками (soft skills), зокрема: вміння працювати в команді, комунікувати, приймати рішення, керувати емоціями та діяти в умовах стресу. Це робить заняття з математики важливим інструментом цілісного розвитку школярів.

Формуванню у школярів навичок самостійної дослідницької та пізнавальної діяльності, стійкого інтересу до навчання сприяють не тільки уроки з математики в закладах загальної середньої освіти, а і різні види позакласних занять. Однією з ефективних форм задоволення учнівської допитливості, можливості розширити кругозір школярів з різних тем є математичний гурток. Гуркова робота з математики сприяє розвитку у школярів математичного способу мислення, вміння зосереджувати

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

свою увагу, робити логічні, чіткі висновки та узагальнення, правильно використовувати математичну термінологію та символіку, обґрунтовувати свої думки, аналізувати.

Математична компетентність є однією з 10 ключових компетентностей Нової української школи. Згідно з реформою загальної середньої освіти, випускник Нової української школи має бути сформованим як цілісна всебічно розвинена особистість, яка здатна до успішного критичного, логічного та креативного мислення. Вчитель математики має брати на себе відповідальність не лише за результати навчання учнів та учениць математики, а й за обрану чи побудовану ним технологію розвитку творчого та креативного мислення учнів та учениць засобами математики. Він має акцентувати увагу на мотиваційних аспектах та на потужних можливостях процесу навчання математики для формування та розвитку творчих якостей школярів. Сучасна педагогіка передбачає застосування коучингових інструментів, зокрема системи навчальних запитань, що дозволяють вибудовувати партнерську взаємодію між учнем і вчителем. Така взаємодія ґрунтується на принципах психологічної безпеки, права на помилку, відкритості, що є особливо важливим для подолання «математичної тривожності». У контексті роботи в шкільних гуртках з математики такі підходи набувають додаткової гнучкості, дозволяючи вчителеві адаптувати матеріал до потреб учнів та учениць. Впровадження таких методик дозволяє забезпечити інструментами учнів та учениць для осмисленого розв’язування задач і формує логічне та критичне мислення, необхідне для адаптації до викликів у сучасному світі.

Математика як фундаментальна дисципліна відіграє ключову роль у підготовці молодого покоління до життя в умовах динамічних змін, пропонуючи інструменти для моделювання реальних процесів, аналізу великих масивів даних та прийняття рішень в умовах невизначеності.

Особливе значення у цьому контексті набувають методи та моделі теорії ймовірностей, які дозволяють учням у закладах загальної середньої освіти глибше зрозуміти закономірності випадкових явищ, оцінювати ймовірності подій та будувати прогнози. Вони сприяють розвитку комбінаторного мислення, здатності до аналізу проблем в умовах невизначеності та є важливими компетентностями, які характеризують сучасну людину.

Використання задач з елементами теорії ймовірностей у позаурочній діяльності, зокрема на заняттях математичних гуртків, створює передумови для формування в учнів та учениць навичок критичного мислення та осмисленого аналізу інформації, необхідних для прийняття обґрунтованих рішень. Використання ймовірнісних математичних моделей сприяє розумінню реальних соціальних, економічних та природничих процесів. Це також дозволяє учням більш усвідомлено застосовувати математичні знання у повсякденному житті, вирішуючи завдання, що виходять за межі суто академічних тем. Такий підхід не лише сприяє підвищенню мотивації до навчання, але й забезпечує краще розуміння ролі математичних знань у професійному та особистому житті, що є важливим чинником у підготовці учнів та учениць до викликів сучасного світу.

2. Алгоритм розв'язування задач Поя

Навички розв'язування задач теорії ймовірностей є важливими елементами курсу математичного гуртка, адже вони відкривають перед учнями двері до світу логіки, аналізу та раціонального мислення. Ймовірнісні методи допомагають не лише зрозуміти математичні закономірності, але й дають змогу приймати виважені рішення на основі отриманих реальних даних. Проте навчити учнів та учениць упевнено долати ці завдання – справжній виклик. Тому для ефективного навчання необхідно забезпечити школярів чітким алгоритмом роботи, який допоможе послідовно та структуровано підходити до розв'язування ймовірнісних задач.

Відомий математик Дьордь Поя, (*Джордж Поліа* 13 грудня 1887 – 7 вересня 1985) у своїй книзі «How to Solve It» запропонував універсальний алгоритм розв'язування задач, який став основою для навчання учнів та учениць (Pólya, 1945). У цій книзі дається психологічно-педагогічний аналіз проблеми розв'язування математичної задачі та пропонується певна загальна методика розв'язування задач. Приклади, за допомогою яких автор ілюструє свій метод, наведені головним чином з області елементарної математики (лише деякі з них відносяться до початкових елементів аналітичної геометрії або диференціального числення). Замість хаотичного пошуку розв'язання алгоритм дозволяє крок за кроком розібратися із задачею, обрати оптимальний підхід та перевірити правильність результату. Завдяки використанню алгоритму учні не лише краще засвоюють матеріал, але й здобувають навички, які стануть у пригоді далеко за межами завдань з математики.

Методика розв'язування задач Поя включає чотири ключові етапи:

1. осмислення умови задачі;
2. складання плану розв'язання;
3. реалізація плану розв'язання;
4. аналіз отриманого результату.

Проаналізуємо кожен із етапів докладніше з метою розкриття їхньої концептуальної сутності, визначення значущості в алгоритмі розв'язання задач та оцінки ролі у формуванні необхідних когнітивних і практичних навичок для ефективного розв'язування математичних задач.

На першому етапі учням необхідно детально ознайомитися з умовою задачі та зрозуміти її зміст. Важливо навчити учнів та учениць читати задачу уважно та аналітично, одразу виділяючи ключову інформацію. Учні можуть прочитати задачу кілька разів, щоб зрозуміти її зміст, проте потрібно прагнути до того, щоб учні робили це з першого разу. З досвіду роботи рекомендується, щоб учні встановлювали тип і структуру задачі та фіксували результати початкового аналізу, що полегшить подальші кроки.

Під час другого етапу учні розглядають можливі підходи до розв'язання задачі, виокремлюючи надані й шукані дані та встановлюючи логічний зв'язок між ними. Це дає змогу вибрати відповідну стратегію розв'язування задачі.

На третьому етапі учні повинні здійснити послідовні кроки розв'язання, ретельно виділяючи логічні зв'язки у кожному елементі міркування. Учням необхідно вміти чітко

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

пояснювати свої дії та аналізувати кожен крок доведення, виділяючи основні та допоміжні дані та елементи розрахунку, а також робити обґрунтовані висновки.

Під час четвертого, завершального етапу, важливо перевірити правильність проведених дій і отриманого результату. Необхідно, щоб учні розуміли важливість цього етапу під час роботи із завданням, адже він допомагає зробити висновки в тому разі, якщо завдання розв'язано невірно та в майбутньому уникати подібних помилок.

Необхідно зауважити, що у процесі розв'язування задач межі названих етапів дуже розмиті. Проте, розв'язування задач має проходити всі етапи, оскільки це полегшить засвоєння матеріалу для учнів та учениць. Крім того, емоційний стан школяів, творча ініціатива, гнучкість розуму, натхненність, радість від інтелектуальної праці при розв’язуванні задач має дуже важливе значення в процесі навчання математики.

3. Єдина система запитань для дотримання алгоритму

Для того, щоб ефективно застосовувати алгоритм Поя у розв’язуванні задач, доцільно використовувати універсальну систему запитань, яка допомагає послідовно виконувати всі етапи. Ці запитання спрямовані на поглиблення розуміння умови задачі, планування дій, реалізацію розв’язання та перевірку отриманого результату. Систему запитань, яка забезпечує чітку структуру роботи та сприяє розвитку логічного мислення, допомагаючи уникати помилок і досягати максимально точного розв’язання задач, можна застосовувати при розв’язуванні задач теорії ймовірностей незалежно від їх складності.

Розглянемо детальніше запитання для кожного етапу алгоритму.

Етап 1: Осмислення умови задачі.

- Що нам дано в задачі?
- Що потрібно знайти?
- Які обмеження є в задачі?
- Чому виникають ці обмеження?
- Яке основне питання задачі?

Етап 2: Складання плану розв’язання.

- Чи знайомі ми з подібними задачами?
- Які методи розв’язання можна застосувати?
- Який метод буде найзручнішим для цієї задачі?
- Як побудувати математичну модель задачі?
- Якими кроками ми будемо діяти для досягнення результату?

Етап 3: Реалізація плану розв’язання.

- Як виконати кожний крок розв’язання?
- Чи дотримуються всі обмеження задачі?
- Чи враховані всі можливі варіанти (у випадку комбінаторних задач)?
- Чи виконані всі розрахунки правильно?

Етап 4: Аналіз отриманого результату.

- Чи відповідає результат умові задачі?
- Як перевірити правильність розв’язання?

- Чи можна запропонувати альтернативний метод перевірки результату?
- Чи є можливість спростити або вдосконалити процес розв'язування?

Використання цієї системи запитань у навчальному процесі створює основу для глибшого засвоєння матеріалу й сприяє формуванню у учнів та учениць впевненості у правильному розв'язанні задач.

4. Заняття математичного гуртка: приклади застосування алгоритму Поя

На заняттях математичного гуртка особливо важливо створити умови, за яких учні не лише засвоюють навчальний матеріал, а й отримують задоволення від процесу пізнання, розвивають навички логічного мислення та самостійного аналізу задач. Заняття, присвячене розв'язуванню задач з елементами теорії ймовірностей, може стати ефективним засобом для впровадження алгоритму Поя. Одним із методів, який дозволяє зробити процес розв'язування таких задач наочним і зрозумілим для учнів та учениць, є побудова графа–дерева можливих варіантів. Цей підхід не лише спрощує розв'язування задач, але й сприяє систематизації знань та формуванню вміння працювати з елементами комбінаторики. Нижче наведено розгорнуту частину заняття з прикладами задач і поясненням їхнього розв'язання відповідно до методичних рекомендацій. Матеріали можна використовувати як готову розробку для проведення заняття у 5–6 класах.

Задача 1. *У класі призначили чотирьох чергових. Ними виявилися Степан, Ксенія, Роман та Марія. Які можна скласти групи з двох осіб для чергування в класі після уроків? Скільки різних груп може вийти?*

Розв'язання. Перший етап – осмислення умови задачі. На цьому етапі навчання розв'язування комбінаторних задач необхідно переконатися, що учні зрозуміли умову задачі. Необхідна система запитань, що допомагає встановленню зв'язків між даними задачі і величинами, які мають бути визначені в процесі розв'язування задачі. Для пошуку розв'язку задачі 1 корисними можуть бути такі запитання:

1. Що нам дано в задачі?

- У класі призначили чотирьох чергових та їхні імена.

2. Що нам потрібно скласти?

- Пари з двох осіб.

3. Чи є якісь обмеження в складанні пар?

- Ні.

4. Чому?

- В умові задачі немає обмежень, усі можуть чергувати один з одним.

5. Що нам потрібно знайти?

- Кількість пар із двох осіб.

Другий етап – складання плану розв'язання. На цьому етапі навчання розв'язування комбінаторних задач необхідно переконатися, що учень володіє навичками, які знадобляться йому для успішного розв'язування задачі.

На цьому етапі можна коригувати роботу учнів та учениць такими питаннями:

1. Чи знайомі ви з таким видом задач?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

- Знайомі.

2. Чи розв'язувалися подібні задачі раніше?

- Так.

3. Якими методами такі задачі розв'язувалися раніше?

- Методом перебору всіх варіантів, складання таблиці можливих варіантів, побудова графа-дерева можливих варіантів.

4. Який метод буде найзручнішим?

- Граф–дерево можливих варіантів.

5. Чому?

- Цей метод наочно показує всі можливі варіанти і не дасть змоги пропустити жоден з них.

Третій етап – реалізація плану розв'язання. До цього етапу навчання розв'язування комбінаторних задач учні зрозуміли умови задачі, що їм дано імена хлопців і дівчат, з яких потрібно скласти пари з двох осіб і знайти їхню кількість, що найоптимальніший варіант для розв'язання цього завдання – це складання графа-древа можливих варіантів розв'язання. Далі учні можуть переходити до розв'язування.

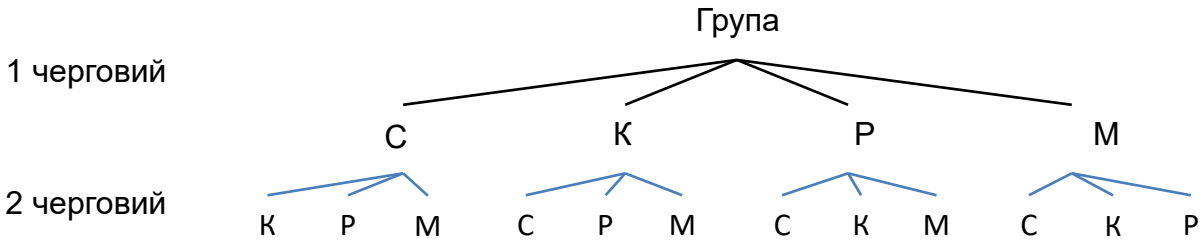


Рис. 1. Дерево можливих варіантів до задачі 1

На цьому етапі необхідно звернути увагу на те, що обраний метод розв'язання враховує всі дані та побудова графа здійснюється правильно. У нашому випадку необхідно проконтролювати, щоб учні об'єднували однакові пари в один варіант, наприклад СК і КС. По закінченню цього етапу учень отримує відповідь на задачу, а також отримує наочний приклад розв'язання (рис. 1).

Таблиця 1.

Матриця можливих пар чергових у класі до задачі 1

	С	К	Р	М
С	СС	СК	СР	СМ
К	КС	КК	КР	КМ
Р	РС	РК	РР	РМ
М	МС	МК	МР	ММ

Четвертий етап – аналіз отриманого результату. До початку цього етапу учень може вважати, що поставлене перед ним завдання вирішене, але це не зовсім так.

Необхідно проаналізувати та перевірити метод розв'язання задачі, виявити правильність ходу отримання розв'язання та відповідь. На цьому етапі можна запропонувати учням самостійно перевірити розв'язок задачі, це можна зробити кількома способами. Наприклад, попросити учнів та учениць ще раз розв'язати цю задачу за допомогою обраного методу або запропонувати їм альтернативний метод розв'язання. У випадку задачі 1 можна перевірити розв'язок за допомогою складання таблиці можливих варіантів. При цьому необхідно проконтролювати, що під час складання таблиці учні розуміють, що обрана людина не може чергувати сама з собою та виключали такі варіанти розв'язання. В таблиці потрібно об'єднувати однакові пари в один варіант. За підсумком перевірки школярі отримають таблицю можливих пар чергових у класі (табл. 1).

Задача 1 є гарним прикладом для первинного закріплення знань, отриманих під час вивчення елементів комбінаторики. Таке завдання підходить для перевірки: як саме учнями засвоєна побудова графа у вигляді «дерева розв'язків» (новий варіант розв'язання комбінаторних задач); чи не виникає в учнів та учениць труднощів у розумінні та побудові графа. Це дасть змогу скоригувати подальшу роботу учнів та учениць. Завдання задачі вимагає від школярів побудувати всі можливі комбінації пар із чотирьох осіб і знайти їх кількість. У процесі розв'язування цієї задачі учні та учениці можуть практично застосувати знання про комбінаторні підрахунки, використовуючи графічний метод для візуалізації варіантів. Ця задача сприяє розвитку таких важливих навичок, як робота з обмеженнями задачі, перевірка результатів та застосування альтернативних методів розв'язання (наприклад, складання таблиці можливих комбінацій). У процесі виконання завдання учні навчаються виділяти ключову інформацію, обирати найзручніший метод розв'язання та аналізувати отримані результати.

Поетапне навчання школярів графічному моделюванню при розв'язуванні комбінаторних задач робить позитивний вплив на вміння використовувати учнями та ученицями схематичного рисунка, а надалі – графічних схем при розв'язуванні будь-якої текстової задачі. Розв'язування комбінаторних задач способом перебору сприяє освоєнню учнями та ученицями основ математичного моделювання. Спочатку це предметні рисунки, потім умовно-символічні позначення, а далі школярі користуватимуться схематичними моделями: таблицями, графами. Розв'язування комбінаторних задач на заняттях математичного гуртка, що перебувають у тісному зв'язку з програмним змістом, буде посилювати позитивний вплив і на розвиток інших психологічних процесів. Так, буде значно розширюватися обсяг і концентрація уваги, розвиватися пам'ять, формуватися вміння оформлювати свої міркування, пояснення, докази в словесній формі, що позитивно впливатиме й на загальний розвиток мовлення.

Теорія ймовірностей є важливим розділом математики, який навчає аналізувати випадкові події, оцінювати їхню ймовірність та приймати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності. Особливу роль у її вивченні відіграють задачі, які базуються на класичному означенні ймовірності. Їх розв'язання вимагає чіткого розуміння умов задачі, формулювання математичної моделі та ретельного аналізу можливих

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

результатів експерименту. Розглянемо приклад розв'язання задач із застосуванням алгоритму Поя.

Задача 2. *Наталка двічі кидає кубик, у сумі вона отримує* 8 *очок. Яка ймовірність того, що на одному з кубиків є число* 5*?*

Розв'язання.

Перший етап – осмислення умови задачі. На цьому етапі переконуємось, що учні та учениці розуміють умову задачі, та будуємо математичну модель задачі. Для цього ставимо такі запитання:

1. *Що нам дано в задачі?*
   - Учні та учениці мають відповісти, що Наталка кидає два стандартні кубики, кожен із яких має числа від 1 до 6.
2. *Що потрібно виконати в задачі?*
   - Визначити ймовірність того, що на одному з кубиків випадає число 5, за умови, що сума очок на обох кубиках дорівнює 8.
3. *Яке обмеження є в задачі?*
   - Сума чисел на двох кубиках має бути рівною 8.
4. *Яке основне запитання задачі?*
   - Скільки серед усіх можливих результатів пар чисел, сума яких дорівнює 8, сприяє події, де на одному з кубиків випадає 5?

Другий етап – складання плану розв'язання. Учням та ученицям потрібно зрозуміти, як правильно підрахувати можливі результати експерименту та визначити сприятливі події. Для цього пропонуємо такі питання:

1. *Яка математична модель задачі?*
   - Модель описується рівнянням: $x + y = 8$, де x – кількість очок на першому кубику, а y – на другому.
2. *Які всі можливі комбінації* x *і* y*, що задовольняють умову* $x + y = 8$*?*
   - Учні та учениці мають перебрати всі можливі значення x та y, де $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$, і визначити, які з них дають суму 8.
3. *Які результати є сприятливими для події* A*: на одному з кубиків випадає* 5*?*
   - Школярі мають знайти серед усіх пар такі, що на одному з кубиків є число 5.
4. *Як знайти ймовірність події* A*?*
   - Використати класичне означення ймовірності.

Третій етап – реалізація плану розв'язання.

1. *Визначаємо всі можливі результати.*
   - Рівняння $x + y = 8$ обмежує можливі комбінації чисел x та y, які можуть випасти на двох кубиках. Усі можливі пари (x, y): $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$. Отже, кількість усіх можливих результатів: $| S | = 5$.
2. *Знаходимо сприятливі результати для події* A*.*
   - Подія A – на одному з кубиків випадає 5. Це означає, що серед пар (x, y) повинна бути пара, в якій хоча б одна координата дорівнює 5. Сприятливі пари: $(3,5)$ і $(5,3)$. Кількість сприятливих результатів: $| A | = 2$.
3. Обчислюємо ймовірність події A.

- Використовуємо формулу класичного означення ймовірності:

$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$. Підставляємо значення: $P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Четвертий етап – аналіз отриманого результату. Усі можливі пари (5 пар) дійсно задовольняють рівняння $x + y = 8$. Сприятливі пари (2 пари) включають усі випадки, коли хоча б один із кубиків має число 5. Можемо використовувати альтернативну візуалізація. Побудуємо таблицю (табл. 2), яка показує всі можливі результати.

Таблиця 2.

Співвідношення чисел на двох кубиках із заданою сумою

Кубик 1 (x)	Кубик 2 (y)	Сума $(x + y)$	Чи є 5?
2	6	8	Ні
3	5	8	Так
4	4	8	Ні
5	3	8	Так
6	2	8	Ні

З даних таблиці видно, що лише 2 з 5 пар сприяють появі події A. Тому, шукана ймовірність становить $0{,}4$.

Відповідь: Ймовірність того, що на одному з кубиків є число 5 – $P(A) = 0{,}4$.

Розв'язок задачі 2 демонструє, як застосування класичного означення ймовірності допомагає учням та ученицям розв'язувати практичні задачі, пов'язані з аналізом випадкових подій. У ході її розв'язування учні навчаються складати математичну модель задачі, визначати можливі та сприятливі результати експерименту, а також обчислювати ймовірність події. Завдання дозволяє перевірити рівень розуміння учнями основних понять теорії ймовірностей та їхню здатність використовувати отримані знання на практиці. Альтернативні способи перевірки результату, наприклад, складання таблиці можливих варіантів, сприяють глибшому осмисленню задачі та зміцнюють упевненість учнів та учениць у своїх розрахунках. Завдяки своїй наочності та прикладній спрямованості ця задача стає ефективним інструментом для закріплення теоретичних знань і формування практичних навичок, необхідних для обчислень за класичним означенням ймовірності. Вона також готує учнів та учениць до більш складних задач, які потребують вищого рівня абстрактного мислення та математичного аналізу.

7. Методика визначення емоційного стану учнів

У шкільному середовищі взаємодія ігрової та освітньої діяльності є головним джерелом виникнення та прояву емоцій учнів та учениць. Усі види почуттів розвиваються під час процесу навчання математики. Коли у активній діяльності учні та учениці мають справу з труднощами, які навчаються успішно долати, докладаючи вольові зусилля, то ж в результаті у них з'являються такі нові інтелектуальні почуття,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

як: інтерес, допитливість, радість, сумнів, здивування та багато інших. Згодом у дітей формується і розвивається розуміння власних почуттів, емоцій, вони навчаються проявляти їх у спілкуванні з оточуючими людьми.

Якщо вчитель, який навчає математики, має високий рівень математичної компетентності, добре знає сферу застосувань математики, вміє організувати захопливий процес пошуку розв'язання кожної математичної задачі, вірить у розвивальні можливості занять математикою для формування творчої особистості, то такий учитель здатен не лише оволодіти технологіями розвитку критичного та творчого мислення учнів та учениць, а й здатен творити такі освітні технології. Вчитель, який любить математику, може: розбудити інтерес до математики у своїх учнів та учениць і розвивати їх засобами математики, а також формувати в них творче креативне мислення.

Від учителя математики вимагається вміння організувати свою дію так, щоб її кінцевим результатом стала особиста взаємодія з учнями на педагогічно оптимальному рівні. Значну допомогу у цьому плані надають педагогічні технології – наукове проєктування та точне відтворення педагогічних дій, що гарантують успіх усіх учасників освітнього процесу. Центральним компонентом педагогічної технології є чітко визначена кінцева мета, що дозволяє розробити оптимальний алгоритм її досягнення. Важливим також є інструментарій відстеження рівня досягнення запланованих результатів та за необхідності внесення покрокових коректівів. Зокрема важливим етапом підведення підсумків уроку з математики буде отримання вчителем від учнів та учениць так званого «зворотного зв'язку» з використанням інтерактивних та коучингових освітніх технологій.

Використання інтерактивної моделі навчання математики передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання ролевих ігор, проєктну діяльність, спільне вирішення проблемних ситуацій. Інтерактивне навчання – це навчання з добре організованим зворотним зв'язком учнів та учениць з учителем, двосторонній обмін інформацією між ними. Інтерактивні технології базуються на прямій взаємодії з учнями. При використанні інтерактивних технологій завданням вчителя є створення умов для розвитку ініціативи учнів та учениць. Останні виступають повноправними учасниками освітнього процесу, при розв'язуванні задач – їх досвід важливий не менше, ніж досвід учителя математики, який не тільки повідомляє готові знання, а й спонукає учнів та учениць до самостійності, аналізу ситуацій, надає право вибору розв'язку поставленої задачі, залишаючи за учнями та ученицями право на помилку та пошук правильного розв'язку на основі аналізу (самоаналізу) обраної раніше позиції. Вчитель виступає в декількох основних ролях: інформатора-експерта, коли викладає суть теми чи проблеми, описує ситуацію, відповідає на питання школярів, відстежує результати освітнього процесу; консультанта, коли звертається до досвіду учнів та учениць, допомагає шукати розв'язання поставлених задач, самостійно ставити нові завдання тощо.

Однією із методик дослідження емоційного стану учнів та учениць на заняттях математичного гуртка є проєктивна методика «Дерево». Методика спрямована на дослідження шкільної мотивації та адаптації учнів та учениць. Вона була створена для

школярів з метою перевірити, як вони освоїлися в школі за перші роки навчання. Проте пізніше з'ясувалося, що тест актуальний і для дорослих. Методика була запропонована на семінарі шкільних психологів в Одесі англійськими психологами Джоном і Дайаной Лампен (1997 р.) для забезпечення можливості більш повного вивчення особистості школярів. Даний тест дітям дуже подобається. Автор цього тесту – відомий британський психолог Піп Вілсон (Pip Wilson). Тест допомагає людині визначити її сьогодення та бажаний емоційний стан. Мета: дослідження рівня шкільної мотивації та адаптації учнів та учениць на уроках математики.

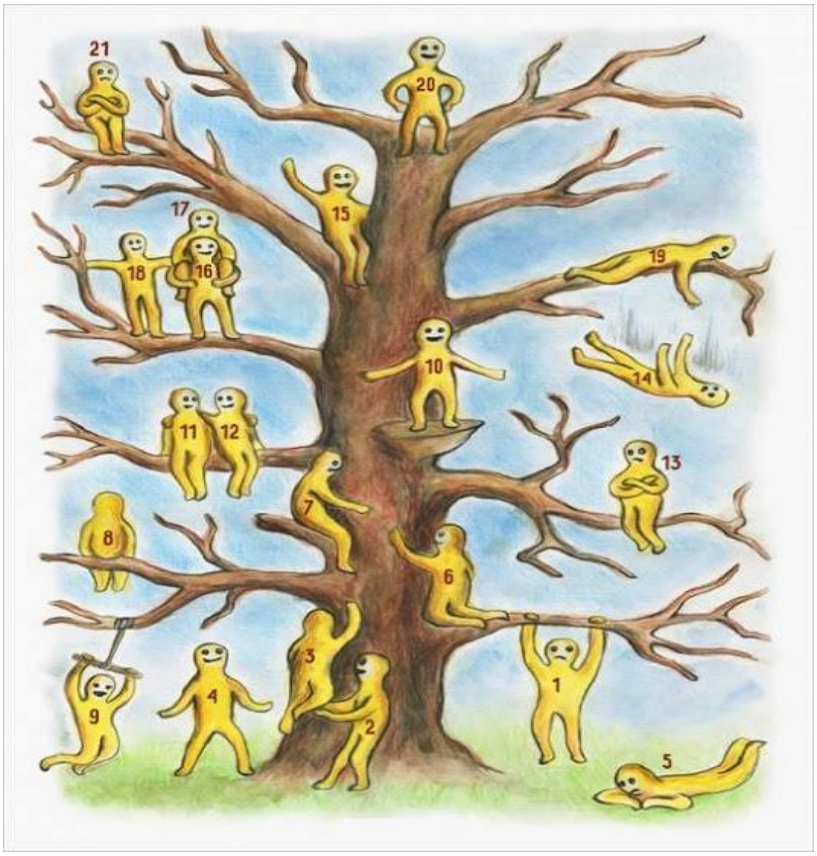


Рис. 2. Інтерактивний інструмент для самооцінки – «Дерево»

Інструкція для учнів та учениць. Щколярам пропонуються аркуші з готовим зображенням сюжету: дерево, на якому розташовуються чоловічки (рис. 2). Кожен учень одержує лист із таким зображенням (але без нумерації фігурок).

Завдання учню дається в наступній формі.

1. Розглянь це дерево. На ньому і поряд з ним множина чоловічків. У кожного з цих чоловічків на дереві різний настрій і вони займають різні місця.
2. Уяви, що це «дерево знань» і один із чоловічків – це ти. Подивись уважно на дерево. Де ти знаходишся?
3. Візьми червоний фломастер і обведи в кружечок того чоловічка, який нагадує тобі себе та має такий же настрій як у тебе зараз.
4. Наскільки добре ти впорався з теоретичним матеріалом сьогоднішньої теми? Як ти відчуваєш?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

5. Як ти почуваєш себе після розв'язування задач?
6. Яке твоє положення в класі сьогодні?
7. Де твої друзі? Обведи їх на дереві знань.
8. Перевіримо, наскільки ти уважний. Зверни увагу, що кожну гілку дерева можна прирівняти твоїм досягненням і успіхам у засвоєнні теми.
9. Тепер візьми зелений фломастер і обведи того чоловічка, яким ти хотів стати, отримавши сьогодні знання та навички. На якому місці ти би хотів знаходитись?

Буває так, що деякі учні просять дозволу позначити позиції двох чоловічків. У такому випадку не слід обмежувати їх вибір, але необхідно зафіксувати, який чоловічок був відзначений у першу чергу, який у другу, так як співвідношення цих виборів може бути досить інформативним.

Інтерпретація результатів виконання проєктивної методики «Дерево» проводиться виходячи з того, які позиції вибирає даний учень чи учениця, з положенням якого чоловічка ототожнює своє реальне та ідеальне положення, чи є між ними відмінності. Інтерпретація розроблена з урахуванням досвіду практичного застосування методики та порівняння її результатів із спостереженнями за поведінкою дітей, даних, отриманих із бесіди з дитиною. Для зручності пояснення кожній фігурці привласнений свій номер.

Інтерпретація результатів. Позиції, які вибирає школяр, є ототожненням свого реального та ідеального положення, чи є між ними розходження?

Вибір позицій характеризує:

- № 1, 3, 6, 7 – установку на подолання перешкод;
- № 2, 19, 18, 11, 12 – товариськість, дружню підтримку;
- № 4 – стійкість положення (бажання домагатися успіхів, не переборюючи труднощі);
- № 5 – стомлюваність, загальна слабість, невеликий запас сил, сором'язливість;
- № 9 – мотивація на розваги;
- № 13, 21 – відстороненість, замкнутість, тривожність;
- № 8 – відстороненість від навчального процесу, відхід у себе;
- № 10, 15 – комфортний стан, нормальна адаптація;
- № 14 – кризовий стан, "падіння в прірву".
- № 20 – часто вибирають як перспективу учні з завищеною самооцінкою й установкою на лідерство.

Слід зауважити, що позицію № 16 учні чи учениці не завжди розуміють як позицію «чоловічка, який несе на собі чоловічка № 17», а схильні бачити в ній людину, яку підтримує та обіймає інший чоловічок № 17.

8. Висновки

У статті розглянуто використання алгоритмічного методу Поя у викладанні тем, пов'язаних з елементами теорії ймовірностей на заняттях математичного гуртка.

Алгоритмічний підхід до навчання, зокрема застосування поетапного розв'язування задач, є ефективним інструментом для систематизації знань і розвитку навичок роботи з реальними математичними моделями. Розбиття процесу

знаходження розв'язку на чіткі етапи дозволяє учням краще розуміти структуру задачі, планувати її розв'язання та аналізувати результати. Значення алгоритмічного методу полягає в його універсальності: він може бути застосованим до задач різної складності та рівня, сприяючи поступовому зануренню учнів та учениць у матеріал. Такий підхід допомагає зробити навчання більш структурованим, зрозумілим і мотивуючим для школярів, забезпечуючи їм фундаментальні знання та навички для подальшого розвитку.

У перспективі вдосконалення підходів до викладання елементів теорії ймовірностей передбачає впровадження інноваційних методів навчання, які враховуватимуть сучасні тенденції освіти та особливості нових поколінь школярів. Особливий акцент може бути зроблено на адаптації матеріалів до різних рівнів підготовки учнів та учениць, створенні інтерактивних інструментів для навчання, таких як цифрові платформи, симуляції та візуалізації, зокрема проєктивна методика «Дерево». Подальший розвиток методик навчання та викладання може не лише покращити навчальні результати учнів та учениць, але й підготувати їх до використання отриманих знань у майбутньому, що є важливою складовою сучасної математичної освіти.

Список використаних джерел

Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. (2019). Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Гімназія. https://pidruchnyk.com.ua/439-algebra-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakr-11-klas.html

Бевз Г.П. (2021). Моя методика математики. Навчальна книга – Богдан. 584 с.

Мамбрей Т., Халл. С.(2024). Математика для початківців. Книголав. 128 с.

Бевз В.Г.(2006). Історія математики. Основа. http://matematuka.inf.ua/rizne/hist_mat_bevz/hist_mat_bevz.html

Проєктивна методика "Дерево" (Джон і Дайан Лампен) https://zlatolic.com.ua/sites/zlatolic.com.ua/files/document/proektivna-metodika-derevo.docx_0.pdf

Pólya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. https://math.hawaii.edu/home/pdf/putnam/PolyaHowToSolveIt.pdf

Отримано редакцією журналу: 10.01.2025
Прорецензовано: 20.04.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Maryna HRYSENKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0816-4734
e-mail: magryss@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Anastasia TKACHENKO, student
e-mail: nastyatkachenko0711@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

HOW TO TEACH STUDENTS TO SOLVE PROBABILITY PROBLEMS USING THE POLYA'S ALGORITHM

Abstract. *The features of the application of George Polya's algorithmic method during classes in a mathematics club dedicated to the study of elements of combinatorics and probability theory are studied.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

The emphasis is on Polya's algorithm as a universal means of structuring the process of solving problems and developing students' logical thinking. The advantages of a step-by-step approach to learning are considered, which include understanding the condition of the problem, drawing up a plan, implementing and analyzing the result obtained. Special attention is paid to the study of the emotional state of students during classes in the club using the projective technique "Tree", aimed at studying the level of motivation and adaptation of schoolchildren.

Keywords: *Polya's algorithm; system of questions; combinatorics; probability theory; graph-tree; projective methodology «Tree».*

Математичний гурток

УДК 514.18 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.7**

Олександр КУРЧЕНКО, Д-р. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-0417-5970
e-mail: oleksandrkurchenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ольга СИНЯВСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-2711-3940
e-mail: olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ДВНЗ "Ужгородський національний університет", Ужгород, Україна

ОДНЕ ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ОБ'ЄМУ ЗРІЗАНОЇ ПІРАМІДИ

Анотація. *Однією з актуальних задач сучасної української школи є формування математичної компетентності учнів, зокрема геометричної компетентності. Різні підходи до доведення теорем та формул геометрії сприяють розвитку геометричної компетентності учнів старшої школи.*

У статті наведено одне з доведень формули об'єму зрізаної піраміди. Формула об'єму зрізаної піраміди є важливим результатом у стереометрії та її застосуваннях. У сучасних підручниках геометрії цю формулу отримують як різницю об'ємів двох подібних пірамід. Пропоноване у даній статті доведення цієї формули спирається на лему про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри таким чином, що об'єм одного із таких тетраедрів дорівнює середньому пропорційному об'ємів двох інших тетраедрів. У статті також доведено цю лему та за її допомогою отримано формулу для обчислення об'єму зрізаного тетраедра. Перехід до зрізаної піраміди здійснюється за допомогою розбиття зрізаної піраміди на зрізані тетраедри.

Ключові слова: *піраміда; зрізана піраміда; об'єм піраміди; тетраедр; зрізаний тетраедр; призматоїд.*

1. Вступ

Одна з актуальних задач сучасної української школи – формування математичної компетентності учнів, зокрема геометричної компетентності (Мала, 2015). Різні підходи до доведення теорем та формул геометрії, безумовно, сприяють розвитку геометричної компетентності учнів старшої школи.

Об'єм зрізаної піраміди з площами основ S_1, S_2 та висотою h обчислюється за формулою:

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right). \qquad (1)$$

У сучасних підручниках з геометрії, наприклад, (Нелін, Долгова, 2019; Істер, Єргіна, 2019), формулу об'єму зрізаної піраміди зазвичай отримують як різницю об'ємів двох подібних пірамід.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

У цій статті доведення формули (1) ґрунтується на лемі про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри, так що об'єм одного з цих тетраедрів дорівнює середньому пропорційному (середньому геометричному) об'ємів двох інших тетраедрів.

Об'єктом дослідження є об'єм зрізаної піраміди.

Метою дослідження є доведення формули об'єму зрізаної піраміди із застосуванням леми про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри таким чином, що об'єм одного із таких тетраедрів дорівнює середньому пропорційному об'ємів двох інших тетраедрів.

2. Результати

Лема 1. (Baratech Montes, 1940) *Кожний зрізаний тетраедр можна розкласти на три тетраедри так, що основи двох з цих тетраедрів збігаються з основами зрізаного тетраедра і мають висоти, які дорівнюють висоті зрізаного тетраедра. Об'єм третього тетраедра дорівнює середньому пропорційному об'ємів цих двох тетраедрів*.

Доведення. Нехай $ABCDEF$ – зрізаний тетраедр (рис. 1), S_1 – площа його нижньої основи, S_2 – площа верхньої основи, h – довжина його висоти.

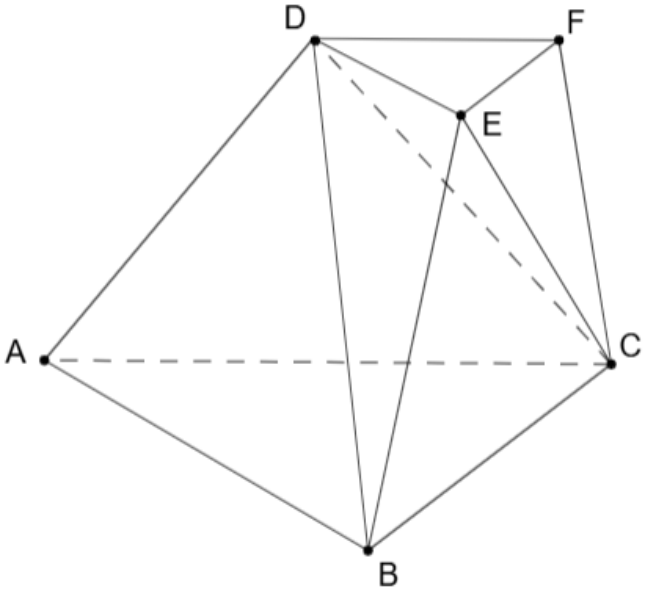


Рис. 1. Зрізаний тетраедр $ABCDEF$

Розглянемо тетраедри $DABC$, $CDEF$, $DEBC$. Зрозуміло, що сума об'ємів цих тетраедрів дорівнює об'єму зрізаного тетраедра $ABCDEF$.

Нехай V_1 – об'єм тетраедра $DABC$, V_2 – об'єм тетраедра $CDEF$, V_3 – об'єм тетраедра $DEBC$ відповідно. За формулою об'єму піраміди

$$V_1 = \frac{1}{3}hS_1, \tag{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{3}hS_2. \tag{3}$$

Доведемо, що

$$V_3 = \sqrt{V_1 V_2}. \tag{4}$$

Розглянемо тетраедри $DABC$ і $DEBC$ як тетраедри з вершиною C та основами ABD і BED відповідно. Ці тетраедри мають спільну висоту, опущену з вершини C. Довжину цієї висоти позначимо через h_C. Площі трикутників ABD і BED позначимо через S_{ABD} та S_{BED} відповідно. Тоді

$$V_1 = \frac{1}{3}h_C S_{ABD},$$

$$V_3 = \frac{1}{3}h_C S_{BED},$$

звідки

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{S_{ABD}}{S_{BED}}. \tag{5}$$

Оскільки $DE \parallel AB$, то висота $\Delta\, ADE$, опущена з вершини A на сторону DE, і висота $\Delta\, BED$, опущена з вершини E на сторону AB, мають однакову довжину. Тому

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BED}} = \frac{AB}{DE}. \tag{6}$$

Із рівностей (5) та (6) випливає, що

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{AB}{DE}. \tag{7}$$

Проведемо аналогічні міркування для тетраедрів $DECF$ і $DEBC$ із спільною вершиною D та основами ECF і EBC відповідно. У результаті отримаємо рівність

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{BC}{EF}. \tag{8}$$

Внаслідок подібності основ зрізаного тетраедра,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}. \tag{9}$$

Із рівностей (7), (8), (9) випливає, що

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{V_3}{V_2},$$

звідки $V_3 = \sqrt{V_1 V_2}$. Лема доведена.

■

Зауваження 1. *Зауважимо, що об'єм V зрізаного тетраедра дорівнює сумі об'ємів тетраедрів розбиття*:

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \tag{10}$$

3. Обчислення об'єму зрізаного тетраедра

Із рівностей (2), (3), (4) маємо:

$$V_3 = \sqrt{V_1 V_2} = \sqrt{\frac{1}{3} h S_1 \cdot \frac{1}{3} h S_2} = \frac{1}{3} h \sqrt{S_1 S_2}.$$

Тепер із рівності (10) слідує, що об'єм зрізаного тетраедра з висотою h і площами основ S_1, S_2 дорівнює:

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

4. Обчислення об'єму зрізаної піраміди

Нехай $A_1 A_2 \ldots A_n A_1' A_2' \ldots A_n'$ – зрізана n-кутна піраміда з висотою h, площею нижньої основи S_1 і площею верхньої основи S_2. На рис. 2 зображено зрізану п'ятикутну піраміду.

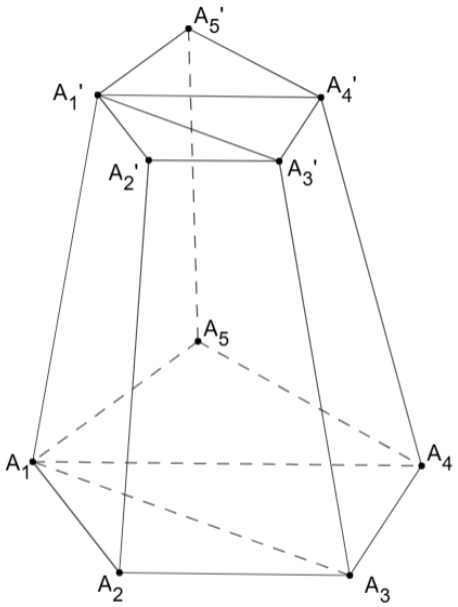


Рис. 2. Зрізана піраміда

Розіб'ємо зрізану n-кутну піраміду на $n-2$ зрізаних тетраедри $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$, $A_1A_3A_4A_1'A_3'A_4'$, …, $A_1A_{n-1}A_nA_1'A_{n-1}'A_n'$. Висота кожного з тетраедрів дорівнює висоті зрізаної піраміди.

Через a_i, a_i' позначимо відповідно площі нижньої і площу верхньої основи зрізаного тетраедра $A_1A_iA_{i+1}A_1'A_i'A_{i+1}'$, $2 \le i \le n-1$.

Зауважимо, що

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_1,$$
$$a_2' + a_3' + \cdots + a_{n-1}' = S_2.$$

Нехай k – коефіцієнт подібності верхньої і нижньої основ для n-кутної зрізаної піраміди, причому:

$$k = \frac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \frac{A_2'A_3'}{A_2A_3} = \cdots = \frac{A_n'A_1'}{A_nA_1}.$$

При цьому відношення площ подібних фігур дорівнює k^2:

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2, \qquad \frac{a_i'}{a_i} = k^2, 2 \le i \le n-1.$$

Об'єм зрізаного тетраедра $A_1A_iA_{i+1}A_1'A_i'A_{i+1}'$ дорівнює

$$V_i = \frac{h}{3}\left(a_i + a_i' + \sqrt{a_ia_i'}\right) = \frac{h}{3}(a_i + a_i' + ka_i), \ \ 2 \le i \le n-1.$$

Об'єм зрізаної n-кутної піраміди дорівнює

$$V = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{h}{3}(a_i + a_i' + ka_i) = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + kS_1) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{k^2S_1S_1}\right) = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

Формулу (1) доведено.

■

5. Узагальнення результату

Опуклий многогранник, всі вершини якого лежать у двох паралельних площинах, називається *призматоїдом*. Ці паралельні площини називають також опорними. Зрізана піраміда є призматоїдом, але не навпаки.

Об'єм призматоїда обчислюється за формулою:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$V = \frac{H}{6}(S_1 + 4S_c + S_2), \tag{11}$$

де H – відстань між опорними площинами (висота призматоїда);

S_1, S_2 – площі основ призматоїда;

S_c – площа середнього перерізу, тобто перерізу, який проходить через середину висоти і паралельний до опорних площин.

Доведення формули (11) можна знайти у статті (Кукуш, Ушаков, 2002).

6. Висновки

У статті доводиться формула для обчислення об’єму зрізаної піраміди. Доведення формули спирається на розглянуту у статті лему про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри, таким чином, що об’єм одного із таких тетраедрів дорівнює середньому пропорційному об’ємів двох інших тетраедрів. Спочатку розглянуто випадок для зрізаного тетраедра, а потім – для зрізаної n-кутної піраміди. Актуальність проведеного дослідження полягає у розвитку геометричних методів доведення, що сприяє розвитку геометричної компетентності учнів.

Внесок авторів

Олександр Курченко – концептуалізація; методологія, написання; Ольга Синявська – аналіз джерел, підготовка огляду літератури, написання – перегляд і редагування.

Список використаних джерел

Мала, Л. (2015). Аналіз сучасних проблем формування геометричної компетентності учнів старшої школи. Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III (74), 39-43. https://seanewdim.com/wp-content/uploads/2021/03/Analysis-of-current-problems-of-forming-geometrical-competence-high-school-students-L.O.-Mala.pdf

Нелін, Є.П., & Долгова, О.Є. (2019). Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Вид-во «Ранок». 208 с.

Істер О., & Єргіна, О. (2019). Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза. 288 с.

Baratech Montes, B. (1940). Matemáticas: tercer curso del bachillerato. Geometria. Librería General, Zaragoza. 128 p.

Кукуш, О.Г., & Ушаков, Р.П. (2002) Призматоїд та його об’єм. У світі математики: Український математичний журнал для школярів, 8 (2), 46-50.

Отримано редакцією журналу: 06.04.2025
Прорецензовано: 28.04.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Olexandr KURCHENKO, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-0417-5970
e-mail: oleksandrkurchenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Olga SYNIAVSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-2711-3940
e-mail: olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine

THE FORMULA FOR THE VOLUME OF A TRUNCATED PYRAMID

Abstract. *One of the current tasks of the modern Ukrainian school is the formation of students' mathematical competence, mainly geometric competence. Various approaches to proving theorems and formulas of geometry contribute to the development of geometric competence of high school students.*

This article presents one of the proofs of the formula for the volume of a truncated pyramid. The formula for the volume of a truncated pyramid is an important result in solid geometry and its applications. In modern geometry textbooks, this formula is obtained as the difference of the volumes of two similar pyramids. The proof of this formula proposed in this article is based on the lemma about the division of a truncated tetrahedron into three tetrahedrons in such a way that the volume of one of such tetrahedrons is equal to the average proportional volume of the other two tetrahedrons. The proof of this lemma is also given in this article. Using this lemma, we obtain a formula for calculating the volume of a truncated tetrahedron. The transition to a truncated pyramid is accomplished by breaking the truncated pyramid into truncated tetrahedron.

Keywords: *pyramid; truncated pyramid; pyramid volume; tetrahedron; truncated tetrahedron; prismatoid.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 511.5 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.8**

Василь ЮСИПІВ, вчитель вищої категорії
ORCID ID: 0009-0006-4461-7514
e-mail: yusypiv.vd@gmail.com

Тарас ЮСИПІВ, доктор філософії
ORCID ID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

МЕТОД НЕСКІНЧЕННОГО СПУСКУ, МЕТОД ЧАКРАВАЛА ТА ЧИСЛА ПЕЛЛЯ

Анотація. *Метод нескінченного спуску є елегантним інструментом для доведення неможливості певних розв'язків, використовуючи логіку зменшення параметрів до абсурду. Метод вперше був чітко сформульований і використаний П'єром де Ферма у XVII столітті, хоча ідеї, схожі на цей метод, могли з'явитися в математиці раніше в менш формалізованому вигляді. Ферма застосував цей метод у своїх працях з теорії чисел для доведення тверджень, пов'язаних із діофантовими рівняннями, і зокрема – Великої теореми Ферма[1]. Цей метод і зараз залишається актуальним, допомагаючи розв'язувати складні діофантові рівняння. У той же час, метод чакравала, розроблений індійськими математиками та описаний Брахмагуптою та Бхаскарою, є потужним алгоритмом для знаходження цілочисельних розв'язків рівняння Пелля, що є відомим діофантовим рівнянням. Цей циклічний метод базується на послідовному «згортанні» трійок знайдених розв'язків і має на меті ефективно наближати ірраціональні числа раціональними дробами. Завдяки своїй простоті та універсальності метод чакравала перевершує за ефективністю деякі сучасні підходи, такі як метод Лагранжа, і знаходить застосування в криптографії, комбінаториці та теорії чисел. Числа Пелля та відповідні рівняння Пелля відіграють ключову роль у теорії чисел, зокрема при розв'язуванні діофантових рівнянь виду* $x^2 - ny^2 = \pm 1$ *та мають зв'язок з ланцюговими дробами.*

Ключові слова: *метод нескінченного спуску; метод чакравала; рівняння Пелля; числа Пелля; діофантове рівняння; діофантові наближення; ірраціональні числа.*

1. Вступ

Дослідження методів нескінченного спуску, чакравали[2] та чисел Пелля має значну актуальність у сучасній математиці, зокрема в теорії чисел, криптографії та комбінаториці. Ці методи знаходять застосування в практичних задачах, таких як-от наближення ірраціональних чисел, створення безпечних криптографічних алгоритмів та оптимізація форматів даних. Актуальність теми посилюється її історичною значимістю, адже ці методи, розроблені математиками минулого, залишаються релевантними для сучасних обчислень, що обумовлює необхідність поглибленого аналізу цих методів, їхньої ефективності та адаптації до нових видів завдань, таких як масштабні обчислення в криптографії чи аналізі даних.

[1] Наразі достеменно невідомо, чи мав Ферма математично завершене доведення Великої теореми.
[2] Метод чакравали – на санскриті «чакра» означає «колесо», що вказує на циклічну природу методу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі Edwards (2000) досліджується історичний контекст методу нескінченного спуску, звертаючи увагу на його еволюцію від Ферма до сучасних алгебраїчних структур. Питання розв'язання діофантових рівнянь і застосування чисел Пелля активно досліджується в сучасній літературі. Наприклад, у роботі Barbeau (2003) детально описано зв'язок рівнянь Пелля з ланцюговими дробами та їхнє застосування в теорії чисел, підкреслюючи важливість методу чакравали. Більше того, у дослідженні Lenstra (2002) показано, як методи, подібні до чакравали, використовуються в сучасній криптографії, зокрема, в системах, заснованих на дискретному логарифмі та факторизації. Розв'язки рівняння Пелля використовуються для побудови криптографічних алгоритмів, таких як схеми шифрування, що базуються на еліптичних кривих, або для атак на певні криптосистеми, де використовуються великі цілі числа з особливими властивостями.

Об'єктом дослідження є методи нескінченного спуску та чакравали, а також числа Пелля як важливі інструменти для розв'язування діофантових рівнянь та наближення ірраціональних чисел.

Метою роботи є аналіз методів нескінченного спуску та чакравали, їхньої історичної еволюції, математичної структури та сучасних застосувань. Завдання дослідження включають:

- висвітлення історичного контексту виникнення методів;
- аналіз їхньої математичної структури та алгоритмів;
- демонстрацію зв'язку чисел Пелля з ланцюговими дробами.

Нижче у статті розглянуто історичні витоки дослідження ірраціональності чисел та методів доведення від супротивного, описано метод нескінченного спуску, наведено приклади розв'язування задач з його використанням. Також розглянуто рівняння Пелля та метод чакравала, представлено зв'язок рівняння Пелля з ланцюговими дробами й практичне застосування наближених дробів для раціональних чисел.

2. Витоки: піфагорійська школа та корінь з числа 2

У VI столітті до нашої ери піфагорійська школа, заснована Піфагором на півдні Італії, була осередком математичних і філософських ідей. Піфагорійці вважали, що все у Всесвіті можна виразити через цілі числа або їхні відношення – раціональні числа. Це була основа їхньої гармонійної картини світу, де числа мали майже містичне значення.

Однак усе змінилося, коли піфагорійці зіткнулися з коренем із числа 2. Це число природно з'являється при розгляді діагоналі квадрата зі стороною 1 (за теоремою Піфагора: $1^2 + 1^2 = d^2$, звідки $d = \sqrt{2}$). Піфагорійці намагалися представити $\sqrt{2}$ як дріб a/b, де a і b – натуральні числа, але їхні зусилля постійно зазнавали краху, оскільки $\sqrt{2}$ є *ірраціональним числом* (тобто, не може бути виражене жодним раціональним дробом).

Відома легенда розповідає про піфагорійця Гіппаса, який першим довів неможливість виразити число $\sqrt{2}$ як відношення двох натуральних чисел. Це відкриття похитнуло основи піфагорійської школи, адже воно підривало їхню віру в

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

універсальність раціональних чисел. За однією з версій, піфагорійці, які присягалися зберігати свої відкриття в таємниці, вважали це знання небезпечним. Існує міф, що Гіппаса покарали за розголошення: його або вигнали, або перевезли на безлюдний острів, або ж навіть скинули в море. Хоча історичних доказів цього немає, легенда відображає напругу та драматизм, які були викликані відкриттям факту існування ірраціональних чисел (навіть у прикладах з повсякденного життя). Це відкриття змусило математиків переосмислити природу чисел і заклало підґрунтя для розвитку теорії чисел.

Доведення ірраціональності $\sqrt{2}$, яке приписують Гіппасу, очевидно використовувало метод доведення від супротивного. Припустимо, що $\sqrt{2} = a/b$, де a і b – натуральні, взаємно прості числа, тобто, дріб нескоротний. Тоді $a^2 = 2b^2$. Це означає, що a^2 парне, отже, і саме число a ділиться на 2. Нехай $a = 2k$. Підставимо: $(2k)^2 = 4k^2 = 2b^2$, звідки $b^2 = 2k^2$. Отже, b^2 парне, тому і саме число b парне. Але якщо a і b обидва парні, вони не можуть бути взаємно простими – отримали суперечність, яка й доводить, що $\sqrt{2}$ не може бути раціональним числом.

2. Метод нескінченного спуску

Метод нескінченного спуску (МНС), який часто приписують П'єру Ферма, є потужним інструментом у теорії чисел. Він базується на ідеї, що якщо припущення про існування розв'язку для певної задачі приводить до іншого розв'язку, але з меншими значеннями, і цей процес повторюється нескінченно, то початкове припущення хибне. Це особливо корисно для доведення неможливості певних цілочисельних розв'язків.

Метод часто застосовується до рівнянь, де потрібно знайти цілі або раціональні розв'язки. Наприклад, при доведенні ірраціональності $\sqrt{n}$ (де n не є квадратом цілого числа, $n \neq 1, 4, 9, \ldots$) можна використати ідею спуску: якщо $\sqrt{n} = x/y$, де x та y – натуральні числа, то з $x^2 = ny^2$ ми отримуємо $x = nk$, а значить $y^2 = nk^2$, тобто, отримали послідовність чисел, яка постійно зменшується, але ніколи не зупиняється на деяких взаємно простих (нескоротних) числах x і y, що неможливо, оскільки множина натуральних чисел має найменший елемент.

3. Приклади розв'язування задач із застосуванням методу нескінченного спуску

Діофантовими називають такі (невизначені поліноміальні) рівняння з цілими коефіцієнтами, в яких невідомі змінні можуть набувати тільки цілих значень. Природно, доведення відсутності (нетривіальних) розв'язків для таких рівнянь проводити з використанням МНС. Наведемо кілька прикладів таких доведень.

Приклад 1. *Довести, що діофантове рівняння* $x^2 + y^2 = 3z^2$ *має лише тривіальний розв'язок* $(x = y = z = 0)$.

Доведення. Припустимо, що для даного рівняння існує нетривіальний розв'язок $(x; y; z)$. Можна довести, що в такому разі x та y діляться без остачі на 3. Дійсно,

розглянувши вихідне рівняння за модулем 3, отримаємо, що $x^2 + y^2 = 0 \pmod 3$ (іншими словами, $x^2 + y^2$ ділиться на 3 без остачі). Проаналізуємо числа x^2 та y^2 за модулем 3:

якщо $x \equiv 0 \pmod 3$, то $x^2 \equiv 0 \pmod 3$,

якщо $x \equiv 1 \pmod 3$, то $x^2 \equiv 1 \pmod 3$,

якщо $x \equiv 2 \pmod 3$, то $x^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$,

аналогічно, якщо $y \equiv 0 \pmod 3$, то $y^2 \equiv 0 \pmod 3$,

якщо $y \equiv 1 \pmod 3$, то $y^2 \equiv 1 \pmod 3$,

якщо $y \equiv 2 \pmod 3$, то $y^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$.

Отже, з усіх можливих варіантів сум квадратів, підходить лише той, де $x \equiv y \equiv 0 \pmod 3$, тобто числа x та y дійсно діляться на 3. Позначимо $x = 3k, y = 3l$. Тоді $3z^2 = (3k)^2 + (3l)^2$ або

$$z^2 = 3k^2 + 3l^2.$$

Отже, виходить, що число z теж ділиться на 3, звідки $z = 3m$. Тоді

$$(3m)^2 = 3k^2 + 3l^2 \text{ або } 3m^2 = k^2 + l^2.$$

Таким чином, прийшли до рівняння, аналогічного вихідному, але з утричі меншими числами. Оскільки множина натуральних чисел має найменший елемент, то процес такого спуску не може тривати нескінченно, тому маємо суперечність. Доведено.

■

Приклад 2. *Діофантове рівняння $x^4 + y^4 = z^2$ не має розв'язків у натуральних числах. Зокрема, не має розв'язків в натуральних числах рівняння $x^4 + y^4 = z^4$.*

Доведення. Нехай $(x; y; z)$ – розв'язок першого рівняння в натуральних числах x, y, z. Якщо G – найбільший спільний дільник чисел x та y, $G \neq 1$, то його можна розкласти на прості множники

$$G = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{\alpha_s}.$$

Враховуємо, що x^4 та y^4 діляться на кожне $p_i^4, i = \overline{1, s}$ та припустимо, що числа x, y, z не є попарно взаємно простими, тоді число z повинно містити в розкладі принаймні одне p_i^2. Продовжуючи цей процес, ми або прийдемо до попарно взаємно простих чисел x, y, z, або, в силу неможливості нескінченного спуску, – до суперечності.

Тепер, якщо $(x; y; z)$ – примітивний (нескоротний) розв'язок рівняння $x^4 + y^4 = z^2$ в натуральних числах, то $(x^2; y^2; z)$ – примітивна піфагорова трійка. Для таких трійок можлива лише одна з двох опцій:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\begin{cases} x^2 = 2uv, \\ y^2 = u^2 - v^2, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 = u^2 - v^2, \\ y^2 = 2uv, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases}$$

де u і v – взаємно прості натуральні числа різної парності. Не обмежуючи загальності (змінні x та y можна поміняти місцями), достатньо розглянути лише першу систему, звідки $y^2 + v^2 = u^2$, тобто отримали ще одну примітивну піфагорову трійку (оскільки u і v – взаємно прості). Тому можна вважати[3], що $y = r^2 - t^2, v = 2rt, u = r^2 + t^2$ для деяких взаємно простих чисел r і t. Підставляючи в перше рівняння системи, матимемо, що $x^2 = 4rt(r^2 + t^2)$, звідки $x = 2x_1$, де $x_1^2 = rt(r^2 + t^2)$, причому числа rt та $r^2 + t^2$ – взаємно прості: якщо б існувало просте число p – їх спільний дільник, то він був би спільним дільником взаємно простих чисел r і t, що неможливо. Отже, відповідно до наслідку з основної теореми арифметики, маємо $rt = a^2, r^2 + t^2 = b^2$ і

$$r = c^2, \qquad t = d^2, \qquad c^4 + d^4 = b^2.$$

Таким чином, за примітивним розв'язком $(x; y; z)$ побудовано новий примітивний розв'язок $(c; d; b)$, причому $b < x_1^2 < z$, тобто реалізовано метод нескінченного спуску, який зрештою приводить до неможливості такого розв'язку. Отже, діофантове рівняння $x^4 + y^4 = z^2$ дійсно не має нетривіальних розв'язків, а значить їх не має і його частковий випадок – рівняння $x^4 + y^4 = z^4$ (Велика теорема Ферма для випадку $n = 4$).

■

4. Рівняння Пелля та метод чакравала

Виявивши неможливість розв'язати в цілих відмінних від нуля числах x та y рівняння $x^2 = ny^2$ для натурального числа n, що не є квадратом цілого числа, математики ще у сиву давнину звернули увагу на подібне до цього рівняння

$$x^2 - ny^2 = \pm 1.$$

Такі рівняння називаються рівняннями Пелля[4] та мають застосування не тільки в теорії чисел, але й в криптографії, комбінаториці та при раціональних наближеннях ірраціональних чисел, оскільки з виразу

$$n = \frac{x^2 \pm 1}{y^2} \qquad \text{або} \qquad \sqrt{n} = \frac{x}{y}\sqrt{1 \pm \frac{1}{x^2}}$$

[3] Якщо обрати $y = 2rt$ та $v = r^2 - t^2$, подальші кроки залишаться однаковими, оскільки знову $x^2 = 4rt(r^2 + t^2)$.
[4] Назва з'явилася завдяки Леонарду Ойлеру, який помилково приписав їх авторство Джону Пеллю.

випливає, що раціональний дріб $\frac{x}{y}$ при необмеженому зростанні числа x (відповідно і числа y) наближає число $\sqrt{n}$.

Хоча й розв'язки конкретних прикладів рівняння (такі як числа Пелля, що можна отримати при $n = 2$) були відомі з часів Піфагора в Греції та Індії, вперше рівняння Пелля були ретельно досліджені в Індії, починаючи з Брахмагупти, який (запровадивши близько 628 року в своїй праці «Брахмаспхутасіддханта» циклічний метод розв'язання невизначених квадратних рівнянь, відомий як чакравала) знайшов цілочисельні розв'язки для кількох початкових значень числа n. Джаядева розвинув цей метод, а Бхаскара II наводить приклад знаходження мінімального нетривіального розв'язку рівняння Пелля $x^2 - 61y^2 = 1$: $x = 1766319049,\ y = 226153980$.

Саме випадок $n = 61$ був здавна відомий своєю складністю. У лютому 1657 року П'єр Ферма надіслав листа європейським математикам, зокрема англійським, через Кенелма Діґбі, у якому запропонував виклик: знайти цілі розв'язки для рівнянь Пелля виду $x^2 - ny^2 = 1$ для різних n, зокрема для $n = 61, 109, 149, 313$ та інших. Ферма стверджував, що знайшов найменші розв'язки для всіх n до 150, і кинув виклик англійським математикам, зокрема Джону Воллісу та Вільяму Браункеру, розв'язати ці рівняння. Вільям Браункер, працюючи разом із Воллісом, розробив метод розв'язання рівняння Пелля, який по суті був еквівалентний методу чакравала. У листуванні 1657–1658 років, опублікованому Воллісом у праці "Commercium epistolicum" (1658), Браункер надав розв'язки для рівнянь, запропонованих Ферма, включаючи $n = 61$ (який, очевидно, співпав з розв'язком Бхаскари II).

Метод розв'язування загальної задачі $x^2 - ny^2 = 1$ був вперше описаний Жозефом-Луї Лагранжем у 1766 році, проте для $n = 61$ вимагає обчислення 21 послідовної збіжності ланцюгового дробу, в той час як метод чакравала виявляється значно простішим. Важливо, що Лагранж також довів, що при кожному значенні числа n, яке не є квадратом цілого числа[5], рівняння має задану нескінченну послідовність розв'язків.

Опишемо детальніше метод чакравала. З тотожності Брахмагупти для заданого n маємо:

$$(x_1x_2 + ny_1y_2)^2 - n(x_1y_2 + x_2y_1)^2 = (x_1^2 - ny_1^2)(x_2^2 - ny_2^2).$$

Для рівняння вигляду $x^2 - ny^2 = t$ це дозволяє «згорнути» дві трійки розв'язків $(x_1; y_1; t_1)$ та $(x_2; y_2; t_2)$ в нову трійку

$$(x_1x_2 + ny_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1; t_1t_2),$$

яка також буде розв'язком. У загальному випадку, будь-яку трійку $(a; b; t)$ можна «згорнути» з тривіальною трійкою $(m; 1; m^2 - n)$ та отримати нову трійку $\big(am + nb; a + bm; t(m^2 - n)\big)$ для будь-якого m. Якщо додатково припустити, що числа a і b – взаємно прості, значення можна зменшити ще на t:

[5] Якщо n є квадратом цілого числа, то рівняння матиме лише тривіальний розв'язок

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$a^2 - nb^2 = t \Rightarrow \left(\frac{am+nb}{t}\right)^2 - n\left(\frac{a+bm}{t}\right)^2 = \frac{m^2-n}{t}.$$

Оскільки знаки всередині квадратів не мають значення, то можна виконати заміни:

$$a \leftarrow \frac{am+nb}{|t|}, \qquad b \leftarrow \frac{a+bm}{|t|}, \qquad k \leftarrow \frac{m^2-n}{t}.$$

Якщо натуральне m обране таким чином, що $\frac{a+bm}{t}$ є цілим числом, то два інші в трійці також будуть цілими числами. Серед таких m метод обирає те, що мінімізує абсолютне значення m^2-n, а отже, й $\frac{m^2-n}{t}$. Потім для цього m застосовуються співвідношення заміщення, що приводить до нової трійки $(a;b;t)$. Процес повторюється доти, поки не буде отримано $t=1$. У 1768 році Лагранж довів, що даний метод завжди завершується розв'язком.

Приклад 3. *Знайти всі розв'язки в натуральних числах рівняння*

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Розв'язання. Очевидно, маємо справу з рівнянням Пелля для $n=2$, а також $x_1 = 3, y_1 = 2$ – розв'язки. Використовуючи описаний метод чакравала, запишемо тотожність Брахмагупти для цього випадку:

$$(3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2 = x^2 - 2y^2.$$

Це означає, що якщо пара $(x;y)$ – розв'язок, то й пара $(3x+4y; 2x+3y)$ також буде розв'язком. Таким чином,

$$x_2 = 3\cdot 3 + 4\cdot 2 = 17, \qquad y_2 = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12\,, \qquad x_3 = 99, \qquad y_3 = 70, \ldots$$

Отже, отримали нескінченну послідовність розв'язків $(x_s; y_s), s \geq 1$.

Покажемо тепер, що інших розв'язків дане рівняння не має. З того, що пара $(x;y)$ – розв'язок, можна вивести, що й пара $(3x-4y; 2x-3y)$ також буде розв'язком, використовуючи тотожність Брахмагупти. Помножимо задане рівняння на 9, маємо: $9 = 9x^2 - 18y^2 > 2y^2$, звідки $3x > 4y$. При $y > 2$ з умови $4 = 4x^2 - 8y^2 < y^2$ випливає, що $3y > 2x$. Це все означає, що з при $y > 2$ з розв'язку $(x;y)$ можна отримати розв'язок $\left(x^{(1)}; y^{(1)}\right)$ в натуральних числах, причому $x^{(1)} < x, y^{(1)} < y$. Оскільки цей процес не може відбуватися нескінченно, то ми отримаємо розв'язок $\left(x^{(i)}; y^{(i)}\right)$, де $y^{(i)} \leq 2$. Але оскільки $y^{(i)} \neq 1$, то $y^{(i)} = 2$. Тоді $x^{(i)} = 3$. Це означає, що знайдені числа належать знайденій раніше послідовності, тому інших розв'язків немає.

Знайдені вирази $\frac{x_s}{y_s}$ наближають число $\sqrt{2}$ наступним чином:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \dots$$

Знаменники цих дробів є числами Пелля (послідовність A000129) та виражаються формулою:

$$P_k = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^k - \left(1-\sqrt{2}\right)^k}{2\sqrt{2}},$$

а чисельники – сумами відповідних чисел Пелля та їх попередників у цій послідовності.

5. Зв'язок рівняння Пелля з ланцюговими дробами

Ще в 300 р. до н.е. в «Початках» Евкліда міститься алгоритм для знаходження найбільшого спільного дільника, сучасна версія якого генерує ланцюговий дріб як послідовність часток евклідових ділень. Математики Стародавньої Індії, такі як Аріабхата та Бхаскара, розробили ланцюгові дроби для наближення ірраціональних чисел. Так, ланцюговий дріб для $\sqrt{2}$ має вигляд:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}.$$

Якщо «обривати» даний дріб на певному кроці і знаходити його значення, то отримаємо наступні наближення:

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$$

Виявляється, що ланцюгові дроби тісно пов'язані з рівнянням Пелля, а саме – кожне наближення x/y задовольняє рівняння Пелля, При цьому знаки «$+$» та «$-$» чергуються:

$$3^2 - 2 \cdot 2^2 = 1, 7^2 - 2 \cdot 5^2 = -1, \dots$$

6. Практичне застосування наближених дробів для раціональних чисел

Цікаво, що вказана точність знаходження числа $\sqrt{2}$ була необхідною на практиці при встановленні офіційних форматів паперу, оскільки кожен наступний після A0 формат повинен бути вдвічі меншим (тобто, мати лінійні розміри у $\sqrt{2}$ разів менші за попередні з достатньою точністю). При цьому сам A0 повинен мати площу близьку до 1 м^2.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Найпоширеніший формат A4 отримав розміри 297 на 210 мм, що відповідає співвідношенню $\frac{99}{70}$.

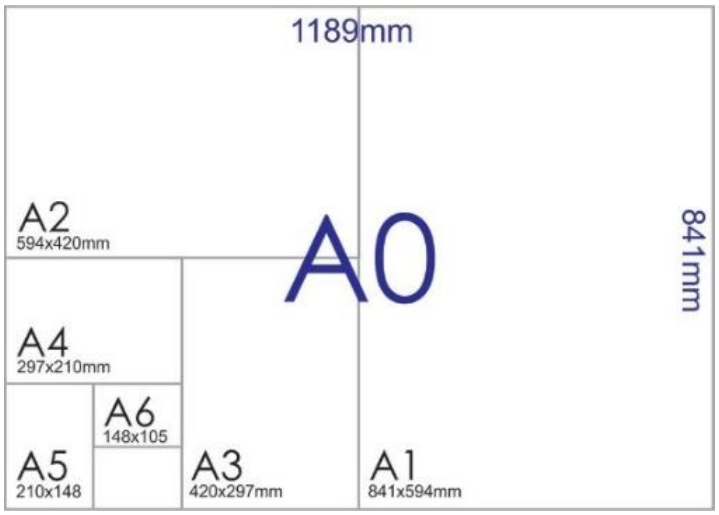


Рис. 1. Розміри загальновживаних форматів паперу в міліметрах

7. Висновки

Методи нескінченного спуску та чакравали залишаються важливими інструментами в теорії чисел, демонструючи унікальне поєднання історичної глибини та сучасної актуальності. Аналіз показав, що метод нескінченного спуску, започаткований піфагорійцями та розвинений Ферма, ефективно доводить неможливість розв'язків цілочисельних (діофантових) рівнянь, зокрема рівнянь Пелля, а їхній зв'язок із ланцюговими дробами відкриває нові перспективи для наближення ірраціональних чисел. Також ефективні методи розв'язання рівняння Пелля, зокрема через ланцюгові дроби, дозволяють швидко знаходити великі розв'язки, що є важливим для практичного застосування в криптографії.

Внесок авторів

Василь Юсипів – концептуалізація, методика, збір і перевірка емпіричних даних; Тарас Юсипів – емпіричне дослідження, аналіз джерел та підготовка огляду літератури або теоретичних основ дослідження.

Список використаних джерел

Bell E.T. (1937). *Men of Mathematics*. Simon & Schuster, Ink., New York. 608 p.

Barbeau, Edward J. (2003). *Pell's Equation, Problem Books in Mathematics*, Springer-Verlag, MR1949691, ISBN 0387955291.

Lenstra, H. W. (2002). *Solving the Pell Equation*. Notices of the AMS, 49(2), 182–192.

Edwards, H. M. (2000). *Fermat's Last Theorem: A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. Springer.

Hoiberg & Ramchandani. (2000). *Students' Britannica India: Bhaskaracharya II*, ISBN, 0852297602, 9780852297605. https://oeis.org/A000129

Отримано редакцією журналу: 01.03.2025
Прорецензовано: 15.04.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Vasyl YUSYPIV, High-Category Teacher
ORCID ID: 0009-0006-4461-7514
e-mail: yusypiv.vd@gmail.com

Taras YUSYPIV, PhD
ORCID ID: 0000-0003-2798-9472
e-mail: taras.yusypiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

METHOD OF INFINITE DESCENT, CHAKRAVALA METHOD, AND PELL NUMBERS

Abstract. *The method of infinite descent is an elegant tool for proving the impossibility of certain solutions by using the logic of reducing parameters to an absurdity. The method was first clearly formulated and used by Pierre de Fermat in the 17th century, although ideas similar to this method may have appeared in mathematics earlier in a less formalized form. Fermat applied this method in his works on number theory, particularly to prove statements related to Diophantine equations. This method remains relevant today, aiding in the solution of complex Diophantine equations. The chakravala method, developed by Indian mathematicians and described by Brahmagupta and Bhaskara, is a powerful algorithm for finding integer solutions to Pell's equations. This cyclic approach iteratively "folds" solution triples, efficiently approximating irrational numbers with rational fractions. Its simplicity and versatility outshine some modern techniques, like Lagrange's method, and it finds applications in cryptography, combinatorics, and number theory, highlighting the profound contributions of Indian mathematics to global science. Pell numbers and their associated equations are central to number theory, particularly in solving Diophantine equations of the form* $\boldsymbol{x^2 - ny^2 = \pm 1}$*, and are closely tied to continued fractions.*

Keywords: *method of infinite descent; chakravala method; Pell's equation; Pell numbers; Diophantine equation; Diophantine approximation; irrational numbers.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичний гурток

УДК 517.938 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.9**

Оксана ВИШЕНСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-3360-8552
e-mail: oksana.vyshenska@gmail.com
Національний транспортний університет, Київ, Україна

Людмила ШЕВЧУК, Канд. техн. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-5748-9527
e-mail: ludmilashevchuk25@gmail.com
Національний транспортний університет, Київ, Україна

МЕТОД ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ В ЗАДАЧАХ ПРО РУХ ДВОХ ТОЧОК

Анотація. *Однією з цілей, які стоять перед математичною освітою в цілому, є вміння обирати вдалий математичний метод для розв'язування задач. Корисним може бути описання станів певного процесу як точок фазового простору. У статті розв'язано три цікаві задачі єдиним методом, заснованим на понятті фазового простору. Вона засвідчує, що цей метод дає можливість будувати ефектні, чіткі, наочні розв'язки.*

Ключові слова: *фазовий простір; фазова точка; фазова крива; фазовий простір системи.*

1. Вступ

Математичні поняття стосуються ідеальних об'єктів. Щоб правильно усвідомити їхній зміст, слід мати не лише точне означення, а й чималу низку ілюстративних прикладів. У статті показано, як поняття фазового простору можна безпосередньо застосовувати до розв'язування конкретних задач. Розв'язані задачі, з одного боку, зайвий раз роблять рекламу надзвичайно вдалому, дієвому, «працюючому» поняттю фазового простору, а з другого – можуть добре прислужитись для початкового ознайомлення з цим поняттям.

У статті запропоновано задачі, котрі стимулюють до поглибленого вивчення математики, потребують нестандартного підходу для розв'язання. Таким чином сприяють дієвості набутих математичних знань, розвитку логічного та творчого мислення.

Мета статті – надати тим, хто виявляє підвищений інтерес до математики, можливість ознайомитися з деякими теоретичними питаннями (зокрема, з поняттям фазового простору) через розв'язання цікавих нестандартних задач.

2. Означення фазового простору

Фазовим простором називають множину, кожна точка якої зображує один із можливих станів деякої системи. Розмірність фазового простору визначається кількістю функцій, необхідних для опису станів системи у довільний момент часу.

Значення цих функцій відкладають на осях системи координат фазового простору. Точку фазового простору, що фіксує стан системи у різні моменти часу, називають *фазовою точкою*, а лінію, яку вона описує у фазовому просторі, – *фазовою траєкторією*.

3. Приклади

Приклад 1. Нехай маємо коло завдовжки 1 і на ньому фіксовану точку O (рис.1).

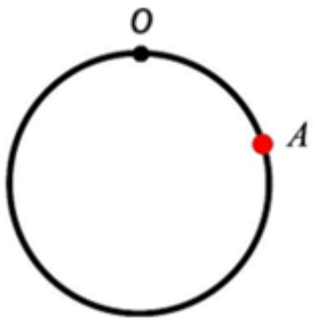


Рис. 1. Точка на колі

Припустимо, що по колу рухається об'єкт, який називатимемо точкою A. Що є фазовим простором такої системи? Розглянемо числову пряму. Вважатимемо, що додатні координати точок на ній означають відстань по колу від точки O до точки A (тобто довжину дуги OA), виміряну за годинниковою стрілкою. Ототожнимо точку O з початком відліку на числовій прямій, що міститься на відрізку $[0,1]$ (при цьому кінцеві точки відрізка ототожнюються). Цей відрізок і є фазовим простором даної системи, а його точка – *фазова точка* (рис. 2). Послідовна зміна положень точки A зображується у фазовому просторі рухом фазової точки вздовж відрізка $[0,1]$. У цьому випадку фазова точка описує так звану *фазову криву*.

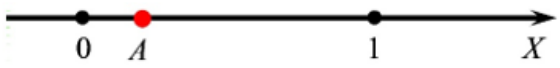


Рис. 2. Фазовий простір точки на колі

Нехай, наприклад, точка A, вийшовши з точки O рухається рівномірно вздовж кола до половини, а потім повертається назад. Фазова точка при цьому рухатиметься вздовж відрізка $[0,1]$ від його лівого кінця до точки з координатою $\frac{1}{2}$ і назад. Фазовою кривою є відрізок $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Якщо ж, наприклад, точка A не рухається, то її фазова крива – це одна точка на відрізку $[0,1]$, яка характеризує положення точки A на колі.

Зауваження. *Крайні точки відрізка* $[0,1]$ *відповідають одній і тій же точці на колі – точці* O*. Звідси випливає, що в наведеному прикладі фазовим простором є по суті саме коло, по якому рухається точка* A*. Відрізок* $[0,1]$ *– розгортка цього кола.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Приклад 2. Маємо те саме коло, що й у прикладі 1. По ньому рухаються дві точки: синя та червона. Яким буде фазовий простір цієї системи?

Розглянемо прямокутну систему координат на площині. Координати точок означатимуть відстані від точки O до синьої чи червоної точок, відповідно. Фазовим простором системи є множина всіх точок квадрата зі стороною 1 (рис. 3).

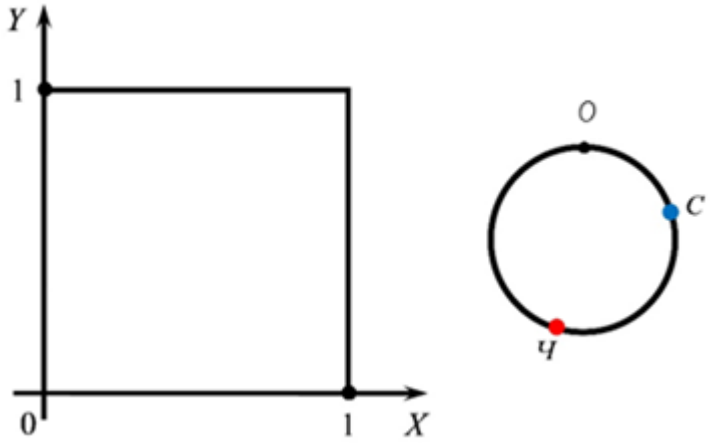


Рис. 3. Система двох точок на колі та її фазовий простір

Справді візьмемо, наприклад, точку $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Ця фазова точка зображає такий стан системи, коли синя точка перебуває за півкола від точки O, а червона зливається з O (рис. 4). Навпаки, будь-яке положення синьої і червоної точок на колі можна зобразити фазовою точкою.

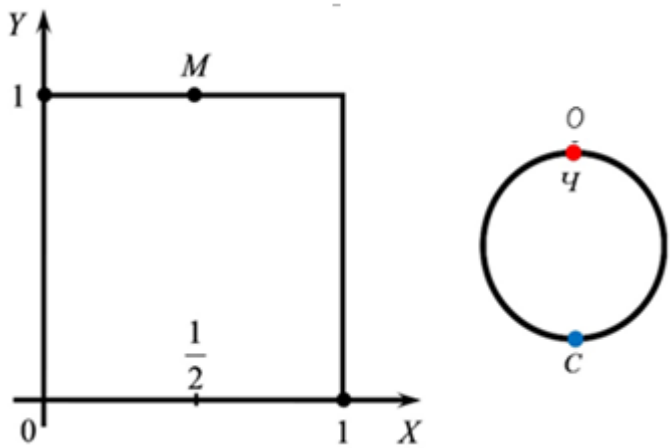


Рис. 4. Фазова точка та відповідний стан системи

Зафіксуємо положення точок на колі. Хай відстань від точки O до синьої точки дорівнює $\frac{1}{4}$, а до червоної – $\frac{2}{3}$. Такому станові системи відповідає фазова точка з координатами $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right)$ (рис. 5).

Припустимо тепер, що синя точка увесь час лишається на місці на відстані $\frac{1}{2}$ по колу від точки O, а червона точка рівномірно рухається. Можливі стани цієї системи зображають ті і тільки ті фазові точки, перші координати яких дорівнюють $\frac{1}{2}$. Отже, фазовою кривою є відрізок, що сполучає точки $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ та $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ (рис. 6).

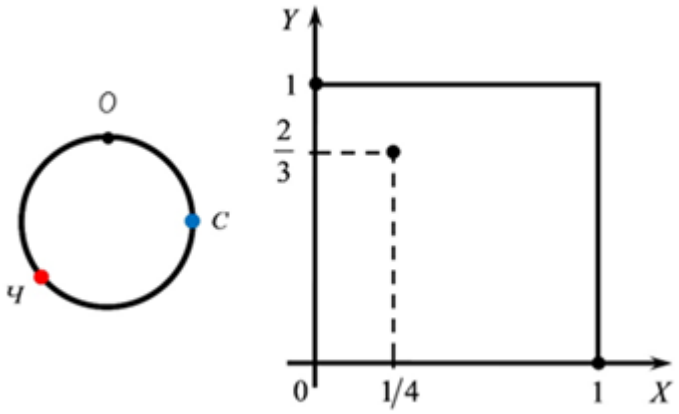


Рис. 5. Стан системи та його фазова точка-відповідник

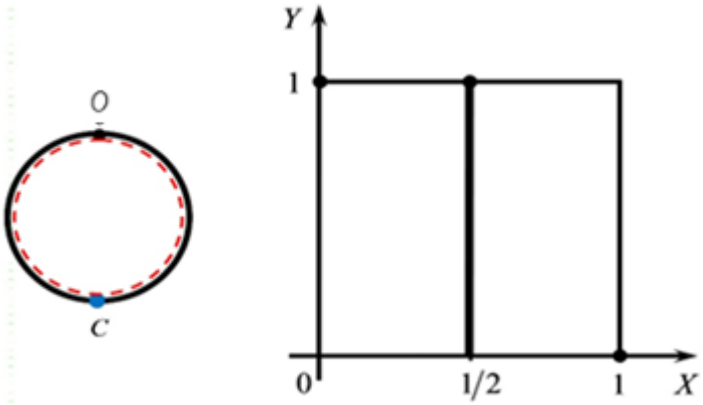


Рис. 6. Рух точок і відповідна фазова крива

Нерідко одне лиш використання поняття фазового простору уможливлює ефектно розв'язати порівняно непросту задачу. З другого боку, належним чином дібрані задачі висвітлюють сутність цього важливого поняття, сприяючи його правильному усвідомленню і засвоєнню. У цій роботі наведемо три такі задачі.

Перша з них описана відомим математиком В.І. Арнольдом у його монографії «Ordinary Differential Equations».

Задача 1. *Два міста A і B сполучені двома дорогами. Якби з одного міста в друге виїхали два велосипедисти, велосипеди яких зв'язані мотузкою завдовжки L, то вони змогли б проїхати увесь шлях, не розірвавши мотузки.*

Припустимо, що цими дорогами рухаються назустріч однин одному два вози завширшки L кожен (рис. 7). Чи зможуть вони розминутися, не доторкнувшись один одного?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язання. Хай на площині XOY (рис. 8) абсциси точок означають частку відстані від міста A до об'єкта, що рухається першою дорогою, а ординати точок – частку відстані від міста A до об'єкта, що рухається другою дорогою. Тоді будь-яка пара чисел (x, y), кожне з яких не менше від нуля і не більше 1, буде характеризувати певне положення двох об'єктів на дорогах. Геометричним образом усіх точок з такими координатами є квадрат зі стороною 1 (рис. 8). Цей квадрат і є фазовим простором, а його точки – фазовими точками.

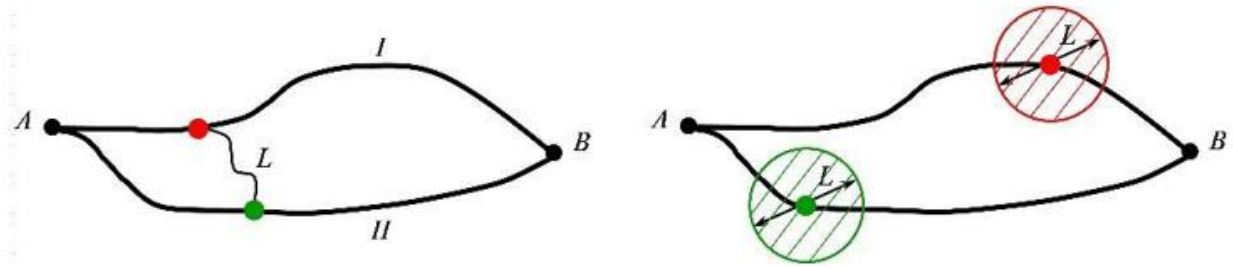


Рис. 7. Рух велосипедистів і возів

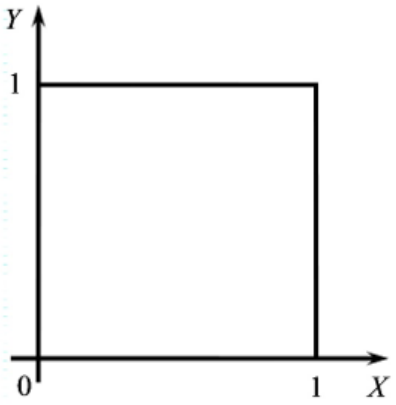


Рис. 8. Фазовий простір руху дорогами I і II

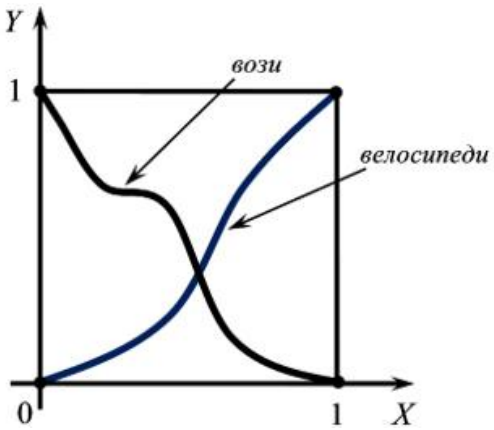


Рис. 9. Фазові криві руху велосипедистів і возів

Початковому положенню возів відповідає фазова точка з координатами $(0,1)$, а кінцевому – $(1,0)$ (чи навпаки, що несуттєво). Рух возів зобразить фазова крива, що сполучає ці дві точки неперервною лінією. Рух двох велосипедистів – фазова крива, що сполучає неперервною лінією точки $(0,0)$ і $(1,1)$ (рис. 9). Зрозуміло, що ці криві принаймні один раз перетнуться. Точка їх перетину відповідає такому положенню возів, у якому були в деякі моменти велосипедисти. Але в такій ситуації відстань між серединами возів не може бути більшою від L.

Відповідь: Вози не зможуть розминутися, не доторкнувшись один одного.

Застосувавши поняття фазового простору, можна дістати наочний розв'язок цікавої задачі, яка свого часу пропонувалася на одній з Київських олімпіад.

Задача 2. *Є годинник, у якого годинна та хвилинна стрілки абсолютно однакові. За рухом стрілок спостерігати не можна, але можна в будь-який момент точно визначити їх положення. Скільки разів протягом доби ми не зможемо сказати котра година?*

Розв'язання. Досить визначити кількість таких моментів від 0 год 00 хв до 12 год 00 хв.

Ототожнимо циферблат годинника з колом завдовжки 1. Тоді рух годинникових стрілок – це рух двох точок (кінців стрілок) по цьому колу. В прикладі 2 вже було описано фазовий простір такої системи. Його розгортка – квадрат зі стороною 1 (рис. 10). Вершину квадрата, яка збігається з початком координат і відповідає точці 0 на колі, ототожнимо з точкою 12 на годиннику. Позначимо буквою p координату годинної стрілки, а буквою q – хвилинної. Будь-якому положенню стрілок годинника відповідатиме точка (p,q) у фазовому просторі. Наприклад, коли годинник показує 8 год 20 хв, фазова точка має координати $\left(\frac{25}{36},\frac{1}{3}\right)$. Справді, о 8 год 20 хв довжина дуги від точки 0 до кінця хвилинної стрілки дорівнює $\frac{1}{3}$, а до кінця годинної

$$8\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12}=\frac{25}{36}.$$

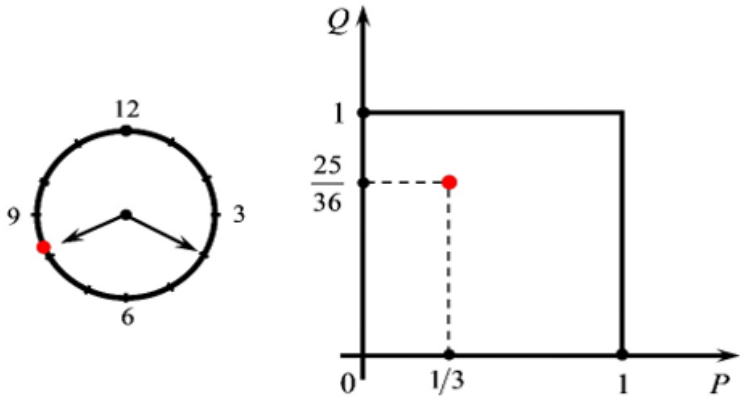


Рис. 10. Фазовий простір положень годинникових стрілок

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Навпаки неправильно: не кожній точці фазового простору відповідає певне положення стрілок годинника. Такою є, наприклад, точка $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$ (справді, коли годинна стрілка показує першу годину, то хвилинна повинна вказувати на точку O).

З'ясуємо, як пов'язані між собою координати p і q.

Хвилинна стрілка рухається у 12 разів швидше за годинну. Якщо вважати початком руху 0 год 00 хв, то за першу годину p і q змінюватимуться в таких межах:

$$0 \le p \le \frac{1}{12}, \qquad 0 \le q \le 1;$$

за другу годину:

$$\frac{1}{12} \le p \le \frac{2}{12}, \qquad 0 \le q \le 1;$$

і т.д. за $k+1$-шу годину:

$$\frac{k}{12} \le p \le \frac{k+1}{12}, \qquad 0 \le q \le 1, \qquad k = 0,1,2,\dots,11.$$

Коли хвилинна стрілка описує дугу завдовжки q, годинна – дугу завдовжки $\frac{1}{12}q$.

Рух стрілок між k-ю та $k+1$-ю годинами відбуватиметься за законом:

$$p = \frac{k}{12} + \frac{1}{12}q.$$

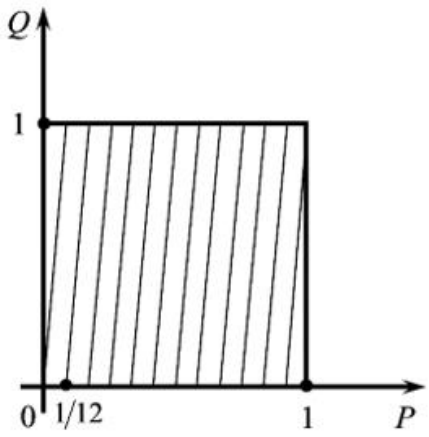


Рис. 11. Фазова крива руху стрілок (p – години, q – хвилини)

Звідси маємо: $q = 12p - k,\ k = 0,1,2,\dots,11$. Окрім того: $0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1$. Отже, фазова точка опише відрізки прямих $q = 12p - k, k = 0,1,2,\dots,11$, які належать квадрату $\{(p,q): 0 \le p \le 1, 0 \le q \le 1\}$ (рис. 11). На торі ці відрізки зімкнуться в одну лінію.

Повернімося тепер до нашого годинника. Його стрілки однакові, отже, щоб визначити час нам треба прийняти одну з них за годинну, а другу – за хвилинну.

Припустимо, що ми це зробили. Тоді, як було описано вище, фазова точка, відображаючи рух стрілок, опише у фазовому просторі відрізки, зображені на рисунку 11.

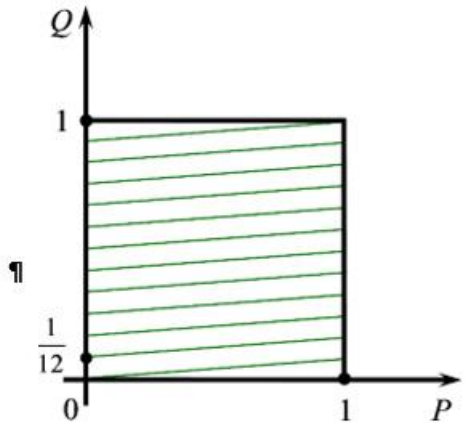


Рис. 12. Фазова крива руху стрілок (p – хвилини, q – години)

Оскільки годинну і хвилинну стрілки обирали довільним чином, то можемо тепер поміняти їх місцями. Тоді у фазовому просторі треба інакше інтерпретувати осі координат. Фазова крива при цьому набуде вигляду, зображеному на рисунку 12. Накладемо один на одний рисунки 11 і 12 (рис. 13). Точки перетину фазових кривих мають ту властивість, що відображають можливе положення стрілок годинника при будь-якій з двох інтерпретацій. (Розглянемо, наприклад, точку A. Для її координат (s, l) виконуються нерівності

$$\frac{9}{12} \le s \le \frac{10}{12}, \qquad \frac{1}{12} \le l \le \frac{2}{12}.$$

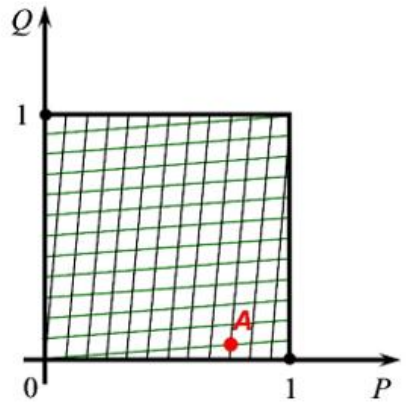


Рис. 13. У точках перетину стрілки інтерпретуються довільно

Отже, відповідне положення стрілок на годиннику буде приблизно таким, як на рис. 14. Очевидно, що у такому випадку не можна визначити час, бо кожну зі стрілок

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

можемо розглядати і як годинну, і як хвилинну). Таких точок буде $12 \cdot 12 = 144$. Від цього числа треба відняти кількість тих точок, що лежать на діагоналі квадрата: $p = q$. Їх 12. У них обидві координати однакові. У такі моменти на годиннику обидві стрілки зливаються в одну і їх інтерпретація не грає ролі.

Таким чином, за період від 0 год 00 хв до 12 год 00 хв ми не зможемо визначити час $144 - 12 = 132$ рази, а протягом доби $132 \cdot 2 = 264$ рази.

Відповідь: 264.

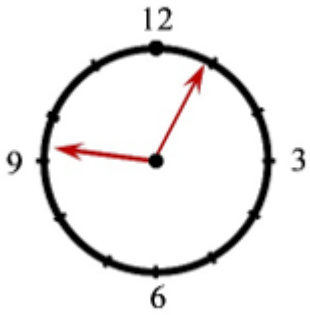


Рис. 14. Один з варіантів довільної інтерпретації

Задача 3. *Скільки разів на добу стрілки годинника взаємно перпендикулярні?*

Розв'язання. Знову трактуємо дві стрілки годинника як дві точки на одиничному колі. Фазову криву цієї системи зображено на рисунку 10. Тепер будуємо фазову криву системи двох точок на одиничному колі за умови, що вони рухаються по колу так, що відстань між ними лишається незмінною і дорівнює $\frac{1}{4}$ (умова перпендикулярності).

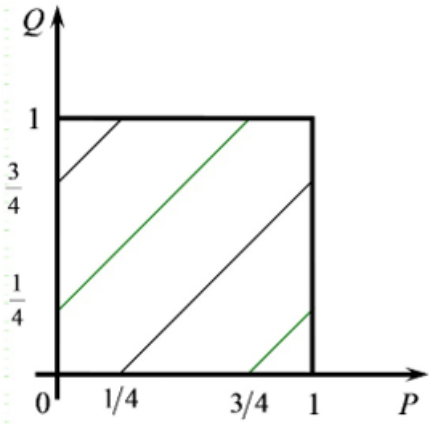


Рис. 15. Дві точки кола на сталій відстані

Координати p і q таких точок пов'язані одним із співвідношень: $p = q + \frac{1}{4} \pmod 1$ або $p = q - \frac{1}{4} \pmod 1$.

Отже, фазова крива цієї системи складена з двох замкнутих обмоток тора. Її «плоску розгортку» зображено на рисунку 15. Сумістивши рисунки 11 та 15, дістанемо рис. 16. Він і дає відповідь на запитання задачі.

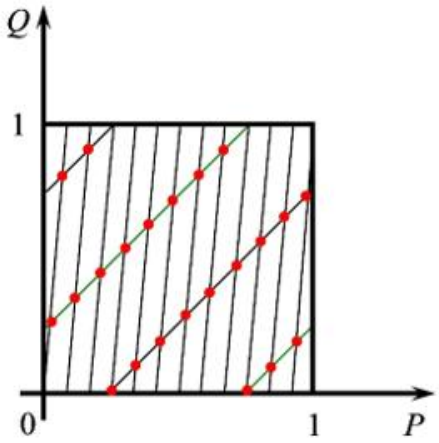


Рис. 16. Фазові точки взаємної перпендикулярності стрілок

Точки перетину двох фазових кривих (на рис. 16 вони відзначені кружечками) і тільки вони означають взаємну перпендикулярність стрілок годинника. Отже, протягом пів доби таких моментів на годиннику буде 22, а протягом доби – 44.

Відповідь: 44.

3. Висновки

У процесі навчання математики важливою є прикладна спрямованість курсу. Тому необхідно якомога більше розглядати задачі, котрі розкривають доцільність введення тих чи інших понять та можливість їх практичного застосування. Наведені у роботі приклади і задачі покликані допомогти у цьому питанні.

Список використаних джерел

Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й. Київські математичні олімпіади 1984 – 1993 рр. Збірник задач. Київ. «Либідь» 1993.

Arnold V. I. (1988). Geometrical Methods In The Theory Of Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag. 351 p.

Arnold V. I. (1978). Ordinary Differential Equations, The MIT Press. 280 p.

Отримано редакцією журналу: 26.01.2025
Прорецензовано: 15.02.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Oksana VYSHENSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-3360-8552
e-mail: oksana.vyshenska@gmail.com
National Transport University, Kyiv, Ukraine

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Liudmila SHEVCHUK, Ph.D (Engin), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-5748-9527
e-mail: ludmilashevchuk25@gmail.com
National Transport University, Kyiv, Ukraine

PHASE SPACE METHOD IN PROBLEMS OF TWO POINT MOTION

Abstract. *One of the goals of mathematical education in general is the ability to choose a successful mathematical method for solving problems. Describing the states of a certain process as points in a phase space can be useful. The article solves three interesting problems using a single method based on the concept of phase space. It shows that this method allows one to construct effective, clear, and visual solutions.*

Keywords: *phase space; phase point; phase curve; phase space of the system.*

Математичний гурток

УДК 519.21 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.10**

Інна ВИШЕНСЬКА, Заслужений вчитель України, Вчитель-методист
ORCID ID: 0009-0009-5564-4245
e-mail: inna.vyshenska@gmail.com
Український фізико-математичний ліцей
Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Світлана КУШНІРЕНКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-8390-5870
e-mail: svilana_kushnirenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ГЕОМЕТРИЧНІ ЙМОВІРНОСТІ

Анотація. *Геометрична ймовірність є важливим інструментом для аналізу випадкових подій, які явно чи неявно пов'язані з геометричними об'єктами. Багато задач теорії ймовірностей мають геометричну інтерпретацію. Знання елементарних теоретико-ймовірнісних понять та використання засобів шкільної математики дозволяють досить ефективно розв'язувати такі задачі. Стаття містить низку розв'язаних ймовірнісних задач та задачі для самостійного розв'язування, розв'язання яких ґрунтується на формулі геометричної ймовірності. Запропоновані методичні матеріали будуть корисними для формування та засвоєння поняття геометричної ймовірності.*

Ключові слова: *методика вивчення елементів теорії ймовірностей; геометричні ймовірності; обчислення ймовірностей випадкових подій.*

1. Вступ

Сьогодні теорія ймовірностей є незамінним інструментом пізнання навколишнього світу. Важко назвати хоча б одну природничу науку, у якій так чи інакше не застосовуються ймовірнісні методи. Ця надзвичайно цікава і багатогранна наука сповнена численних парадоксів і результатів, що суперечать очікуванням та інтуїції. Водночас вона непроста для вивчення, оскільки поєднує розуміння ймовірнісної проблеми, вибір і застосування відповідного математичного апарату, інтерпретацію отриманих результатів.

Поняття геометричної ймовірності з'являється у випадковому експерименті, який має незліченну кількість рівноможливих елементарних наслідків. Означення геометричної ймовірності пов'язане з випадковими об'єктами, які моделюються геометричними фігурами на прямій, площині, в просторі тощо. Розглянемо це поняття більш детально.

2. Поняття геометричної ймовірності

Згадаємо спочатку класичну схему знаходження ймовірностей випадкових подій.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Для випадкового експерименту фіксуємо скінченну множину всіх елементарних наслідків, що є рівноможливими. Така множина U називається простором елементарних подій даного експерименту. Тоді будь-яка підмножина A простору елементарних подій ($A \subset U$) є випадковою подією. Ймовірністю випадкової події A є відношення числа елементарних наслідків, що сприяють появі даної події, до числа всіх елементарних наслідків, тобто

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}. \quad (1)$$

Однак таке означення ймовірності придатне лише для експериментів зі скінченною кількістю рівноможливих елементарних подій. У випадку, коли елементарних наслідків нескінченно багато, формула (1) втрачає зміст. Якщо вдається всій незліченній сукупності рівноможливих елементарних наслідків дати деяку кількісну характеристику $m(U)$ в мірах довжини, площі, об'єму, часу тощо, а підмножині цієї сукупності, що сприяє появі події A, – характеристику $m(A)$ в тих же мірах, тоді ймовірність випадкової події A визначається формулою:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(U)}. \quad (2)$$

Означення ймовірності для такого виду експериментів з незліченним простором елементарних подій називають геометричною ймовірністю.

При обчисленні ймовірностей складних подій, що є сумою, різницею чи добутком інших випадкових подій, їх геометричне зображення часто допомагає зрозуміти логіку дій чи операцій над подіями.

Сума випадкових подій $A + B$, яка відбувається тоді й лише тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A або B, є об'єднанням відповідних геометричних образів множин з простору U $(A \cup B)$.

Добутку випадкових подій $A \cdot B$ (події, яка відбувається тоді й лише тоді, коли відбуваються і подія A, і подія B) відповідає перетин $A \cap B$ множин A і B. Якщо відповідні множини не перетинаються (їх перетином є порожня множина: $A \cap B = \emptyset$), то такі події називаються несумісними. Добутком несумісних подій є неможлива подія: $A \cdot B = \emptyset$.

Різниця випадкових подій $A \setminus B$ – це подія, яка полягає в тому, що відбувається подія A і не відбувається подія B.

Кожній випадковій події A можна поставити у відповідність протилежну подію $\bar{A}$ (доповнення множини A до множини U), яка відбувається тоді й лише тоді, коли A не відбувається. При цьому $A + \bar{A} = U,\ A \cdot \bar{A} = \emptyset$.

Для обчислення ймовірностей випадкових подій користуємося відомими формулами. Для довільних подій A і B $(A, B \subset U)$:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A); \tag{3}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \tag{4}$$

Для несумісних подій A і B $(A \cdot B = \emptyset)$ формула (4) набирає вигляду

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{5}$$

Узагальненням формули (4) для довільних n випадкових подій є

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) - P(A_1 \cdot A_2) - \cdots - P(A_{n-1} \cdot A_n) + \\ + P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + \cdots + P(A_{n-2} \cdot A_{n-1} \cdot A_n) + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n). \end{aligned} \tag{6}$$

3. Задачі на використання формули геометричної ймовірності

Подивимося, як обчислюються геометричні ймовірності на практиці.

Задача 1. *Абонент чекає телефонного виклику з* 14:00 *до* 15:00*. Яка ймовірність того, що дзвінок пролунає з* 14:30 *до* 14:40?

Розв'язання: Простором елементарних подій U є проміжок часу з 14:00 до 15:00, а випадковій події A відповідає проміжок часу з 14:30 до 14:40 (рис. 1). Мірою є час у хвилинах, отже, за формулою (2)

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(U)} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$



Рис. 1.

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

Зауважимо, що ймовірність того, що дзвінок пролунає рівно о 14:30, дорівнює нулю.

Задача 2. *У рівнобічну трапецію з основами a і b вписано круг. У трапецію навмання кидається точка. Яка ймовірність того, що точка потрапить у вписаний круг*?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язання: Простором елементарних подій U випадкового експерименту є множина всіх точок трапеції, а шуканій випадковій події F відповідає множина точок, що знаходяться у вписаному в трапецію крузі. Оскільки точка потрапляє всередину обмеженої фігури на площині, природно в якості міри скористатися площею. Позначимо радіус вписаного в дану трапецію круга через R. За властивістю описаних чотирикутників $AB + CD = a + b$ (рис. 2).

Опустимо висоту BH у трикутнику ABH. Маємо:

$$AB = \frac{a+b}{2}, \qquad BH = 2R, \qquad AH = \frac{b-a}{2}.$$

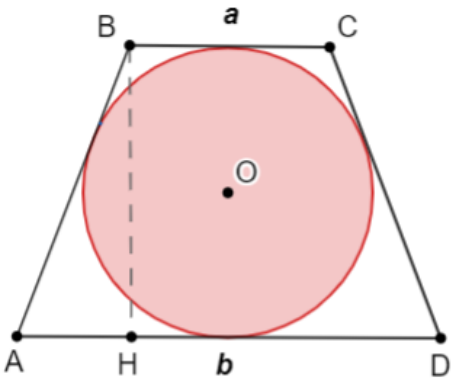


Рис. 2.

За теоремою Піфагора для трикутника ABH:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + (2R)^2,$$

звідки $ab = 4R^2,\ 2R = \sqrt{ab}$,

$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot 2R = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}.$$

Отже, ймовірність того, що точка потрапить у вписаний в трапецію круг:

$$P(F) = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{ABCD}} = \frac{\pi\sqrt{ab}}{2(a+b)}.$$

Відповідь: $\frac{\pi\sqrt{ab}}{2(a+b)}$.

Задача 3. *На відрізку довжиною* 5 *см вибирається довільним чином точка. Яка ймовірність випадкової події, яка полягає в тому, що відстань від вибраної точки до одного з кінців відрізка не більше* 1 *см*?

Розв'язання: Розглянемо відрізок AB на якому вибирається довільна точка X. Для того, щоб виконувалась умова задачі, точка X має опинитися на відрізку AM або NB, кожен з яких має довжину 1 см (рис. 3). Нехай маємо події F_1 – точка X потрапила на відрізок AM, F_2 – точка X потрапила на відрізок NB. Оскільки події F_1 і F_2 несумісні, то за формулою (5)



Рис. 3.

$$P(F_1 + F_2) = P(F_1) + P(F_2) = \frac{AM}{AB} + \frac{NB}{AB} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

Звернімо увагу, що в якості міри використано довжини відрізків. Зауважимо, що задачу можна розв'язати з використанням формули (3), де протилежна до $F_1 + F_2$ подія $\overline{F_1 + F_2}$ – точка X потрапила на відрізок MN. Тоді

$$P(F_1 + F_2) = 1 - P(\overline{F_1 + F_2}) = 1 - \frac{MN}{AB} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Відповідь: $\frac{2}{5}$.

Задача 4. *Довільно вибираються два дійсних невід'ємних числа, кожне з яких не перевищує* 10*. Яка ймовірність того, що сума цих чисел не більша* 5?

Розв'язання: За умовою задачі є два числа $x \in [0; 10], y \in [0; 10]$ і подія F, для якої $x + y \leq 5$. На декартовій площині в якості простору елементарних подій розглянемо множину $U = \{(x; y) | x, y \in [0; 10]\}$, тобто, кожній парі чисел x і y відповідає точка $(x; y)$ всередині квадрата U.

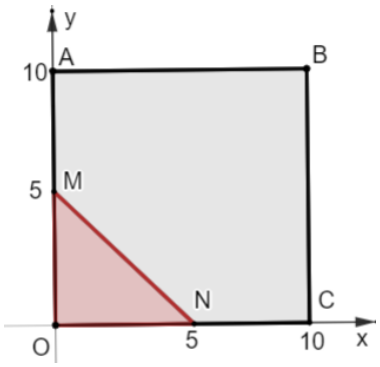


Рис. 4.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Тоді маємо, що випадкова подія, яка задовольняє умові задачі, – це така множина: $F = \{(x; y)|x + y \leq 5,\ x, y \in [0; 10]\}$. Побудуємо на декартовій площині множини U і F (рис. 4) та легко зможемо обчислити шукану ймовірність події F:

$$P(F) = \frac{S_{OMN}}{S_{OABC}} = \frac{25}{2 \cdot 100} = \frac{1}{8}.$$

Відповідь: $\frac{1}{8}$.

Задача 5. (*Задача про зустріч). Павло попросив Петра під час великої перерви тривалістю* 30 *хв принести йому зошит з хімії. Кожен з учнів приходить на місце зустрічі будь-коли протягом перерви і чекає* 10 *хв або до кінця перерви. Яка ймовірність того, що Павло отримає зошит*?

Розв'язання: Позначимо час приходу Петра на місце зустрічі через x, а Павла – через y. Розглянемо простір елементарних подій – множину $U = \{(x; y)|x, y \in [0; 30]\}$. Вважаємо, що Петро візьме з собою потрібний зошит на місце зустрічі. Тоді шуканій події сприяє множина $D = \{(x; y)||x - y| \leq 10, x, y \in [0; 30]\}$. Побудуємо графічний образ цих множин (рис. 5). Шукану ймовірність легко знаходимо за формулою (2) геометричної ймовірності:

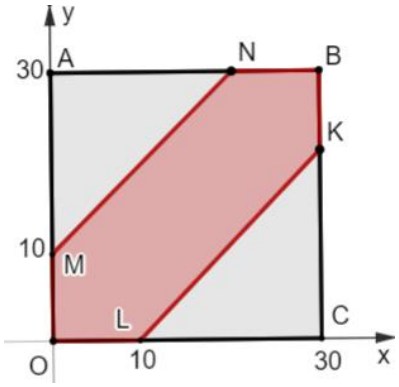


Рис. 5.

$$P(D) = \frac{S_{OMNKL}}{S_{OABC}} = \frac{S_{OABC} - (S_{AMN} + S_{CLK})}{S_{OABC}} = \frac{30 \cdot 30 - 20 \cdot 20}{30 \cdot 30} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}.$$

Розглянемо розв'язання задачі з точки зору операцій над подіями. Ми фактично обчислили ймовірність події D, використовуючи протилежну подію $\overline{D}$. Згідно з формулою (3)

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{S_{AMN} + S_{CLK}}{S_{OABC}} = 1 - \frac{20 \cdot 20}{30 \cdot 30} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Відповідь: $\frac{5}{9}$.

Задача 6. *На відстані* 25 *см від центра кулі, радіус якої* 15 *см, знаходиться точкове джерело світла. Яка ймовірність того, що довільно вибрана точка на поверхні сфери буде освітленою*?

Розв'язання: Точкове джерело світла освітлює кульовий (сферичний) сегмент, розмір якого визначається дотичними до сфери, що проведені з точки, де знаходиться джерело світла. Простором елементарних подій U випадкового експерименту є множина точок поверхні сфери, а множина освітлених точок сегмента – підмножиною цього простору, що відповідає події A. Очевидно, у якості міри множин беремо їх площі.

Площа бічної поверхні кульового сегмента $S_{\text{кул.сегм.}} = 2\pi Rh$, де R – радіус сфери, h – висота сегмента. За умовою задачі $R = 15$ см, а для знаходження висоти h побудуємо переріз через центр сфери O і точку D, у якій розміщено джерело світла (рис. 6). Оскільки DM – дотична, то трикутник DMO – прямокутний. Тому

$$MO^2 = OH \cdot OD, \quad 15^2 = OH \cdot 25, \quad OH = 9, \qquad KH = h = R - OH = 15 - 9 = 6.$$

Тобто,

$$S_{\text{кул.сегм.}} = 2\pi Rh = 180\pi, \qquad S_{\text{пов.сфери}} = 4\pi R^2 = 900\pi.$$

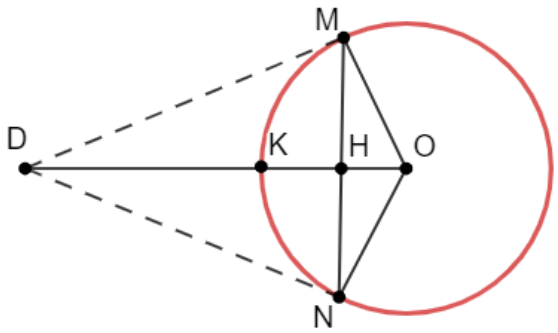


Рис. 6.

Згідно з формулою (2) знаходимо шукану ймовірність

$$P(A) = \frac{S_{\text{кул.сегм}}}{S_{\text{пов.сфери}}} = \frac{180\pi}{900\pi} = 0{,}2.$$

Відповідь: 0,2.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 7. *На відрізку* $[-1;1]$ *координатної прямої навмання обирають дві точки. Нехай* p *і* q *– координати цих точок. Знайдіть імовірність того, що квадратне рівняння* $t^2+2pt+q=0$ *має корені.*

Розв'язання: Оскільки точки обираються незалежно одна від одної, то розглянемо в якості простору елементарних подій множину $U=\{(p;q)|p,q\in[-1;1]\}$ у декартовій системі координат pOq (рис. 7).

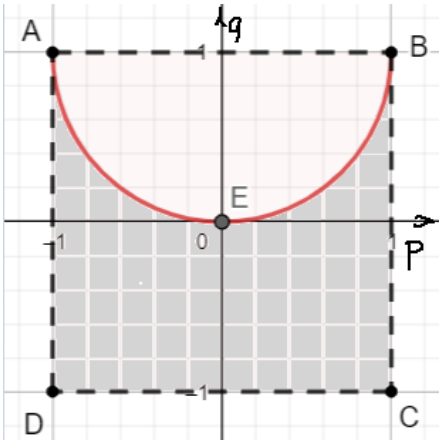


Рис. 7.

Квадратне рівняння з умови задачі має корені, коли його дискримінант невід'ємний: $p^2-q\geq 0$, звідки $q\leq p^2$. Тобто, шуканій випадковій події X, при якій рівняння має корені, відповідає множина $\mathrm{X}=\{(p;q)|\ q\leq p^2;\ p,q\in[-1;1]\}$. Побудуємо множину X і шукатимемо ймовірність події X, як відношення площі криволінійної трапеції $AEBCD$ під параболою до площі квадрата U. Застосуємо для знаходження площі криволінійної трапеції визначений інтеграл:

$$S(\mathrm{X})=\int_{-1}^{1}p^2dp+2=\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}+2=\frac{8}{3}.$$

Звідки шукана ймовірність

$$P(X)=\frac{S(X)}{S(U)}=\frac{{}^{8}/_{3}}{4}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

Задача 8. *Скільки точок незалежно потрібно кинути в квадрат, щоб з імовірністю принаймні* $0{,}99999$ *хоча б одна з них потрапила у вписаний у квадрат круг?*

Розв'язання: Нехай R – радіус вписаного у квадрат кола. Тоді ймовірність події X_i, яка полягає в потраплянні будь-якої (i-тої) точки в круг, дорівнює відношенню площ круга і квадрата (рис. 8):

$$P(X_i) = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Нехай для досягнення потрібної імовірності $0{,}99999$ потрібно кинути n точок так, щоб хоча б одна з цих n точок попала в круг. Ця подія є сумою n незалежних подій X_i, тобто $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = 0{,}99999$. Оскільки формула (6) для обчислення ймовірності суми n випадкових подій достатньо громіздка, то скористаємося незалежністю подій X_i. З формули (3) отримаємо

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = 1 - P(\overline{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}) = 1 - P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}).$$

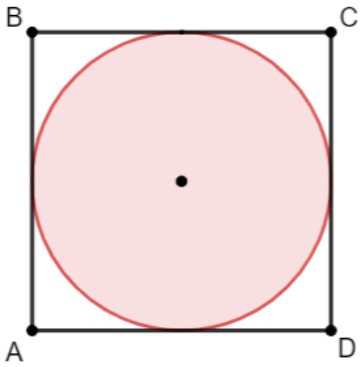


Рис. 8.

Для незалежних випадкових подій

$$P(\overline{X_1} \cdot \overline{X_2} \cdot \ldots \cdot \overline{X_n}) = P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{X_n}).$$

Тому

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = 1 - P(\overline{X_1}) \cdot P(\overline{X_2}) \cdot \ldots \cdot P(\overline{X_n}) =$$

$$= 1 - \big(1 - P(X_1)\big)\big(1 - P(X_2)\big) \ldots \big(1 - P(X_n)\big) = 1 - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^n = 0{,}99999.$$

Отримуємо

$$\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^n = 0{,}00001 = 10^{-5}, \qquad n = -\frac{5}{lg\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} \approx 7{,}48092.$$

Враховуючи, що число n натуральне, робимо висновок, що потрібно кинути принаймні *8* точок, щоб із вказаною ймовірністю потрапити у вписаний у квадрат круг.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Відповідь: 8.

Задача 9. *У кулю вписано правильний тетраедр. Точка навмання кидається в кулю. Яка ймовірність того, що точка потрапить у тетраедр*?

Розв'язання: Простором елементарних подій U випадкового експерименту є множина всіх точок кулі, а шуканій випадковій події A відповідає множина точок, що знаходяться у вписаному в кулю правильному тетраедрі. У цій задачі природно в якості міри скористатися об'ємом. Шукана ймовірність події дорівнює відношенню об'ємів вписаного правильного тетраедра і кулі. Знайдемо об'єм тетраедра через радіус описаної кулі. Сторона правильного тетраедра через радіус описаної кулі дорівнює $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$,

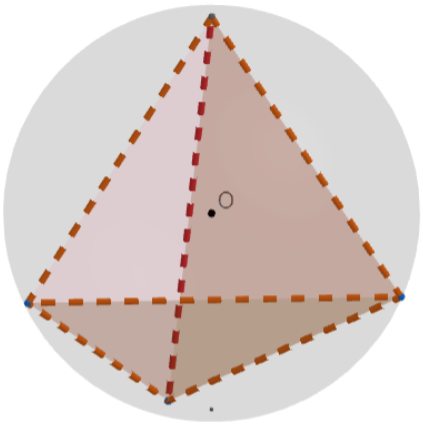


Рис. 9.

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3.$$

Тоді

$$P(A) = \frac{V_{\text{тетр.}}}{V_{\text{кулі}}} = \frac{\left(\frac{8\sqrt{3}}{27}R^3\right)}{\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{9\pi}.$$

Відповідь: $\frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$.

4. Задачі для самостійного розв'язування

1. У прямокутному трикутнику $ABC\left(\angle C = 90^0, AC = \sqrt{3}, BC = 8\right)$ навмання вибирають точку O. Яка ймовірність того, що кут OAC не перевищує 60^0?

2. Стрижень довжини 3 м навмання зламали у певній точці. Яка ймовірність того, що довжина коротшої частини менша за 1 м?

3. У кулю вписано куб. Точка навмання кидається в кулю. Яка ймовірність того, що точка потрапить у куб?

4. Довільно вибирається 2 дійсних невід'ємних числа, кожне з яких не перевищує 10. Яка ймовірність того, що сума цих чисел належить проміжку $[2; 7]$?

5. Юнак і дівчина домовилися зустрітися. Відомо, що кожен з них приходить у будь-який час з 15:00 до 16:00 незалежно від іншого. Якщо юнак прийде і не зустріне дівчину, то він буде чекати її ще 20 хв або до кінця терміну. Дівчина в аналогічній ситуації буде чекати юнака протягом 10 хв. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

6. У квадраті з вершинами в точках $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$ навмання обирають точку $Q(x; y)$. Знайдіть імовірність випадкової події: $\{(x; y)|y \leq 8x^3\}$.

7. На відрізку $[0; 10]$ випадковим і незалежним чином кинуті 2 точки. Знайти ймовірність того, що відстань якоїсь із них до початку координат не більша 3.

8. Число a береться навмання з відрізка $[0; 2]$, а число b – з відрізка $[-1; 1]$. Яка ймовірність того, що рівняння $x^2 + ax + b = 0$ має дійсні корені?

9. На одиничному колі навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що її абсциса по модулю не перевищує $0{,}5$.

Відповіді до задач: 1. $0{,}375$; 2. $\frac{2}{3}$; 3. $\frac{2}{\sqrt{3}\pi}$; 4. $0{,}225$; 5. $\frac{31}{72}$; 6. $\frac{5}{8}$; 7. 0,51; 8. $\frac{2}{3}$; 9. $\frac{1}{3}$.

Додаткові задачі на використання формули геометричної ймовірності з вказівками або детальними розв'язаннями для учнів закладів загальної середньої освіти та студентів закладів вищої освіти можна знайти відповідно в підручнику та збірнику задач (Мерзляк та ін., 2019), (Голомозий та ін., 2025).

5. Висновки

У статті поняття геометричної ймовірності проілюстроване низкою розв'язаних ймовірнісних задач, де присутні геометричні об'єкти на прямій, площині та в просторі. Наведені задачі наочно демонструють їх практичну значущість, доцільність вивчення та використання геометричних ймовірностей у шкільному курсі математики. Вони стануть у пригоді як вчителям математики при підготовці занять математичних факультативів та гуртків, так і студентам та викладачам природничих спеціальностей закладів вищої освіти. Запропоновані методичні матеріали будуть корисними для формування та засвоєння поняття геометричної ймовірності.

Список використаних джерел

Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. (2019). Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. – Х. : Гімназія, 352 с.

Голомозий В. В., Карташов М. В., Кукуш О. Г., Кушніренко С. В., Майборода Р. Є., Мішура Ю. С., Ральченко К. В., Шевченко Г. М.. (2025). Збірник задач з теорії ймовірностей і математичної статистики: навчальний посібник. 375 с. https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2025/05/problem-book-18.pdf

Отримано редакцією журналу: 10.04..2025
Прорецензовано: 24.04..2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Inna VYSHENSKA, Honored Teacher of Ukraine, Teacher-methodologist
ORCID ID: 0009-0009-5564-4245
e-mail: inna.vyshenska@gmail.com
Ukrainian Physical and Mathematical Lyceum
of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Svitlana KUSHNIRENKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-8390-5870
e-mail: svilana_kushnirenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

GEOMETRIC PROBABILITIES

Abstract. *Geometric probability is a valuable tool for analyzing random events that involve geometric objects, either directly or indirectly. Many problems in probability theory lend themselves to geometric interpretation. With a basic understanding of probability and school-level mathematics, one can solve such problems effectively. This article presents a series of solved probability problems, as well as exercises for independent practice, all based on the geometric probability formula. The provided teaching materials are designed to help students grasp and internalize the concept of geometric probability.*

Keywords: *methodology for studying elements of probability theory; geometric probabilities; calculating probabilities of random events*.

Проблеми і гіпотези, рішення

УДК 517.958 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.11**

Віктор ГРІНЧЕНКО, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

Володимир МАЦИПУРА, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.,
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПОГЛЯД *не*МАТЕМАТИКА НА ПОБУДОВУ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ В НЕКАНОНІЧНИХ ОБЛАСТЯХ

Кава все виправить.
Іммануїл Кант[1]

Анотація. *На прикладах граничних задач для рівнянь Гельмгольца і Лапласа обговорюється метод, який дозволяє суттєво розширити клас задач математичної фізики, що допускають повний аналітичний опис полів в неканонічних областях. Основним поняттям, що визначає процедуру побудови аналітичних розв'язків, є поняття загального розв'язку граничної задачі. Розглянуто приклади, що розкривають сутність методу та ілюструють побудову таких розв'язків з використанням частинних розв'язків у різних системах координат. Показано, що теорема про єдиність розв'язку граничної задачі не виключає можливості різних аналітичних форм його представлення. Указано специфічні проблеми, що виникають у зв'язку з неоднозначністю форми загальних розв'язків і можливості різного формулювання функціональних рівнянь, які визначають граничні умови та умови спряження на межах часткових областей. Обговорюються процедури пошуку значень коефіцієнтів у загальних розв'язках.*

Ключові слова: *метод; часткові області; загальний розв'язок; неканонічні області.*

1. Вступ

Стаття починається з жартівливого висловлювання Іммануїла Канта. Метою такого початку статті, присвяченої серйозним математичним проблемам, є намір авторів, так би мовити, привернути увагу читача і запросити його до спілкування. Такий епіграф вказує на можливість здійснити перше знайомство зі статтею під час вживання кави. Потім, при більш уважному знайомстві з її змістом, сподіваємось, читач має відчути, як сутність статті стосується дуже важливих проблем, що виникають при розробці аналітичних методів математичного моделювання фізичних процесів.

Слід сказати, що ідея висловити погляд нематематика на серйозні математичні проблеми, стимулювалася набутим нами досвідом при написанні статті, присвяченої 100-річчю з дня народження Мандельброта (Грінченко & Маципура, 2024), де якраз

[1] Іммануїл Кант (1724 – 1804) – німецький філософ.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

мова йде про обговорення математичних проблем фізиком, саме в тому сенсі, що виклад не супроводжується доведенням теорем.

За своїм задумом, стаття має чисто методичний характер, рівень викладання матеріалу цілком доступний студентам старших курсів університетів. Питання, що розглядаються в статті, практично не обговорюються у традиційних курсах математичної фізики.

Розвиток обчислювальної техніки виявив великий вплив на формування нових методів у математичній фізиці. Про це свідчить поява обчислювальних розділів у різних галузях знань таких, наприклад, як “Обчислювальна гідромеханіка”, “Комп’ютерна біологія”, “Комп’ютерна фізика“ та інші. Одним з цікавих результатів цього процесу розробки нових методів є розуміння того, що орієнтація тільки на збільшення продуктивності ЕОМ є невиправданою. При цьому задача наступного аналізу і узагальнення результатів виявляється надто складною. Виникаюча тут ситуація майже в афористичній формі виражена, наприклад, ще у 1994 році, в доповіді “Від гігабайт до розуміння” (Williams, 1994). І надалі, з наступним розвитком обчислювальної техніки, ситуація мало змінилася.

Зазначена обставина, мабуть, є основним стимулом до розвитку різного типу чисельно-аналітичних методів у математичній фізиці. Мова йде про попередню аналітичну роботу при дослідженні граничної задачі, яка дозволяє зменшити розмірність задачі, взяти до уваги деякі асимптотичні властивості шуканого розв’язку, створити основи для формування стійкого алгоритму обчислень. Ця тенденція характерна практично для всіх прикладних напрямків математичної фізики. Як правило, складність задач зумовлює суттєве використання обчислювальної техніки на етапі отримання кількісних оцінок характеристик поля, що досліджується.

Основна ідея, якою стимулювалися автори у своїй роботі, давно обговорювалася і в тій чи іншій формі використовувалася у різних галузях математичної фізики. Варто відмітити, що перший приклад використання цієї ідеї можна побачити в книзі Ламе при розгляді ним задачі про рівновагу паралелепіпеда (Lame, 1852). Метод, що пропонується не обмежується лише рівняннями Гельмгольца і Лапласа, на які указано в анотації. За своєю сутністю метод може бути застосований до будь якої лінійної задачі математичної фізики, де можна сконструювати достатньо повні набори частинних розв’язків рівнянь в частинних похідних. Для ілюстрації ідейної сутності методу обмежуємося лише простішими рівняннями.

До теперішнього часу накопичено досить великий набір розв’язків граничних задач для векторних і скалярних хвильових проблем у, так званих, канонічних областях (Morse & Feshbach, 1953), (Bowman, Senior & Uslenghi, 1969). До них належать області, межі яких утворені координатними поверхнями однієї з координатних систем, наприклад, сферичної, декартової, циліндричної, сфероїдальної (Morse & Feshbach, 1953). Суть запропонованої ідеї полягає у тому, щоб, використовуючи набори відомих частинних розв’язків рівнянь в різних координатних системах побудувати аналітичні вирази, що потенційно містять достатньо степенів вільності, щоб задовольнити граничні умови на всій поверхні неканонічної області. Передбачається, що ця поверхня утворена частинами координатних поверхонь різних координатних систем.

У межах викладеного в статті підходу якраз основна увага приділяється тому, щоб у таких складних областях побудувати якісно бездоганний аналітичний розв'язок розглянутої граничної задачі. Бездоганність розуміється в тому сенсі, що використані набори частинних розв'язків та апроксимаційні властивості використаних функцій апріорі забезпечують можливість виконати задані граничні умови. У реалізації такого процесу винятково важливу роль грає, сформульоване, з урахуванням аналізу розв'язків класичних задач, поняття загального розв'язку граничної задачі. Певне уявлення про можливості підходу можна скласти на основі численних прикладів, наведених у (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), (Grinchenko, Vovk & Matsypura, 2013), (Grinchenko, Vovk & Matsypura 2018).

2. Основна ідея побудови загального розв'язку граничної задачі

Як відомо, будь-яке диференціальне рівняння в частинних похідних має безліч частинних розв'язків. Найбільший інтерес становлять розв'язки, що задовольняють додаткові умови. Ці умови називаються крайовими умовами і полягають у визначенні поведінки розв'язку на певній граничній лінії (поверхні) або її безпосередньому околі (інакше, кажуть *граничні умови*). З цієї точки зору початкові умови являють собою крайові умови в часі. Крайові умови використовуються для вибору окремого розв'язку з нескінченної множини розв'язків. Практично будь-яка задача, що описує фізичний процес і сформульована в термінах диференціальних рівнянь у частинних похідних, включає крайові умови.

Справа в тому, що для випадку класичних задач крайові умови формулюються на певній координатній поверхні або на координатних поверхнях однієї системи координат. Коли говоримо про неканонічні області, то маємо на увазі, що гранична поверхня формується частинами різних координатних поверхонь.

Тому для широкого кола граничних задач математичної фізики досить змістовним є поняття загального розв'язку граничної задачі. Можливість конструктивного підходу тут визначається тим, що при формулюванні граничної задачі, крім основних рівнянь, задається і форма області. Якщо для відповідних рівнянь можлива побудова певних частинних розв'язків, то для низки канонічних областей можна утворити набори таких розв'язків, які задовольняють дві умови. По-перше, суперпозиція таких розв'язків з певними ваговими коефіцієнтами дозволяє в деякому сенсі точно виконати граничні умови задачі. По-друге, при зміні граничних умов для даної області в розв'язку задачі змінюється лише значення числових коефіцієнтів. Ці досить загальні формулювання стають зовсім прозорими, якщо їх доповнити конкретним прикладом.

Розглянемо найпростішу двовимірну граничну задачу для рівняння Лапласа у крузі. Треба знайти значення функції $\varphi(r,\theta)$, яка задовольняє рівняння Лапласа у крузі $r < r_0$ і набуває на границі наперед заданих значень

$$\varphi(r_0,\theta) = \Phi(\theta). \qquad (1)$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Для цього випадку можна вказати загальний розв'язок задачі у вигляді нескінченного ряду

$$\varphi(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) r^n. \qquad (2)$$

Довільні коефіцієнти A_n і B_n легко визначаються для заданої функції $\Phi(\theta)$, звісно, якщо відповідні інтеграли для коефіцієнтів Фур'є «беруться». Загальність розв'язку розуміється в тому сенсі, що структура та функціональний вигляд виразу (2) не змінюється при зміні значення функції $\Phi(\theta)$ на границі круга. Та обставина, що за певних умов деякі із коефіцієнтів в (2) можуть бути нулями, не ставить під сумнів висловлене твердження.

Спираючись на власний досвід, читач може навести досить багато прикладів, подібних за своєю сутністю, представлень для фізичних полів різної природи. При цьому мова, звичайно, йде про такі канонічні форми областей, як сфера, циліндр, шар, еліпсоїд та інші. Важливим моментом при обговоренні ідеї введення поняття загального розв'язку граничної задачі є та обставина, що така ідея є досить конструктивною. Якби мова йшла лише про такі розв'язки, як наведений для прикладу вище, то від такого поняття було б мало користі. Однак виявляється, що загальні розв'язки граничних задач можуть бути побудовані для досить широкого кола неканонічних областей в різних розділах математичної фізики.

Подальший виклад буде пов'язаний з ілюстрацією таких можливостей і специфічних проблем, що виникають при розв'язанні конкретних задач (мова йтиме про гармонічні хвильові, зокрема, звукові поля).

3. Основні положення методу часткових областей

"Сон – це клаптикова ковдра". В цьому вислові І. М. Сєченов[2] образно порівнює сон з «клаптиковою ковдрою», пояснюючи думку про те, що сон фактично являє собою «незвичайне поєднання минулого». Ми не дарма навели ці думки. Річ у тім, що метод, про який йтиме мова, ґрунтується, по суті, на принципі «клаптикової ковдри», адже при його застосуванні вся складна (неканонічна) область існування хвильового поля поділяється на більш прості області. Прості у тому сенсі, що у кожній такій області є можливість записати хвильове поле у вигляді суми відомих частинних розв'язків рівняння Гельмгольца. Надалі окремі (часткові) області «зшивають» в єдину область існування звукового поля. Зрозуміло, що ця процедура вимагає виконання певних граничних умов на межах часткових областей. Таким чином, всю область існування звукового поля зображуємо у вигляді «клаптикової ковдри», але на відміну від сну, який досить часто, являє собою незвичайне поєднання різних подій, побудована таким чином структура хвильового поля є точним розв'язком задачі про поширення хвиль у складній області. Фактично, ми дуже коротко виклали ідею методу часткових областей.

[2] Сєченов Іван Михайлович (1829–1905) – російський фізіолог і психолог.

Суть методу часткових областей проілюструємо, досліджуючи досить просту задачу про поширення звуку в складеному нескінченному плоскому хвилеводі, який заповнено ідеальною рідиною з густиною ρ, зі швидкістю звуку c. Геометрія задачі подана на рис. 1. Поверхні хвилеводу є акустично жорсткими, а розміри його складових дорівнюють відповідно h_1 і h_2.

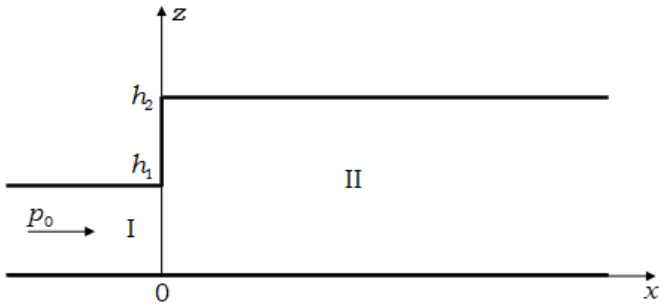


Рис. 1. Приклад складеного хвилеводу

Нехай ліворуч в хвилеводі поширюється гармонічна плоска хвиля тиску

$$p_0(x,t) = \exp[-i(\omega t - kx)], \qquad k = \frac{\omega}{c}. \tag{3}$$

Суто геометрично всю область існування звукового поля природно розділити на дві області: I – $x \le 0$, $0 \le z \le h_1$, II – $x \ge 0$, $0 \le z \le h_2$. Проте значно важливіше, що таке розбиття конструктивне з точки зору побудови розв'язку задачі в цілому.

Відомо (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), що довільне гармонічне поле в плоскому хвилеводі можна представити у вигляді суперпозиції нормальних хвиль з відповідно підібраними коефіцієнтами. Виділивши області I і II, ми уявили складений нескінченний хвилевід як композицію двох плоских напівнескінченних хвилеводів. Очевидно, що при падінні плоскої хвилі p_0 на межу поділу областей I і II утворюється відбита хвиля p_1 і проникна хвиля p_2 в область II. Тепер зрозуміло як записати поля p_1 і p_2. Хвилю p_2 представимо як суперпозицію скінченної кількості однорідних і нескінченної кількості неоднорідних нормальних хвиль плоского хвилеводу з характерним розміром h_2, тобто поле в області II матиме вигляд

$$p_2(x,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h_2}\right) \exp[-i(\omega t - \gamma_n x)], \tag{4}$$

де

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\dfrac{n\pi}{h_2}\right)^2}, & k > \dfrac{n\pi}{h_2}, \\ i\sqrt{\left(\dfrac{n\pi}{h_2}\right)^2 - k^2}, & k < \dfrac{n\pi}{h_2}. \end{cases} \tag{5}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Вираз (4) можна назвати загальним зображенням звукового поля в напівнескінченному хвилеводі II. У певному сенсі цей вираз є аналогом загального розв'язку (2) для круга. Слово "загальний" підкреслює той факт, що форма зображення поля (4) не зміниться за будь-яких граничних умов на поверхні $x = 0$. Аналогічна конструкція може бути побудована і для лівої частини хвилеводу. Падаюча хвиля (3) є заданою, а для відбитого поля очевидним загальним зображенням буде вираз

$$p_1(x,z,t) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \cos\left(\frac{l\pi z}{h_1}\right) \exp[-i(\omega t + \eta_l x)], \tag{6}$$

де

$$\eta_l = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left(\frac{l\pi}{h_1}\right)^2}, & k > \frac{l\pi}{h_1}, \\ i\sqrt{\left(\frac{l\pi}{h_1}\right)^2 - k^2}, & k < \frac{l\pi}{h_1}. \end{cases} \tag{7}$$

Зробимо зауваження відносно вибору вигляду часового множника $\exp(-i\omega t)$ або $\exp(+i\omega t)$. При використанні $\exp(-i\omega t)$, як це зроблено в даній статті, біжучі хвилі в додатному напрямку осі x, матимуть вигляд $\exp(-i\omega t + i\eta x)$, а хвилі, що біжать у від'ємному напрямку осі x, матимуть вигляд $\exp(-i\omega t - i\gamma x)$. Саме такі вирази визначатимуть потоки енергії в біжучих хвилях області II (для хвилі, яка пройшла крізь межу $x = 0$) і, відповідно, у відбитій хвилі в області I. Наведені міркування про напрям потоків енергії у біжучих хвилях визначають, так звану, умову на нескінченності.

Таким чином, ми побудували загальне звукове поле в усьому хвилеводі. У наведених виразах містяться дві послідовності довільних величин A_l і B_n. Завдяки їх вибору можна точно виконати умови спряження звукових полів на межі поділу областей I і II:

$$p_0 + p_1 = p_2, \qquad x = 0, \qquad z = [0, h_1], \tag{8}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial (p_0 + p_1)}{\partial x}, & x = 0, \quad z = [0, h_1] \\ 0, & x = 0, \quad z = [h_1, h_2]. \end{cases} \tag{9}$$

Обґрунтування такого твердження, очевидно випливає із загальних властивостей рядів Фур'є, адже сукупність функцій $\cos(n\pi z/h_2)$, $n = 0,1,2,\ldots$ і $\cos(l\pi z/h_1)$, $l = 0,1,2,\ldots$ утворюють повні і ортогональні системи функцій відповідно на відрізках $[0, h_2]$ і $[0, h_1]$.

Наведені міркування наочно розкривають зміст важливого для методу часткових областей поняття – загальний розв'язок граничної задачі. Отже, сукупність частинних розв'язків системи (або одного) диференціальних рівнянь в частинних похідних є загальним розв'язком граничної задачі для даної області, якщо одержаний розв'язок дає можливість задовольнити довільні граничні умови на її межах. Подальший пошук невідомих коефіцієнтів A_n і B_n пов'язаний зі стандартною процедурою переходу до

системи лінійних алгебраїчних рівнянь (мова про таку процедуру буде йтиме надалі у статті).

4. Використання різних систем координат у методі часткових областей. Внутрішня задача для трикутної області

Міркування, які наведені в пункті 3, досить наочно пояснюють процедуру побудови загального розв'язку в методі часткових областей. Подальшим розвитком методу є використання одночасно різних систем координат при побудові загального розв'язку граничної задачі. Як приклад, який ілюструє таку можливість, розглянемо внутрішню задачу про визначення власних частот скінченної області, заповненої ідеальною рідиною. Нехай такою областю є прямокутний трикутник з жорсткими межами, розмір яких становить a, b і c, рис. 2. Прямокутний трикутник тут розглядається тільки для спрощення запису поля. У загальному випадку жодних обмежень на форму трикутника не накладається.

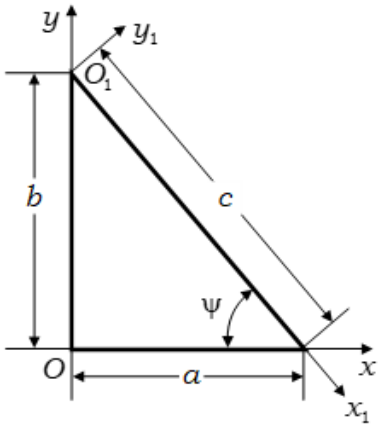


Рис. 2. Геометрія трикутної області

Як відомо (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), розв'язок типу (4) для плоского хвилеводу отримано за допомогою процедури відокремлення змінних. Проте ця процедура дійсно приводить до успіху, якщо межі області збігаються з частинами координатних поверхонь вибраної системи координат. На площині координатна лінія – це лінія, для якої одна з координат стала, а інша змінна.

Повертаючись до задачі про трикутну область (рис. 2), слід зазначити, що катети трикутника є частинами координатних ліній системи координат $x0y$, а гіпотенуза – ні. Тому введемо ще одну систему координат $x_1O_1y_1$, що повернута відносно системи $x0y$ на кут ψ.

Наша мета побудувати загальний розв'язок граничної задачі, тобто визначити хвильове поле в такому вигляді, щоб мати можливість задовольнити граничні умови на кожній із сторін трикутника. Такої мети можна досягти, якщо зобразити поле тиску у вигляді трьох рядів Фур'є (часовий множник $\exp(-i\omega t)$ не пишемо):

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(\alpha_m x)\, f_m^{(1)}(y) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\beta_n y)\, f_n^{(2)}(x) + \sum_{l=0}^{\infty} D_l \cos(\gamma_l x_1)\, f_l^{(3)}(y_1), \qquad (10)$$

де

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \qquad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \qquad \gamma_l = \frac{l\pi}{c}.$$

Тут явно виділені ряди Фур'є по кожній зі сторін трикутника, наявність яких у представлені для функції p забезпечує загальність розв'язку граничної задачі. Що стосується функцій f то, згідно з геометрією області, для них можна використовувати такі вирази:

$$f_m^{(1)}(y) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \alpha_m^2}\, y\right), & k > \alpha_m, \\ \exp\left(-\sqrt{\alpha_m^2 - k^2}\, y\right) & k < \alpha_m, \end{cases}$$

$$f_n^{(2)}(x) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \beta_n^2}\, x\right), & k > \beta_n, \\ \exp\left(-\sqrt{\beta_n^2 - k^2}\, x\right) & k < \beta_n, \end{cases} \qquad (11)$$

$$f_l^{(3)}(y_1) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \gamma_l^2}\, y_1\right), & k > \gamma_l, \\ \exp\left(\sqrt{\gamma_l^2 - k^2}\, y_1\right) & k < \gamma_l. \end{cases}$$

Підкреслимо, що важливо правильно вибрати знак у показнику експонент виразу (11): цей знак має визначати неоднорідні хвилі, в яких амплітуда зменшується від межі всередину трикутної області вздовж відповідної координати. Що стосується однорідних мод (для них, наприклад, має місце нерівність $k \geq \alpha_m$), то функції f можна представити і у вигляді *біжучих* у середину трикутної області хвиль, наприклад, $\exp\left(-i\omega t + i\sqrt{k^2 - \alpha_m^2}\, y\right)$. Оскільки область існування поля скінченна, то все ж таки доцільно вибрати запис у вигляді *стоячих* хвиль, як це зроблено у формулах (11), хоча це не принципово.

Наведена побудова розв'язку дозволяє звернути увагу ще на один аспект методу часткових областей. Сам характер міркувань, що приводить до зображення шуканого тиску звукового поля у вигляді (10), вказує на *неоднозначність форми розв'язку*. Наприклад, перший ряд Фур'є в (10) збереже властивості повноти, якщо в ньому систему функцій $\cos(\alpha_m y)$, $m = 0,1,2,\ldots$, замінити на $\sin(\alpha_m y)$, $m = 1,2,\ldots$ і та, і інша система функцій є повною і ортогональною на відрізку $x = [0, a]$. Зрозуміло, що перша більш придатна для виконання граничних умов на жорстких межах. У випадку ж акустично м'яких сторін (нульовим для них є тиск) перевагу слід віддати іншій системі.

Можливість варіації форми розв'язку при збереженні загального характеру, безумовно, визначає гнучкість методу часткових областей. Ще раз звернемо увагу на важливу відмінність за суттю задач для складеного хвилеводу (рис. 1), з одного боку,

і для трикутної області (рис. 2), з іншого. Якщо в першій задачі межова поверхня області існування звукового поля описувалася частинами координатних поверхонь однієї системи координат, то в задачі для трикутної області це вже не так. Таким чином, сама можливість роботи одночасно в різних системах координат суттєво розширює коло задач математичної фізики, які припускають побудову аналітичного розв'язку. Конкретну задачу, що ілюструє такі можливості наведено нижче.

5. Проникнення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів при куті розхилу клину менше за 180°

Розглянемо ще один приклад використання кількох систем координат при побудові загального розв'язку задачі. Мова йде про задачу поширення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів, рис. 3.

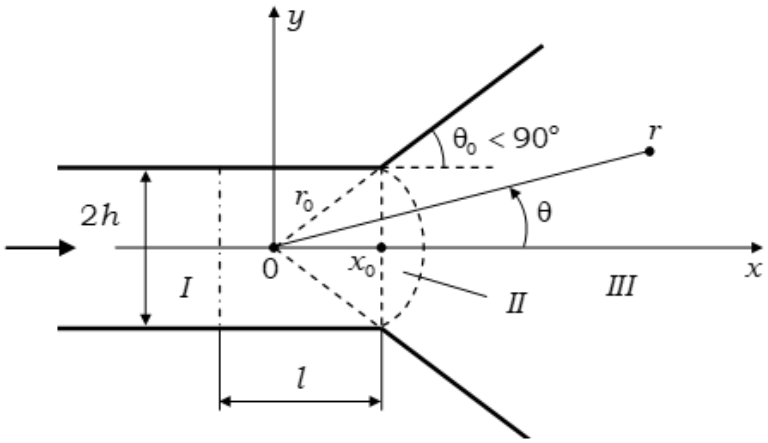


Рис. 3. Хвилеводна структура, $\theta_0 < 90^\circ$

Отже, маємо плоскопаралельний хвилевід з характерним розміром $2h$, який межує з клинуватим хвилеводом з кутом розхилу $2\theta_0$. Нехай кут $\theta_0 < 90^\circ$. Структура заповнена ідеальним стисливим середовищем. Поверхні хвилеводу є ідеально жорсткі.

Згідно з рис. 3 вводимо декартову xOy і полярну $rO\theta$ системи координат зі спільним центром O. Вся область існування звукового поля природно ділиться на часткові області: I – плоский напівнескінченний хвилевід $x \le x_0,\ |y| \le h$; III – клинуватий хвилевід $r \ge r_0, |\theta| \le \theta_0$; II – перехідна область – це сегмент круга радіуса r_0.

Нехай ліворуч в області I на зону стику плоского і клинуватого хвилеводів падає одна з мод плоского хвилеводу. Внаслідок її взаємодії з зоною стику утворюються відбита хвиля і хвиля, що проникла в область III. Відповідно до методу часткових областей слід записати вирази для звукових полів в областях I, II, III. Кожен з цих виразів повинен мати загальний характер, який дозволяє виконати будь-які граничні умови на межах поділу часткових областей. Для області I такий вираз містить у собі

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

падаючу хвилю і повну сукупність однорідних і неоднорідних відбитих хвиль (так само, як це було для спряжених плоских хвилеводів, рис. 1):

$$p_I(x,y) = \cos(\alpha_q y)\exp\left(ik_q(x-x_0)\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y)\exp\left(-ik_n(x-x_0)\right), \tag{12}$$

де q – номер падаючої нормальної хвилі, а величини α_n і k_n визначаються згідно з умовою $\partial p_1/\partial y = 0$ при $y = \pm h$ на жорстких поверхнях плоского хвилеводу:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{h}, \qquad k_n = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}, & k \geq \alpha_n, \\ i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}, & k < \alpha_n, \quad k = \omega/c\,. \end{cases} \tag{13}$$

Досить просту конструкцію має і представлення поля тиску в області III. Його природно представити в полярних координатах (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007):

$$p_{III}(r,\theta) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu H_{\beta_\mu}^{(1)}(kr)\cos(\beta_\mu\theta), \tag{14}$$

де, відповідно до граничної умови $\partial p_{III}/\partial\theta = 0$ при $\theta = \pm\theta_0$ на поверхнях клинуватого хвилеводу, знаходимо $\beta_\mu = \mu\pi/\theta_0$. Радіальні функції $H_{\beta_\mu}^{(1)}(kr)$ (*функції Ханкеля першого роду*) вибрані згідно з *умовою випромінювання*, тобто хвилі поширюються в додатному напрямку координати r, адже потік енергії в області III нвідбувається саме в цьому напрямку.

Для побудови загального розв'язку граничної задачі в області II з урахуванням геометрії її меж слід використовувати частинні розв'язки рівняння Гельмгольца в декартовій і полярній системах координат. На границі області II ($x = x_0,\ |\,y\,| \leq h$) повною і ортогональною є система функцій $\cos(\alpha_n y),\ n = 0,1,2,\ldots$. На другій границі ($r = r_0,\ |\,\theta\,| \leq \theta_0$) такі ж властивості має система функцій $\cos(\beta_\mu\theta),\ \mu = 0,1,2,\ldots$. У зв'язку з цим поле тиску в області II можна представити у вигляді

$$p_{II} = p_{II}^{(1)} + p_{II}^{(2)}, \tag{15}$$

де

$$p_{II}^{(1)}(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l \cos(\alpha_l y)\, f_l(x), \tag{16}$$

$$p_{II}^{(2)}(r,\theta) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} C_\upsilon \cos(\beta_\upsilon\theta)\, J_{\beta_\upsilon}(kr), \tag{17}$$

де $J_{\beta_\upsilon}(kr)$ – функція Бесселя першого роду, а функції $f_l(x)$ мають вигляд

$$f_l = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k^2 - \alpha_l^2}(x - x_0)\right), & k > \alpha_l, \\ \exp\left(-\sqrt{\alpha_l^2 - k^2}(x - x_0)\right), & k < \alpha_l. \end{cases} \tag{18}$$

Структура цього розв'язку така ж, як і структура розв'язку внутрішньої задачі для трикутної області (рис. 2). Але фізична суть задачі у даному випадку інша. Якщо в першому випадку мова йшла про пошук власних форм коливань скінченної області, то в даному випадку область II є проміжною для передачі енергії із плоского хвилеводу в клиновидний. Потік енергії крізь цю область має бути відмінним від нуля. Це природна фізична умова має такий же характер, що й умова випромінювання. На перший погляд, розв'язок у формі (15) не відповідає вказаним енергетичним вимогам. Так, в першій сумі розв'язок містить стоячі хвилі по координаті x, які самі енергії не переносять. Такі ж стоячі хвилі по радіальній координаті описуються функціями $J_{\beta_\upsilon}(kr)$.

Таким чином, окремо кожен з доданків у виразі (15) енергії не переносить. Використовуючи відзначену вище неоднозначність у виборі частинних розв'язків у межах даного методу, зазначені формальні труднощі можна усунути, записавши вираз (15) у вигляді суперпозиції біжучих хвиль. Але в цьому немає необхідності. Аналіз показує, що повний розв'язок у формі (15) дає відмінний від нуля потік енергії крізь область II. Фізично ситуація ідентична тій, яка має місце при проходженні хвилі крізь шар скінченної товщини при кутах падіння хвилі більших за критичний (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007). Тут передача енергії відбувається в результаті взаємодії неоднорідних хвиль, «прив'язаних» до протилежних границь. Конкретні розрахунки для різних форм представлення поля тиску в області II також підтверджують, що з енергетичних міркувань в розв'язку (15) нічого змінювати не потрібно.

Умови спряження на межах поділу областей I, II, III (рис. 3) мають вигляд

$$\left.\begin{matrix} p_I = p_{II} \\ \dfrac{\partial p_I}{\partial x} = \dfrac{\partial p_{II}}{\partial x} \end{matrix}\right\} \qquad x = x_0, \qquad |\, y \,| \le h, \tag{19}$$

$$\left.\begin{matrix} p_{II} = p_{III} \\ \dfrac{\partial p_{II}}{\partial r} = \dfrac{\partial p_{III}}{\partial r} \end{matrix}\right\} \qquad r = r_0, \qquad |\, \theta \,| \le \theta_0. \tag{20}$$

Підставляючи розв'язки (12), (14), (15) в умови (19), (20) і враховуючи формули, які визначають зв'язок між декартовою і полярною системами координат, приходимо до системи функціональних рівнянь.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Якщо спробувати розв'язати задачу для випадку кута $\theta_0 > 90^\circ$, то ситуація, як ми переконаємося нижче, корінним чином зміниться у порівнянні з випадком $\theta_0 < 90^\circ$. Тут виникає специфічна задача *продовження (або, інакше, доповнення) граничних умов з фізично заданої межі на деяку неіснуючу ділянку*.

Такий підхід може бути покладений в основу розгляду спеціального класу задач, що допускають побудову загальних розв'язків в межах методу часткових областей за відсутності фізично визначених граничних умов на всій координатній поверхні, до якої прив'язується повна система функцій. Розглянемо конкретні приклади таких задач.

6. Проникнення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів при куті розхилу клину більше за 180°. Доповнення граничних умов

Повернемося до задачі про поширення хвилі крізь зону стику плоского і клинуватого хвилеводів за умови, коли кут розхилу клину більше за 180°, тобто $\theta_0 > 90^\circ$ (рис. 4). Як бачимо, центр полярної системи координат (точка O) зміщується всередину області II. Отже, кутові функції у виразу $p_{II}^{(2)}$ (див. формулу (17)) мають бути періодичними з періодом 2π, що відповідає повному обходу навколо точки O. Зрозуміло, що таку умову не задовольняє система функцій $\cos(\beta_\upsilon\theta)$, $\upsilon = 0,1,2,\ldots$ у розв'язку $p_{II}^{(2)}$. Тому її слід замінити на систему функцій $\cos(\upsilon\theta)$, $\upsilon = 0,1,2,\ldots$, яка має таку періодичність і є повною і ортогональною на відрізку $-\pi \le \theta \le \pi$. Таким чином, поле в області II, як і раніше, визначається співвідношенням $p_{II} = p_{II}^{(1)} + p_{II}^{(2)}$, причому, якщо $p_{II}^{(1)}$ визначається виразом (16), то для $p_{II}^{(2)}$ слід записати нове співвідношення:

$$p_{II}^{(2)}(r,\theta) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} C_\upsilon \cos(\upsilon\theta) J_\upsilon(kr). \qquad (21)$$

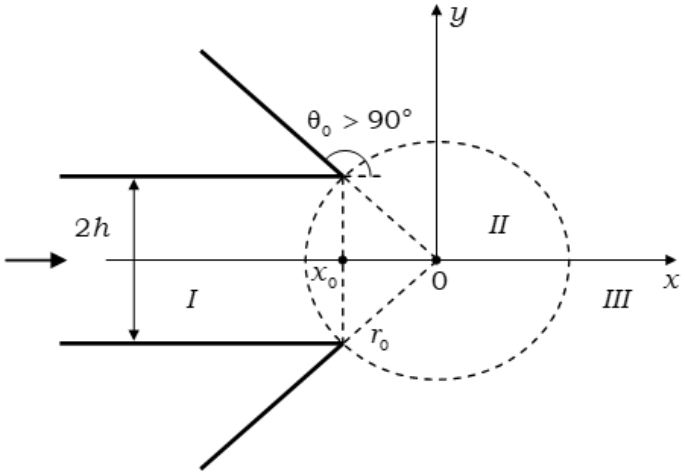


Рис. 4. Хвилеводна структура, $\theta_0 > 90^\circ$

Проте, як видно з рис. 4, конфігурація області II не дозволяє скористатися повнотою і ортогональністю системи функцій $\cos(\upsilon\theta)$, $\upsilon = 0,1,2,\ldots$ оскільки межа області II являє собою тільки частину кола радіусом r_0. Цю складність можна подолати,

якщо для розв'язку $p_{II}^{(2)}$ доповнити межу області II до повного кола радіусом r_0. На рис. 4 це штрихова лінія в області I: $r = r_0,\ \theta_0 \le |\theta| \le \pi$. Доповнивши межу області II до повного кола, ми отримуємо можливість використовувати повноту та ортогональність системи функцій $\cos(\upsilon\theta)$ під час виконання граничних умов. Проте труднощі у тому, що на введеній додатковій ділянці межі, у вихідній постановці задачі, умови не задані. Принциповим моментом у даному підході є те, що при формуванні умов спряження на додатковій ділянці межі ($r = r_0,\ \theta_0 \le |\theta| \le \pi$) може бути задане довільне значення коливальної швидкості або тиску. Нехай воно визначається деякою функцією $f_p(r_0, \theta)$ і $f_\upsilon(r_0, \theta)$ відповідно.

Отже, для кутів розхилу клину $2\theta_0 > 180^\circ$ (рис. 4), з'являються два варіанти формування умов спряження полів на межах виділених областей. Перший, при продовжені тиску на додатковій ділянці, виглядає так:

$$\begin{aligned}
p_I &= p_{II}, && x = x_0, && |y| \le h,\\
\frac{\partial p_I}{\partial x} &= \frac{\partial p_{II}}{\partial x}, && x = x_0, && |y| \le h,\\
\frac{\partial p_{II}}{\partial r} &= \frac{\partial p_{III}}{\partial r}, && x = x_0, && |\theta| \le \theta_0,\\
\begin{cases} p_{II} = p_{III}, \\ p_{II}^{(2)} = f_p(r_o, \theta), \end{cases} && \begin{matrix} r = r_0, \\ r = r_0, \end{matrix} && \begin{matrix} |\theta| \le \theta_0, \\ \theta_0 \le |\theta| \le \pi. \end{matrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

Другий, при продовжені коливальної швидкості, має вигляд:

$$\begin{aligned}
p_I &= p_{II}, && x = x_0, && |y| \le h,\\
\frac{\partial p_I}{\partial x} &= \frac{\partial p_{II}}{\partial x}, && x = x_0, && |y| \le h,\\
p_{II} &= p_{III}, && x = x_0, && |\theta| \le \theta_0,\\
\begin{cases} \dfrac{\partial p_{II}}{\partial r} = \dfrac{\partial p_{III}}{\partial r}, \\ \dfrac{1}{i\omega\rho}\dfrac{\partial p_{II}^{(2)}}{\partial r} = f_\upsilon(r_o, \theta), \end{cases} && \begin{matrix} r = r_0, \\ r = r_0, \end{matrix} && \begin{matrix} |\theta| \le \theta_0, \\ \theta_0 \le |\theta| \le \pi. \end{matrix}
\end{aligned} \tag{23}$$

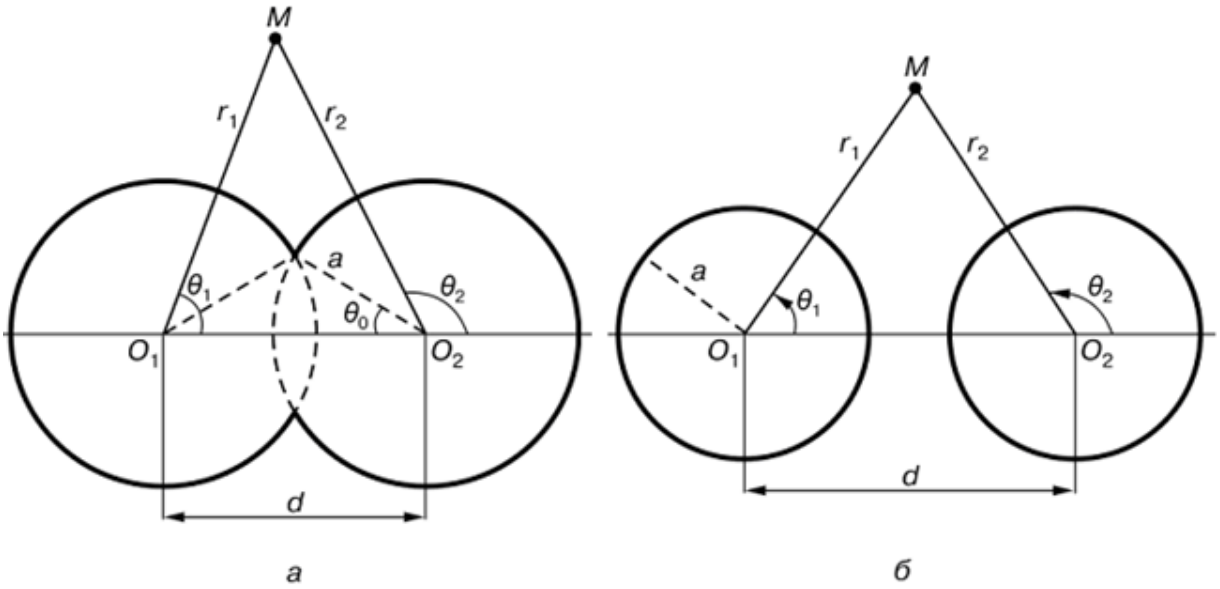
Алгебраїзація, про яку будемо говорити нижче, перших двох рівнянь у системах (22) і (23) відбувається за рахунок системи функцій $\cos(\alpha_n y)$, яка ортогональна на відрізку $|y| \le h$, третього рівняння – за допомогою системи функцій $\cos(\beta_\mu \theta)$, яка ортогональна на відрізку $|\theta| \le \theta_0$, і, нарешті, четвертого, яке включає дві рівності об'єднаних фігурною дужкою, за рахунок системи функцій $\cos(\upsilon\theta)$. Система функцій $\cos(\upsilon\theta)$ ортогональна на відрізку $-\pi \le \theta \le \pi$.

7. Випромінювання звуку парою циліндрів, що перетинаються

Як другий приклад, що ілюструє ідею продовження граничних умов на нефізичні межі, розглянемо задачу про випромінювання звуку складною (неканонічною)

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

поверхнею. Мова йтиме про плоску задачу, в якій маємо пару циліндрів з паралельними осями, що перетинаються. Для простоти візьмемо два циліндра з однаковим радіусом a (рис. 5, *а*).



а *б*

Рис. 5. Приклад системи з двох циліндрів:
а – циліндри перетинаються, *б* – циліндри не дотикаються один до одного

Спочатку розглянемо ситуацію, коли циліндри не торкаються один одного (рис. 5, *б*). Така задача добре вивчена. Введемо дві полярні системи координат $r_1O_1\theta_1$ і $r_2O_2\theta_2$ з центрами O_1 і O_2 на осях циліндрів.

Поле тиску окремо взятого циліндра, наприклад, першого (зліва), являє собою суперпозицію циліндричних хвиль:

$$p_1(r_1,\theta_1)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(1)}H_n^{(1)}(kr_1)\cos(n\theta_1), \tag{24}$$

(вважаємо, що функція парна відносно кутової координати, тому можна використовувати тільки функції косинуса). Тут коефіцієнти $A_n^{(1)}$ визначаються із граничної умови на поверхні першого циліндра. Ця умова полягає в заданні радіальної швидкості на поверхні циліндра, тобто

$$\frac{1}{i\omega\rho}\,\frac{\partial p_1(r_1=\alpha,\theta_1)}{\partial r_1}=V_1(\theta_1),\qquad \theta_1=[0,2\pi]. \tag{25}$$

Підставляючи (24) в (25) і, використовуючи властивість ортогональності системи функцій $\cos(n\theta_1)$, $n=1,2,\ldots$ на відрізку $[0,2\pi]$, визначаємо коефіцієнти $A_n^{(1)}$. Аналогічно, якщо в просторі маємо тільки другий циліндр (справа), то його поле тиску має вигляд

$$p_2(r_2,\theta_2)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l^{(2)}H_l^{(2)}(kr_2)\cos(l\theta_2), \tag{26}$$

де коефіцієнти $A_l^{(2)}$ визначаються з умови

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_2(r_2=\alpha,\theta_2)}{\partial r_2}=V_2(\theta_2),\qquad \theta_2=[0,2\pi] \tag{27}$$

внаслідок ортогональності системи функцій $\cos(l\theta_2)$, $l=0,1,2,\ldots$ на відрізку $[0,2\pi]$.

Тепер повернемося до задачі випромінювання двох циліндрів, котрі не торкаються один одного (рис. 5, *б*). Тут у порівнянні з одним циліндром ситуація ускладнюється. Річ у тому, що звукове поле в точці спостереження M складається зі звукових полів, що випромінює кожний циліндр, причому випромінювання кожного з циліндрів має бути визначено з врахуванням багаторазового розсіювання звуку на циліндрах. Тому поле тиску пари циліндрів визначаємо як суму тисків p_1 і p_2, тобто

$$p=p_1+p_2=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(1)}H_n^{(1)}(kr_1)\cos(n\theta_1)+\sum_{l=0}^{\infty}A_l^{(2)}H_l^{(2)}(kr_2)\cos(l\theta_2), \tag{28}$$

де коефіцієнти $A_n^{(1)}$ і $A_l^{(2)}$ слід вибирати так, щоб одночасно задовольнити граничні умови на поверхнях обох циліндрів:

- на поверхні першого циліндра

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial r_1}=V_1(\theta_1),\qquad r_1=a,\qquad \theta_1=[0,2\pi], \tag{29}$$

- на поверхні другого циліндра

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial r_2}=V_2(\theta_2),\qquad r_2=a,\qquad \theta_2=[0,2\pi]. \tag{30}$$

Слід відмітити, що у формулі (28) хвилі записані в різних системах координат, які пов'язані з центрами кожного з циліндрів. Тому, щоб можна було виконати диференціювання і задовольнити граничну умову (29) на поверхні першого циліндра, слід записати хвилі, що випромінюються другим циліндром в системі координат $r_1O_1\theta_1$ з центром в точці O_1. Аналогічне зауваження маємо відносно граничної умови (30) на поверхні другого циліндра.

Розписуючи умови (29), (30), отримуємо пару функціональних рівнянь. Алгебраїзація першого з них проводиться завдяки ортогональності системи функцій $\cos(n\theta_1)$, $n=0,1,2,\ldots$ на відрізку $[0,2\pi]$, а другого – завдяки ортогональності системи

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

функцій $\cos(l\theta_2),\ l = 0,1,2,\ldots$ на відрізку $[0,2\pi]$. Таким чином, отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь *другого роду*:

$$\begin{aligned} &A_m^{(1)} + \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(2)} a_{ml}^{(2)} = b_m^{(1)}, \quad m = 0,1,2,\ldots, \\ &\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} a_{jn}^{(1)} + A_j^{(2)} = b_j^{(2)}, \quad j = 0,1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{31}$$

де $a_{jn}^{(1)}$, $a_{ml}^{(2)}$, $b_m^{(1)}$, $b_j^{(2)}$ – коефіцієнти, котрі обчислюються. Розв'язок нескінченної системи (31) можна отримати завдяки її редукції.

Тепер розглянемо ситуацію, коли циліндри перетинаються (рис. 5, *а*). Тут граничні умови на штрихових ділянках кіл не визначені, оскільки ці ділянки взагалі не є фізичними межами області. Отже, функції $V_1(\theta_1)$ і $V_2(\theta_2)$ не будуть визначені на повних колах, тому скористатися ортогональністю систем функцій $\cos(n\theta_1)$ і $\cos(l\theta_2)$ немає можливості. Алгебраїзація функціональних рівнянь за таких умов приведе до появи системи алгебраїчних рівнянь *першого роду*, загальний вигляд якої такий:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{c}_{mn}^{(1)} A_n^{(1)} + \sum_{l=0}^{\infty} a_{ml}^{(2)} A_l^{(2)} = b_m^{(1)}, \quad m = 0,1,2,\ldots, \\ &\sum_{n=0}^{\infty} a_{jn}^{(1)} A_n^{(1)} + \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{c}_{jl}^{(2)} A_l^{(2)} = b_j^{(2)}, \quad j = 0,1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{32}$$

З обчислювальної точки зору така ситуація небажана, оскільки формулювання даної задачі у вигляді нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь першого роду може виявитися *некоректною*, тобто практично виключається можливість проведення систематичних числових розрахунків. Найбільш загальним проявом некоректності систем рівнянь першого роду є нестабільність результатів їх розв'язку при незначній зміні зовнішніх параметрів задачі або порядку системи при її редукції.

Використовуючи ідею продовження граничних умов, записуємо граничну умову для лівого циліндра (рис. 5, *а*) так:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i\omega\rho}\,\frac{\partial p_1}{\partial r_1} = f_1(\theta_1), \qquad r_1 = a, \qquad 0 \le \theta_1 \le \theta_0, \qquad 2\pi - \theta_0 \le \theta_1 \le 2\pi, \\ &\frac{1}{i\omega\rho}\,\frac{\partial (p_1 + p_2)}{\partial r_1} = V_1(\theta_1), \qquad r_1 = a, \qquad \theta_0 \le \theta_1 \le 2\pi - \theta_0, \end{aligned} \tag{33}$$

де функція $f_1(\theta_1)$ визначає доповнення граничних умов для розв'язку p_1 на нефізичній ділянці поверхні лівого циліндра. Аналогічне співвідношення маємо записати для поверхні правого циліндра:

$$\frac{1}{i\omega\rho}\,\frac{\partial (p_1 + p_2)}{\partial r_2} = V_2(\theta_2), \qquad r_2 = a, \qquad 0 \le \theta_2 \le \pi - \theta_0, \qquad \pi + \theta_0 \le \theta_2 \le 2\pi, \tag{34}$$

$$\frac{1}{i\omega\rho}\frac{\partial p_2}{\partial r_2} = f_2(\theta_2), \qquad r_2 = a, \qquad \pi - \theta_0 \le \theta_2 \le \pi + \theta_0,$$

де функція $f_2(\theta_2)$ визначає доповнення граничних умов для розв'язку p_2 на нефізичній ділянці правого циліндра.

Тепер ми отримали можливість скористатися ортогональністю систем функцій $\cos(n\theta_1)$ і $\cos(l\theta_2)$ на відрізку $[0,2\pi]$ і перевести завдяки цьому функціональну систему рівнянь (33), (34) в нескінченну систему алгебраїчних рівнянь другого роду вигляду (31).

Підсумовуючи, можна сказати, що багато практичних обчислень і строгий аналіз деяких простих задач (Grinchenko, 1996), (Грінченко, 2008), (Grinchenko, Vovk & Matsypura, 2013) приводять до незвичайного, на перший погляд, висновку, а саме, *остаточні кількісні оцінки характеристик поля не залежать від вибору функцій, які доповнюють граничні умови на нефізичній ділянці меж* (в розглянутій задачі це $f_1(\theta_1)$ і $f_2(\theta_2)$). Отже, описаний спосіб покращення властивостей нескінченних систем, які отримані під час розв'язання задачі, є дійсно конструктивним і, таким чином, розширює можливості методу часткових областей.

Слід зробити ще таке важливе загальне зауваження. Наявність аналітичного представлення розв'язку задачі виводить процедуру аналізу задачі на новий якісний рівень. Адже, по суті, вся "історія відбувається" на поверхнях меж часткових областей, минаючи тим самим об'ємні області часткових областей, що фактично зменшує розмірність задачі.

8. Алгоритм пошуку значень коефіцієнтів в загальних розв'язках

У розглянутих вище задачах ми побудували загальні розв'язки і записали умови спряження полів на межах часткових областей. Подальший алгоритм визначення коефіцієнтів в загальних розв'язках є універсальним.

На першому кроці слід розписати умови спряження полів, використовуючи представлення полів в часткових областях. Як результат, отримуємо систему функціональних рівнянь. Щоб наші міркування були більш наочними, розпишемо, наприклад, першу умову (19) в задачі проходження хвилі крізь стик плоского і клиноватого хвилеводів (рис. 3), а саме: $p_I = p_{II},\ x = x_0,\ |y| \le h$. Використовуючи представлення полів (12), (15), отримуємо таке функціональне рівняння:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\alpha_n y) - \sum_{l=0}^{\infty} D_l \cos(\alpha_l y) - \sum_{v=0}^{\infty} C_v \cos\left(\beta_v \operatorname{arctg}\frac{y}{x_0}\right) J_{\beta_v}\left(k\sqrt{x_0^2 + y^2}\right) = \\ = -\cos(\alpha_q y), \qquad |y| \le h. \tag{35}$$

На другому кроці проводимо процедуру алгебраїзації функціонального рівняння (35), завдяки властивостям повноти і ортогональності набору функцій $\cos(\alpha_n y)$, $n = 0,1,2,\ldots$ на плоскій межі $x = x_0, |y| \le h$. Для цього послідовно множимо рівняння (35) на $\cos(\alpha_m y),\ m = 0,1,2,\ldots$ та інтегруємо по координаті y в межах $-h \le y \le h$,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

використовуючи властивість ортогональності набору функцій $\cos(\alpha_m y)$. Як результат, матимемо нескінченну кількість лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \delta_{mn} - \sum_{l=0}^{\infty} D_l \delta_{ml} - \sum_{v=0}^{\infty} C_v T_{mv} = -\delta_{mq}, \qquad m = 0,1,2, \dots , \tag{36}$$

де

$$\delta_{ml} = \begin{cases} 2h, & m = l = 0, \\ h, & m = l > 0, \\ 0, & m \neq l, \end{cases} \qquad T_{mv} = \int_{-h}^{h} \cos\left(\beta_v \operatorname{arctg}\frac{y}{x_0}\right) J_{\beta_v}\left(k\sqrt{x_0^2 + y^2}\right) \cos(\alpha_m y)\, dy. \tag{37}$$

Аналогічно проводиться алгебраїзація другої умови (19). Для умов (20), які визначені на межі $(r = r_0,\ |\theta| \leq \theta_0)$, використовується система функцій $\cos(\beta_j \theta)$, $j = 0,1,2, \dots$.

У результаті цих двох кроків отримуємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь *другого роду*. Якщо сума модулів коефіцієнтів у кожному рядку системи менша за одиницю, то така система рівнянь називається *регулярною* (Kantorovich & Krylov, 1964). Розв'язок регулярних систем можна виконати методом *редукції*. Слід зробити суттєве зауваження: умова регулярності для нескінченних систем рівнянь є *достатньою*, але *не необхідною*. Тому, якщо ця умова не виконується, або проведення такого аналізу ускладнене внаслідок непростого вигляду матриці коефіцієнтів системи рівнянь, то питання про можливість розв'язку таких систем методом редукції визначається в процесі *числового експерименту*, тобто методом редукції при поступовому збільшенні порядку системи. Система матиме розв'язок, якщо в ході числового експерименту маємо:

- умови спряження виконуються з необхідною точністю;
- спостерігається збіжність отриманого розв'язку при збільшенні порядку системи рівнянь в процесі редукції;
- виконується закон збереження енергії.

Наявність сучасних ЕОМ дозволяє успішно проводити числовий експеримент, тому він широко застосовується в сучасній практиці розв'язку нескінченних систем рівнянь.

Таким чином, основною обчислювальною процедурою при отриманні оцінок характеристик поля являється розв'язок нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Кількість врахованих невідомих (порядок скінченної системи) строго залежить від співвідношення довжини хвилі і характерних розмірів геометрії моделі. Зменшення довжини хвилі природно потребує збільшення кількості членів рядів, що використовуються в якості представлень звукового поля.

Про описаний варіант переходу до лінійної системи алгебраїчних рівнянь, який можна назвати класичним, говорять як про наближення функцій у розумінні мінімальності середньоквадратичного відхилення. При цьому можуть виникнути певні складнощі. Наприклад, якщо для запису хвильових полів у часткових областях доводиться використовувати декілька систем координат. Як результат, при переході до системи алгебраїчних рівнянь виникають досить складні інтеграли. Часто їх

аналітичне обчислення неможливе, та й чисельне обчислення може бути пов'язане з певними труднощами.

Після редукції система рівнянь (36) матиме вигляд сукупності з N_1 лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{N_1} A_n \delta_{mn} - \sum_{l=0}^{N_1} D_l \delta_{ml} - \sum_{v=0}^{N_2} C_v T_{mv} = -\delta_{mq}, \qquad m = 0,1,2, \dots N_1. \tag{38}$$

Тут кількість коефіцієнтів A_n і D_n дорівнює N_1, а коефіцієнтів $C_n - N_2$.

Інший варіант переходу до системи алгебраїчних рівнянь полягає в прирівнюванні функцій (полів у суміжних часткових областях) в скінченному наборі точок (назвемо їх вузлові точки) на межі цих областей. Кількість вузлових точок на межі визначає порядок системи рівнянь і тим самим кількість шуканих амплітудних коефіцієнтів мод у часткових областях. Як бачимо, такий підхід не містить обчислювальних проблем. У такому варіанті функціональне рівняння (35) перетворюється на таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=0}^{N_1} A_n \cos(\alpha_n y_s) - \sum_{l=0}^{N_1} D_l \cos(\alpha_l y_s) - \sum_{v=0}^{N_2} C_v \cos\left(\beta_v \operatorname{arctg}\frac{y_s}{x_0}\right) J_{\beta_v}\left(k\sqrt{x_0^2 + y_s^2}\right) = \\ = -\cos(\alpha_q y_s), \qquad s = 0,1,2, \dots N_1. \tag{39}$$

Проте виникає питання: яка хвильова відстань між вузловими точками забезпечить прийнятну точність обчислень? У роботі (Грінченко, Гусак & Маципура, 2021) показано, що, за однакової кількості мод у часткових областях для двох варіантів спряження полів, варіант середньоквадратичного наближення є більш точним. Однак також показано, що за величини хвильової відстані між вузловими точками $\Delta/\lambda < 0{,}2$ отримуємо цілком прийнятну точність розрахунку для методу точкового спряження полів.

9. Висновки

Підсумовуючи виклад матеріалу статті слід відзначити, що вибір матеріалу та характер викладу визначалися бажанням проілюструвати два важливих аспекти загальної проблеми розвитку аналітичних методів розв'язання граничних задач математичної фізики. Перш за все, хотілося звернути увагу на конструктивність введеного поняття загального розв'язку граничної задачі. Використання закладеної в ньому ідеї дає можливість суттєво розширити коло задач, для яких такі аналітичні розв'язки можна побудувати. З другого боку, практичне використання методу суперпозиції загальних розв'язків канонічних задач при побудові розв'язків задач неканонічних, призвело до необхідності розглянути досить специфічну проблему доповнення граничних умов на певних нефізичних поверхнях для одержання більш

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

простих співвідношень для шуканих величин. У роботі показано можливість використання дещо нетрадиційного підходу до цієї проблеми. Одержані при цьому результати досить цікаві також з точки зору ілюстрації можливості побудови єдиних, по суті, розв'язків граничних задач у різних формах.

Певне уявлення про можливості методу часткових областей можна сформувати на основі низки прикладів, наведених у (Грінченко, Вовк & Маципура, 2007), (Grinchenko, Vovk & Matsypura, 2013), (Grinchenko, Vovk & Matsypura 2018).

Список використаних джерел

Грінченко В. Т., Маципура В.Т. (2024). FRACTALIST // *У світі математики*. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. № 2. С. 60–87.

Грінченко В. Т., Вовк І. В., Маципура В. Т. (2007). *Основи акустики : навчальний посібник* Київ : Наукова думка, 640 с.

Grinchenko, V. T. (1996). Development of the method for solving problems of sound radiation and scattering in non-canonical areas, *Hydromechanics*, 70, 27–40. (in Russian)

Грінченко В. Т. (2008). Задачі математичної фізики з неповністю визначеними граничними умовами // *Мат. Методи та фіз.-мех. поля.* 51, № 2. С. 53–60.

Viktor T. Grinchenko, I.V. Vovk, V.T. Matsypura (2013). *Wave problems of acoustics*. Beggel Books, Monograph. 572 p. DOI:10.1615/978-1-56700-459-5.0

Грінченко В. Т., Гусак В. О., Маципура В. Т. (2021). Використання двох варіантів спряження хвильових полів в методі часткових областей // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. № 2(136). С. 5–16.

Kantorovich L. V., Krylov V. I. (1964). *Approximate methods of higher analysis*. New York : Interscience Publishers, 708 p.

Philip M. Morse, Hernan Feshbach (1953). *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London. 1064 p.

Bowman, J. I., Senior, N. B. A., & Uslenghi, P. L. T. (1969). *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shaper*. North-Holland Publ. Co. 744 p.

Lame G. (1852). *Lecons sur 1a theorie mathematique de J'elasticite des corps solides*. Paris, Bechelier, 335 p.

Viktor T. (2018). Grinchenko, Igor V. Vovk, Vladimir T. Matsypura. *Acoustic wave problems*. New York : Begell House, Inc. 439 p.

Williams E. G. (1994). From gigabytes to understanding // *Journ. Acoust. Soc. Am*. 95 (5), Pt 2. – P. 2901.

Отримано редакцією журналу: 14.03.2024
Прорецензовано: 18.03.2024
Схвалено до друку: xx.06.2024

Victor GRINCHENKO, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0003-3229-1810
e-mail: vgrinchenko@yahoo.com
Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv,

Volodymyr MATSYPURA, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0002-0136-6659
e-mail: mnivtt@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

A NON-MATHEMATICIAN'S VIEW ON CONSTRUCTING A GENERAL SOLUTION TO BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN NON-CANONICAL DOMAIN

Abstract. *Using examples of boundary value problems for the Helmholtz and Laplace equations, the method is discussed, which allows significantly expanding the class of mathematical physics problems that allow a complete analytical description of fields in non-canonical domains. The basic concept that defines the procedure for constructing analytical solutions is the concept of a general solution of a boundary value problem. Examples are considered that reveal the essence of the method and illustrate the construction of such solutions using partial solutions in different coordinate systems. It is shown that the theorem on the uniqueness of the solution of a boundary value problem does not exclude the possibility of different analytical forms of its representation. Specific problems that arise due to the ambiguity of the form of general solutions and the possibility of different formulations of functional equations that determine the boundary conditions and conjugation conditions of conjugation on the boundaries of partial domains are indicated. The procedures for finding the values of coefficients in general solutions are discussed.*

Keywords: *method; partial domains; general solution; non-canonical domains.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Проблеми і гіпотези, рішення

УДК 514.764.7 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.12**

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р. фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАНУРЕННЯ ПЛЯШКИ КЛЕЙНА В ТРИВИМІРНИЙ ПРОСТІР

Анотація. *Розглядається вкладення та занурення поверхонь (двовимірних многовидів) в тривимірний евклідів простір. Наводяться приклади вкладень для тора, циліндра та стрічки Мебіуса. Для пляшки Клейна будуються два занурення, що мають в самоперетині замкнену криву. Перше занурення можна розглядати як вкладення двох стрічок Мебіуса, що мають спільну межу, а також перетинаються по спільній середній лінії. Ця поверхня отримана скрученим обертанням вісімки навколо осі. Друге занурення отримане як об'єднання чотирьох вкладених циліндрів з горизонтальними основами. Вкладення двох з цих циліндрів можна розглядати як половини вкладених торів*

Ключові слова: *занурення; вкладення; неорієнтовний; стрічка Мебіуса; пляшка Клейна; регулярна поверхня.*

1. Вступ

Теми топології та геометрії поверхонь мають фундаментальне значення у сучасній математиці та її застосуваннях у фізиці, інформатиці та інженерії. Занурення та вкладення поверхонь у тривимірний простір відкривають нові можливості для дослідження складних структур, зокрема незвичайних поверхонь з гладкою топологією, таких як пляшка Клейна. Вивчення особливостей та прикладів таких занурень допомагає краще зрозуміти геометричну та топологічну складність цих об’єктів, а також їх роль у моделях уявлень та фізичних систем.

У (Пришляк, 2024) описано геометричні та топологічні властивості проективної площини, неорієнтовної поверхні роду 1. В цій статті ми описуємо пляшку Клейна, що є замкненою неорієнтовною поверхнею роду 2. Для замкнених вкладених в $\mathbb{R}^3$ поверхонь орієнтація задається вибором одиничного вектора нормалі в кожній точці. Цей вибір здійснюється умовою. що промінь породжений ним, перетинає без дотику поверхню в парній кількості точок. Тому пляшка Клейна, так само як і інші замкнені неорієнтовані поверхні, не може бути вкладена без точок самоперетину в $\mathbb{R}^3$. На n-вимірний випадок цей факт узагальнено у роботі (Milnor, 1956). Також відомо (Lashof & Smale, 1958), що існує обмежена кількість топологічних класів занурень з певною кількістю самоперетинів. Зокрема, для пляшки Клейна існує лише два топологічних типи занурень з однією компонентною самоперетинів, що є простою замкненою кривою.

Поняття вкладення та занурення включено до багатьох підручників з диференціальної топології, наприклад у (Пришляк, 2015).

Об'єктом дослідження в цій роботі є поверхні, зокрема, поверхня пляшки Клейна та її занурення у тривимірний простір.

Метою роботи є опис двох топологічно різних занурень цієї поверхні з однією компонентною точок самоперетину.

2. Занурення та вкладення поверхонь

Нехай M є множиною на якій задана метрика (відстань між точками) $d: M \times M \to \mathbb{R}$. Тоді M називається *поверхнею* (*поверхнею з межею*), якщо для кожної точки $p \in M$ існує $\varepsilon > 0$, що в ε-околі $B(p, \varepsilon) = \{q \in M: d(q, p) < \varepsilon\}$, можна увести локальну систему двох координат (u і v), що задається його гомеоморфізмом на область площини (верхньої півплощини $\mathbb{R}^2_+ = \big((x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq 0\big)$. Поверхня є замкненою, якщо вона не має межі і з довільного покриття її ε-околома можна виділити скінчене підпокриття. Будемо надалі вважати, що на поверхні зафіксовано покриття її ε-околами, а в кожному з них локальну систему координат.

Нехай x, y, z – прямокутні декартові координати у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$. Відображення $f: M \to \mathbb{R}^3$ називається *зануренням поверхні*, якщо для кожної локальної системи координат (з числа тих, що ми зафіксували на поверхні) для покоординатного запису відображення f:

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v)$$

вектори

$$\left\{\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial f_2(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial f_3(u,v)}{\partial u}\right\}, \qquad \left\{\frac{\partial f_1(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial f_2(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial f_3(u,v)}{\partial v}\right\}$$

не є колінеарними (їх координати не пропорційні). Занурені поверхні ще називають *регулярними*. Занурення f має таку властивість: для достатньо малого ε обмеження $f|_B(p, \varepsilon)$ є *ін'єктованим відображенням,* і при зменшенні ε поверхня наближається до області на площині (так само як для людей, що живуть на поверхні сфери здається, що Земля плоска). Кажуть, що для занурених поверхонь виконується *умова локальної планарності*.

Проте глобально (для різних околів) можуть існувати спільні точки у образів. Такі точки називають *точками самоперетину поверхні*. *Вкладенням* називається *занурення*, яке є ін'єктованим відображенням. Іншими словами, вкладення – це занурення без точок самоперетину.

Приклад 1. *Розглянемо двовимірний тор $T^2 = S^1 \times S^1$, що є декартовим добутком двох кіл $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$. За локальні координати u, v на торі візьмемо полярні кути на кожному з кіл. Тоді вкладення тора в $\mathbb{R}^3$ може бути описано формулою*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$f(u,v) = \{(2+\cos u)\cos v\,,(2+\cos u)\sin v\,,\sin u\}, \qquad u \in [0,2\pi], \qquad v \in [0,2\pi]. \qquad (1)$$

Як видно з цього прикладу відображення тора є періодичним за кожною з координат, якщо його задавати як відображення з площини в тривимірний простір. Зауважимо, що задати періодичну функцію на прямій – це те саме, що задати функцію на відрізку, яка приймає рівні значення на кінцях відрізка. В топології кажуть, що коло отримано з відрізка склеюванням його кінців, що означає введення відношення еквівалентності, за яким кінці відрізка еквівалентні, та взяття факторпростору за цим відношенням еквівалентності.

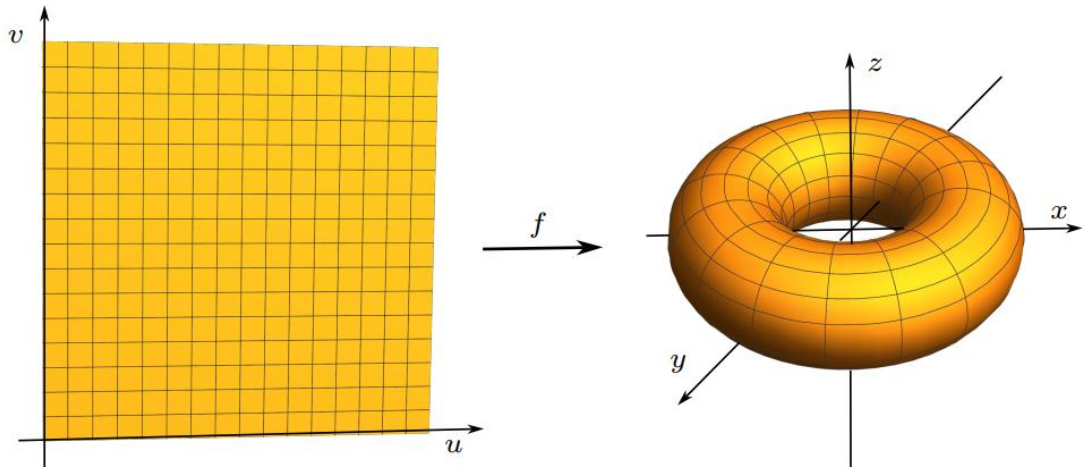


Рис. 1. Вкладення тора

За аналогією, тор розглядається як квадрат $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ у якого склеєні протилежні точки за відношенням еквівалентності, що задається правилами:

$$(0,v)\sim(2\pi,v), \qquad (u,0)\sim(u,2\pi), \qquad u \in [0,2\pi], \qquad v \in [0,2\pi].$$

Іншими словами, склеюються точки протилежних сторін квадрата, що симетричні відносно горизонтальної або вертикальної осей симетрії квадрата.

Приклад 2. *Розглянемо циліндр $S^1\times[0,1]$, який отримано з квадрата склеюванням точок лівої та правої сторін з однаковими ординатами. Нехай u – це полярний кут на колі, а v – координата на відрізку $[0,1]$. Тоді вкладення циліндра в $\mathbb{R}^3$ може бути описано формулою*

$$f_1(u,v) = \{\cos u\,,\sin u\,,v\}, \qquad u \in [0,2\pi], \qquad v \in [0,1] \qquad (2)$$

або

$$f_2(u,v) = \{(1+v)\cos u\,,(1+v)\sin u\,,0\}, \qquad u \in [0,2\pi], \qquad v \in [0,1]. \qquad (3)$$

Аналогічно до розглянутих прикладів, довільну поверхню можна зобразити у вигляді багатокутників зі склеєними сторонами. У (Пришляк, 2023) описано як за таким зображенням визначити топологічні характеристики поверхні.

3. Занурення пляшки Клейна

Пляшка Клейна є однією із замкнених неорієновних поверхонь. Такі поверхні характеризуються тим, що в них є підмножина, гомеоморфна стрічці Мебіуса.

Приклад 3. *Стрічка Мебіуса – це поверхня, що отримана з квадрата* $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$ *склеюванням вертикальних сторін за відношенням еквівалентності, які задані правилами:*

$$(0, v) \sim (2\pi, 2\pi - v), \qquad v \in [0,2\pi].$$

Іншими словами, склеюються точки горизонтальних сторін квадрата, що симетричні відносно центру симетрії квадрата. Вкладення стрічки Мебіуса в $\mathbb{R}^3$ *може бути описано формулою*

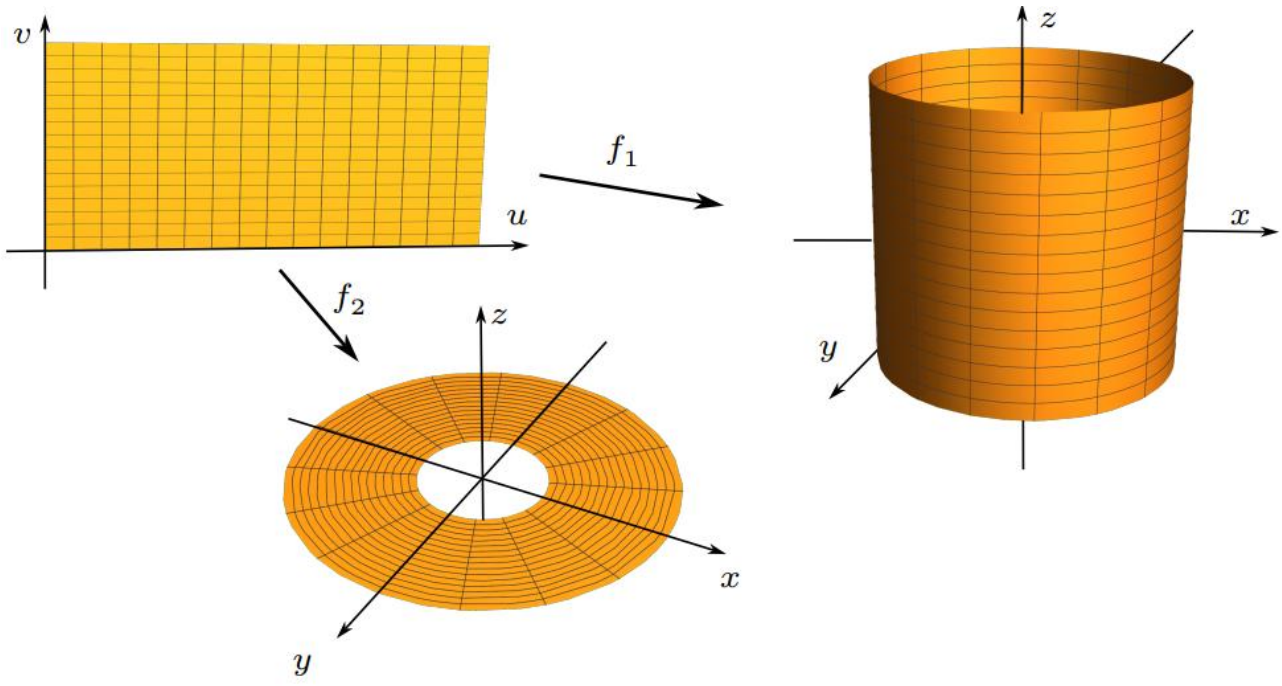


Рис. 2. Два вкладення циліндра

$$g(u,v) = \left\{\left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\,, \left(1 + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)\sin u\,, \frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\right\}, \tag{4}$$

$$u \in [0,2\pi], \qquad v \in [-1,1]$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

При цьому, відображення квадрата $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ *задається як* $(u,v)\to g\left(u,\frac{v}{\pi}-1\right)$.

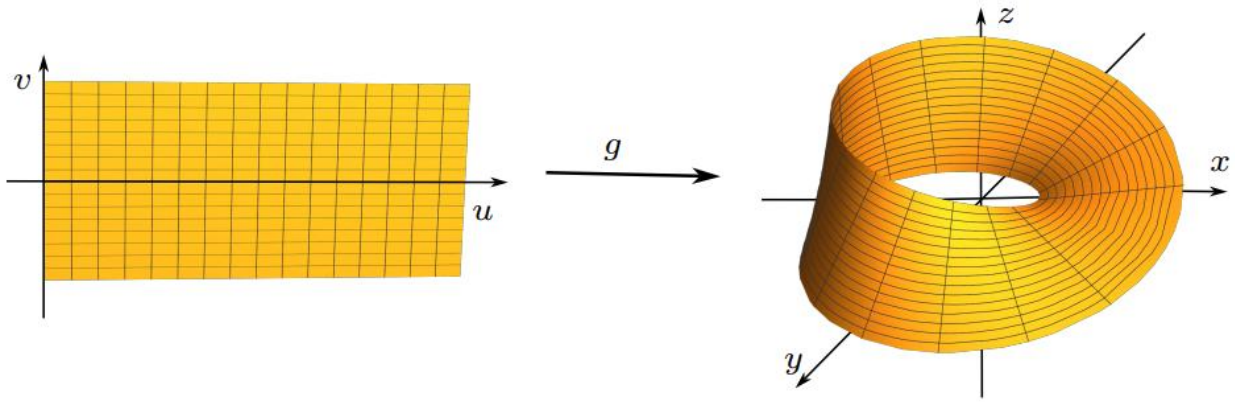


Рис. 3. Вкладення стрічки Мебіуса

Означення 1. *Пляшка Клейна* (Kl) *– це поверхня, що отримана з квадрата* $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ *склеюванням точок протилежних сторін за відношенням еквівалентності, які задані правилами:*

$$(0,v)\sim(2\pi,v),\qquad (u,0)\sim(2\pi-u,2\pi),\qquad u\in[0,2\pi],\qquad v\in[0,2\pi].$$

Іншими словами горизонтальні сторони квадрата, склеюються за осьовою симетрією відносно горизонтальної осі симетрії квадрата, а вертикальні сторони за центральною симетрією відносно центра симетрії квадрата.

Зауважимо, що підмножина точок пляшки Клейна з $u\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ є прямокутником, який після склеювання верхньої та нижньої сторони стане гомеоморфним листу Мебіуса. Аналогічно, підмножина точок пляшки Клейна з $u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ гомеоморфна стрічці Мебіуса.

З цього випливає, що пляшку Клейна можна отримати з двох стрічок Мебіуса, якщо у них ототожнити межу. Для цього в площині xOz беремо криву у формі вісімки, що має одну точку перпендикулярного самоперетину, що є центром симетрії кривої, зміщуємо її по осі Ox так, що відстань від центру симетрії до осі Oz більша за половину діаметра кривої. Далі обертаємо криву навколо свого центру з постійною кутовою швидкістю, а при цьому обертаємо криву з подвійною швидкістю навколо осі Oz (рис. 4).

Теорема 1. *Занурення* $G: Kl\to\mathbb{R}^3$ *пляшки Клейна у тривимірний простір (фігура Ліссажу, див. рис. 4), можна задати формулою*

$$G(u,v)=\begin{cases} g_1(u,v), & u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad v\in[0,2\pi],\\ g_2(u-\pi,v), & u\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right], \quad v\in[0,2\pi],\\ g_1(u-2\pi,v), & u\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right], \quad v\in[0,2\pi], \end{cases} \tag{5}$$

де

$$g_1(u,v)=\left\{\begin{matrix}\left(2+\cos u\cos\frac{u}{2}\cos v+\cos u\sin\frac{u}{2}\sin v\right)\cos 2v,\\ \left(2+\cos u\cos\frac{u}{2}\cos v+\cos u\sin\frac{u}{2}\sin v\right)\sin 2v,\\ -\cos u\cos\frac{u}{2}\sin v+\cos u\sin\frac{u}{2}\cos v\end{matrix}\right\},$$

$$g_2(u,v)=\left\{\begin{matrix}\left(2-\cos u\cos\frac{u}{2}\cos v+\cos u\sin\frac{u}{2}\sin v\right)\cos 2v,\\ \left(2-\cos u\cos\frac{u}{2}\cos v+\cos u\sin\frac{u}{2}\sin v\right)\sin 2v,\\ +\cos u\cos\frac{u}{2}\sin v+\cos u\sin\frac{u}{2}\cos v\end{matrix}\right\},$$

з параметрами $u\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $v\in[0,\pi]$.

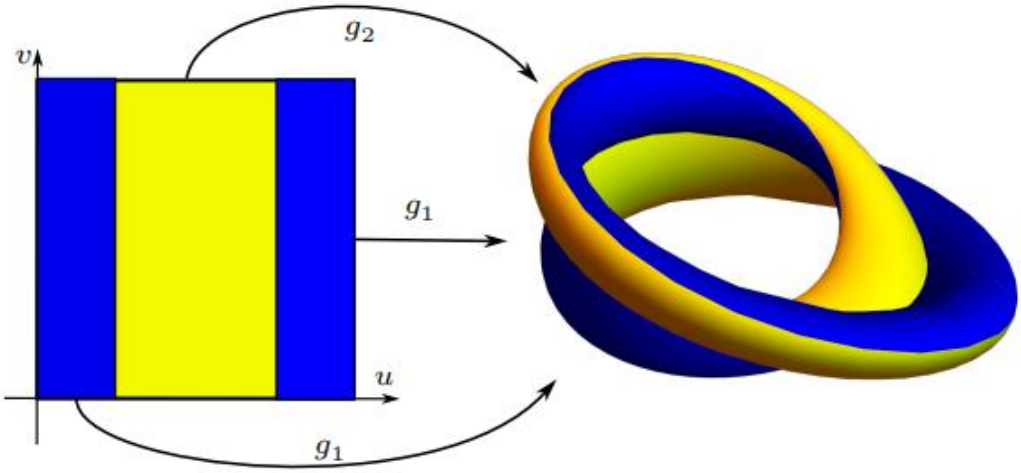


Рис. 4. Занурення пляшки Клейна скрученим обертанням вісімки (фігура Ліссажу)

Кожне з відображень g_1, g_2 задає вкладення стрічки Мебіуса (синя та жовті частини поверхні). При цьому вкладені стрічки Мебіуса мають спільну межу, а також спільну середню лінію.

Доведення. Регулярність кожного з двох відображень у внутрішніх точках перевіряється безпосереднім обчисленням похідних. Перевіримо регулярність у точках склеювання

$$g_1\left(\frac{\pi}{2},v\right)=\{2\cos 2v\,,2\sin 2v\,,0\}=g_2\left(-\frac{\pi}{2},v\right).$$

Перевіримо колінеарність похідних у відповідних точках:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$(g_1)'_u\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = (g_2)'_u\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) =$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos v + \sin v)\cos 2v\,, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos v + \sin v)\sin 2v\,, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin v - \cos v)\right\},$$

$$(g_1)'_v\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = (g_2)'_v\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = \{-4\sin 2v\,, 4\cos 2v\,, 0\}.$$

Отже, в точках що склеюються збігаються як значення відображень, так і значення їх похідних. Тому ці точки є регулярними. Аналогічно,

$$g_1\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = \{2\cos 2v\,, 2\sin 2v\,, 0\} = g_2\left(\frac{\pi}{2}, v\right),$$

а також збігаються похідні. Це означає, що і на іншій парі сторін, що склеюються, умови регулярності виконуються. Таким чином, формула (5) задає занурення пляшки Клейна.

■

Інший спосіб отримати занурення пляшки Клейна полягає у послідовній склейці сторін квадрату. Якщо склеїти спочатку горизонтальні сторони, то вийде циліндр, який можна вкласти в тривимірний простір за формулою (1), в якій $u \in [0,2\pi]$, $v \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Залишилось склеїти компоненти межі (кола). Для цього одне до одного з кіл доклеюємо прямий циліндр і не приклеєну компоненту основу циліндра з'єднуємо з другим колом косим циліндром. Отримана поверхня не буде регулярною (зануренням в точках приклеювання). Щоб отримати регулярну поверхню в точках склеювання не повинно бути кутів. Ця ідея реалізована в наступному твердженні.

Теорема 2. *Пляшку Клейна можна розбити на чотири частини, кожна з яких вкладається в тривимірний простір такими формулами*

$$h_1(u,v) = \{(2{,}5 + 1{,}5\cos[v])\cos[u]\,, (2{,}5 + 1{,}5\cos[v])\sin[u]\,, -1{,}5\sin[v]\},$$
$$h_2(u,v) = \{2 - 2\cos[v] + \sin[u]\,, \cos[u]\,, 3v\},$$
$$h_3(u,v)\{2 + (2 + \cos[u])\cos[v]\,, \sin[u]\,, 3\pi + (2 + \cos[u])\sin[v]\},$$
$$h_4(u,v) = \{(-2{,}5 + 1{,}5\cos[v])\cos[u]\,, (2{,}5 - 1{,}5\cos[v])\sin[u]\,, 3\pi - 3v\},$$
$$u \in [0,2\pi], \qquad v \in [0,\pi].$$

Ці вкладення разом задають занурення H пляшки Клейна в $\mathbb{R}^3$:

$$H(u,v) = \begin{cases} h_1(u,v), & u \in [0,2\pi], \quad v \in [0,\pi/2], \\ h_2(u,2v-\pi), & u \in [0,2\pi], \quad v \in [\pi/2\,,\pi], \\ h_3(u,2v-2\pi), & u \in [0,2\pi], \quad v \in [\pi,3\pi/2], \\ h_4(u,2v-3\pi), & u \in [0,2\pi], \quad v \in [3\pi/2\,,2\pi]. \end{cases}$$

Доведення. Зробимо перевірку регулярності поверхні у точках склеювання:

1. $h_1(u,\pi) = \{\cos u\,, \sin u\,, 0\} i_{x,y} h_2(u,0), \quad i_{x,y}(x,y,z) = (y,x,z)$. Отже, спільна компонента межі – одиничне коло. Похідна по u – одиничний дотичний вектор до кола (ці вектори протилежно напрямлені). Похідна по v: $2(h_1)'_v(u,\pi) = \{0,0,3\} = (h_2)'_v(u,0)$. Оскільки похідні по v співнапрямлені, а по u – колінеарні, то поверхня регулярна в цих точках.

2. $h_2(u,\pi) = \{4 + \sin u\,, \cos u\,, 3\pi\} = i_{4+x,y} h_3(u,0)$. Аналогічно першому випадку, похідні по u колінеарні, а похідні по v $\left((h_2)'_v(u,\pi) = \{0,0,3\} \upuparrows \{0,0,2+\cos u\} = (h_3)'_v(u,0)\right)$ співнапрямлені. Отже, ці точки також регулярні.

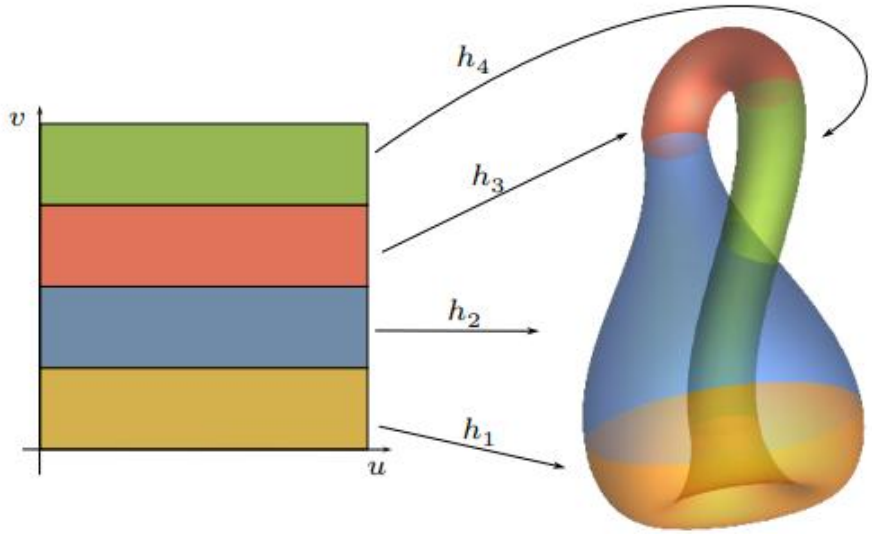


Рис. 5. Занурення пляшки Клейна чотирма частинами

3. $h_3(u,\pi) = \{-\cos u\,, \sin u\,, 3\pi\} = h_4(u,0)$. Похідні по u збігаються, а похідні по v $\left((h_3)'_v(u,\pi) = \{0,0,-2-\cos u\} \upuparrows \{0,0,-3\} = (h_4)'_v(u,0)\right)$ співнапрямлені. Тому, ці точки також регулярні.

4. $h_4(u,\pi) = \{-4\cos u\,, 4\sin u\,, 0\} s_x h_1(u,0), \quad s_x(x,y,z) = (-x,y,z)$. Похідні по u колінеарні, як і у першому випадку, а похідні по v $\left((h_4)'_v(u,\pi) = \{0,0,-3\} \upuparrows \{0,0,1{,}5\} = (h_1)'_v(u,0)\right)$ співнапрямлені. Отже, ці точки також регулярні.

Оскільки всі точки, за якими відбувається ототожнення, є регулярними, то маємо занурення пляшки Клейна.

■

Вправа. Перевірити, що формула

$$r(u,v) = \Big(6\cos u\,(1+\sin u) + 4\Big(1-\frac{\cos u}{2}\Big)\cos\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\cos v\,,$$
$$16\sin u + 4\Big(1-\frac{\cos u}{2}\Big)\sin\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\cos v\,, \quad 4\Big(1-\frac{\cos u}{2}\Big)\sin v\Big), \tag{7}$$
$$u \in [0,2\pi], \quad v \in [0,2\pi]$$

також задає занурення пляшки Клейна.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

4. Висновки

Описано два топологічно різні занурення пляшки Клейна в тривимірний простір та доведено регулярність побудованих відображень. Ці занурення дозволяють будувати занурення неорієнтованих поверхонь парного роду завдяки операції зв'язної суми.

Цікавим питанням є описання занурень неорієнтовних поверхонь непарного роду, зокрема проєктивної площини.

Список використаних джерел

Milnor, John (1956). On the immersions of n-manifolds in (n+1)-space. Commentarii mathematici Helvetici, 30, 275-284. https://eudml.org/doc/139128

Lashof R. and Smale S. (1958). On the immersion of manifolds in Euclidean space. Annals of Mathematics 68(3), 562-583 https://doi.org/10.2307/1970156

Hirsch M. W. (1976) Differential Topology. Springer-Verlag. https://archive.org/details/springer−10.1007-978-1-4684-9449-5

Guillemin V. and Pollack A. (1974). Differential Topology. Prentice Hall. difftopGP.pdf

Пришляк О.О. (2015) Топологія многовидів. Київський університет. http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2018/03/topolog-pryshljak.pdf

Пришляк О. (2023) Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології та теорії динамічних систем. Навчальний посібник. https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/12/algkom.pdf

Пришляк О., Білун С. (2024) Геометрія та топологія проєктивної площини. У світі математики, 1: 70-76. https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/30/16

Отримано редакцією журналу: 25.05.2025
Прорецензовано: 02.06.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Alexandr PRISHLYAK, D.Sc. (Phys&Math), Prof.
ORCID: 0000-0002-7164-807X
e-mail: prishlyak@knu.ua.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

IMMERSION OF THE KLEIN BOTTLE IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Abstract. *We study embeddings and immersions of surfaces (i.e., two-dimensional manifolds) into three-dimensional Euclidean space. Examples of embeddings are presented for the torus, the cylinder, and the Möbius strip. For the Klein bottle, two distinct immersions are constructed, each exhibiting a closed curve of self-intersection. The first immersion can be interpreted as an embedding of two Möbius strips that share a common boundary and intersect along their midline. This surface is generated by a twisted rotation of a figure-eight curve around an axis. The second immersion is constructed as a union of four embedded cylinders with horizontal bases. Two of these cylinders can be viewed as forming halves of an embedded torus.*

Keywords: *immersion; embedding; non-orintable surface; Möbius strip; regular surface.*

Креативна математика

УДК 51:37.091.27-057.874(477.411) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.13**

Оксана БЕЗУЩАК, Д-р. фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0003-3654-6753
e-mail: bezushchak@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина БОДНАРЧУК, Канд. фіз.-мат. наук, Асист.
ORCID ID: 0000-0002-4713-5274
e-mail: ibodnarchuk@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ніна КАСІМОВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-6032-0343
e-mail: kasimova@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ярослава КРЕНЕВИЧ, студентка 2 курсу
ORCID ID: 0009-0002-0298-1570
e-mail: yakrenevych@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Світлана КУШНІРЕНКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-8390-5870
e-mail: svilana_kushnirenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЛЕБЕДЄВА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ксенія ЛЕВЧЕНКО, студентка 2 курсу
ORCID ID: 0009-0008-6739-3175
e-mail: kseniia_levchenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Валентин СОБЧУК, Д-р. техн. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-4002-8206
e-mail: sobchuk@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Софія ТЕНЯ, студентка 2 курсу
ORCID ID: 0009-0004-3562-9754
e-mail: sofiatenia@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Ірина ЦИГАНІВСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0001-7632-3410
e-mail: itsy8009@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

МАТЕМАТИКА БЕЗ МЕЖ: ЯК «БІНГО-МЕХМАТ» ОБ'ЄДНАВ УНІВЕРСИТЕТ І ШКОЛУ

Анотація. *У статті представлено досвід реалізації освітньої ініціативи «Бінго-мехмат», що відбувалася у січні – квітні 2025 року за участю викладачів і студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Метою проєкту було популяризувати математику серед учнів київських шкіл, ознайомити їх із сучасними напрямами математичної науки та представити освітні програми факультету. Автори статті наголошують на важливості прямого діалогу між університетом і школою, демонструють ефективність неформальної комунікації у профорієнтаційній роботі та окреслюють перспективи подальшого розвитку ініціативи. Матеріал може бути корисний викладачам, методистам, популяризаторам науки та всім, хто зацікавлений у розбудові взаємозв'язків між шкільною та університетською математичною освітою.*

Ключові слова: *математика, вступна кампанія, абітурієнти, школярі.*

1. Вступ

Математична школа України має глибокі традиції, що формувалися протягом десятиліть завдяки зусиллям видатних учених, талановитих педагогів і захоплених студентів. Українська математична культура — це не лише потужна наукова школа, а й жива спільнота людей, які передають знання, стиль мислення й любов до математики від покоління до покоління. Її життєва сила полягає у нерозривному зв'язку між досвідом і молодістю, між наставниками й учнями, між минулим і майбутнім.

У сучасних умовах, коли освіта переживає трансформації, зумовлені диджиталізацією, глобалізацією, а також викликами воєнного часу, особливо важливо зберігати й розвивати ці зв'язки. Математика — це не лише формули й теореми, а й спосіб мислення, який формується у середовищі, де старші передають молодшим не лише знання, а й цінності: допитливість, послідовність, чесність думки.

Ініціатива «Бінго-мехмат», започаткована викладачами та студентами механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, стала яскравим прикладом живого діалогу між поколіннями. Виходячи за межі університетських стін, представники факультету зустрічалися з учнями київських шкіл, щоб поділитися знаннями, досвідом, мотивацією та відчуттям причетності до великої традиції.

Головна ідея ініціативи полягала не лише в ознайомленні школярів із математичними спеціальностями, які пропонує університет, а й у прагненні показати математику живою, цікавою та сучасною — такою, що хвилює, дивує й надихає.

2. Шлях до школи: навіщо це потрібно?

Часто між школою та університетом виникає своєрідна стіна нерозуміння. Школярі сприймають математику переважно через призму ЗНО, НМТ чи стандартної навчальної програми й не завжди здогадуються про її справжню глибину та красу. Проєкт «Бінго-мехмат» допомагає долати цю прірву.

Пряма комунікація між тими, хто навчає математиці, і тими, хто лише обирає свій майбутній шлях, дала неймовірний ефект. Учасники проєкту відзначали, що зустрічі перетворювалися на живу дискусію — із запитаннями, несподіваними відповідями, математичними загадками та мініконкурсами.

3. Формат зустрічей

Зустрічі тривали в середньому від 45 до 90 хвилин і включали розважальні командні активності, спрямовані на застосування та вдосконалення математичних знань. Особливою популярністю користувалася інтерактивна частина: нестандартні математичні задачі з несподіваними розв'язками, головоломки, мінітурніри на логіку й кмітливість.

Після таких заходів багато школярів підходили з конкретними запитаннями: *як підготуватися до вступу? чи можна вже зараз долучатися до студентських заходів?*

4. Географія проєкту

У межах проєкту «Бінго-мехмат» було відвідано понад 30 київських шкіл: ліцеї, гімназії та заклади загальної середньої освіти з поглибленим вивченням математики. Серед них — відомі навчальні осередки, зокрема Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка, природничо-науковий ліцей № 145 м. Києва, а також низка шкіл у спальних районах, де традиційно бракує математичних гуртків чи спеціалізованих програм.

Організатори свідомо не обмежувалися лише «математичними» школами, адже головна мета проєкту — показати, що математика відкрита для всіх. Саме тому ми завітали до найрізноманітніших навчальних закладів столиці — як до знаних ліцеїв, так і до звичайних, але перспективних шкіл.

На зустрічах ми спілкувалися з учнями про їхнє ставлення до математики, допомагали подолати страх перед цим предметом і доводили, що математика — це не лише складні формули. Вона може бути цікавою й захопливою, а ще — як у цілих числах — завжди має свої «плюси».

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)



Ліцей № 307 Деснянського району м. Києва: 28.01.2025

Команда переможців: Петро Лопаткін, Дмитро Антонюк, Лев Клименко, Анастасія Гарнага, Анна Турчина (11 клас); Софія Хомик, Вероніка Литовченко, Вероніка Шевчук, Тетяна Осадча, Діана Вовченко, Вікторія Шаповал, Аліна Андрусиник, Марія Кравченко (10 клас).



«*Були нові, нестандартні завдання. Дуже незвично бачити математику в такому форматі. З одного боку, математика залишилася математикою, але команда мехмату показала, що це не тільки про сидіння над книжками»,* — із відгуку учня 11 класу.

Ліцей № 241 «Голосіївський» м. Києва: 30.01.2025

Команда переможців: Михайло Товт, Валерія Мелашенко, Поліна Романенко, Аріна Гарасим, Анастасія Саєнко, Дар'я Шкриль, Марія Євсюкова, Анна Бандуріна.
«Мене вразило, що математику можна подавати з гумором і натхненням. Стереотип про “нудний предмет” зник одразу. Це дало мені відчуття, що в математиці є більше життя, ніж я думала», — із відгуку учениці.



Важливою складовою гри «Бінго-мехмат» стало об’єднання учнів, налагодження взаєморозуміння, вміння знаходити спільну мову та працювати в команді. Під час змагання учасники продемонстрували свої комунікативні навички й здобули цінний досвід колективної роботи.

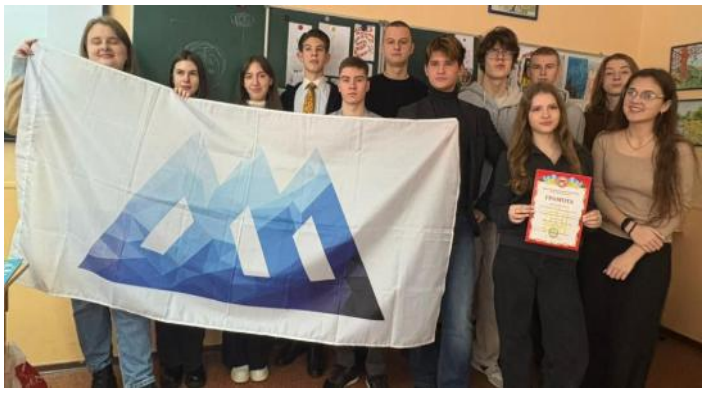


Ліцей № 309 Дарницького району м. Києва: 31.01.2025

«Після зустрічі з командою мехмату я вперше всерйоз замислилася над тим, щоб стати математиком.
Виявилося, що це не просто "розв'язати приклад", а цілий світ!», — із відгуку учениці.

Ліцей №286 м. Києва: 04.02.2025

Команда переможців:
Соломія Тарасенко, Софія Фещенко, Гліб Заболотний, Аліса Косенко, В'ячеслав Макода, Іван Гончаров, Антон Глущенко, Віталій Авдіюк, Сергій Лунько, Олег Кравчук, Анна Юдіна.



«До цього заходу я думав, що університет і студентство — це щось страшне і захмарне. Побачивши у стінах школи цю злагоджену, енергійну команду, зрозумів наскільки помилявся. Було цікаво і пізнавально», — із відгуку учня 10 класу.



Ліцей №293 Деснянського району м. Києва: 06.02.2025

«До цього заходу я відверто вважав, що математики — це сухарі, які тільки і роблять, що сидять над книжками. А потім побачив живих, енергійних студентів, які довели, що математика — це драйв», — із відгуку учня.

Гра перетворила математику на справжній турнір емоцій і відкриттів. Учні не просто розв'язували задачі, а змагалися, підтримували командний дух і відчували азарт боротьби. Іноді перемога вирішувалася буквально на тонкій межі — різниця між першим і другим місцем становила всього 1–2 бали. Це ще раз доводило: математика може бути драйвовою, а школярі здатні проявити максимум зусиль, коли є відчуття конкуренції та шанс довести свою силу знань.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Ліцей № 130 імені Данте Аліг'єрі м. Києва: 05.02.2025

«Після інтерактивних задач від студентів мехмату зрозуміла, що математика може бути пригодою. Було захопливо шукати розв'язки разом із друзями та відчувати себе частиною великої математичної спільноти», — із відгуку учениці.





Ліцей № 107 «Введенський» Подільського району м. Києва: 07.02.2025

Команда переможців: Ольга Хукаленко, Ольга Кукса, Соломія Мельник, Катерина Бондар, Олександра Калягіна, Алєкса Гончарова, Вероніка Фартушна.

Наша команда продовжувала роботу попри складні життєві обставини та технічні перешкоди, які траплялися на шляху. Ми шукали альтернативні рішення й знаходили вихід із будь-яких ситуацій, щоб провести профорієнтаційні заходи на найвищому рівні. Цим ми хотіли довести: у житті не варто здаватися, адже з будь-якими труднощами можна впоратися. Навіть якщо в математиці з'являється задача, що здається нерозв'язною, це зовсім не означає, що розв'язку немає — просто його ще не знайшли!

Ліцей №291 Дарницького району м. Києва: 13.02.2025

Команда переможців: Дар'я Ігнатюк, Дарія Сизонова, Марія Зіневич, Софія Пархоменко, Юлія Литвиненко, Ірина Ларченкова, Ліза Снігур, Ярина Савченко, Олег Плєтніков, Максим Глушко, Ілля Мартинов, Дмитро Уланов-Єгоров, Тимур Терещук, Кирил Забудський, Тимур Золотов, Іван Погребняк.







Український фізико-математичний ліцей КНУ імені Тараса Шевченка: 27.02.2025

Команда переможців:
Кирило Ганза, Арсеній Пристайчук, Торос-Манук Петриченко, Владислав Топорков, Антон Закупін, Олександра Рудковська, Ставр Найда.

«Мене здивувало, наскільки студенти були відкритими й простими у спілкуванні. Вони так щиро розповідали про навчання та життя в університеті, що я вже уявив себе серед них», — із відгуку учня Українського фізико-математичного ліцею.

Окрім державних закладів освіти, проєкт «Бінго-мехмат» було реалізовано й у приватному **ліцеї «Educator»** на різних локаціях (Осокорки, Нивки, Золоче). Команда студентів і викладачів заохочувала учнів долучатися до спільноти механіко-математичного факультету та відкривати для себе царицю наук — математику!







ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Наймасштабнішою подією в межах нашої роботи стало відвідування **природничо-наукового ліцею № 145 м. Києва 18 березня 2025 року.** Ця зустріч вирізнялася тим, що ми мали змогу провести час не лише зі старшокласниками, як це було в інших закладах, а й познайомитися та поспілкуватися з учнями середньої школи, починаючи з 7-го класу. Завдяки цьому вдалося отримати цілісне уявлення про рівень знань школярів та їхні побажання щодо форм навчальної діяльності у процесі вивчення математики. Під час заходу ми перевірили продуктивність застосування ігрових методів і переконалися в їхній ефективності для зацікавлення учнів 7–11 класів у математиці.





«Я ніколи не сумнівалася, що математика — це цікаво і круто. Але тут нам ще й показали, якими можуть бути самі математики: живими, енергійними, креативними. Це зовсім не ті стереотипні "заучки". Студенти горять своєю справою й уміють захоплювати математикою молодь», — із відгуку учениці природничо-наукового ліцею № 145.





Фінал змагань «Бінго-мехмат»: 06.04.2025

6 квітня 2025 року команда організаторів проєкту приймала гостей уже на своїй території та запросила команди-переможниці до участі у грандіозному фіналі гри **«Бінго-мехмат»**, що відбувся на механіко-математичному факультеті в рамках Дня відкритих дверей.



Команда переможців: Костянтин Горбатюк-Бровенко, Максим Чернов, Яна Фаль, Єгор Івон, Марія Вороніна, Тетяна Тараненко, Меліса Авджи.



Переможці математичного конкурсу «Бінго-мехмат», команда природничо-наукового ліцею № 145, передали свій приз на підтримку Збройних Сил України. Приз урочисто вручено Діані Ільницькій, директорці Благодійного фонду *«Цивільно-військова ефективність "Рій"»*, для потреб військової частини № 1020.





ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)



КНУ EXPO 2025: 17.05.2025

17 травня 2025 року механіко-математичний факультет традиційно представив себе на щорічній виставці КНУ EXPO. Абітурієнти та всі охочі мали змогу зануритися у практичне застосування кожної з наших спеціальностей.

Особливим здобутком цього року стало те, що до нас завітало багато учнів закладів загальної середньої освіти, де раніше відбувалися заходи «Бінго–мехмат». Було надзвичайно приємно зустріти знайомі обличчя, відчути щиру зацікавленість і побачити реальні результати нашої плідної роботи.





З приємністю відзначаємо найактивніших студентів механіко-математичного факультету, які стали учасниками проєкту: Софію Теню, Ксенію Левченко, Богдану Тарасенко, Катерину Куріло, Анну Симончук, Маргариту Ковальову, Олександру Клімову, Ігоря Неділю, Олену Кот, Єлизавету Рудик, Ярославу Креневич, Максима Пащенка, Юлію Затонацьку, Маргариту Адріанову, Євгенію Термус, Кирила Батрака, Любомира Володія.

5. Що дали ці зустрічі?

Учасники проєкту одностайні в думці, що ці кілька місяців стали для них не лише викликом, а й надзвичайно натхненним досвідом. Викладачі отримали можливість спробувати себе у ролі — популяризаторів, наставників, менторів. Студенти відчули свою причетність до великої справи. А школярі здобули не тільки відповіді на свої запитання — вони побачили живий приклад того, що математика — це не лише задачі з підручника, а й життєві вибори, творчість і гнучкість мислення.

6. Погляд у майбутнє

Проєкт «Бінго-мехмат» не завершився з останнім весняним візитом. Навпаки — з’явилися нові ідеї для розвитку. Серед запланованих кроків:

- створення онлайн-платформи для шкільних математичних клубів;
- запуск літньої школи на базі факультету;
- спільні науково-популярні заходи зі школами-партнерами;
- відкриті математичні турніри для старшокласників з менторською підтримкою студентів мехмату.

7. Висновки

У час, коли освіта переживає серйозні виклики — від війни до диджиталізації — надзвичайно важливо зберігати живий зв’язок між університетом і школою, між наукою і молоддю, між мрією та можливістю її реалізувати. «Бінго-мехмат» — це не просто серія візитів. Це історія про натхнення, комунікацію, довіру та нові горизонти. І, звісно ж, про любов до математики.

Отримано редакцією журналу: 15.05.2025
Прорецензовано: 30.05.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Oksana BEZUSHCHAK, Dr.Sc. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0003-3654-6753
e-mail: bezushchak@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Iryna BODNARCHUK, Ph.D (Phys&Math), Assist.
ORCID ID: 0000-0002-4713-5274
e-mail: ibodnarchuk@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Nina KASIMOVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-6032-0343
e-mail: kasimova@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Yaroslava KRENEVYCH, Student
ORCID ID: 0009-0002-0298-1570
e-mail: yakrenevych@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Svitlana KUSHNIRENKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-8390-5870
e-mail: svilana_kushnirenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna LEBEDYEVA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0001-7150-1310
e-mail: lebedyevaiv@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Kseniia LEVCHENKO, Student
ORCID ID: 0009-0008-6739-3175
e-mail: kseniia_levchenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Valentyn SOBCHUK, Dr.Sc.Tech., Prof.
ORCID ID: 0000-0002-4002-8206
e-mail: sobchuk@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Sofiia TENIA, Student
ORCID ID: 0009-0004-3562-9754
e-mail: sofiatenia@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna TSYGANIVSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0001-7632-3410
e-mail: itsy8009@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

MATHEMATICS WITHOUT BORDERS: HOW "BINGO-MEHMAT" UNITED UNIVERSITY AND SCHOOL

Abstract. *The paper presents the experience of implementing the educational initiative* "Bingo-Mehmat"*, which took place from January to April 2025 with the participation of faculty members and students of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Taras Shevchenko National University of Kyiv. The aim of the project was to popularize mathematics among school students in Kyiv, to acquaint them with contemporary directions of mathematical science, and to present the faculty's educational programs. The authors emphasize the importance of direct dialogue between university and school, demonstrate the effectiveness of informal communication in career guidance, and outline prospects for further development of the initiative. The material may be useful to teachers, methodologists, science popularizers, and all those interested in building stronger connections between school and university mathematics education.*

Keywords: *mathematics; entrance campaign; applicants; schoolchildren.*