Зміст

Від редакції. *Г. М. Шевченко* 3

Видатні постаті

Академіку А. М. Самойленку – 80! *М. Ф. Городній, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк, О. В. Капустян, Ю. В. Федоренко* 5

Математичний календар. *І. М. Боднарчук* 7

Математичний гурток

Тригонометрична теорема Птолемея. *Н. М. Скибицький, Ф. М. Юдін* 10

Один метод доведення тригонометричних нерівностей. *Є. В. Турчин* 16

Математичні обрії

Побудови коніками І. Парабола. *Є. Л. Азаров, Т. Д. Тимошкевич* 19

Питання про зображення тетраедра – біла пляма у шкільній геометрії. *В. О. Тадеєв* 25

Математичні олімпіади

Вибрані задачі XX турніру юних математиків. *І. В. Федак* 44

Студентська сторінка

Змащуючи велосипедний цеп. *О. Г. Єна* 57

Тасування карт і ланцюги Маркова. *А. О. Кучеренко, Д. І. Хілько* 64

Математична біологія. *Р. Є. Майборода* 74

Професія: математик

Про актуарну професію. *Т. О. Андрощук* 84

Використання сучасної математики очима сучасних випускників. *В. П. Зубченко* 96

Лінгвістичні етюди

Оториноларингологіка. *Д. П. Мисак* 101

Математика на шахівниці

Диферент у логічному етюді. *Е. Г. Ейлазян* 106

Від редакції

Шевченко Георгій Михайлович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Шановні читачі! Пропонуємо до вашої уваги новий випуск науково-популярного журналу «У світі математики». Із приємністю відзначаємо, що в новому випуску багато статей написано молодими математиками – школярами та студентами. Сподіваємося, що така тенденція зберігатиметься і надалі.

З моменту виходу попереднього номеру в математиці відбулося багато визначних подій. У Бразилії пройшов світовий математичний конгрес, де премією Вольфа (ця премія, що поступається авторитетом лише Нобелівській) було нагороджено українського й американського математика Володимира Дрінфельда. Інший видатний математик Майкл Атья (теж лауреат премії Вольфа) заявив про просте доведення гіпотези Рімана, проте математична спільнота віднеслася до цього доведення скептично.

З ближчих до нас подій відмітимо 80-річчя академіка НАН України, директора Інституту математики НАН України Анатолія Михайловича Самойленка. Про нього в рубриці «Видатні постаті» пишуть його учні та колеги з Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Про інші визначні дати і цікаві події розповідає в «Математичному календарі» його редактор Ірина Боднарчук.

Нинішній номер видався доволі геометричним, у «Математичному гуртку» одразу дві геометричні статті. Призери міжнародних олімпіад Федір Юдін і Нікіта Скибицький розповідають про тригонометричну форму відомої теореми Птолемея. Геометричну тематику продовжує замітка Євгена Турчина, у якій розповідається, як просту ідею можна використати для доведення різноманітних тригонометричних нерівностей.

Мабуть, втомившись від циркуля та лінійки, Євгеній Азаров і Тарас Тимошкевич в рубриці «Математичні обрії» вирішили розглянути побудови за допомогою відмінних від кола конічних перерізів. У цьому номері вони замінюють циркуль інструментом для побудови параболи, та показують, що за його допомогою можна не лише виконати всі ті самі побудови, що й циркулем з лінійкою, але й розв'язати задачі трисекції кута та подвоєння куба, в яких циркуль та лінійка безсилі.

Дуже докладною, із історичними екскурсами та численними ілюстраціями, є розповідь Василя Тадеєва про зображення тетраедра на площині.

У минулому році відбувся ювілейний XX Турнір юних математиків. Йому присвячено статтю Івана Васильовича Федака, яка крім розповіді про турнір містить розв'язання вибраних завдань.

Бензин дорожчає – сідай на велосипед! Студентську сторінку відкриває розповідь Олександра Єни про те, як математично правильно змастити велосипедний ціп.

Фізичну активність слід чергувати з розумовою, наприклад, за грою в бридж. Для чесної та цікавої гри колоду слід ретельно перетасувати[1], а що це означає, розкажуть Анастасія Кучеренко та Данило Хилько.

Стаття Олени Дрозд–Корольової присвячена застосуванням математики в біології. Як математику використовують в інших науках, розповідають у рубриці «Професія: математик» випускники механіко-математичного факультету.

У «Лінгвістичних етюдах» Данило Мисак продовжує доводити, що лінгвістика, як і математика, є логічною наукою. Цього разу його статтю присвячено фонетиці – розділу лінгвістики, що вивчає звуки.

За традицією, номер завершує рубрика «Математика на шахівниці». У ній майстер спорту з шахової композиції Едуард Ейлазян навчить читача використовувати диференти – малі зміни у шахових позиціях – для розв'язання шахових задач.

Приємного читання!

[1]Проте це спірно. Однією з цікавих форм гри в бридж є так званий «гуляш»: колоду тасують мінімально, а карти здають групами по 3–5. Це призводить до надзвичайно різких розкладів, які не зустрічаються при ретельному перемішуванні, та привносить у гру свою цікавинку.

АКАДЕМІКУ А. М. САМОЙЛЕНКУ – 80!

Городній Михайло Федорович, Перестюк Микола Олексійович, Парасюк Ігор Остапович, Капустян Олексій Володимирович, Федоренко Юлія Володимирівна
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Анатолій Михайлович Самойленко народився 2 січня 1938 року в селі Потіївка Житомирської області. Починав своє навчання Анатолій Михайлович в середній школі міста Малина. Після закінчення школи А. М. Самойленко вирішив поступати на геологічний факультет Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка. Проте геологом не судилося стати, оскільки захоплення математикою молодого студента змінило його долю і рішучий юнак стає вихованцем механіко-математичного факультету.

У 1960 році А. М. Самойленко успішно закінчує університет. Ще під час навчання на факультеті академік Юрій Олексійович Митропольский помічає тягу до науки та блиск в очах Анатолія Михайловича, тому запрошує талановитого випускника до аспірантури Інституту математики АН УРСР. У той час розвивається і набуває світового рівня Київська школа нелінійної механіки, заснована академіками М.М. Криловим та М. М. Боголюбовим. Аспірант А. М. Самойленко стає на передній край науки і вибирає тему дисертації: «Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з «нерегулярною» правою частиною ».

Після захисту дисертації Анатолій Михайлович протягом наступних 11 років працює в Інституті математики АН УРСР. За цей час А. М. Самойленко встигає підготувати докторську дисертацію на тему – «Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем» і в 1968 році блискуче її захищає і стає наймолодшим в Україні доктором наук.

Наукові досягнення молодого доктора наук звісно були помічені і Анатолія Михайловича запрошують очолити кафедру інтегральних і диференціальних рівнянь Київського державного університету імені Т.Г. Шевченка в період з 1974 по 1987 роки. Потяг до науки нового завідуючого змінює і плани роботи на кафедрі. Під керівництвом А. М. Самойленка більш високого рівня набуває науково-дослідна робота, підготовка кандидатів та докторів наук. А започаткований семінар з диференціальних рівнянь стає відомим не тільки в Україні, а й в усьому світі. В 1978 році Анатолія Михайловича обирають членом-кореспондентом АН УРСР.

В 1987 році А. М. Самойленко знов круто змінює своє життя і повертається до Інституту математики АН УРСР, а в 1988 році стає його директором. Протягом вже 30 років Інститут математики успішно розвивається під керівництвом Анатолія Михайловича. А. М. Самойленко організовує і проводить велику кількість міжнародних конференцій, в тому числі і два Українських міжнародних математичних конгреса (2001 р., 2009 р.), в кожному з них взяли участь майже

всі відомі математики України та багато провідних спеціалістів із-за кордону.

А. М. Самойленко є головним редактором журналів «Український математичний журнал», «Нелінійні коливання» (англомовний переклад у видавництві Springer – «Ukrainian Mathematical Journal», «Nonlinear Oscillations»), членом редколегії журналів «Український математичний вісник», «Доповіді Національної академії наук України», «Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics», «Miskole Mathematical Notes», «Georgian Mathematical Journal», «International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations» та інших.

У 1995 році Анатолія Михайловича обирають академіком Національної академії наук України, дійсним членом Європейської академії наук (2002), член-кореспондентом Academia Peloritana dei Pericilanti (Мессина, Сицилія, 2006), іноземним членом АН Республіки Таджикистан (2011), з 2006 року – академік-секретарем Відділення математики НАН України.

Наукові інтереси А. М. Самойленка охоплюють широке коло складних та актуальних математичних проблем. Академік Самойленко є основоположником цілого ряду важливих напрямків досліджень в області диференціальних рівнянь, математичної фізики, теорії нелінійних коливань, засновником наукової школи з теорії багаточастотних коливань та теорії імпульсних систем, що визнана математичними центрами світу.

Міжнародне визнання його досліджень підтверджують загальновизнані в світовій математичній літературі терміни: «чисельно-аналітичний метод Самойленка», «функція Ґріна–Самойленка» та інші. Опубліковані ним монографії внесли фундаментальний вклад у математику та її викладання.

Анатолій Михайлович Самойленко – автор більше 600 наукових праць, серед яких більш ніж 30 монографій та 20 навчальних посібників. Більшість його робіт перекладено за кордоном. Його учнями захищено 87 кандидатських та 33 докторські роботи, які успішно працюють у багатьох математичних центрах ряду країн. Три його учня обрані членами академій наук України. Професор А. М. Самойленко викладає в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка та Національному технічному університеті України «КПІ». Він є членом Українського та Американського математичних товариств.

А. М. Самойленко нагороджений Орденом Дружби народів (1984) та Орденом «За заслуги» III ступеня (2003), Орденом князя Ярослава Мудрого V ступеня (2008) та IV ст. (27 квітня 2013), Почесною Грамотою Президії Верховної Ради України (1987), є лауреатом Державних премій України в галузі науки і техніки (1985, 1996), Державної премії України в галузі освіти (2012), Республіканської премії ім. М. Островського (1968), премій Академії наук України ім. М. Крилова (1981), ім. М. Боголюбова (1998), ім. М. Лаврентьєва (2000), ім. М. Остроградського (2004) та ім. Ю. Митропольського (2010). А. М. Самойленко – «Соросівський професор» (1998), Заслужений діяч науки і техніки України (1998), нагороджений медаллю ім. Сибірського Молдавської Академії наук. За значні досягнення у науковій діяльності, сприяння розвитку здібностей обдарованих дітей та юнацтва міста Малина йому присвоєно звання «Почесний громадянин міста Малина».

Анатолій Михайлович повний творчих задумів і оригінальних ідей. Бажаємо йому міцного і духовного здоров'я, нових творчих злетів!

Математичний календар

Боднарчук Ірина Миколаївна
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Пропонуємо до уваги читачів вибрані події з моменту здання попереднього номеру журналу до друку.

Вересень 2017. В результаті першого радіовуглецевого датування Бахшалійського рукопису, проведеного з ініціативи Бодліанської бібліотеки в Оксфорді (the University of Oxford's Bodleian Libraries) було встановлено, що документ містить найдавнішу згадку про символ «0» – 3-4 століття нашої ери [1].

Сучасному нулеві ми завдячуємо індійським математикам. Адже в їхній системі числення у якості «байдужого символу» та для позначення порядку величини використовували крапку. До цього часу вважалося, що найпершою згадкою про таку крапку-нуль є напис 787 року, нанесений на храмовий мур у місті Гваліор у Центральній Індії.

Та Бахшалійський рукопис виявився більш раннім свідченням існування поняття нуля. Цей текст, написаний на корі берези, 1881 року знайшли в полі на території сучасного Пакистану, а з 1902 року він зберігається у Бодліанській бібліотеці [2].

16 листопада 2017 виповнилося 300 років з дня народження Жана ле Рона д'Аламбера (Jean le Rond d'Alembert) (16.11.1717 – 29.10.1783) – відомого французського математика, філософа, фізика та співредактора «Енциклопедії». Найвідомішим твором д'Аламбера вважається «Трактат з динаміки» («Traité de dynamique», 1743) [3], у якому він вперше навів правила запису рівнянь руху довільних матеріальних систем шляхом зведення динамічних задач до статистичних. Наступним його кроком був розвиток диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх застосування у фізиці. Зокрема, у 1747 році вийшла у світ стаття д'Аламбера про коливання струни, яка стала першою публікацією про хвильове рівняння (хоча математичні спрощення відповідних граничних умов призвели до того, що отриманий результат суперечив спостереженням) [4]. Ім'ям д'Аламбера названо диференціальний оператор, що застосовується у сучасній теоретичній фізиці для запису хвильового рівняння. Крім того, він визначив границю функції та за її допомогою прагнув обґрунтувати числення нескінченно малих. Ідеї щодо границь привели Жана д'Аламбера до встановлення ним 1768 року ознаки збіжності числового ряду, що нині відома як ознака д'Аламбера.

13 грудня 2017 року виповнилося 130 років з дня народження угорського, швейцарського та американського математика Дердя Пойа (George Pólya) (13.12.1887 – 07.09.1985), який зробив значний внесок в розвиток комбінаторики, теорії чисел, чисельного аналізу та теорії ймовірностей. Пойа увійшов в історію математики не лише як науковець, а навіть більшою мірою як видатний педагог та автор блискучих книг, присвячених

методиці викладання та математичної творчості. Його найвідоміша книга «Як розв'язувати задачу» («How to solve it») була написана німецькою але вперше видана англійською мовою та продана в кількості більш як 1 млн. примірників за рік. У своїй роботі автор дає пораду [5]: «Якщо Вам не вдається розв'язати задачу, то існує простіша задача, яку Ви можете розв'язати: знайдіть її».

На думку Дердя Пойа найкращою освітою є систематичне надання можливості студенту самостійно робити відкриття [6]. Потрібно пробудити в ньому інтерес до дослідження. «Не достатньо лише зрозуміти задачу, необхідно мати бажання розв'язати її. Без сильного бажання розв'язати складну задачу неможливо, але за його наявності можливо. Де є бажання, там знайдеться шлях!» – Дердь Пойа.

14 лютого 2018 року виповнилося 550 років з дня народження німецького математика, астронома, географа та метеоролога Йоханнеса Вернера (Johann(es) Werner) (14.02.1468 – травень 1522). Як писав сам про себе Вернер, він із раннього дитинства знав, що буде математиком [7].

Як математик, Вернер працював зі сферичною тригонометрією та конічними перерізами. Він був першим, хто застосував формулу

$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$

з метою наближеного обчислення добутку двох довільних чисел (цей алгоритм, так званий prosthaphaeresis, був поширеним у 16–17 століттях). Згодом ці формули було названо на його честь.

Як астроном, Вернер розробляв інструментарій для астрономічних досліджень та за його допомогою 1 липня 1500 року зареєстрував комету і спостерігав за нею до 24 червня 1500 року [8].

Як географ, Йоханнес Вернер віднайшов та сприяв розробці серцеподібних проекцій карти світу, що були загальновживаними у 16-му столітті та на початку 17-го (зараз їх називають проекціями Вернера). В епоху Відродження символіка світу, як серця була тісно пов'язана з концепцією внутрішніх емоцій, що впливають на фізичний світ.

Як метеоролог, з 1513 по 1520 роки Вернер проводив перші неперервні спостереження за погодними умовами у Німеччині. 1935 року Міжнародним астрономічним союзом один з кратерів на Місяці було названо ім'ям Йоханнеса Вернера.

16 травня 2018 року виповнилося 300 років з дня народження Марії Ґаетани Аньєзі (Maria Agnesi) (14.05.1718 – 09.01.1799) – італійського математика та філософа. Марія Аньєзі з раннього дитинства мала потяг до навчання. У віці 9-ти років вона написала та виголосила промову латинською мовою про права жінок на здобуття освіти. З 15-ти років Марія приймала активну участь у дискусіях на філософські та математичні теми. Опис цих дискусій було опубліковано у Propositiones Philosophicae 1738 року її батьком [9].

Марія Аньєзі є автором першої книги, в якій обговорюється як диференціальне, так і інтегральне числення – «Аналітичні установи для використання італійською молоддю» (Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana), що була опублікована у 1748 році. У цій роботі, зокрема, було доведено, що будь-яке кубічне рівняння має три корені, а також обговорювалась крива, задана рівнянням $y = a^3/(x^2 + a^2)$, яка раніше вивчалась П'єром Ферма та Гвідо Гранді. Після перекладу книги на англійську мову через невеликий каламбур ця крива отримала назву «відьма Аньєзі». У 1750 році Папа Бенедикт XIV присвоїв Марії Ґаетані Аньєзі звання почесного професора математики та натурфілософії Болонського університету. На честь

Марії Аньєзі названо кратер на Венері (1991 рік) та астероїд 16765 Аньєзі, відкритий 1996 року.

Література

[1] Carbon dating finds Bakhshali manuscript contains oldest recorded origins of the symbol 'zero' // Bodleian Library and Radcliffe Camera. – 2017. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.bodleian.ox.ac.uk/bodley/news/2017/sep-14

[2] Much ado about nothing: ancient Indian text contains earliest zero symbol // The Guardian. – 2017. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.theguardian.com/science/2017/sep/14/much-ado-about-nothing-ancient-indian-text-contains-earliest-zero-symbol

[3] Jean Le Rond d'Alembert Biography // Thefamouspeople [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.thefamouspeople.com/profiles/jean-le-rond-dalembert-498.php

[4] *O'Connor J. J., Robertson E. F.* Jean Le Rond d'Alembert // MacTutor History of Mathematics. – 1998. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/DAlembert.html

[5] *O'Connor J. J., Robertson E. F.* George Pólya // MacTutor History of Mathematics. – 2002. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Polya.html

[6] *Пойа Д.* Как решать задачу / Д. Пойа. – М: Учпедгиз, 1959. – 208 с.

[7] *O'Connor J. J., Robertson E. F.* Johann Werner // MacTutor History of Mathematics. – 2007. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Werner.html

[8] Werner, Johann(es) // Complete Dictionary of Scientific Biography [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/werner-johannes

[9] Maria Gaetana Agnesi // Biographies of Women Mathematicians [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.agnesscott.edu/Lriddle/WOMEN/agnesi.htm

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

Скибицький Нікіта Максимович
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Юдін Федір Михайлович
Ліцей №208 міста Києва

Пропонуємо новий метод розв'язання геометричних задач. Його застосовують, коли потрібно довести, що чотири точки лежать на одному колі, причому відомо, як одна з них пов'язана з трьома іншими, але невідомо, як ті три точки пов'язані між собою. Метод базується на знаменитій теоремі Птолемея, яку ми переформульовуємо мовою тригонометрії.

Сформулюємо спочатку саму теорему Птолемея – класичний результат елементарної геометрії.

Теорема 1 (Птолемей)**.** *Добуток довжин діагоналей вписаного в коло чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі добутків довжин його протилежних сторін:*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Наведемо одне з її доведень:

Доведення. Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник. З вписаних кутів, $\angle BAC = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle ACB$. Розглянемо точку K на AC таку, що $\angle ABK = \angle CBD$; оскільки $\angle ABK + \angle CBK = \angle ABC = \angle CBD + \angle ABD$, то $\angle CBK = \angle ABD$.

За двома кутами, $\triangle ABK \sim \triangle DBC$ та $\triangle ABD \sim \triangle KBC$. Отже, $AK/AB = CD/BD$ та $CK/BC = DA/BD$. Перепишемо це як $AK \cdot BD = AB \cdot CD$ та $CK \cdot BD = BC \cdot DA$. Додаючи дві рівності, маємо $AK \cdot BD + CK \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Звідси випливає, що $(AK + CK) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$. Однак $AK + CK = AC$, тому маємо $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. □

На жаль, цей красивий факт дуже рідко знаходить застосування в олімпіадних задачах, адже ситуація, коли відомими є усі шість відрізків між чотирма точками, є дуже рідкісною. Набагато частіше всі відомі величини пов'язані з однією з точок, про це і піде мова далі.

Теорема 2 (Тригонометрична теорема Птолемея)**.** *Випуклий чотирикутник $XABC$ є вписаним тоді і тільки тоді, коли*

$$XA \cdot \sin \angle BXC + XC \cdot \sin \angle BXA = XB \cdot \sin \angle AXC.$$

Застосування теореми є більш делікатним завданням, ніж може здаватися. *Ми повинні точно знати, у якому порядку точки X, A, B, C утворюють чотирикутник, та чи утворюють вони його взагалі.* Для цього потрібно уточнювати розташування точок, що фігурують в умові. В більшості прикладів це дослідження ми залишатимемо читачеві.

Доведення. Спочатку припустимо, що виконується метричне співвідношення теореми. Нехай B' – точка перетину XB та описаного кола трикутника XAC (див. рисунок 1). Тоді за теоремою Птолемея

$$XA \cdot CB' + XC \cdot AB' = XB' \cdot AC.$$

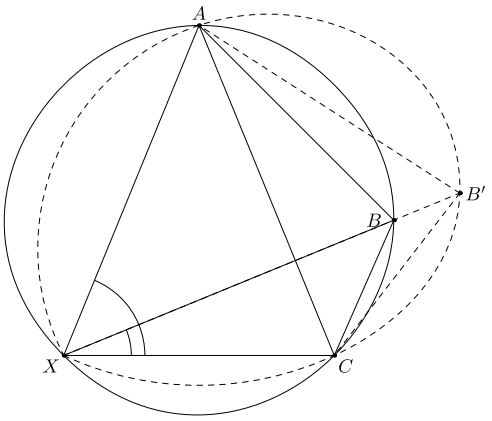


Рис. 1

З іншого боку, за теоремою синусів

$$2R = \frac{AB'}{\sin\angle AXB} = \frac{B'C}{\sin\angle BXC} = \frac{AC}{\sin\angle CXA},$$

звідки отримуємо

$$XA\cdot\sin\angle BXC + XC\cdot\sin\angle BXA = \\ = XB'\cdot\sin\angle AXC.$$

Таким чином, оскільки $\sin\angle CXA \neq 0$, то $XB' = XB$, тобто $B' = B$, що і необхідно було довести.

В іншу сторону, якщо чотирикутник $XABC$ вписаний, з теореми Птолемея та теореми синусів отримаємо бажану рівність. □

Перейдемо до прикладів застосування теореми.

Приклад 1. Висоти AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC перетинаються в ортоцентрі H. Точки X, Y і Z обрано на відрізках AA_1, BB_1 і CC_1 так, що

$$[XBC] + [AYC] + [ABZ] = [ABC],$$

де $[ABC]$ позначає площу трикутника ABC. Доведіть, що точки H, X, Y і Z лежать на одному колі.

Розв'язання. З'ясуємо розташування точок. Точки X, Y, Z всі не можуть лежати на відрізках AH, BH, CH, або на HA_1,HB_1, HC_1 відповідно, бо інакше рівність в умові не виконувалася би.

Тож або дві з цих точок лежать на відрізках від вершин до ортоцентру, а одна — на продовженні, або дві лежать на продовженнях, а одна — на відрізку.

Нехай без обмеження загальності точки розташовані як на рисунку 2.

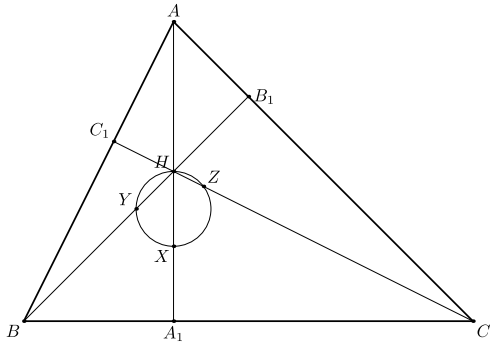


Рис. 2

Перепишемо рівність з умови так:

$$XA_1\cdot BC + YB_1\cdot AC + ZC_1\cdot AB = 2[ABC].$$

Підстановки

$$XA_1 = HA_1 - HX, YB_1 = HB_1 + HY, \\ ZC_1 = HC_1 + HZ,$$

перетворюють її на

$$HX\cdot BC - HY\cdot AC - HZ\cdot AB = 0. \quad (1)$$

З іншого боку, за тригонометричною теоремою Птолемея достатньо довести

$$HX\cdot\sin\angle YHZ - HY\cdot\sin\angle XHZ - \\ - HZ\cdot\sin\angle XHY = 0. \quad (2)$$

Однак простий підрахунок кутів дає

$$\angle XHY = \angle ACB, \\ \angle XHZ = \angle ABC, \\ \angle YHZ = 180^\circ - \angle BAC,$$

тому за теоремою синусів рівності (1) і (2) пропорційні.

Приклад 2 (ELMO [1] 2013 SL G3)**.** На стороні BC трикутника ABC вибрали точку D. Описане коло трикутника ABD перетинає відрізок AC в точці F, а описане коло трикутника ADC перетинає відрізок AB в точці E (точки E і F відмінні від A). Доведіть, що незалежно від вибору точки D, описане коло трикутника AEF проходить через фіксовану точку (крім A) і що ця точка лежить на медіані, проведеній з A до BC.

Розв'язання. Нехай точка M – середина сторони BC. Позначимо $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $BD = t$. Зрозуміло, що $BE = at/c$, тому

$$AE = \frac{c^2 - at}{c}.$$

Аналогічно,

$$AF = \frac{b^2 - a(a-t)}{b}.$$

Нехай G – відмінна від A точка перетину описаного кола трикутника AEF та AM (див. рисунок 4). За тригонометричною теоремою Птолемея

$$AF \cdot \sin\angle BAM + AE \cdot \sin\angle MAC = \\ = AG \cdot \sin\angle BAC.$$

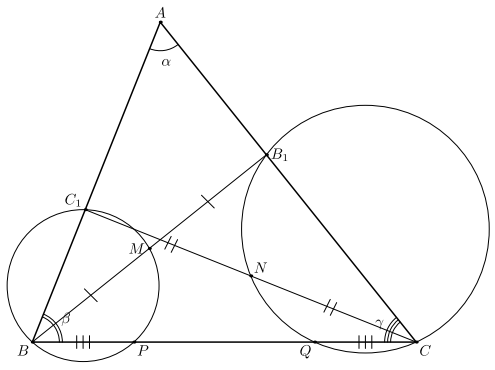


Рис. 3

За теоремою синусів, застосованою до трикутників BAM і MAC, отримуємо

$$\frac{\sin\angle BAM}{b} = \frac{\sin\angle MAC}{c} = \alpha.$$

Звідси

$$AG = \frac{\alpha(b^2 + c^2 - a^2)}{\sin\angle BAC},$$

тобто G не залежить від t, а отже і від вибору точки D.

Приклад 3 ([5])**.** Нехай BB_1 та CC_1 – висоти гострокутного трикутника ABC. Нехай M та N – середини відрізків BB_1 та CC_1 відповідно. Нехай P та Q – відмінні від B і C точки перетину BC та описаних кіл трикутників BC_1M та CB_1N відповідно. Доведіть, що $BP = CQ$.

Розв'язання. Позначимо кути трикутника ABC через α, β, γ як на рисунку 6. Без обмеження загальності вважатимемо, що діаметр описаного кола трикутника ABC дорівнює 1. Тоді $BB_1 = \sin\alpha \cdot \sin\gamma$, $BC_1 = \sin\alpha\cos\beta$. За тригонометричною теоремою Птолемея

$$BP \cdot \cos\alpha + BC_1 \cdot \cos\gamma = \frac{1}{2} BB_1 \cdot \sin\beta,$$

тобто

$$BP \cdot \cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \\ = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \sin\beta.$$

Цей вираз симетричний відносно B та C, звідки випливає твердження задачі.

Приклад 4 (ISL [2] 2012 G2)**.** Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник, діагоналі AC та BD якого перетинаються в точці E. Продовження сторін AD та BC за точки D та C відповідно перетинаються в точці F. Нехай точка G така, що $ECGD$ – паралелограм, а точка H симетрична точці E відносно AD. Доведіть, що точки D, H, F, G лежать на одному колі (рис. 5).

Розв'язання. Згідно тригонометричної теореми Птолемея, достатньо довести, що

$$DH \cdot \sin\angle FDG + DG \cdot \sin\angle HDF = \\ = DF \cdot \sin\angle HDG.$$

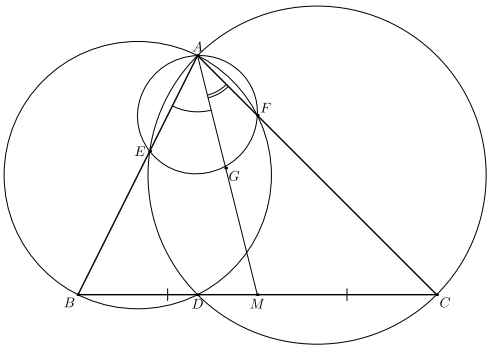


Рис. 4

Зауважимо, що $DH = DE$, $DG = CE$, і підрахувавши кути, маємо

$$\angle FDG = \angle DAC,$$
$$\angle HDF = \angle BDF = 180^\circ - \angle ADB;$$
$$\angle HDG = \angle HDF + \angle FDG =$$
$$= \angle BDF + \angle CAF = \angle DFC.$$

Тоді шукане співвідношення переписується як

$$DE \cdot \sin\angle DAC + CE \cdot \sin\angle ADB =$$
$$= DF \cdot \sin\angle DFC.$$

За теоремою синусів

$$DF \cdot \sin\angle DFC = DC \cdot \sin\angle FCD =$$
$$= DB \cdot \sin\angle DBC,$$

а також

$$CE \cdot \sin\angle ADB = CE \cdot \sin\angle ECB =$$
$$= EB \cdot \sin\angle CBE.$$

Поєднавши отримані рівності, маємо

$$DE \cdot \sin\angle DAC + EB \cdot \sin\angle CBE =$$
$$= DB \cdot \sin\angle DBC = DC \cdot \sin\angle BCD,$$

що і необхідно було довести.

Приклад 5 (Ukraine RMM TST 2017)**.** В гострокутному трикутнику ABC H – ортоцентр, M – середина сторони BC. Нехай пряма, що проходить через H перпендикулярно до AM, перетинає пряму BC в точці T, а пряма, що проходить через T паралельно до AM, перетинає прямі AB та CA в точках K та L. Доведіть, що точки A, K, L та H лежать на одному колі.

Розв'язання. Нехай AA_1, BB_1 та CC_1 – висоти, точка P – проекція H на AM. Тоді точки B_1, P, C_1 лежать на колі з діаметром AH, а A_1, P лежать на колі з діаметром HM. Точки A_1, B_1, M, C_1 лежать на колі дев'яти точок трикутника ABC. Тоді за теоремою про радикальний центр прямі B_1C_1, PH і MA_1 перетинаються в T. За теоремою Менелая для прямої B_1C_1T знаходимо BT/CT, тобто можемо також виразити BT і CT через сторони та кути. З подібних трикутників

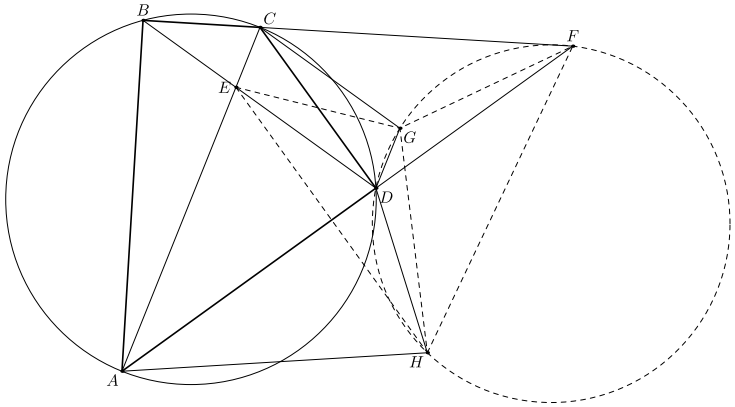


Рис. 5

знаходимо AK та AL. Це дає нам все необхідне для того, щоб застосувати тригонометричну теорему Птолемея.

Допитливий читач може самостійно відновити всі деталі розв'язку, скориставшись рисунком 6.

Пропонуємо читачу декілька задач різних рівнів складності які можна розв'язати цим методом.

Задача 1 (Ukraine RMM TST 2013)**.** Нехай H – ортоцентр трикутника ABC. Точки D, E та F на прямих BC, CA та AB відповідно такі, що $DB = DF$ та $DC = DE$. Доведіть, що точки A, E, F та H лежать на одному колі.

Задача 2 (Russia 2015, 10.7 [3])**.** У трикутнику ABC M – середина сторони BC, а H – основа висоти з A. Перпендикуляр, опущений з M на AC, перетинає пряму AB у точці P, а перпендикуляр, опущений з M на AB, перетинає пряму AC у точці Q. Нехай X – точка, симетрична точці H відносно точки M. Доведіть, що точки M, P, Q та X лежать на одному колі.

Задача 3. Нехай $ABCD$ – описаний чотирикутник, T – довільна точка на стороні AB. Доведіть, що центри вписаних кіл трикутників ATD, BTC, CTD і точка T лежать на одному колі.

Задача 4 (ELMO 2010 SL G6)**.** Нехай Ω – описане коло трикутника ABC, X та Y – точки на Ω такі, що XY перетинає AB і AC в D і E відповідно. Доведіть, що середини XY, BE, CD і DE лежать на одному колі.

Задача 5 (China TST [4] 2006)**.** Нехай ω – описане коло трикутника ABC, P – довільна внутрішня точка трикутника ABC, A_1, B_1 і C_1 – точки перетину прямих AP, BP та CP відповідно, з колом ω, а точки A_2, B_2 і C_2 симетричні їм відносно середин сторін BC, CA і AB відповідно. Доведіть, що описане коло трикутника $A_2B_2C_2$ проходить через ортоцентр трикутника ABC.

Задача 6 (ISL 2012 G6)**.** Нехай O та I – центри описаного та вписаного кіл трикутника ABC. Точки D, E та F вибрані на сторонах BC, CA і AB відповідно так, що $BD + BF = CA$ і $CD + CE = AB$. Описані кола трикутників BFD та CDE перетинаються в точці $P \neq D$. Доведіть, що $OP = OI$.

Задача 7 (ISL 2009 G8)**.** Нехай $ABCD$ – описаний чотирикутник, g – пряма через A, що перетинає відрізок BC в точці M і пряму CD в точці N. Позначимо I_1, I_2 та I_3 – центри вписаних кіл трикутників ABM, MNC і NDA відповідно. Доведіть, що ортоцентр трикутника $I_1I_2I_3$ належить g.

Література

[1] Experimental Lincoln Math Olympiad 2013, Lincoln, Nebraska, USA. http://web.evanchen.cc/elmo/

[2] International Mathematical Olympiad. Problems and Solutions. https://www.imo-official.org/problems/IMO2012SL.pdf

[3] XLI Всероссийская математическая олимпиада школьников. Задачи и решения. http://olympiads.mccme.ru/vmo/2015/final/day2.pdf

[4] Китайські відбірково-тренувальні збори до міжнародної олімпіади. https://artofproblemsolving.com/community/c3282_china_team_selection_test

[5] Д. Хілько. *Про середини висот трикутника.* У світі математики, випуск 4, том 20, 2014

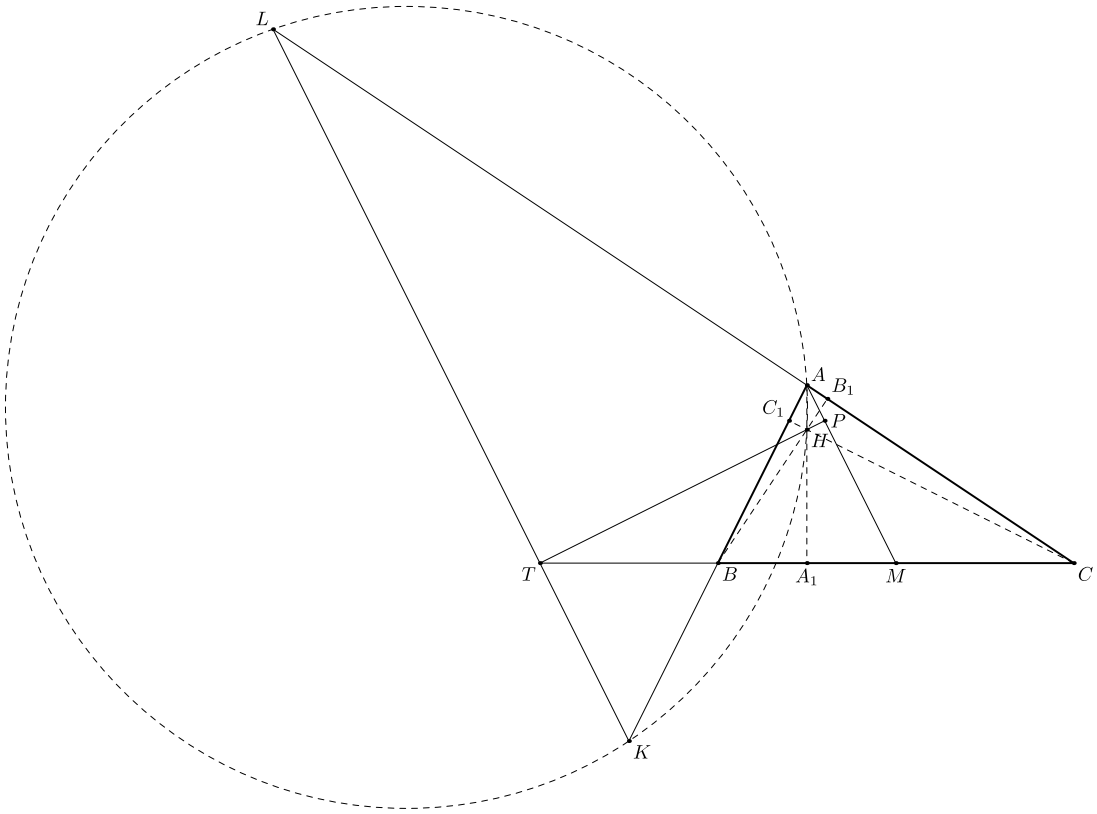


Рис. 6

Один метод доведення тригонометричних нерівностей

Турчин Євген Валерійович
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Як відомо, слово «тригонометрія» в перекладі з грецької означає «вимірювання трикутників». Виявляється, що проста нерівність, пов'язана із векторами та кутами між ними, дозволяє отримати низку цікавих співвідношень у трикутнику. Сформулюємо її.

Лема 1. Нехай $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – три вектори на площині, θ, φ, ψ – кути між ними (див. рис. 1). Тоді має місце нерівність

$$-2\big(|\vec{j}||\vec{k}|\cos\theta + |\vec{k}||\vec{i}|\cos\varphi + \\ + |\vec{i}||\vec{j}|\cos\psi\big) \le |\vec{i}|^2 + |\vec{j}|^2 + |\vec{k}|^2. \qquad (1)$$

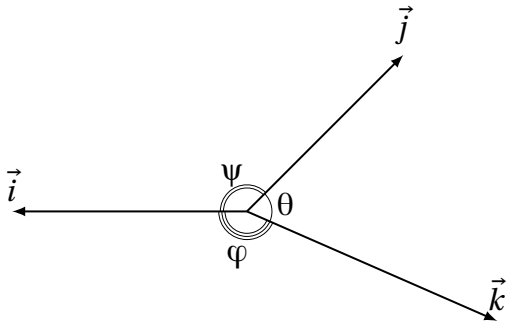


Рис. 1

Доведення. Достатньо розкрити дужки у нерівності $\big(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\big)^2 \ge 0$. □

Доведемо тепер за допомогою леми низку тригонометричних нерівностей.

Задача 1. Довести, що кути довільного трикутника ABC задовольняють нерівність

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Розв'язання. Нехай P – довільна точка у трикутнику ABC, одиничні вектори $\overrightarrow{PK}, \overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}$ перпендикулярні відповідно до прямих BC, CA і AB (див. рис. 2). У якості векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ у лемі візьмемо

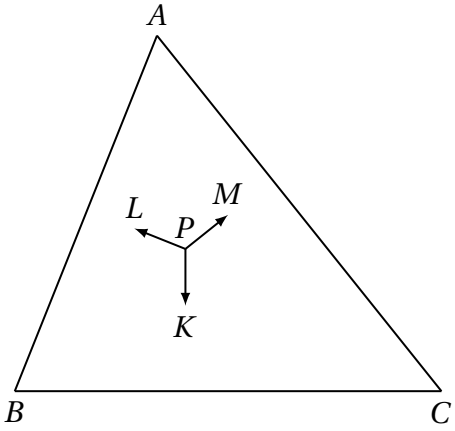


Рис. 2

відповідно вектори $\overrightarrow{PK}, \overrightarrow{PL}, \overrightarrow{PM}$. Очевидно, $\theta = \pi - A$, $\varphi = \pi - B$, $\psi = \pi - C$, і з нерівності (1) ми відразу отримаємо (2).

Задача 2. Довести, що у трикутнику ABC

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}. \qquad (3)$$

Розв'язання. Використовуючи властивості тригонометричних функцій, нерівність (3) можна переписати у вигляді

$$\cos\frac{\pi-A}{2}+\cos\frac{\pi-B}{2}+\cos\frac{\pi-C}{2}\le\frac{3}{2}.$$

Сума кутів $(\pi-A)/2, (\pi-B)/2, (\pi-C)/2$ дорівнює π, тому вони є кутами деякого трикутника, то ця нерівність випливає із (2).

Задача 3. Довести, що у гострокутному трикутнику ABC

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\ge \ge 6\cos A\cos B\cos C. \tag{4}$$

Розв'язання. Достатньо у лемі 1 взяти вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ так, щоб $|\vec{i}|=\cos A$, $|\vec{j}|=\cos B$, $|\vec{k}|=\cos C$, а кути між векторами дорівнювали б $\theta=\pi-A$, $\varphi=\pi-B$, $\psi=\pi-C$.

Задача 4. Довести, що у трикутнику ABC

$$\sin A+\sin B+\sin C\le \le\sqrt{3}+\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{\sqrt{3}}. \tag{5}$$

Розв'язання. Візьмемо у лемі 1 в якості векторів $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ такі одиничні вектори такі, що $\theta=\frac{\pi}{3}+A$, $\varphi=\frac{\pi}{3}+B$, $\psi=\frac{\pi}{3}+C$. Тоді нерівність (1) набуде вигляду

$$-2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+A\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+B\right)+ +\cos\left(\frac{\pi}{3}+C\right)\right)\le 3,$$

і після простих перетворень ми отримаємо нерівність (5).

Задача 5. Довести, що у гострокутному трикутнику ABC

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ge 4. \tag{6}$$

Розв'язання. Нехай H – точка перетину висот AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC. Легко бачити, що кути BHC, AHC, AHB дорівнюють $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$ відповідно.

Застосувавши лему до векторів $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{B_1B}$ і $\overrightarrow{C_1C}$, отримаємо

$$2\big(h_ah_b\cos C+h_bh_c\cos A+ +h_ch_a\cos B\big)\le h_a^2+h_b^2+h_c^2, \tag{7}$$

де h_a, h_b, h_c – довжини відповідних висот (рис. 3).

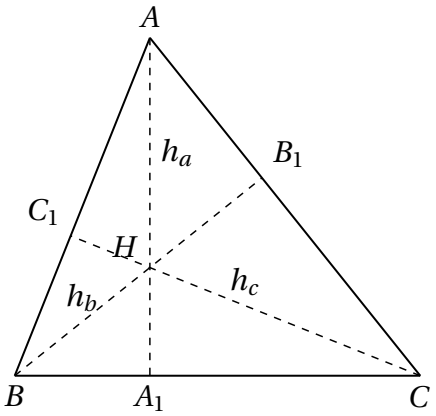


Рис. 3

Зазначимо, що

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2S}{2R\sin A}=\frac{S}{R\sin A},$$

де S – площа трикутника ABC, R – радіус описаного навколо нього кола. Аналогічно

$$h_b=\frac{S}{R\sin B},\ h_c=\frac{S}{R\sin C}.$$

Косинуси кутів трикутника ABC перепишемо як

$$\cos A=\frac{\sin 2A}{2\sin A},\ \cos B=\frac{\sin 2B}{2\sin B},$$
$$\cos C=\frac{\sin 2C}{2\sin C}.$$

Підставивши ці вирази для висот і косинусів кутів трикутника ABC у нерівність (7), отримаємо нерівність

$$\begin{gathered}\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \le \\ \le \sin A \sin B \sin C \times \\ \times \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}\right).\end{gathered} \tag{8}$$

І щоб впевнитись у справедливості нерівності (6), залишається скористатися нерівністю (8) і тотожністю

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

Задача 6. Довести, що у довільному трикутнику ABC

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \ge 4. \tag{9}$$

Розв'язання. Достатньо скористатися нерівністю (6), замінивши у ній кути A, B, C на кути $(\pi - A)/2, (\pi - B)/2, (\pi - C)/2$.

Задача 7. Довести, що у довільному трикутнику ABC

$$\begin{gathered}\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \le \\ \le \sqrt{3} + \frac{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}}{\sqrt{3}}.\end{gathered} \tag{10}$$

Розв'язання. Візьмемо у лемі в якості векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ одиничні вектори такі, що $\theta = \frac{5\pi}{6} - \frac{A}{2}, \varphi = \frac{5\pi}{6} - \frac{B}{2}, \psi = \frac{5\pi}{6} - \frac{C}{2}$. Тоді нерівність (1) набуде вигляду

$$\begin{gathered}-2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}\right)\right) \le 3,\end{gathered}$$

і звідси ми отримуємо (10).

Задача 8. Довести, що у гострокутному трикутнику ABC

$$\begin{gathered}\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C \ge \\ \ge 2 \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \times \\ \times \big(\sin A + \sin B + \sin C\big).\end{gathered} \tag{11}$$

Розв'язання. Застосуємо лему до векторів $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ таких, що $|\vec{i}| = \operatorname{ctg} A, |\vec{j}| = \operatorname{ctg} B, |\vec{k}| = \operatorname{ctg} C$, а кути між векторами дорівнюють $\theta = \pi - A, \varphi = \pi - B, \psi = \pi - C$. Тоді (1) перепишеться у вигляді

$$\begin{gathered}2\big(\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \cos C + \operatorname{ctg} A \cos B \operatorname{ctg} C + \\ + \cos A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C\big) \le \\ \le \operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C\end{gathered}$$

або

$$\begin{gathered}\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C + \\ + 2 \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C \times \\ \times \big(\sin A + \sin B + \sin C\big).\end{gathered}$$

Побудови коніками I. Парабола

Азаров Євгеній Львович
Ліцей №208 міста Києва
Тимошкевич Тарас Дмитрович
Український гідрометеорологічний інститут

Задачі на побудову в геометрії є одними з найцікавіших, вони потребують нестандартного мислення і дійсно захоплюють. Методи розв'язання таких задач вивчалися математиками ще у Стародавній Греції. Такі задачі викликають інтерес не тільки красою й оригінальністю методів розв'язання, але й великою практичною цінністю – проектування будування, архітектура, конструювання різноманітної техніки базуються на геометричних побудовах.

Здавна в задачах на побудову використовуючи циркуль та лінійку – перші креслярські інструменти. За їх допомогою розв'язуються багато задач на побудову, але не всі: найвідомішими задачами на побудову, що не розв'язуються циркулем та лінійкою є трисекція кута, подвоєння куба та квадратура круга – вони були запропоновані стародавніми греками, проте неможливість побудови таких конструкцій довели лише в XIX столітті.

Звісно, для розв'язування задач на побудови пробували використовували й інші інструменті:

- циркуль без лінійки – Георг Мор та Лоренцо Маскероні незалежно один від одного довели, що за його допомогою можна побудувати все, що будується циркулем і лінійкою (теорема Мора–Маскероні [1]);
- лінійка без циркуля – лише лінійка не еквівалентна набору «циркуль+лінійка», але якщо на площині намальовано будь-яке коло та відмічено його центр, ці набори стають еквівалентними (теорема Штейнера–Понселе [2, стр. 54]);
- двостороння лінійка – для неї достатньо намальованого на площині кола(навіть без відміченого центру), щоб вона була еквівалента циркулю та лінійці;
- циркуль постійного розхилу та лінійка – як наслідок теореми Штейнера–Понселе, цей набір еквівалентний циркулю. Вперше систематизував задачі, які розв'язуються таким циркулем, перський учений Абу-ль-Вафа у своєму творі «Книга про те, що необхідно ремісникові із геометричних побудов».

Ми розглянемо новий інструмент «парабола» для побудови.

Нагадаємо, що парабола – це множина точок, рівновіддалених від деяких точки F та прямої l, які називають *фокусом* і *директрисою* параболи відповідно (рис. 1).

Означення 1. *Інструмент «парабола» – це прилад, який будує параболу за фокусом і директрисою.*

Означення 2. *Лінійка – прилад, що будує пряму за двома точками.*

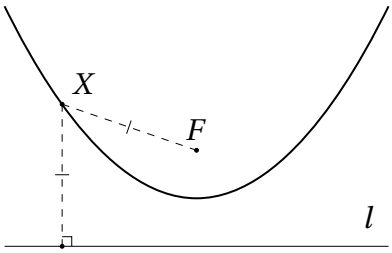


Рис. 1. *Парабола*

Для початку покажемо, що набір «парабола+лінійка» не слабкіший за «циркуль+лінійка».

Теорема 1. *Параболою та лінійкою можна побудувати все, що можливо побудувати циркулем і лінійкою.*

Для доведення цього твердження достатньо показати можливість побудови трьох конструкцій (основні леми):

1. перетин кола та прямої;
2. перетин двох кіл;
3. перетин двох прямих.

При цьому вважаємо, що коло задане, якщо задано його центр і або точку на ньому, або його радіус.

Надалі будемо вважати, що всі побудови робляться параболою та лінійкою.

Оскільки в нас є лінійка, доведення третьої основної леми очевидно. Для доведення перших двох пунктів нам знадобиться декілька допоміжних лем.

Лема 1. *Можливо побудувати бісектрису даного кута $\angle AOB$.*

Доведення. Оберемо довільну точку P всередині $\angle AOB$. Тепер побудуємо параболи ω_1 та ω_2 з фокусом P і директрисами OA та OB відповідно. Нехай $K = \omega_1 \cap \omega_2$. Тоді якщо A_1 та B_1 – основи перпендикулярів з точки K на прямі OA та OB відповідно, то $KA_1 = PK = KB_1$, тобто K лежить на бісектрисі $\angle AOB$, звідки OK – бісектриса $\angle AOB$. □

Лема 2. *Дано кут BAC, P – довільна точка на стороні AB. Тоді парабола ϕ з фокусом у точці P та директрисою AC дотикається до бісектриси цього кута.*

Доведення. Введемо систему координат так, щоб точка P належала осі Oy, а пряма AC збігалася з віссю Ox (рис. 2). Нехай $AO = a$ та $\angle BAC = 2\alpha$, звідки $OP = a \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$ та $OT = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$. Тоді для того, щоб довести, що бісектриса $\angle BAC$ – дотична до ϕ, достатньо показати, що похідна параболи у точці перетину із бісектрисою – це $\operatorname{tg} \alpha$.

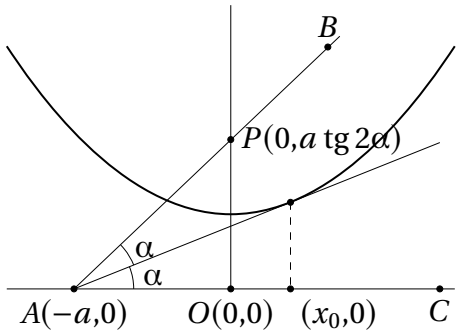


Рис. 2

Скориставшись кутовим рівнянням прямої, маємо, що бісектриса кута BAC задається рівнянням

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + OT = x \cdot \operatorname{tg} \alpha + a \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Виведемо тепер рівняння параболи ϕ. За означенням параболи, для довільної точки $(x; y) \in \phi$ відстань від цієї точки до прямої AC та до точки P однакова:

$$y = \sqrt{x^2 + (y - a \cdot \operatorname{tg} 2\alpha)^2}.$$

Зробимо рівносильні перетворення:

$$y^2 = x^2 + y^2 - 2ya \operatorname{tg} 2\alpha + a^2 \operatorname{tg}^2 2\alpha \iff$$

$$\iff y = \frac{x^2}{2a \operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{a \operatorname{tg} 2\alpha}{2}.$$

Отже, парабола задається функцією

$$f(x) = \frac{x^2}{2a \operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{a \operatorname{tg} 2\alpha}{2}.$$

Нехай $(x_0; y_0)$ – точка перетину бісектриси з параболою. Тоді справедлива система рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = \frac{x_0^2}{2a \operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{a \operatorname{tg} 2\alpha}{2}, \\ y_0 = x_0 \operatorname{tg} \alpha + a \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Прирівнюючи праві частини рівнянь, після елементарних перетворень приходимо до

$$\begin{gathered} x_0^2 - 2ax_0 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \\ + a^2 \operatorname{tg} 2\alpha (\operatorname{tg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Оскільки $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, то

$$\begin{gathered} \operatorname{tg} 2\alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha \left(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha\right) = \\ = \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} 2\alpha. \end{gathered}$$

Тому дискримінант рівняння (1)

$$D = 4a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 2\alpha - 4a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 2\alpha = 0,$$

а отже точка перетину параболи з бісектрисою єдина. Знаходимо її абсцису та рахуємо похідну $f(x)$ в цій точці:

$$\begin{gathered} x_0 = \frac{2a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{2} = a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha, \\ f'(x_0) = \left(\frac{x_0^2}{2a \operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{a \operatorname{tg} 2\alpha}{2} \right)' = \frac{2x_0}{2a \operatorname{tg} 2\alpha} = \\ = \frac{a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{a \operatorname{tg} 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha. \end{gathered}$$

Звідси маємо, що бісектриса кута BAC дотикається до параболи ϕ. □

Лема 3. *Можливо відновити перпендикуляр з точки $P \in l$ до прямої l.*

Доведення. Візьмемо довільні точки $A \in l$ та $B \notin l$. Тоді точка F, яка належить бісектрисі кута BAP та $FP \perp l$, рівновіддалена від точки P і прямої AB. З цього випливає наступна побудова: будуємо параболу ω з фокусом в точці P та директрисою AB, тоді $F \in \omega$ так як $PF = d(F, AB)$. Пряма, яка проходить через точку P та точку дотику ω з бісектрисою кута BAP і буде шуканою (Рис. 3). □

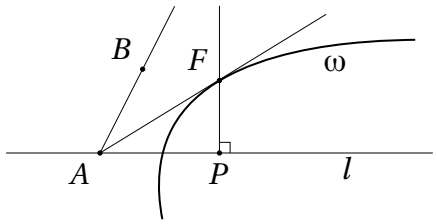


Рис. 3

Лема 4. *Можливо побудувати середину даного відрізка AB.*

Доведення. Проведемо перпендикуляри m і n з точок A і B відповідно до прямої AB. Оберемо довільні точки C_1,C_2 на перпендикулярі n. Нехай D_1 та D_2 – точки перетину перпендикулярів з точок C_1, C_2 до прямої n з прямою m відповідно, O_1 – точка перетину діагоналей чотирикутника ABC_1D_1, O_2 – точка перетину діагоналей чотирикутника ABC_2D_2. Тоді пряма O_1O_2 буде проходити через середину AB. □

Лема 5. *Можливо відновити перпендикуляр з точки $P \notin l$ до прямої l.*

Доведення. Оберемо дві довільні точки A,$B \in l$. Нехай M та N – середини PA та PB відповідно, ω – парабола з фокусом в точці P і директрисою l (рис. 4). Помітимо, що середина перпендикуляра з точки P до прямої l є вершиною параболи з одного боку, та належить середній лінії MN з іншого. Отже, достатньо побудувати точку $F = \omega \cap MN$, пряма PF і буде шуканою. □

Лема 6. *Побудувати пряму, паралельну даній прямій l, що проходить через дану точку P.*

Доведення. Побудуємо перпендикуляр PF на пряму l, після чого відновимо перпендикуляр PE до прямої PF. Тоді $PE \parallel l$. □

Лема 7. *Можливо відкласти відрізок AB даної довжини на промені AF.*

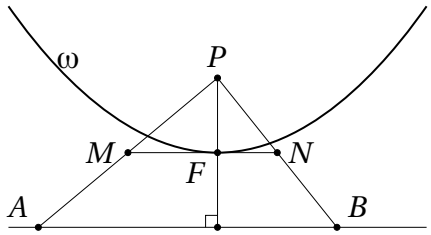


Рис. 4

Доведення. Нехай AL – бісектриса $\angle BAF$. Побудуємо $BE \perp AL$, $C = BE \cap AF$. Тоді $\triangle BAC$ рівнобедрений і $AB = AC$. □

Тепер ми готові довести першу основну лему.

Лема 8. *Можливо побудувати точки перетину кола* ω*, заданого центром* O *і точкою* $A \in \omega$*, з даною прямою* l*.*

Доведення. Побудуємо відрізок OA' такий, що $OA' \perp l$ і $OA = OA'$ (рис. 5). Для довільної точки $X \in l$ побудуємо

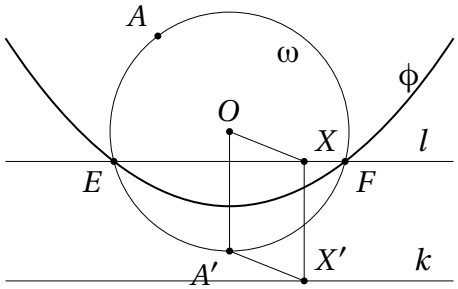


Рис. 5

паралелограм $OXX'A'$, провівши XX' паралельно OA і $A'X'$ паралельно OX. Побудуємо пряму k, що проходить через точку X' паралельно прямій l. Оскільки $OA' \perp l$, то $XX' \perp l$. Тоді $d(l,k) = XX' = OA' = R$. Побудуємо параболу ϕ з фокусом O і директрисою k. Нехай E,F – точки перетину параболи ϕ з прямою l. Тоді за означенням параболи $OE = d(E,k) = d(l,k) = R \Rightarrow E \in \omega$. Аналогічно $F \in \omega$, тобто точки E та F є шуканими. □

Лема 9. *Можливо побудувати відрізок* $\frac{a^2-b^2}{c}$ *за даними відрізками* a, b *і* c*.*

Доведення. Візьмемо довільні промені OP і OQ. Відкладемо точки A,$B \in OP$ і $C \in OQ$ такі, що $OA = c$, $AB = a - b$ та $C \in OQ | OC = a + b$. Нехай X - точка перетину прямої, що паралельна AC і проходить через точку B та променя OQ. Тоді по теоремі Фалеса $CX = \frac{a^2-b^2}{c}$, тобто відрізок CX – шуканий. □

А тепер можемо довести й другу основну лему.

Лема 10. *Побудувати точки перетину кіл* ω_1 *з центром* O_1 *і радіусом* R_1 *та* ω_2 *з центром* O_2 *і радіусом* R_2*.*

Доведення. Нехай точки перетину кіл – це A і B, C – перетин O_1O_2 та AB. Тоді за теоремою Піфагора

$$R_1^2 - O_1C^2 = AC^2 = R_2^2 - (O_1O_2 - O_1C)^2,$$
$$R_1^2 = R_2^2 - O_1O_2^2 + 2 \cdot O_1O_2 \cdot O_1C,$$
$$O_1C = \frac{R_1^2 - R_2^2 + O_1O_2^2}{2O_1O_2} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2} + \frac{O_1O_2}{2}.$$

Будуємо відрізок O_1C за допомогою попередньої леми та відкладаємо його на промені O_1O_2, отримуємо точку C. Точки перетину перпендикуляру з точки C до прямої O_1O_2 з ω_1 або ω_2 будуть шуканими. □

Таким чином, ми показали, що набір «парабола+лінійка» не слабкіший за циркуль (що еквівалентний набору «циркуль+лінійка» за теоремою Мора–Маскероні).

Виникає закономірне запитання: що ж може будувати парабола, чого не може циркуль? На початку статті згадувалися задачі про трисекцію кута та подвоєння куба, які не розв'язуються циркулем. Так ось, вони розв'язуються параболою!

Це випливає з того, що параболою можливо будувати кубічний корінь.

Теорема 2. *Маючи одиничний відрізок, параболою та лінійкою можна побудувати відрізок довжиною в кубічний корінь з даного.*

Доведення. Нехай a – даний відрізок. Введемо прямокутну систему координат з абсцисою Ox і ординатою Oy. Розглянемо параболи ϕ та ψ, що задаються рівняннями $y = x^2$ та $x = \sqrt{a} \cdot y^2$ відповідно. Як неважко бачити, ордината точки їхнього перетину дорівнює $\sqrt[3]{a}$.

Залишилося побудувати ці параболи, для цього знайдемо їх фокуси і директриси. Зрозуміло, що директриса параболи ϕ паралельна Ox, а фокус належить Oy. Нехай директриса – це пряма $y = -d$, а фокус має координати $(0,d)$. Тоді для будь-якої точки (x, x^2) цієї параболи відстань до директриси дорівнює відстані до фокуса:

$$x^2 + d = \sqrt{x^2 + (x^2 - d)^2},$$
$$x^4 + 2x^2d + d^2 = x^2 + x^4 - 2x^2d + d^2,$$
$$d = \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

Тоді директриса цієї параболи – це пряма $y = -\frac{1}{4}$, а фокус – точка $(0, \frac{1}{4})$.

Аналогічно, директриса параболи ψ – це пряма $x = -\frac{1}{4\sqrt{a}}$, а фокус – точка $(\frac{1}{4\sqrt{a}},0)$.

Обидві директриси та фокуси можна побудувати циркулем і лінійкою, а отже, можна побудувати параболою та лінійкою. Будуємо ці параболи, тоді відстань від точки їхнього перетину до прямої й буде шуканим відрізком. □

Тепер ми можемо показати, як розв'язати задачі на подвоєння куба та трисекцію кута параболою.

Наслідок 1. *Параболою та лінійкою можливо побудувати куб, об'єм якого вдвічі більший за об'єм даного куба.*

Доведення. Дійсно, нехай сторона даного куба a. Тоді його об'єм – це a^3, а об'єм куба, який вдвічі більший за нього – $2a^3$. Тоді сторона цього куба дорівнює $a\sqrt[3]{2}$, яку можна побудувати за теоремою 2. □

Наслідок 2. *Параболою та лінійкою можна зробити трисекцію кута, тобто розбити кут на три однакові частини.*

Доведення. Знайдемо косинус кута, який втричі менший даного. Нехай даний кут α, тоді за формулою косинуса потрійного кута

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3},$$

тобто маємо кубічне рівняння

$$\cos^3\frac{\alpha}{3} - \frac{3}{4}\cos\frac{\alpha}{3} - \cos\alpha = 0.$$

За формулою Кардано [5, стр. 9]:

$$\cos\frac{\alpha}{3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4\cos\alpha + \sqrt{16\cos^2\alpha - 1}} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4\cos\alpha - \sqrt{16\cos^2\alpha - 1}}.$$

Будуємо цей відрізок за теоремою 2. Побудувавши прямокутний трикутник з гіпотенузою 1 і катетом $\cos\frac{\alpha}{3}$ отримаємо кут $\frac{\alpha}{3}$, після чого залишається відкласти його всередині данного кута. □

Ми познайомилися з математичною складовою відомостей про інструмент, що будує параболу за фокусом і директрисою. Але як він може виглядати в реальному житті?

У статті Бронштейна [3] запропоновано таке. Розглянемо кутник ABC, до якого в точці A прикріплено нитку, довжина якої дорівнює катету AC. Закріпимо другий кінець нитки у фокусі параболи, яку потрібно побудувати, а катет BC встановимо на директрису. Притиснемо олівцем нитку до катету AC так, щоб вона була натягнута (рис. 6). Тоді

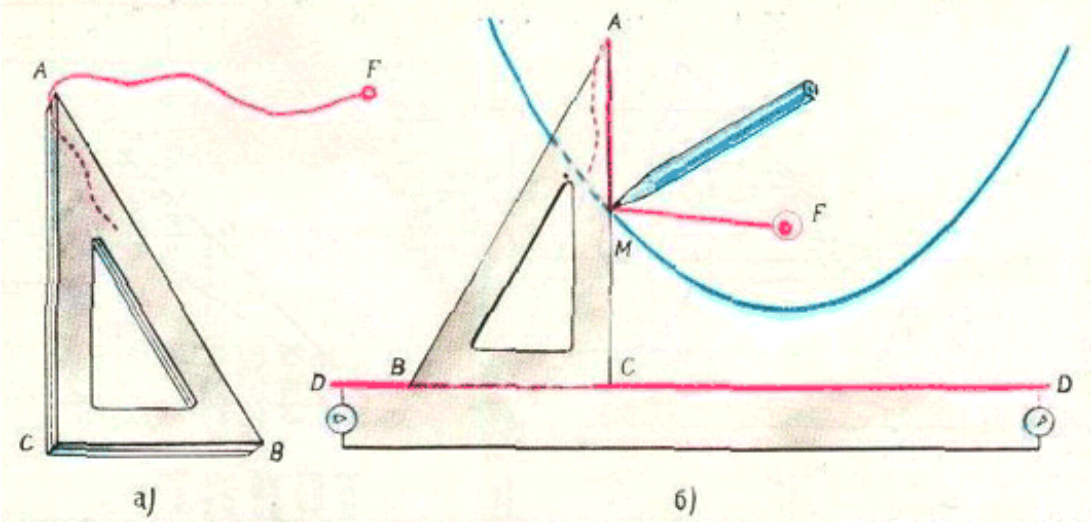


Рис. 6. *Прилад для побудови параболи*

$AM + MF = AC$, тобто $MF = MC$, отже, точка M належить шуканій параболі. Пересуваючи кутник вздовж директриси отримаємо ліву гілку параболи, потім перевернемо його і аналогічно намалюємо праву гілку.

У наступних статтях ми розглянемо побудови за допомогою інших конічних перерізів – еліпса та гіперболи. Тож до нових зустрічей!

Література

[1] И. Александрова. Рѣшение задачъ однимъ циркулемъ. – В.О.Ф.Э.М. — 1914. — № 611—612. — С. 322—327.

[2] Штейнер Я. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга. – М.: Учпедгиз, 1939. — 80 с.

[3] Бронштейн І.Н. Парабола. – Квант №4, 1975.

[4] Филипповський Г.Б. Книжица с ограничениями, или замечательные ограничения в задачах на построение. – Толиман, 2016.

[5] Алексеев В.Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. – М.: МЦНМО, 2001. 192 с.

Питання про зображення тетраедра – біла пляма у шкільній геометрії

Тадеєв Василь Олександрович
Тернопільский національний педагогічний університет

Як з'явилася проблема

Часто цитують вислів Нільса Абеля: «Геометрія є мистецтвом правильно міркувати на неправильних рисунках» – чудовий афоризм, який рельєфно відображає ту грань геометрії, що пов'язана з її логіко-аксіоматичним обґрунтуванням. Однак абсолютизація цієї грані не відповідає ні історичному розвитку геометрії, ні її становищі в системі математичних наук, ні освітньо-дидактичним функціям геометрії в сучасній школі. Більше того, й сам Абель, скоріш за все, не вкладав у свій вислів жодного із таких «глобальних» сенсів.

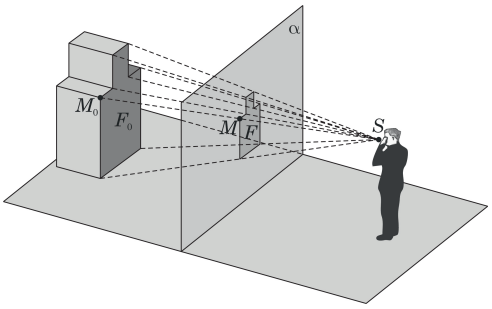


Рис. 1

Якщо взяти до уваги, що в його часи (а це– перша третина XIX ст.) відбувалося тріумфальне вторгнення в освіту нової нарисної геометрії, основним завданням якої була побудова точних креслень, то стає майже очевидним, що теза Абеля спрямовувалася проти поширення цих нових віянь на «навчальну» геометрію. Чого, врешті, тоді й не відбулося. Ще принаймні століття потому просторові фігури у навчальній геометрії продовжували зображати за споконвічними «неписаними» правилами так званої «вільної перспективи».

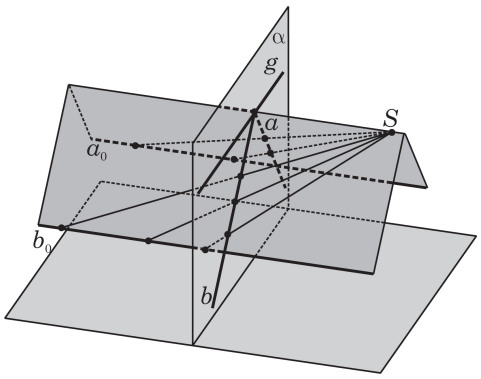


Рис. 2

Термін «вільна перспектива» виник в епоху Відродження як антитеза геометричній (лінійній) перспективі, відкритій художниками та архітекторами для точного й наочного зображення лінійного просторового каркасу на плоскій картині. В основі лінійної перспективи лежить центральне проектування (рис. 1), яким моделюється зорове сприйняття художником просторової сцени з фіксованої точки зору. Лінійна перспектива має строгі геометрично обґрунтовані правила. Ось одне з них: точка сходу зображень усіх горизонтальних і паралельних між собою прямих лежить на

так званій лінії горизонту, розміщеній на висоті умовної точки зору (рис. 2). На рис. 3 подано приклад застосування цього правила у композиції картини П.А. Федотова (1815–1852) «Сватання майора».

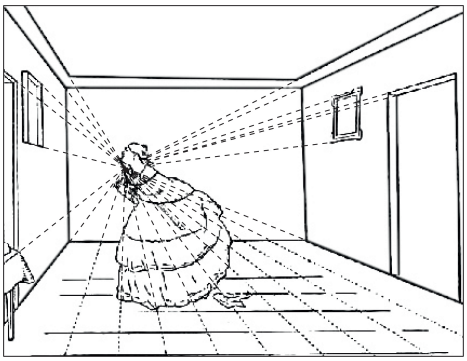


Рис. 3

Натомість правила вільної перспективи відповідали основним закономірностям зорового сприйняття з віддаленої і не фіксованої точки зору– з «висоти пташиного лету». Основними з них були такі: паралельні прямі зображаються паралельними прямими і зберігаються відношення відрізків однієї прямої або паралельних прямих. Ми сказали б, що ці правила випливають з властивостей паралельного проектування, але в ті часи їх так не трактували. Однак головна відмінність вільної перспективи від лінійної не в типі проектування, а в принципі компонування зображень. У лінійній перспективі усі елементи картини строго «прив'язуються» до одного й того самого розміщення точки зору (центра проектування) і площини картини, а у вільній перспективі різні елементи зображення могли бути проекціями за різними напрямками проектування або на різні площини проекції. Зокрема, ортогональні проекції круглих тіл могли «мирно уживатися» з косими проекціями призматичних тощо. Для порівняння, на рис. 4 подано виконані у вільній перспективі середньовічні плани італійських міст Піза (на передньому

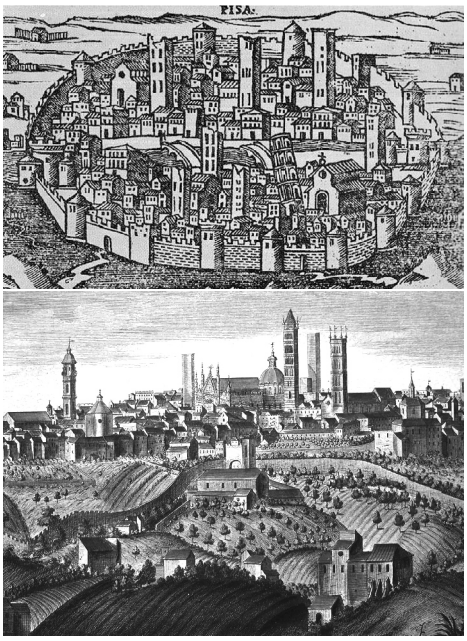


Рис. 4

плані видно вже «нахилену» Пізанську вежу) та Сієна (вигляд на міські ворота), а на рис. 5– гравюру нідерландського архітектора й художника епохи Високого Відродження Ханса Вредемана (бл. 1527–бл. 1607), виконану зі строгим дотриманням правил лінійної перспективи.

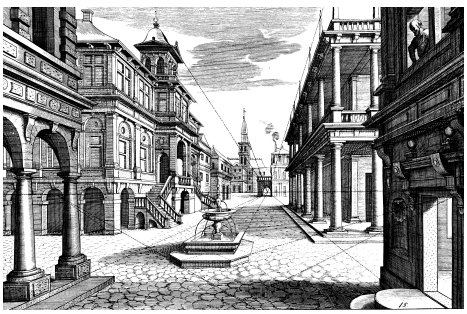


Рис. 5

Ідея «загнуздати» вільну перспективу в строгі геометричні правила зародилася у першій половині XIX ст. в англійській та німецькій школах інженерної графіки. Було помічено, що для цього достатньо паралельно проектувати простір на площину разом із системою координат. Тоді координати (x, y, z) проекції M довільної точки M_0 простору в спроектованій (аксонометричній) системі ко-

ординат $Oxyz$ будуть такими самими, як координати самої точки $\grave{I}_0$ у «натуральній» системі координат $O_0x_0y_0z_0$ в просторі (рис. 6). На цій підставі процес

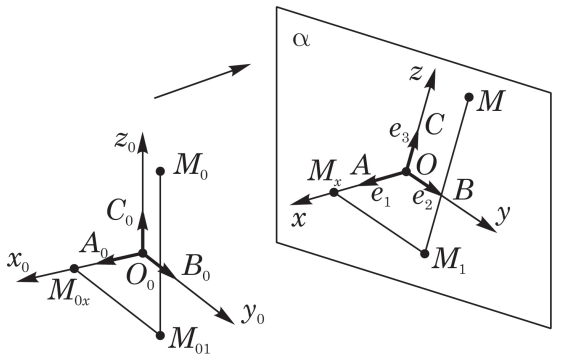


Рис. 6

побудови зображень легко алгоритмізувати, а в теперішній час і реалізувати засобами комп'ютерної графіки (з деякими елементарними ідеями для цього можна ознайомитися за підручником [12, с. 98–102]).

Однак коректне застосування цього методу відображення потребувало вирішення одного принципового теоретичного питання: якими мають (чи можуть) бути три відрізки $e_1 = OA$, $e_2 = OB$, $e_3 = OC$ на площині, що виходять з однієї точки O, аби їх можна було вважати за паралельні проекції трьох рівних і попарно взаємно перпендикулярних масштабних відрізків O_0A_0, O_0B_0, O_0C_0, що визначають натуральну систему координат у просторі. Відповідь на це питання дають теореми Польке–Шварца і Гауса, які будуть розглянуті у цій статті.

Водночас ці відповіді мають і безпосередній стосунок до правил зображення фігур у шкільній стереометрії. «Приручення» вільної перспективи для потреб прикладної (інженерної) геометрії з часом позначилося і на шкільній програмі. Особливо– на програмі з геометрії у радянській і пострадянській школі. Базуючись на принципах «зв'язку теорії з практикою» та «політехнізму», у 1930-х роках в радянських шкільних підручниках з геометрії з'являються елементи проекційного креслення, а в 1950-х стає загальноприйнятою ідея про побудову зображень стереометричних фігур у паралельній проекції. Цікаво, що в усіх дореволюційних виданнях славнозвісної «Елементарної геометрії» А. П. Кисельова про зображення стереометричних фігур йшлося лише в одному реченні: «Площина зображається на рисунку у вигляді деякої її частини, зазвичай у формі паралелограма або прямокутника» (див., наприклад, видання [9, с. 272]). Тимчасом у пореволюційних виданнях цього підручника уже містилися цілі параграфи, присвячені елементам проекційного креслення.

У 1960–80-х роках було опубліковано величезну кількість різноманітних дидактичних матеріалів для вчителів, в яких аналізувалися різноманітні аспекти побудови наочних зображень у паралельній проекції. Попри те, в усіх цих матеріалах не «помічалося» окремих принципових питань щодо того, якими можуть (чи мають) бути зображення деяких ключових фігур і як ці зображення можуть узгоджуватися між собою. Пояснимо сказане двома прикладами.

Приклад 1. Після з'ясування питання про паралельні проекції прямих і відрізків, у шкільних підручниках зазвичай розглядається питання про зображення трикутників і чотирикутників. Зокрема, обґрунтовується, що проекцією трикутника може бути трикутник довільної форми, проекцією паралелограма– паралелограм, а проекцією трапеції– трапеція. Однак питання про те, якою може бути паралельна проекція тетраедра навіть не ставиться. Вочевидь, уважається, що це вже вирішено питанням про зображення трикутника. Але ж поверхня тетраедрі складається аж із чотирьох трикутних граней: то чи можна кожну з них зображати у якій завгодно формі?

Наприклад, чи можна правильний тетраедр зобразити так, як на рис. 7?

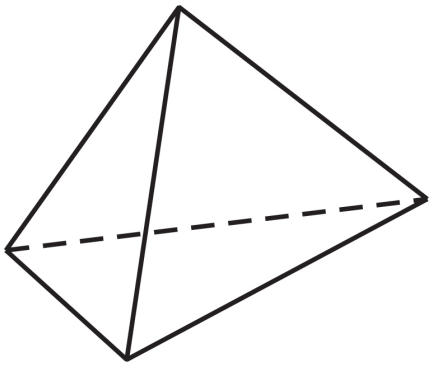


Рис. 7

Приклад 2. Стосовно зображення сфери зазвичай наголошується, що його виконують в ортогональній проекції. Тоді обрисом сфери буде коло, а «екватор», як проекція одного з кіл, зобразиться еліпсом. Інколи говорять і про «полюси»– що їхні зображення мають розміщуватися не на обрисі сфери, а всередині нього, розглядаються точні геометричні побудови [12, с. 316–319]. Але як до цього зображення приєднувати інші важливі «шкільні» фігури, зокрема, чи можна приєднати зображення системи координат так, як показано на рис. 8?

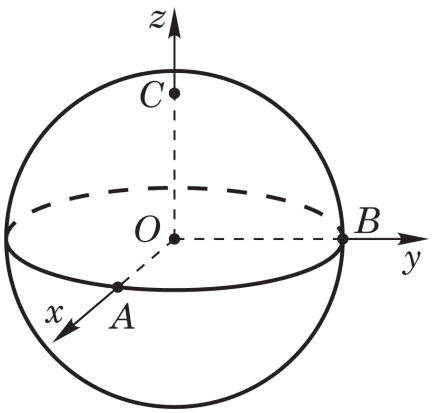


Рис. 8

Відповіді на ці принципові питання теж безпосередньо пов'язані зі згаданими вище теоремами Польке–Шварца і Гауса. Ці теореми є ключовою темою цієї статті.

Формулювання та коротка історія теореми Польке–Шварца

Коротко, хоча й не зовсім повно, теорему Польке–Шварца формулюють так: паралельною проекцією будь-якого тетраедра може бути повний чотирикутник (чотирикутник разом з його діагоналями) довільної форми.

Зокрема, відповідно до цієї теореми, правильний тетраедр можна зобразити будь-яким повним чотирикутником, у тому числі й так, як це зроблено на рис. 7.

Про обставини відкриття теореми Польке–Шварца коротко повідомляє один із її винахідників – німецький математик Герман Амандус Шварц (1843–1921) у своїй публікації 1864 р., присвяченій доведенню цієї теореми [21]. Якщо до розповіді Шварца долучити ще де кілька доповнень та уточнень, почерпнутих з інших джерел, то відкривається доволі цікава історія (більше фактів можна почерпнути зі статей [19, p. 81–83; 23, p. 153–154]).

Первісну й найважливішу для прикладних застосувань форму цієї теореми відкрив у 1853 р. художник і математик, професор академії образотворчих мистецтв та Будівельної академії в Берліні, учень видатного геометра Якоба Штейнера Карл Вільгельм Польке (1810–1876). Тому на його честь цю первісну форму часто називають теоремою Польке. За теоремою Польке, три неколінеарні відрізка довільної довжини, які лежать в одній площині й виходять з однієї точки під довільними кутами один до одного, можна прийняти за паралельні проекції трьох рівних відрізків простору, відкладених на осях прямокутної системи координат від її початку.

Зазначимо, що ми щоразу фактично користуємося цією теоремою, коли будуємо зображення точок (а, отже, й відріз-

ків та багатогранників) за координатами у прямокутній системі координат. Наприклад, на рис. 6 відображено побудову зображення M точки M_0 за її координатами. При цьому вибір зображень координатних осей та одиничних відрізків на них здійснюється довільно. Тимчасом без посилання на теорему Польке можливість такого вільного вибору залишається під сумнівом.

Незважаючи на простоту формулювання теореми Польке, знайдене самим Карлом Польке її доведення було вкрай складним. Г. А. Шварц у згаданій публікації зазначає, що воно базувалося на властивості сімейства однопорожнинних гіперболоїдів, що перетинають площину проекцій по співфокусних гіперболах. Штейнер, якому Польке усно повідомив зміст своєї теореми, вказав на певні прогалини в доведенні. І хоча пізніше вони виявилися неістотними, тоді ні Польке, ні сам Штейнер не змогли їх усунути. Тому аби стимулювати інших на пошук незаперечного доведення, Штейнер у 1858 р. опублікував теорему Польке у книзі «Різні теореми й задачі» в дещо переформульованому вигляді та з обережним натяком на рішення: «Нехай вершини A, B, C, D рівнобедреної піраміди з прямими кутами при одній з вершин проектуються за яким-небудь напрямком на довільну площину. Запитується, яке співвідношення пов'язує взаємні відстані між проекціями A_1, B_1, C_1, D_1 вершин A, B, C, D?». Передбачалася відповідь: «жодного».

Тим часом, у 1860 р. сам Польке опублікува формулювання своєї теореми у першому томі свого ж підручника «Нарисна геометрія», зазначивши, що «її доведення неможливо провести елементарно, а тому воно буде подане у другому томі». Поки готувався до друку другий том, 20-річний учень Польке Герман Шварц знайшов не тільки просте доведення теореми Польке, а й істотно узагальнив її, поширивши з рівних і взаємно перпендикулярних відрізків на будь-які три відрізки у просторі, що не лежать в одній площині. Тому Польке відмовився від обіцяної публікації свого доведення, а в наступних виданнях «Нарисної геометрії» у першому томі уже подавав доведення Шварца.

Дослівне формулювання теореми, надане їй Шварцем, було таким:

«Нехай у просторі і на деякій площині дано по три відрізки, що виходять з однієї точки, і при цьому перші три відрізки не лежать в одній площині, а другі три– не лежать на одній прямій. Тоді фігуру, яка складається із перших трьох відрізків, можна паралельно спроектувати на деяку площину так, що проекція буде подібна фігурі, яка складається із других трьох відрізків».

Якщо сполучити «вільні» кінці відрізків кожної трійки, що фігурують у цій теоремі, то в просторі дістанемо тетраедр, а на площині– повний чотирикутник. Тоді дістанемо еквівалентне, і тепер уже повне, формулювання теореми Польке–Шварца.

Теорема Польке–Шварца. *Нехай у просторі дано довільний тетраедр $O_0A_0B_0C_0$, а на площині α– довільний повний чотирикутник $OABC$ (рис. 9). Тоді тетраедр можна спроектувати паралельно на деяку площину α_1 так, що проекцією буде повний чотирикутник $O_1A_1B_1C_1$, подібний чотирикутнику $OABC$.*

Доведення теореми Польке–Шварца. Запропоноване Шварцем доведення складається з двох етапів. На першому етапі доводиться допоміжна лема: Будь-який трикутник може бути ортогональною проекцією трикутника довільної форми. (Як з'ясувалося пізніше, цей факт ще за півстоліття до Шварца опублікував швейцарсько-французький математик Сімон Антуан Люільє (1750–1840) і тому його часто

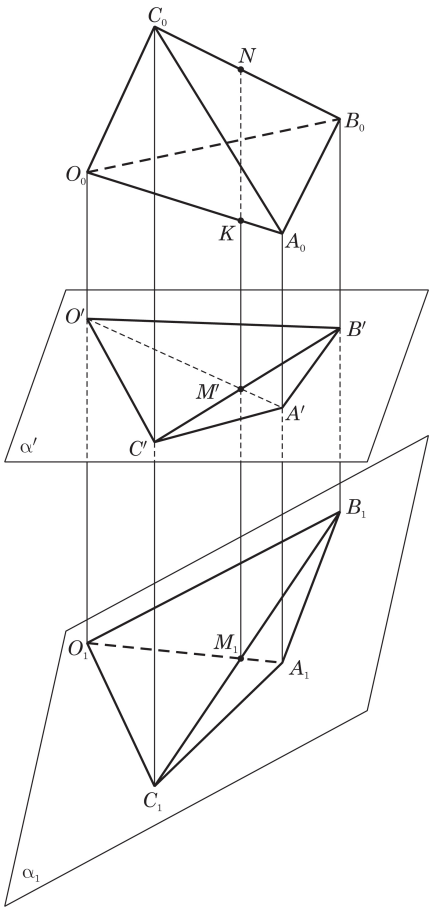


Рис. 9

називають теоремою Люільє). Лише після цього доводиться сама теорема. Цікаво, що в більшості доведень теореми Польке-Шварца в сучасній навчальній літературі «інваріантним» і близьким до авторського є саме цей другий етап, натомість доведення теореми Люільє видозмінюється на найрізноманітніші лади. То ж розглянемо спочатку «інваріантний» етап Шварца.

Нехай маємо повний чотирикутник $OABC$ і тетраедр $O_0A_0B_0C_0$ (див. рис. 9). Нехай M – точка перетину відрізків OA і BC (або їхніх продовжень). Поділимо ребра OA_0, C_0B_0 тетраедра точками K, N у тих самих відношеннях, у яких точка M ділить відповідно сторони AO та CB повного чотирикутника (внутрішнім чи зовнішнім чином):

$$\frac{O_0K}{KA_0} = \frac{OM}{MA}, \quad \frac{C_0N}{NB_0} = \frac{CM}{MB}, \qquad (1)$$

і проведемо пряму KN.

Далі, проведемо паралельно прямій KN прямі через вершини тетраедра $O_0A_0B_0C_0$ і перетнемо їх перпендикулярною площиною α'. Нехай M', O', A', B', C' – точки перетину усіх проведених прямих із площиною α'. Відповідно до теореми Люільє, існує трикутник $O_1A_1C_1$, подібний трикутнику OAC, ортогональною проекцією якого на площину α' є трикутник $O'A'C'$. Нехай α_1 – площина цього трикутника, а M_1 – точка перетину прямої KN з цією площиною.

Відповідно до властивостей паралельного проектування,

$$\frac{O_0K}{KA_0} = \frac{O_1M_1}{M_1A_1}, \quad \frac{C_0N}{NB_0} = \frac{C_1M_1}{M_1B_1}.$$

Якщо ж врахувати попередні рівності (1), то звідси дістаємо

$$\frac{OM}{MA} = \frac{O_1M_1}{M_1A_1}, \quad \frac{CM}{MB} = \frac{C_1M_1}{M_1B_1}.$$

Із цих рівностей та з подібності трикутників OAC і $O_1A_1C_1$ елементарно виводиться подібність чотирикутників $OABC$ і $O_1A_1B_1C_1$. Отже, чотирикутник $O_1A_1B_1C_1$, який подібний заданому чотирикутнику $OABC$, є паралельною проекцією заданого тетраедра $O_0A_0B_0C_0$. Теорему доведено.

Дидактичні проблеми

Незважаючи на «простоту» доведення Шварца, у вітчизняній навчальній літературі воно рідко подавалося повністю в авторській редакції, тобто з авторським доведенням теореми Люільє (можливо, однією з причин було те, що в обох оригінальних публікаціях Шварца [21]

не було жодної графічної ілюстрації). Власне, нам відомо лише одне джерело радянської епохи, в якому повністю подавалося доведення Шварцем теореми Люільє [4] (відтворити деталі цього доведення за скороченим записом та доданим рисунком ми пропонуємо читачеві у задачі 6), хоча до навчальної літератури це джерело можна віднести лише умовно. Що ж до численних підручників з нарисної та проективної геометрії, то в абсолютній більшості з них теорема Польке-Шварца, якщо й згадувалася, то подавалася без доведення. «Найстаріше» з відомих нам доведень подавалося у 1930-х роках в перших виданнях відомого підручника М.Ф. Четверухіна «Вступ до вищої геометрії» [14, с. 40–43] (після переробки 1939 р. ця книга дістала назву «Вища геометрія», а у виданнях 1950–60-х років називалася «Проективна геометрія», однак елементів нарисної геометрії, а, отже, й теореми Польке–Шварца, у цих перероблених виданнях уже не було). Хоча доведення М. Ф. Четверухіна теореми Люільє нескладне й майстерно прописане (пізніше воно повторювалося в підручниках інших авторів, наприклад, [11, с. 20–24]), однак його важко назвати елементарним, оскільки у ньому містяться посилання на деякі факти з афінної геометрії. Зокрема, на те, що в будь-який паралелограм можна вписати еліпс, який дотикається до сторін паралелограма у їхніх серединах, і що будь-який еліпс можна вважати за паралельну проекцію кола.

Аналогічний недолік, але ще важчий для сприйняття читачами, не обізнаними з афінною геометрією, мало доведення, вміщене в колишніх авторитетних для «теоретиків» книгах [5, 6, 7], оскільки воно ґрунтувалося на існуванні для будь-якого афінного перетворення площини так званих головних напрямків. Пізніше це доведення перейшло у підручники для студентів педагогічних вишів [3, с. 141–142; 2, с. 192–195] і ... стало причиною стійкої відрази майбутніх вчителів до всієї цієї проблематики. У спрощеному варіанті цих підручників [1, с. 102–103] подавалося простіше доведення, близьке до згаданого вище у книгах [14, 11]. Однак це мало зарадило справі. Проблема справді елементарного доведення теореми Люільє, а, отже, й теореми Польке–Шварца, залишалася. Сподіваємося, що подані нижче доведення нарешті знімуть цю печать «неприступності».

Окрім проаналізованих прикладних і дидактичних мотивів, існує ще один вагомий аргумент для того, аби привернути увагу читачів нашого журналу до теореми Польке–Шварца і тісно пов'язаної з нею теореми Гаусса. Як виявилися, ці теореми вкрай цікаві і з суто теоретичної точки зору. Про це, зокрема, красномовно свідчить той факт, що свого часу їм приділив належну увагу Ф. Клейн у своїй фундаментальній праці «Елементарна математика з точки зору вищої» [10, с. 129–133]. Пізніше учень Д. Гільберта Генріх Доррі[1] включив їх до свого унікального переліку «100 знаменитих проблем з елементарної математики за двохтисячолітню історію її розвитку» [16, с. 303–307][2]. А вже в новітній час ці теореми знайшли належне поцінування у фундаментальній енциклопедії Кі-

[1] Генріх Доррі (1873–1955) навчався в університетах Ганновера, Геттінгена і Лейпцига. У 1898 р. отримав докторський ступінь з математики від Гільберта. У подальшому присвятив себе педагогічній роботі у престижних навчальних закладах та популяризації науки.

[2] Тут ми поєднуємо оригінальну назву книги Г. Доррі у німецьких виданнях: Triumph der Mathematik. Hundert berühmte Probleme aus zwei Jahrtausenden mathematischer Kultur (Тріумф математики. Сто знаменитих проблем за дві тисячі років математичної культури) з її назвою в англійському перекладі [16]. Перше німецьке видання цієї книги вийшло у 1932 р., п'яте– у 1958 р.

стофа Скріби і Пітера Шрайбера «5000 років геометрії: Математика в історії й культурі» [22, p. 398, 475–476][3].

Нижче подаються доведення теореми Люільє з кожного з останніх двох джерел. Але їм передує незаслужено забуте доведення самого Люільє [17]. Ми розшукали його завдяки вказівці у статті [23, p. 155], в якій зазначається, що Люільє отримав (чи опублікував) його у 1811 р.

В усіх поданих доведеннях в основному збережені оригінальні ілюстрації та позначення.

Елементарні доведення теореми Люільє

Доведення Люільє

У Люільє теорема одержується як наслідок розв'язання такої задачі: перетнути задану пряму трикутну призму площиною так, щоб у перерізі утворився трикутник, подібний даному. Доводиться, що ця задача завжди має розв'язок.

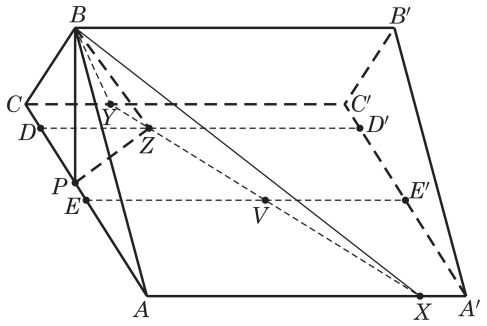


Рис. 10

Нехай $ABCA'B'C'$ – задана призма (лежить на одній з бічних граней) (рис. 10), BXY– шуканий переріз, подібний заданому трикутнику (заданий трикутник не зображається). Для спрощення можна вважати, що вершина найбільшого з кутів перерізу збігається з вершиною найбільшого з кутів основи призми. Проведемо BO перпендикулярно до грані $AA'C'C$ і PZ перпендикулярно до прямої XY. За теоремою про три перпендикуляри, BZ буде висотою перерізу. Відкладемо на промені $Z\tilde{O}$ відрізок $ZV = BZ$. З подібності шуканого трикутника BXY до заданого випливає, що відношення $\frac{YZ}{ZX}$ та $\frac{YV}{VX}$ відомі. Отже, відомі прямі DD' та EE', паралельні ребрам AA' і CC', на яких можуть розміщуватися точки Z і V. Зрозуміло, що достатньо знайти точку Z, тоді точка V визначиться з умови, що кут PZV – прямий.

Проведемо VQ перпендикулярно DD'. З подібності прямокутних трикутників PDZ і ZQV та пропорційності їхніх катетів матимемо

$$DZ \cdot ZQ = PD \cdot VQ = \text{const}.$$

Далі зауважуємо, що

$$ZV_2 - ZP_2 = BZ_2 - ZP_2 = BP_2 = \text{const}.$$

Крім цього,

$$ZV2 = VQ2 + ZQ2, \quad ZP2 = PD2 + DZ2.$$

Звідси

$$ZV_2 - ZP_2 = (VQ_2 - PD_2) - (DZ_2 - ZQ_2).$$

Як щойно було зазначено, значення виразу в лівій частині останньої рівності стале. А оскільки відрізки VQ і PZ незмінні, то незмінним є значення виразу $VQ_2 - PD_2$. Отже, незмінне й значення виразу $DZ_2 - ZQ_2$.

Якщо позначимо невідомі відрізки DZ і ZQ через x і y, а сталі величини $DZ \cdot ZQ$ та $DZ_2 - ZQ_2$ через a^2 та al відповідно, то геометричну проблему, яка розглядається, зведемо до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2; \\ xy = al. \end{cases}$$

[3] Оригінальна назва німецького видання трохи інша: «5000 Jahre Geometrie: Geschichte, Kulturen, Menschen». Отже, її підзаголовок точніше перекласти так: «Історія, культура, людина». Перше видання цієї книги німецькою мовою вийшло у 2001 р., третє– у 2010 р.

Висновок про сумісність цієї системи можна зробити на підставі безпосереднього розв'язуванням. Якщо з другого рівняння визначити y і підставити в перше, то після елементарних спрощень дістанемо біквадратне рівняння

$$x^4 - a^2x^2 - a^2l^2 = 0,$$

яке має додатний розв'язок; аналогічно знайдемо додатний розв'язок y^2:

$$x^2 = a\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + l^2} + \frac{a}{2}\right),$$
$$y^2 = a\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + l^2} - \frac{a}{2}\right).$$

Люільє відзначає цю можливість, однак, за всіма класичними канонами, подає ще й геометричне розв'язання, трактуючи систему як задачу на побудову прямокутного трикутника AYX з відомим катетом à та відомим добутком al невідомого другого катета x на невідому гіпотенузу y (рис. 11).

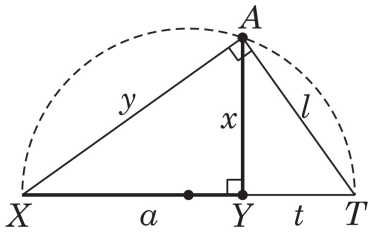


Рис. 11

Продовжимо катет XY на такий відрізок $YT = t$, що $t(a + t) = l^2$ (елементарний аналіз цього квадратного рівняння показує, що потрібний відрізок t завжди існує і його легко побудувати за допомогою циркуля та лінійки). Далі, на відрізку XT як на діаметрі будуємо півколо і визначаємо точку його перетину з прямою, проведеною через точку Y перпендикулярно до XY. Тоді трикутник AYX– шуканий.

Справді, за побудовою, кут XAT– прямий, а за властивістю прямокутного трикутника, $AT^2 = t(a + t) = l^2$. Звідси $AT = l$. Тоді з подібності прямокутних трикутників AYX і TYA маємо: $y/a = l/x$. Звідси $xy = al$, що й треба було довести. Цим доведення Люільє завершується.

Доведення з книги Генріха Доррі «100 знаменитих проблем з елементарної математики за двохтисячолітню історію її розвитку»

Проведемо аналіз. Нехай $A_0B_0C_0$– задана ортогональна проекція шуканого трикутника ABC заданої форми. Не порушуючи загальності міркувань, можемо вважати, що вершини C_0 і C збігаються. На рис. 12 подано наочне зображення обох трикутників, їхніх площин E_0, Å, проектуючих прямих AA_0, BB_0 та інших елементів, які описуються далі, а на рис. 13– розміщення тих самих трикутників у суміщеному положенні площин E_0, E, яке досягається обертанням однієї з них навколо прямої g їхнього перетину. Будемо вважати (а в підсумку вийде, що це завжди можливо), що пряма AB перетинається з прямою g (нехай у точці S); тоді пряма A_0B_0 теж перетинає пряму g у тій самій точці S.

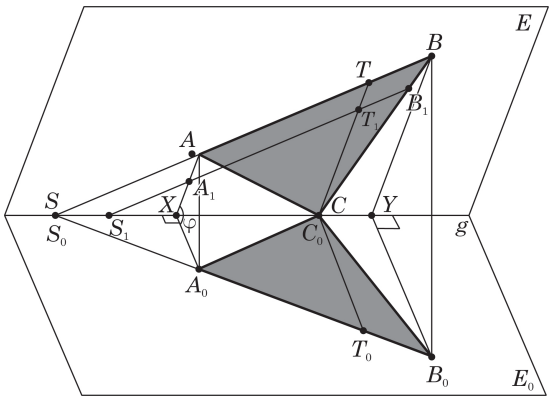


Рис. 12

Проведемо $A_0X \perp g$, $B_0Y \perp g$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $AX \perp g$, $BY \perp g$. Проведемо також $C_0T_0 \perp g$ і $CT \perp g$. Після суміщення площин E_0 і E трійки точок A, X, A_0; T, C, T_0; B, Y, B_0 розмістяться на прямих, перпендикулярних до

прямої g. Очевидно, що косинус кута φ між площинами E_0, E у їхньому несумісному положенні дорівнює кожному з відношень $\frac{XA_0}{XA}$, $\frac{YB_0}{YB}$, $\frac{CT_0}{CT}$.

Подальші міркування ілюструються рис. 13. За теоремою Фалеса,

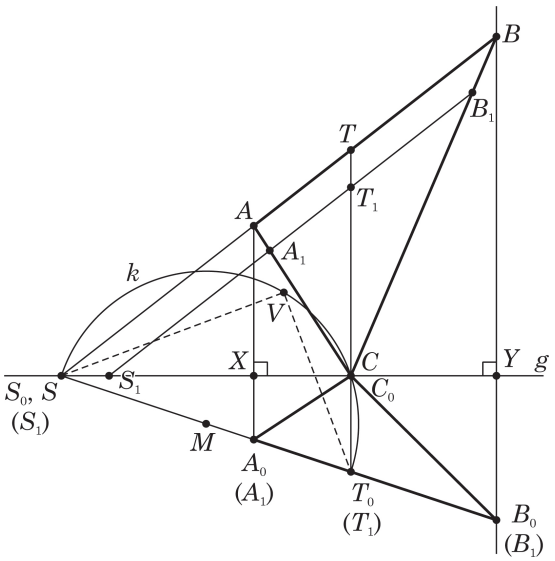


Рис. 13

$$SA : AT : TB = S_0A_0 : A_0T_0 : T_0B_0.$$

Тому можна провести пряму, паралельну AB, яка перетинає прямі g, CA, CT, CB у таких точках S_1, A_1, T_1, B_1, що $S_1A_1 = S_0A_0$, $A_1T_1 = A_0T_0$, $T_1B_1 = T_0B_0$. Положення точки S_1 для цього можна знайти із пропорції $CS_1 : CS = SA : S_0A_0$.

Після цього «перевернемо» трикутник S_1B_1C у просторі та перемістимо так, щоб сторона S_1B_1 сумістилася зі відрізком S_0B_0. При цьому частина $S_1\tilde{N}T_1$, яка є прямокутним трикутником з прямим кутом C, відобразиться у прямокутний трикутник S_0VT_0 із прямим кутом V. Оскільки прямокутні трикутники SCT_0 і S_0VT_0 мають спільну гіпотенузу, то їхні вершини $\tilde{N}$ і V належатимуть колу з діаметром S_0T_0. Інакше кажучи, чотирикутник S_0VCT_0 буде вписаним у коло, а тому до нього можна буде застосувати теорему Птолемея: сума добутків протилежних сторін дорівнює добутку діагоналей.

Із цього аналізу випливають такі побудови відображеного на рис. 12 ортогонального проектування, коли задано проекцію $A_0B_0C_0$ і форму трикутника ABC:

1) на стороні A_0B_0 будуємо трикутник A_0B_0V, подібний трикутнику ABC;

2) проводимо серединний перпендикуляр до відрізка CV і знаходимо точку M його перетину з прямою A_0B_0;

3) проводимо коло k з центром M і радіусом MV та визначаємо точки S_0, T_0 його перетину з прямою A_0B_0;

4) на прямій $g = C_0S$ відкладаємо відрізок $\tilde{N}S_1 = VS_0$, а на перпендикулярі $C_0\grave{O}$ до прямої g – відрізок $CT_1 = VT_0$, і проводимо пряму S_1T_1 з відкладеними відрізками $T_1A_1 = T_0A_0$, $T_1B_1 = T_0B_0$;

5) проводимо пряму ST, паралельну S_1T_1, і знаходимо на ній точки $\grave{A}$, $\grave{O}$, $\hat{A}$ перетину з прямими, які проходять, відповідно, через точки A_0, T_0, B_0 і перпендикулярні до прямої g;

6) повертаємо трикутник ABC навколо прямої g на такий кут φ, косинус якого дорівнює $\frac{CT_0}{CT}$.

Тоді трикутник $A_0B_0C_0$ буде ортогональною проекцією трикутника ABC, що має задану форму.

Для доведення потрібно обґрунтувати, що необхідний кут повороту φ завжди існує, тобто, що відношення $\frac{CT_0}{CT} < 1$.

З подібності трикутників CST і CS_1T_1 випливає рівність $\frac{CT}{CT_1} = \frac{CS}{CS_1}$. Звідси $CT = CT_1 \cdot \frac{CS}{CS_1}$, а за побудовою цей вираз дорівнює $VT_0 \cdot \frac{CS}{CS_1}$. Тому

$$\frac{CT_0}{CT} = \frac{CT_0 \cdot VS}{CS \cdot VT_0}.$$

Але за теоремою Птолемея для вписаного чотирикутника S_0VCT_0 добуток протилежних сторін $CT_0 \cdot VS$ менший від добутку $CS \cdot VT_0$ діагоналей. Тому, справді, $\frac{CT_0}{CT} < 1$, що й треба було довести.

Доведення з книги Крістофа Скріби та Пітера Шрайбера «5000 років геометрії: Математика в історії й культурі»

Це доведення аналітичне і може слугувати яскравим прикладом ефективного застосування векторно-координатного методу. Автори книги вказують на його першоджерело– статтю фінського математика Тауно Саленіуса (1915–2006?), опубліковану в скандинавському математичному журналі у 1978 р. [20]. Ця вказівка допомогло нам швидко відновити деякі деталі доведення, пропущені в книзі. У бібліографії до розділу «Мистецтво й архітектура» у «Довідковій енциклопедії з історії та філософії математичних наук» [15, p. 1610] вказівка на статтю Т. Саленіуса супроводжується таким коментарем: «Перше справді елементарне доведення теореми Польке». І з цим важко не погодитися.

Нехай потрібно довести, що існує таке положення трикутника ABC заданої форми (яка визначається сторонами a, b і кутом γ між ними), ортогональною проекцією якого є заданий трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 14). Не порушуючи загальності, можемо вважати, що точки C і C_1 збігаються.

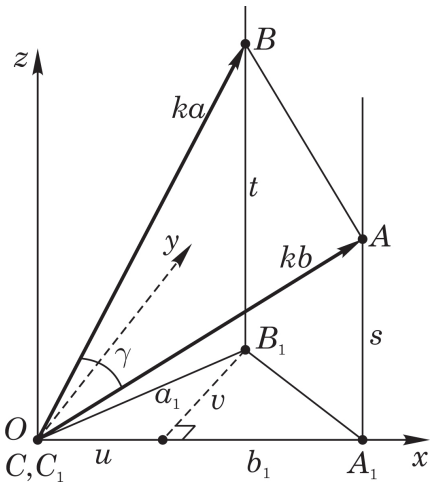


Рис. 14

Уведемо прямокутну систему координат $Oxyz$, сумістивши координатну площину Oxy з площиною трикутника $A_1B_1C_1$ і спрямувавши вісь Ox по стороні C_1A_1. Додаткові позначення зрозумілі з рис. 14. Для доведення теореми Люільє потрібно довести, що існують відповідні значення невідомих s, t, k.

З прямокутних трикутників BB_1O, AA_1O маємо рівності:

$$k^2a^2 = a_1^2 + t^2, \tag{2}$$

$$k^2b^2 = b_1^2 + s^2. \tag{3}$$

Далі знаходимо

$$\overrightarrow{OA} = (b_1, 0, s), \quad \overrightarrow{OB} = (u, v, t).$$

Звідси за формулою для скалярного добутку дістаємо ще одне співвідношення між невідомими:

$$k^2ab\cos\gamma = b_1u + st. \tag{4}$$

Якщо поділимо рівності (2) і (4) на рівність (3), то матимемо

$$a^2\left(b_1^2 + s^2\right) = b^2\left(a_1^2 + t^2\right), \tag{5}$$

$$a\left(b_1^2 + s^2\right)\cos\gamma - bb_1u = bst. \tag{6}$$

Якщо з рівності (5) визначимо t^2 і підставимо у піднесену до квадрата рівність (6), то дістанемо рівняння для визначення невідомого s:

$$\left(a\left(b_1^2 + s^2\right)\cos\gamma - bb_1u\right)^2 = \\ = s^2\left(a^2s^2 + a^2b_1^2 - a_1^2b^2\right).$$

Елементарними перетвореннями це рівняння зводиться до біквадратного:

$$px^4 + qx^2 + r = 0, \tag{7}$$

в якому

$$\begin{cases} p = a^2 - a^2\cos^2\gamma = a^2\sin^2\gamma > 0, \\ r = -\left(ab_1^2\cos\gamma - bb_1u\right)^2 \le 0. \end{cases}$$

Оскільки за таких умов відповідне йому квадратне рівняння має додатний корінь, то існує дійсний розв'язок s рівняння (7).

Аналогічно з'ясовуємо, що існує потрібне значення t. Тоді з якої-небудь з рівностей (2)–(3) визначається й шукане значення k. Так завершується це коротке доведення теореми Люільє.

Аналітичне доведення теореми Польке

Приклад останнього доведення теореми Люільє спростовує поширену думку про те, що, мовляв, аналітичні доведення геометричних тверджень поступаються «синтетичним» за такими неформалізованими критеріями як краса, елегантність, винахідливість, економність тощо. У тому, що аналітичні доведення теж можуть характеризуватися усіма цими епітетами, ми зараз ще раз наочно переконаємося на прикладі повного доведення теореми Польке, яке у 1950-х роках запропонував відомий італійський математик Карло Манара (1916–2011) [18]. Нагадаємо, що теорема Польке – це окремий, але дуже важливий для практики випадок теореми Польке–Шварца. При цьому для практики важливий не тільки сам факт існування відповідного рівнобедреного прямокутного тетраедра, що проектується у заданий повний чотирикутник, а й прозорий алгоритм для визначення положення цього тетраедра в просторі. Доведення, яке ми розглянемо, забезпечує цей алгоритм. А «теоретиків» привабить те, що з нього елементарно виводиться дуже «незручна» для геометричного доведення фундаментальна теорема Гауса про необхідні й достатні умови на розміщення трьох відрізків на площині, аби їх можна було вважати за ортогональні проекції трьох рівних і взаємно перпендикулярних відрізків у просторі. (Принагідно зазначимо, що як і теорема Польке, теорема Гауса теж включена до книги Генріха Доррі «100 знаменитих проблем з елементарної математики за двохтисячолітню історію її розвитку» [16, с. 307–310]). З публікації автора не видно, чи бачив він цей наслідок. Свого часу ми вказали на нього у брошурі [13]. Незалежне від теореми Польке доведення теореми Гауса, яке фактично ґрунтується на ідеях зі статті Карло Манари, подається у [8].

Аби зробити авторське доведення цілком елементарним, нам довелося обійти залучення ним деяких фактів з вищої алгебри і геометрії, зокрема, посилання на властивості ортогональних матриць. Істотно спрощено також доведення сумісності одержаної визначальної системи рівнянь.

Отже, нехай потрібно довести, що для довільних трьох відрізків (позначатимемо їх OA, OB, OC), які належать одній площині α і не лежать на одній прямій, у просторі існують три попарно взаємно перпендикулярні і рівні відрізки OA', OB', OC' деякої довжини e, які проектуються у відрізки OA, OB, OC за деяким напрямком $\vec{l}$. Як уже зазначалося вище, припущення про суміщення спільних кінців обох трійок відрізків не порушує загальності розгляду. Крім того, далі замість відрізків нам зручно буде розглядати спрямовані по них вектори зі спільним початком O (рис. 15).

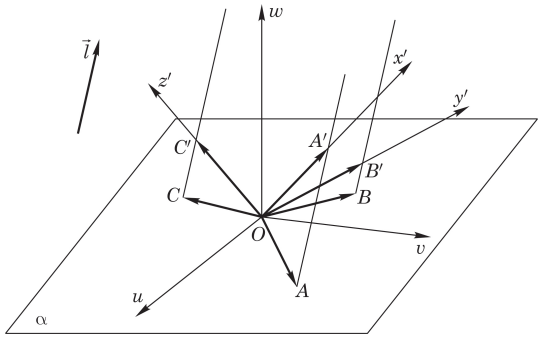


Рис. 15

Нехай положення заданих і шуканих відрізків-векторів визначаються відносно допоміжної системи координат $Ouvw$, координатна площина Ouv якої збігається з площиною проекцій α, тобто містить відрізки OA, OB, OC. Позначимо

$$\overrightarrow{OA} = (u_1, v_1, 0), \overrightarrow{OB} = (u_2, v_2, 0),$$
$$\overrightarrow{OC} = (u_3, v_3, 0), \overrightarrow{OA'} = (u'_1, v'_1, w'_1),$$
$$\overrightarrow{OB'} = (u'_2, v'_2, w'_2), \overrightarrow{OC'} = (u'_3, v'_3, w'_3).$$

Оскільки напрям $\vec{l}$ не може бути паралельним координатній площині Ouv, то третя координата цього вектора не дорівнює нулю. Через те її можна вважати рівною одиниці: $\vec{l} = (s, t, 1)$. Справді, якщо вектор $\vec{l}$ має координати (p, q, r) з $r \neq 0$, то вектор $\vec{l'}$ з координатами $\left(\frac{p}{r}, \frac{q}{r}, 1\right)$ колінеарний $\vec{l}$ і визначає той самий напрям паралельного проектування, що й вектор $\vec{l}$.

Очевидно, що для доведення теореми Польке достатньо показати, що при обумовленому розміщенні заданих і шуканих відрізків завжди знайдеться відповідний напрям $\vec{l}$ паралельного проектування, тобто координати s і t.

Те незначне обмеження на взаємне розміщення відрізків OA, OB, OC, яке полягає в тому, що вони не повинні лежати на одній прямій, все ж накладає певні обмеження на координати точок A, B, C.

Нехай, наприклад, відрізки OA і OB не лежать на одній прямій. Це означає, що векторна рівність $\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OB}$ не виконується при жодному λ. Отже, при жодному λ одночасно не виконуються рівності $u_1 = \lambda u_2$ та $v_1 = \lambda v_2$. Отже, $u_1 v_2 \neq u_2 v_1$, і тому число $\varphi_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$, тобто $\phi_3^2 > 0$. Якщо позначимо аналогічно $\varphi_2 = u_1 v_3 - u_3 v_1$ і $\varphi_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$, то легко зрозуміти, що згадане обмеження на розміщення відрізків OA, OB, OC рівносильне нерівності

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 > 0. \tag{8}$$

Запровадимо тимчасово ще одну систему координат $Ox'y'z'$, додатні півосі Ox', Oy', Oz' якої спрямовані по відрізках OA', OB', OC'. Одиничні базисні вектори з початком у точці O, напрями яких збігаються з напрямками осей Ox', Oy', Oz', позначимо відповідно через $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$. Аналогічно, одиничні базисні вектори з початком у точці O з напрямками осей Ou, Ov, Ow позначимо відповідно через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Очевидно, що

$$\vec{i'} = \frac{\overrightarrow{OA'}}{e} = \left(\frac{u'_1}{e}, \frac{v'_1}{e}, \frac{w'_1}{e}\right),$$
$$\vec{j'} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{e} = \left(\frac{u'_2}{e}, \frac{v'_2}{e}, \frac{w'_2}{e}\right),$$
$$\vec{k'} = \frac{\overrightarrow{OC'}}{e} = \left(\frac{u'_3}{e}, \frac{v'_3}{e}, \frac{w'_3}{e}\right).$$

Знайдемо тоді координати (i_1, i_2, i_3), (j_1, j_2, j_3), (k_1, k_2, k_3) векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ у системі координат $Ox'y'z'$. Взявши після цього скалярні квадрати цих векторів (які дорівнюють одиниці) та попарні скалярні добутки (що дорівнюють нулю), матимемо шість рівностей, які характеризують умову перпендикулярності та рівності відрізків OA', OB', OC'.

Скористаємось для цього відомою геометричною властивістю скалярного добутку, відповідно до якої координати i_1, i_2, i_3 як проекції одиничного вектора $\vec{i}$ на осі Ox', Oy', Oz', дорівнюють скалярним добуткам вектора $\vec{i}$ на вектори $\vec{i'}$, $\vec{j'}$, $\vec{k'}$. Тоді з урахуванням (3) матимемо

$$i_1 = \cos\angle\left(\vec{i}, \vec{i'}\right) = \vec{i} \cdot \vec{i'} =$$
$$= (1, 0, 0) \cdot \left(\frac{u'_1}{e}, \frac{v'_1}{e}, \frac{w'_1}{e}\right) = \frac{u'_1}{e}.$$

Далі так само знаходимо

$$i_2 = \vec{i}\cdot\vec{j}' = \frac{u_2'}{e}, \quad i_3 = \vec{i}\cdot\vec{k}' = \frac{u_3'}{e}.$$

Аналогічно, для координат векторів $\vec{j}$, $\vec{k}$ отримуємо

$$j_1 = \frac{v_1'}{e}, j_2 = \frac{v_2'}{e}, j_3 = \frac{v_3'}{e},$$
$$k_1 = \frac{w_1'}{e}, k_2 = \frac{w_2'}{e}, k_3 = \frac{w_3'}{e}.$$

Отже, шукані рівності мають вигляд:

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{3}(u_n')^2 = \sum_{n=1}^{3}(v_n')^2 = \sum_{n=1}^{3}(w_n')^2 = e^2;\\ &\sum_{n=1}^{3}u_n'v_n' = \sum_{n=1}^{3}v_n'w_n' = \sum_{n=1}^{3}u_n'w_n' = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

Для «зв'язування» шуканого вектора $\vec{l} = (s,t,1)$ з відрізками OA, OB, OC та OA', OB', OC', скористаємося його колінеарністю з векторами $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ та $\overrightarrow{CC'}$. Наприклад, колінеарність векторів $\overrightarrow{AA'} = (v_1 - v_1', u_1 - u_1', -w_1')$ та $\vec{l}$ рівносильна тому, що існує таке число λ_1, при якому $\overrightarrow{AA'} = \lambda_1\cdot\vec{l}$, або в координатній формі

$$v_1 - v_1' = \lambda_1 s, u_1 - u_1' = \lambda_1 t, -w_1' = \lambda_1.$$

Звідси $u_1 = u_1' - sw_1'$, $v_1 = v_1' - tw_1'$. Аналогічно знайдемо ще чотири співвідношення, а всі їх разом запишемо у скороченій формі:

$$u_n = u_n' - sw_n', \quad v_n = v_n' - tw_n', \tag{10}$$

$n = 1,2,3$. Тепер ці співвідношення потрібно пов'язати зі співвідношеннями (9). Для цього знайдемо значення таких трьох виразів:

$$a = \sum_{n=1}^{3}u_n^2, b = \sum_{n=1}^{3}v_n^2, c = \sum_{n=1}^{3}u_nv_n. \tag{11}$$

Враховуючи рівності (10), маємо

$$\begin{aligned}a &= \sum_{n=1}^{3}(u_n')^2 - 2s\sum_{n=1}^{3}u_n'w_n' + s^2\sum_{n=1}^{3}(w_n')^2,\\ b &= \sum_{n=1}^{3}(v_n')^2 - 2t\sum_{n=1}^{3}v_n'w_n' + t^2\sum_{n=1}^{3}(w_n')^2,\\ c &= \sum_{n=1}^{3}u_n'v_n' - t\sum_{n=1}^{3}u_n'w_n' -\\ &\quad - s\sum_{n=1}^{3}v_n'w_n' + st\sum_{n=1}^{3}(w_n')^2.\end{aligned}$$

Звідси на підставі рівностей (9)

$$a = e^2(1+s^2), b = e^2(1+t^2), c = e^2st. \tag{12}$$

Виключаючи, нарешті, з (12) параметр e, знаходимо систему рівнянь для визначення невідомих координат s і t вектора $\vec{l}$ через координати кінців відрізків OA, OB, OC:

$$\begin{cases}cs^2 - ast + c = 0,\\ ct^2 - bst + c = 0.\end{cases} \tag{13}$$

Якщо далі визначити t з першої рівності та підставити в другу, то після елементарних спрощень дістанемо біквадратне рівняння

$$s^4(ab - c^2) - s^2(a^2 - ab + 2c^2) - c^2 = 0. \tag{14}$$

Це рівняння вигляду:

$$ps^4 + qs^2 + r = 0,$$

у якому $r = -c^2 \le 0$,

$$p = ab - c^2 = \sum_{n=1}^{3}u_n^2\cdot\sum_{n=1}^{3}v_n^2 - \left(\sum_{n=1}^{3}u_nv_n\right)^2.$$

Безпосередньо перевіркою встановлюється, що $p = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2$ і тому, з урахуванням (8), $p > 0$. За таких умов рівняння (14) має дійсний розв'язок s.

Аналогічно з'ясовуємо, що існує шукане значення t. Теорему Польке доведено.

Після фактичного розв'язання системи (13) й визначення у такий спосіб вектора проектування $\vec{l} = (s, t, 1)$, з якої-небудь з рівностей (12) легко знайти e. Якщо побудувати півсферу радіуса e з центром O та з основою у площині α, то в перетині з цією півсферою проектуючих прямих, які проходять через точки A, B, C, дістанемо шукані точки A', B', C'.

Теорема Гауса

Як випливає з третьої рівності (12), у разі ортогонального проектування, тобто при $\vec{l} \perp \pi$ і отже $s = t = 0$, і лише в цьому разі, число c дорівнює нулю. Тоді з перших двох рівностей (12) матимемо: à $= b$. Звідси, враховуючи рівності (11), можемо стверджувати, що необхідною і достатньою умовою ортогональності проектування є одночасне виконання таких двох рівностей:

$$\begin{cases} u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0, \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \end{cases} \qquad (15)$$

Для умов (15) існує інша, значно привабливіша форма запису, яка реалізовується з використанням комплексних чисел.

Нагадаємо, що комплексними називаються числа вигляду $z = a + bi$, у яких a і b – дійсні числа, а i – так звана уявна одиниця. Алгебраїчні операції з комплексними числами виконуються за тими ж правилами, що й дії зі звичайними двочленами. Єдина формальна відмінність полягає в тому, що цілим додатним степенем уявної одиниці і може бути лише або ± 1, або $\pm i$. Це випливає з визначальної рівності для уявної одиниці: $i^2 = -1$. Зокрема, для квадрата комплексного числа $z = a + bi$ маємо вираз

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi. \qquad (16)$$

Два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ називаються рівними тоді і лише тоді, коли $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Дійсні числа включаються до множини комплексних чисел за допомогою такого правила: при $b = 0$ комплексне число $a + bi$ є дійсним числом a. Зокрема, рівність $a + bi = 0$ еквівалентна рівностям $a = 0$ і $b = 0$.

Геометрично комплексне число $z = a + bi$ зображають на координатній площині за допомогою вектора з початком у початку координат і кінцем у точці (a, b).

Цих відомостей про комплексні числа нам зараз достатньо. Поставимо у відповідність відрізкам $\overrightarrow{OA} = (u_1, v_1)$, $\overrightarrow{OB} = (u_2, v_2)$, $\overrightarrow{OC} = (u_3, v_3)$ комплексні числа $z_1 = u_1 + v_1 i$, $z_2 = u_2 + v_2 i$, $z_3 = u3 + v_3 i$ і знайдемо суму їхніх квадратів. Враховуючи (16), матимемо

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \\ -v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + 2i(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3).$$

Звідси та з рівностей (15) випливає така теорема.

Теорема Гаусса. *Для того, щоб три напрямлені відрізки $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, які виходять з однієї точки, були ортогональними проекціями трьох рівних і попарно перпендикулярних відрізків у просторі, необхідно й достатньо, щоб відповідні відрізкам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ комплексні числа z_1, z_2, z_3 задовольняли рівність*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Для практичного застосування теореми Гауса з метою побудови ортогональних проекцій потрібно знати, як утворюється вектор $\vec{q}$, що відповідає комплексному числу z_2, з вектора $\vec{p}$, що відповідає числу z. Правило таке: $|\vec{q}| = |\vec{p}|^2$, а кут ψ, який вектор $\vec{q}$ утворює з віссю абсцис, удвічі більший за кут φ, який з тією ж віссю утворює вектор $\vec{p}$ (кути відраховуються проти годинникової стрілки).

Якщо застосувати теорему Гаусса до аналізу наведеного на початку статті прикладу 2 із зображенням сфери та системи координат (див. рис. 8), то одразу з'ясовується, що це зображення неправильне. Справді, якщо комплексні числа, що відповідають зображенням радіусів OA, OB, OC сфери, які належать осях Ox, Oy, Oz, позначити відповідно через z_1, z_2, z_3, то, на підставі щойно зазначеного про піднесення комплексних чисел до квадрата, легко переконатися, що прямий кут між числами-векторами z_2, z_3 після піднесення їх до квадратів перетвориться на розгорнутий. Тому перетворити суму $z_2^2 + z_3^2$ на нуль може додавання лише такого числа z_1^2, яке з нею колінеарне. А це при відображених на рисунку співвідношеннях між довжинами відрізків OA, OB, OC можливе лише тоді, коли осі Ox і Oz протилежно напрямлені (рис. 16). Якщо ж ви захоче-

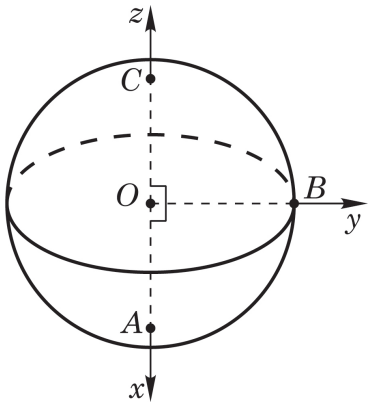


Рис. 16

те виконати правильний рисунок, але уникнути такого збігу осей Ox і Oz, то вісь Oy потрібно «відхилити» від перпендикулярного розміщення до осі Oz (рис. 17). Тоді правильне положення осі Ox визначиться з умови спряженості. Як відомо, вона полягає у тому, що проекція одного з перпендикулярних діаметрів кола ділить навпіл хорди, паралельні проекції іншого.

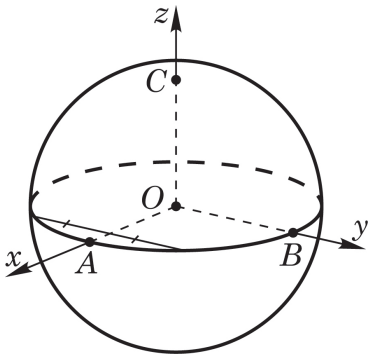


Рис. 17

Задачі

1. Прямий кут проектується ортогонально на площину. Одна з його сторін паралельна площині проекції. Довести, що проекція цього кута– теж прямий кут. Доведіть (або спростуйте) «обернене» твердження: якщо прямий кут при ортогональному проектуванні проектується у прямий, то одна з його сторін паралельна площині проекцій.

2. Гострий кут α проектується ортогонально на площину. Одна з його сторін паралельна площині проекції. Довести, що для величини проекції α' цього кута справджується формула

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi,$$

у якій φ – кут між площиною кута α і площиною проекції.

3. Доведіть, що в загальному випадку ортогональною проекцією будь-якого гострого кута може бути тупий кут будь-якої величини. Чи можна, навпаки, як завгодно великий тупий кут ортогонально спроектувати у як завгодно малий гострий кут?

4. Дві сторони повного чотирикутника, який є ортогональною проекцією правильного тетраедра, не мають спільної вершини. Довести, що одна із цих сторін, або її продовження, ділить навпіл іншу.

Вказівка. Скористайтесь результатами задачі 1.

5. Доведіть, що паралельні проекції рівновеликих паралелограмів, розміщених в одній площині, рівновеликі.

Вказівка. Розгляньте спочатку паралелограми, які мають спільну сторону.

6. Г. А. Шварц при доведенні теореми Польке–Шварца [21] подає своє доведення теореми Люільє, ключові моменти якого полягають у наступному. Один із двох заданих трикутників $A'B'C'$ перетворюється на подібний йому так, щоб сторона $B'C'$ стала рівною стороні BC іншого трикутника ABC. Потім ці рівні сторони суміщаються, а трикутники розміщуються в одній площині (рис. 18).

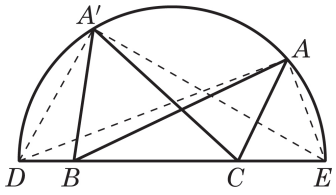


Рис. 18

Далі будується півколо з діаметром DE на прямій BC, яке проходить через точки A, A'. У прямокутних трикутниках DAE і $D'AE$ кути при вершинах D і E гострі. Нехай без обмеження загальності $\angle ADE < \angle A'DE$. Тоді площина трикутника $A'DE$ разом із трикутником $A'BC$ повертається навколо прямої $A'D$ на такий кут φ, що

$$\cos\phi = \frac{\operatorname{tg}\angle ADE}{\operatorname{tg}\angle A'DE}.$$

З урахуванням задачі 2, проекцією прямокутного трикутника $A'DE$ на початкову площину трикутника ABC буде прямокутний трикутник $A'DE'$, подібний трикутнику ADE. При цьому точки B, C спроектуються в такі точки B'', C'', що трикутник $A'B''C''$ буде подібним трикутнику ABC. Цим доведення теореми Люільє завершується.

Продумайте всі етапи цього доведення й обґрунтуйте останній логічний перехід про подібність трикутників $A'B''C''$ і ABC.

7. Доведіть теорему Польке–Шварца у такій видозміненій формі: будь-який повний чотирикутник може бути паралельною проекцією тетраедра, подібного будь-якому заданому тетраедру.

8. Доведіть, що будь-який паралелепіпед з достатньо довгими бічними ребрами можна перетнути площиною так, що в перерізі вийде прямокутник з даним відношенням сторін (у тому числі й квадрат). Доведіть, також, що в перерізі можна одержати й ромб з будь-яким гострим кутом.

9. Доведіть, що будь-який плоский шестикутник, всі пари протилежних сторін якого паралельні та рівні, можна розглядати як контур паралельної проекції деякого куба (при цьому сітка із шести паралелограмів, побудованих усередині шестикутника на кожній парі сусідніх сторін, буде проекцією ребер куба).

10. У технічному кресленні при виборі зображень OA, OB, OC трьох одиничних і взаємно перпендикулярних масштабних відрізків в ортогональній проекції зазвичай керуються двома такими стандартами:

1) ізометрична проекція: $OA = OB = OC = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82$, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$;
2) диметрична проекція: $OB = OC = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94$, $OA = \frac{1}{2}OB \approx 0{,}47$, $\angle AOB = \angle COA \approx 131°25'$, $\angle BOC \approx 97°11'$.

Перевірте, наскільки ці стандарти відповідають вимогам теореми Гаусса.

11. Із поданого у цій статті аналітичного доведення теореми Польке виведіть такий наслідок: якщо відрізки e_1, e_2, e_3 є паралельними проекціями на площину трьох одиничних і попарно перпендикулярних відрізків у просторі, то

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2\omega,$$

де ω – кут між проектуючими прямими і площиною проекцій.

12. Доведіть, що сума квадратів комплексних чисел, які відповідають проекціям усіх ребер куба, дорівнює нулю. Доведіть аналогічне твердження для правильного тетраедра і правильного октаедра.

Вказівка. Правильний тетраедр можна одержати з куба, якщо у кожній грані провести по одній діагоналі так, щоб діагоналі протилежних граней були мимобіжними. Правильний октаедр можна дістати з правильного тетраедра, якщо провести усі середні лінії кожної грані.

Література

[1] Атанасян Л. С., Базылев В. Т. Геометрия. Ч.II. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.

[2] Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б. Геометрия. Ч.II. – М.: Просвещение, 1976. – 448 с.

[3] Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия. Ч.II. – М.: Просвещение, 1975. – 368 с.

[4] Бескин Н. М. Основное предложение аксонометрии. – В сб. Вопросы современной начертательной геометрии. – Под ред. Н. Ф. Четверухина. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947, с. 55–126.

[5] Вольберг О. А. Лекции по начертательной геометрии. – М.-Л.: Учпедгиз, 1947. – 348 с.

[6] Глаголев Н. А. Начертательная геометрия. Изд. 3-е. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 220 с. (Українське видання: Глаголєв Н. О. Нарисна геометрія. Пер. з 2-го рос. вид. – К.: Рад. школа, 1952. – 247 с.).

[7] Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф. Аксонометрия. – М.: Гостехиздат, 1953. – 292 с.

[8] Заславский А. Параллельная проекция. //Квант, 2001, № 4, с. 16–19.

[9] Киселев А. Элементарная геометрия. Для средних учебных заведений. – Изд. 23-е. М.: Издание Т-ва «В. В. Думнов – насл. Бр. Салаевых», 1914. – XII, 293 с.

[10] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 2: Геометрия. – М.: Наука, 1987. – 416 с.

[11] Панкратов А. А. Начертательная геометрия. Изд. 2-е, стер. – М.: Учпедгиз, 1963. – 204 с.

[12] Тадеєв В. О. Геометрія. Геометричні тіла. Векторно-координатний метод у стереометрії. – Підручник для навчання математиці на академічному і профільному рівнях в 11-х класах загальноосвітніх навчальних закладів. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2012. – 384 с.

[13] Тадеєв В. О. Граматика інженерного «есперанто» (Начерк основних ідей та методів нарисної геометрії). – Тернопіль: Підручники і посібники, 2002. – 96 с.

[14] Четверухин Н. Ф. Введение в высшую геометрию. – М.: Учпедгиз, 1934. – 183 с.

[15] Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences. Ed. I. Sretten-Guinnes. – L.–N.-Y: Routledge, 1994. – 1818 p.

[16] Dörrie H. 100 great problems of elementary mathematics: their history and solution. – N.-Y: Dover, 1965. – X, 394 p.

[17] L'Huilier S. [Solution du problème: Trouver le plan sur lequel projetant orthogonalement un triangle donné, sa projection soit un triangle semblable à un autre triangle donné]// Annales de mathématiques pures et appliquées, 1811–1812, T. 2, p. 296–300.

[18] Manara C. F. L'aspetto algebrico di un fondamentale teorema di geometria descrittiva. //Periodico di matematiche, 1954, 32, № 3, p. 142–149.

[19] Pémová M. Theory and practice of the representation of space objects in the school mathematics. // Acta Didactica Universitatis Comenianae// Mathematics, 2008, № 8, p. 79–101.

[20] Salenius T. Elementärt bevis för Pohlkes sats. //Nordisk Matematisk Tidskrift. – Vol. 25/26, № 3/4, 1978, p. 150–152.

[21] Schwarz H. A. Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. // Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal). – 1864, Bd. 63, S. 309–314.

[22] Scriba C. J., Schreiber P. 5000 Years of Geometry: Mathematics in History and Culture. – Basel: Springer (Birkäduser), 2015. – XII, 626 p.

[23] Sklenáriková Z., Pémová M. The Pohlke-Schwarz Theorem and its Relevancy in the Didactics of Mathematics // Quaderni di Ricerca in Didattica, 2007, № 17, p. 152–164.

Вибрані задачі Двадцятого турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка

Федак Іван Васильович
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

З 29 жовтня до 2 листопада 2017 року у Вінниці проходив XX Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка. У ювілейному турнірі взяли участь 95 школярів, які представляли 20 команд із різних регіонів України: Волинь (2 команди), Житомир, Івано-Франківська обл. (2), Харків (3), Київ (2), Чернівці, Одеса, Хмельницька обл. (2), Львівська обл., Дніпропетровська обл., Вінниця (2), Краматорськ, Тернопільська обл.

Дипломами переможців турніру нагороджено 10 команд. Дві команди, «Харків-27» та «Харків-45», отримали дипломи першого ступеня. Дипломами другого ступеня нагороджені команди «Геліос» (збірна команда учнів м. Чернівці), «Волинь» (збірна команда Волинської області), «РПДМ» (збірна команда ліцеїв № 145 та № 208 м. Києва), «Технічний ліцей» (команда КЗ «Вінницький технічний ліцей»). Команди «ДОЛІФМП» (комунальний заклад освіти «Дніпропетровський обласний ліцей-інтернат фізико-математичного профілю»), «ОСНОва» (команда фізико-математичної гімназії № 17 м. Вінниця), «Альфа» (команда Івано-Франківського природничо-математичного ліцею), «Радикал» (команда Надвірнянського ліцею Надвірнянської міської ради) здобули дипломи третього ступеня. Абсолютним переможцем турніру стала команда «Харків-27» у складі: Крупчицький Олексій, Колупаєв Олексій, Ніколаєв Артем, Слободянюк Денис, Купріянов Михайло (керівник команди — канд. фіз.-мат. наук, заслужений вчитель України Щербина Олексій Сергійович).

Пропонуємо вашій увазі вибрані задачі турніру із розв'язками. Частину розв'язків люб'язно надано командою «Радикал» (м. Івано-Франківськ) командою «Геліос» (м. Чернівці).

З розв'язанням інших задач читачі можуть ознайомитися на офіційному сайті Всеукраїнських турнірів юних математиків імені професора М.Й. Ядренка http://www.tym.in.ua.

«Цілочисловий трикутник»

Укажіть хоч один прямокутний трикутник ABC із цілочисловими сторонами, всередині якого можна вказати таку точку M, що довжини відрізків MA, MB та MC є цілими. Чи існує безліч таких трикутників, жодні два з яких не є подібними?

Розв'язання. Нескладно переконатися, що таким є, наприклад, трикутник, вершини якого мають координати: $A\,(80;\,0)$, $B\,(0;\,84)$, $C\,(0;\,0)$. У ньому $AC = 80$, $BC = 84$ і за теоремою Піфагора $AB = 116$.

Якщо тепер $M\,(40;9)$, то за тією ж теоремою Піфагора знаходимо $MA = MC = 41$, $MB = 85$.

Доведемо, що неподібних між собою прямокутних трикутників існує безліч. Нехай $A\,(4mn;0)$, $B\left(0;4m^2-n^2\right)$, $C\,(0;0)$, де m, n — такі натуральні числа, що $m > n > 1$. Тоді $AC = 4mn$, $BC = 4m^2 - n^2$ і за теоремою Піфагора $AB = 4m^2 + n^2$.

Взявши тепер точку $M\left(2mn;m^2-n^2\right)$, отримаємо

$$MA = MC = m^2 + n^2$$

та

$$MB^2 = \left(3m^2\right)^2 + (2mn)^2 =$$
$$= m^2\left((3m)^2 + (2n)^2\right) = m^2\left(n^2+1\right)^2,$$

якщо $3m = n^2 - 1$.

Покладаючи, наприклад, $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}$, звідси знаходимо $m = k\,(3k+2)$, $k \in \mathbb{N}$.

Серед отриманих при цьому для різних $k \in \mathbb{N}$ прямокутних трикутників є нескінченна кількість таких, жодні два з яких не є подібними, бо відношення катетів

$$\frac{AC}{BC} = \frac{4mn}{4m^2-n^2} =$$
$$= \frac{4k\,(3k+2)\,(3k+1)}{4k^2-(3k+2)^2-(3k+1)^2} =$$
$$= \frac{4k\,(3k+1)\,(3k+2)}{(k+1)\,(2k+1)\,(3k-1)\,(6k+1)}$$

прямує до нуля при $k \to \infty$, отже, або саме утворює спадну послідовність, або містить спадну підпослідовність.

Зокрема, при $k = 1, m = 5, n = 4$ отримуємо наведений першим приклад потрібного прямокутного трикутника.

Відзначимо, що можна було б також вибирати $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому отримали би $m = (k+1)\,(3k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що точка M не обов'язково повинна знаходитися на середній лінії трикутника. Наприклад, для прямокутного трикутника з вершинами $A\,(69;0)$, $B\,(0;92)$, $C\,(0;0)$ і точки $M\,(21;20)$ будемо мати $AC = 69$, $BC = 92$, $AB = 115$, $MA = 52$, $MB = 75$, $MC = 29$. □

«Числа Фібоначчі та площі»

Послідовність Фібоначчі задається рівностями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

1. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ площа трикутника $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1\,(F_{m+1};F_{m+2})$, $A_2\,(F_{m+3};F_{m+4})$, $A_3\,(F_{m+5};F_{m+6})$ дорівнює 0,5.

2. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами у точках $A_1\,(F_{m+1};F_{m+2})$, $A_2\,(F_{m+3};F_{m+4})$, $A_3\,(F_{m+5};F_{m+6})$, $A_4\,(F_{m+7};F_{m+8})$ є трапецією, площа якої дорівнює 2,5.

3. Доведіть, що площа многокутника $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1\,(F_{m+1};F_{m+2})$, $A_2\,(F_{m+3};F_{m+4})$, …, $A_n\,(F_{m+2n-1};F_{m+2n})$ не залежить від вибору числа $m \geq 0$, та знайдіть цю площу.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, тобто доведемо рівність

$$\frac{F_{m+7}-F_{m+1}}{F_{m+8}-F_{m+2}} = \frac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}}.$$

Для її правої частини безпосередньо за означенням чисел Фібоначчі отримуємо

$$\frac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+6}-F_{m+4}} = \frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Крім того, маємо

$$F_{m+7} - F_{m+1} =$$
$$= (F_{m+6} + F_{m+5}) - (F_{m+3} - F_{m+2}) =$$
$$= ((F_{m+4} + F_{m+5}) + F_{m+5}) -$$
$$- (F_{m+3} - (F_{m+4} - F_{m+3})) =$$
$$= 2F_{m+5} + 2F_{m+4} - 2F_{m+3} = 4F_{m+4}.$$

Аналогічно можемо довести рівність $F_{m+8} - F_{m+2} = 4F_{m+5}$. Тому також

$$\frac{F_{m+7} - F_{m+1}}{F_{m+8} - F_{m+2}} = \frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Нескладно також показати, що дві інші сторони не є паралельними.

З доведеного випливає, що всі чотирикутники $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1\,(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2\,(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3\,(F_{m+5}; F_{m+6})$, $A_4\,(F_{m+7}; F_{m+8})$ є трапеціями з основами A_1A_4 та A_2A_3.

Отже, рівними є площі трикутників $A_1A_2A_3$ та $A_2A_3A_4$ як таких, що мають спільну основу A_2A_3 та рівні висоти, проведені до неї. Звідси випливає, що площі всіх трикутників $A_1A_2A_3$ дорівнюють площі трикутника з вершинами $A_1\,(F_1; F_2)$, $A_2\,(F_3; F_4)$, $A_3\,(F_5; F_6)$, тобто з вершинами $A_1\,(1; 1)$, $A_2\,(2; 3)$, $A_3\,(5; 8)$.

Якщо точки F_1, F_3, F_5 є проекціями точок A_1, A_2, A_3 відповідно на вісь абсцис, то площу цього трикутника виразимо через площі відповідних прямокутних трапецій:

$$S_{A_1A_2A_3} = S_{F_1A_1A_2F_3} + S_{F_3A_2A_3F_5} - S_{F_1A_1A_3F_5} = \\ = \frac{(1+3)\cdot 1}{2} + \frac{(3+8)\cdot 3}{2} - \frac{(1+8)\cdot 4}{2} = \frac{1}{2},$$

що й треба було довести в пункті 1.

Розглянемо тепер довільний многокутник $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1\,(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2\,(F_{m+3}; F_{m+4})$, $\ldots$, $A_n\,(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$. З доведеної вище паралельності випливатиме, що його площа не залежить від вибору $m \geq 0$. Тому, покладаючи $m = 0$, обчислимо площу многокутника з вершинами $A_1\,(F_1; F_2)$, $A_2\,(F_3; F_4)$, $\ldots$, $A_n\,(F_{2n-1}; F_{2n})$.

Така задача була запропонована в журналі *The Fibonacci Quarterly в розділі Elementary problems and solutions* (Vol. 53.2, May 2015. – B-1167. Proposed by Atara Sriki and Opher Liba). Наводимо переклад її розв'язання, запропонованого професором Гаррісом Квонгом.

Такий многокутник є опуклим і його можна розбити на $n - 2$ трикутників з вершинами $(F_1; F_2)$, $(F_{2k-1}; F_{2k})$ та $(F_{2k+1}; F_{2k+2})$, де $2 \leq k \leq n-1$. При цьому площа кожного трикутника з такими трьома вершинами може бути виражена через площі трьох прямокутних трапецій, які знаходяться під трьома його сторонами і обмежені знизу віссю абсцис.

Оскільки $(F_1; F_2) = (1; 1)$, то ми отримуємо:

$$2\Delta_k = (F_{2k-1} - 1)(F_{2k} + 1) + \\ + (F_{2k+1} - F_{2k-1})(F_{2k} + F_{2k+2}) - \\ - (F_{2k+1} - 1)(F_{2k+2} + 1) = \\ = F_{2k}F_{2k+1} - F_{2k-1}F_{2k+2} + F_{2k-1} + \\ + (F_{2k+2} - F_{2k+1} - F_{2k}) = \\ = \frac{L_{4k+1} - 1}{5} - \frac{L_{4k+1} + 4}{5} + F_{2k-1} = \\ = F_{2k-1} - 1.$$

Отже,

$$2\sum_{k=2}^{n-1}\Delta_k = \sum_{k=2}^{n-1} F_{2k-1} - (n-2) = \\ = (F_{2n-2} - 1) - (n-2),$$

і площа многокутника дорівнює

$$S_n = \frac{F_{2n-2} - n + 1}{2}.$$

Тут через L_{4k+1} позначені числа Люка з індексом $4k + 1$, означення яких сформульоване в наступній задачі.

Покладаючи $n = 4$, отримаємо, що площі всіх трапецій $A_1A_2A_3A_4$ дорівнюють

$$\frac{F_6 - 3}{2} = \frac{5}{2},$$

що дає відповідь на п. 2.

Справедливе й загальніше від доведеного вище твердження: площа многокутника $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1\,(F_{m+k}; F_{m+2k})$, $A_2\,(F_{m+3k}; F_{m+4k})$, $\ldots$,

$A_n\left(F_{m+(2n-1)k}; F_{m+2nk}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, не залежить від вибору чисел $m \geq 0$ і дорівнює

$$\frac{F_k\left(F_{2k(n-1)} - (n-1)F_{2k}\right)}{2}.$$

Ще більш загальний результат доведено автором цієї статті при розв'язуванні задачі B-1195 з журналу *The Fibonacci Quarterly* (Vol. 55.3, August 2017. Elementary problems and solutions).

Нехай послідовність визначена рівностями:

$$G_0 = a,\ G_1 = b,\ G_{k+1} = G_k + G_{k-1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Тоді площа многокутника з вершинами $A_1\left(G_{m+k}; G_{m+2k}\right)$, $A_2\left(G_{m+3k}; G_{m+4k}\right)$, …, $A_n\left(G_{m+(2n-1)k}; G_{m+2nk}\right)$, $k \in \mathbb{N}$, не залежить від вибору чисел $m \geq 0$ і дорівнює

$$\frac{|\mu| F_k\left(F_{2k(n-1)} - (n-1)F_{2k}\right)}{2},$$

де $\mu = a^2 + ab - b^2$. □

«Числа Фібоначчі та Люка»

Числа Люка задаються рівностями $L_1 = 1$, $L_2 = 3$, $L_{k+2} = L_k + L_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Числа Фібоначчі позначені F_k.

1. Для кожного $n \geq 1$ доведіть, що

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}} + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}} + \frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}} = \frac{L_{2n-1}}{L_{2n+1}} + \frac{L_{2n+1}}{L_{2n-1}} - \frac{5}{L_{2n-1}L_{2n+1}}.$$

2. Запропонуйте і доведіть аналогічну рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами.

Розв'язання. а) Використовуючи формули Кассіні

$$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n-1}F_{2n+1}$$

та

$$L_{2n}^2 - 5 = L_{2n-1}L_{2n+1},$$

отримаємо рівності

$$F_{2n-1}^2 + F_{2n+1}^2 + 1 = \\ = (F_{2n+1} - F_{2n-1})^2 + 1 + 2F_{2n-1}F_{2n+1} = \\ = \left(F_{2n}^2 + 1\right) + 2F_{2n-1}F_{2n+1} = 3F_{2n-1}F_{2n+1}$$

та

$$L_{2n-1}^2 + L_{2n+1}^2 - 5 = \\ = (L_{2n+1} - L_{2n-1})^2 - 5 + 2L_{2n-1}L_{2n+1} = \\ = \left(L_{2n}^2 - 5\right) + 2L_{2n-1}L_{2n+1} = 3L_{2n-1}L_{2n+1}.$$

Тому для всіх натуральних n обидві частини заданої рівності дорівнюють 3.

б) Аналогічна рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами має вигляд

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}} + \frac{F_{2n+2}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}} = \\ = \frac{L_{2n}}{L_{2n+2}} + \frac{L_{2n+2}}{L_{2n}} + \frac{5}{L_{2n}L_{2n+2}}.$$

Для всіх натуральних n обидві її частини також дорівнюють 3. Для доведення використовуємо аналогічні перетворення і формули Кассіні у вигляді

$$F_{2n+1}^2 - 1 = F_{2n}F_{2n+2}$$

та

$$L_{2n+1}^2 + 5 = L_{2n}L_{2n+2}.$$ □

«Система з числами Фібоначчі»

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x_1^3 + x_1 + x_2 = F_1 x_1^2 + F_3,$$
$$x_2^5 + x_2 + x_3 = F_2 x_2^4 + F_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{2016}^{4033} + x_{2016} + x_{2017} = F_{2016}\, x_{2016}^{4032} + F_{2018},$$
$$x_{2017}^{4035} + \frac{F_{2019} - 1}{F_{2017}}\, x_{2017} + x_1 = \\ = F_{2017}\, x_{2017}^{4034} + F_{2019}.$$

Розв'язання. Скориставшись рівностями $F_1 = F_2 = 1, F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$\begin{gathered}(x_1 - F_1)\left(x_1^2 + 1\right) = F_2 - x_2,\\ (x_2 - F_2)\left(x_2^4 + 1\right) = F_3 - x_3,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x_{2016} - F_{2016})\left(x_{2016}^{4032} + 1\right) = F_{2017} - x_{2017},\\ (x_{2017} - F_{2017})\left(x_{2017}^{4034} + \frac{F_{2019} - 1}{F_{2017}}\right) = F_1 - x_1.\end{gathered}$$

Звідси отримуємо єдиний розв'язок: $x_k = F_k$, $k = 1,2,\ldots,2017$.

Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 > F_1$, то з рівнянь системи послідовно отримуємо суперечність

$$\begin{gathered}x_1 > F_1 \Rightarrow x_2 < F_2 \Rightarrow x_3 > F_3 \Rightarrow \ldots\\ \Rightarrow x_{2017} > F_{2017} \Rightarrow x_1 < F_1.\end{gathered}$$

Аналогічно приходимо до суперечності, припустивши $x_1 < F_1$. □

«Рівняння з біноміальними коефіцієнтами»

Знайдіть всі такі натуральні числа n та k, що $\binom{n-1}{k+1} = \binom{n+1}{k-1}$.

Розв'язання. З умови задачі отримуємо рівність

$$\begin{gathered}n(n+1)k(k+1) = (n-k-1)\times\\ \times(n-k)(n-k+1)(n-k+2).\end{gathered} \tag{1}$$

Позначимо $p = n - k$.

Якщо $p = 2$, то (1) зведеться до рівняння

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = 4!,$$

яке має один корінь $k = 1$. Тоді $n = 3$.

Якщо $p > 2$, то виконаємо такі перетворення рівності (1):

$$\begin{gathered}4n^2k^2 + 4nk(n+k) + 4nk =\\ = 4(p-1)p(p+1)(p+2),\\ (2nk + n + k)^2 - (n+k)^2 + 4nk =\\ = 4(p^2 + p - 2)(p^2 + p),\\ (2nk + n + k)^2 - (n-k)^2 =\\ = (2p^2 + 2p - 2)^2 - 4,\\ (2nk + n + k)^2 = (2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4.\end{gathered}$$

Оскільки при $p > 2$ маємо

$$\begin{gathered}(2p^2 + 2p - 2)^2 <\\ < (2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4 <\\ < (2p^2 + 2p - 1)^2,\end{gathered}$$

то число $(2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4$ не може бути повним квадратом. Отже, в такому разі інших розв'язків початкового рівняння не отримаємо.

Для повноти розв'язання розглянемо також випадки, коли $p = n - k \le 1$. При цьому врахуємо, що для $l > m$ прийнято вважати $\binom{m}{l} = 0$. Це цілком логічно, бо вибрати із множини більше елементів, ніж вона містить, не можна.

Відповідно, при $p = -2, -1, 0, 1$ для всіх натуральних чисел n та k у лівій частині рівності $\binom{n-1}{k+1} = \binom{n+1}{k-1}$ отримаємо нуль, а її права частина буде додатною. Тому у цих випадках рівняння не матиме розв'язків.

Якщо ж $p = n - k \le -3$, то в обох частинах заданого рівняння отримаємо нулі. Звідси знаходимо нескінченну множину його розв'язків з довільними натуральними n та k, які задовольняють нерівність $k \ge n + 3$. □

«Сума кубів»

Знайдіть хоч одну четвірку таких натуральних чисел a, b, c, d, що

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3. \tag{2}$$

Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

Розв'язання. Наведене в умові рівняння досліджувалося багатьма вченими, починаючи з Діофанта, який, за власним свідченням, у свої книзі «Порізми» довів теорему, що різниця двох кубів раціональних чисел є сумою кубів двох раціональних чисел; на жаль, книга до нас не дійшла. У 1591 році Франсуа Вієт довів теорему Діофанта: він підставив у (2)

$$a = d - x, b = \frac{d^2x}{c^2} - c,$$

знайшов, що $x = \frac{3c^3d}{c^3+d^3}$, та отримав звідси нескінченну серію розв'язків рівняння (2) у раціональних числах:

$$a = \frac{d(d^3 - 2c^3)}{c^3 + d^3}, b = \frac{c(2d^3 - c^3)}{c^3 + d^3}, \quad (3)$$

c,d – довільні раціональні числа. Леонард Ейлер у 1770 році довів, що всі раціональні розв'язки рівняння (2) задаються формулами

$$a = tF(x,y,z), b = tF(-x,y,-z),$$
$$c = tF(-x,-y,z), d = tF(-x,y,z),$$

де x,y,z – довільні раціональні числа, а

$$F(x,y,z) = 9x^3 + 3x^2(3y + z) +$$
$$+ 3x(y - z)^2 + (3y^2 + z^2)(y + z);$$

Варто зауважити, що рівносильні формули були незалежно знайдені Срінівасою Рамануджаном. За допомогою цих формул можна отримати нескінченну серію цілих розв'язків рівняння (2), підставляючи цілі x,y,z,t. (Більше того, цими формулами задаються всі цілі розв'язки рівняння, але x,y,z,t при цьому не обов'язково будуть цілими.)

З формул Вієта та Ейлера можна отримати нескінченну серію натуральних розв'язків, що не утворюються один з іншого множенням на одне і те саме число. Наприклад, можна підставити в формулу Вієта (2)

$$c = xt, d = (2x + 1)t, t = x^3 + (2x + 1)^3.$$

Такий підхід не є систематичним, він не працюватиме з іншими рівняннями такого вигляду. Тому ми покажемо, як за допомогою модифікації стандартного для діофантових рівнянь методу раціональних січних можна знайти нескінченну серію натуральних розв'язків рівняння (2).

Поділивши (2) на d^3, отримаємо рівняння

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \quad (4)$$

в раціональних числах. З розв'язку (3,4,5,6) рівняння (2) отримаємо розв'язок $O = (x_0,y_0,z_0) = (1/2,2/3,5/6)$ рівняння (4), який буде нашою «відправною точкою». Метод раціональних січних полягає в проведенні через O прямих із раціональними коефіцієнтами до перетину з поверхнею (4). Якби поверхня була квадратною, то другі точки перетину прямих з поверхнею давали б раціональні розв'язки (4). Для кубічної поверхні у загальному випадку буде ще дві точки перетину та буде складно забезпечити раціональність координат. Трюк полягає в тому, щоб провести пряму так, щоб вона перетинала поверхню в точці O «двічі», тобто щоб вона дотикалася до поверхні. Використовуючи формули аналітичної геометрії, маємо, що рівняння дотичних до поверхні у точці O мають вигляд

$$y - y_0 = t(x - x_0), z - z_0 = s(x - x_0),$$

де t,s – фіксовані числа, такі, що

$$16t + 25s + 9 = 0.$$

Підставляючи це у рівняння, одержимо розв'язки

$$x = \frac{1}{2} - u,\ y = \frac{2}{3} - tu,\ z = \frac{5}{6} - su,$$
$$u = \frac{3 + 4t^2 + 5s^2}{1 + t^3 + s^3}.$$

Якщо брати s,t раціональними (так, щоб $16t + 25s = 9$), то з них можна одержати цілі розв'язки рівняння (2). Натуральні розв'язки одержимо у тих випадках, коли всі числа x,y,z додатні або рівно два з них від'ємні. Неважко переконатися, що другу умову виконано при $1 \le t \le 10$. Довести, що серед отриманих розв'язків нескінченно багато принципово різних, залишаємо читачу як вправу. Також пропонуємо замислитися, чому вказаний підхід не працює, якщо у якості «відправної» взяти точку (1,0,0) або (1,1, − 1). □

«Рахуємо перестановки»

Для множини $\{1, 2, \dots, n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях.

1. Доведіть, що

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$$

Для $n \ge 3$ доведіть нерівність

$$\frac{n!}{2} \le \sum_{k=2}^{n} kU_k \le \frac{2 \cdot n!}{3}.$$

2. Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k = 2 \cdot n!$

Розв'язання. Для доведення рівностей з умови використаємо «підрахунок двома способами». Позначимо S_n множину перестановок елементів множини $\{1, 2, \dots, n\}$; для $\sigma \in S_n$ та $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ покладемо $\mathbf{1}_{\sigma,i} = 1$, якщо i є нерухомим елементом σ. Тоді $s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i}$ є кількістю нерухомих елементів σ і

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i}.$$

Оскільки сума $\sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i}$ – кількість перестановок, які не рухають i, то вона дорівнює $(n-1)!$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Подібним чином доводиться друга рівність:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma)^2 = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i} \right)^2 = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i} \mathbf{1}_{\sigma,j} = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i} \mathbf{1}_{\sigma,j}.$$

Для $i = j$ маємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i} \mathbf{1}_{\sigma,j} = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i} = (n-1)!;$$

для $i \ne j$ ця сума – це кількість перестановок, які не рухають i та j, тобто $(n-2)!$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{n} (n-2)! =$$
$$= n \cdot (n-1)! + n(n-1) \cdot (n-2)! = 2n!.$$

Залишається довести нерівність з умови задачі. Оскільки $\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$, то вона рівносильна такій:

$$\frac{n!}{3} \le U_1 \le \frac{n!}{2}.$$

Доведемо явну формулу

$$U_k = \frac{n!}{k!} \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \right).$$

Її можна вивести за допомогою комбінаторної формули включення-виключення, але ми використаємо індуктивний підхід. Для цього перепозначимо $U_k = U_{k,n}$ кількість перестановок n елементів із k нерухомими точками. Зрозуміло, що

$$U_{k,n} = C_n^k U_{0,n-k}.$$

Справді, кожну перестановку, яка має k нерухомих точок, можна однозначно задати її набором нерухомих точок, який можна вибрати C_n^k способами, та перестановкою $n-k$ елементів, яка не має нерухомих точок. Отже, будемо доводити за індукцією, що

$$U_{0,n} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Це є очевидним для $n = 1$. Припускаючи, що ця формула справедлива для всіх менших значень, доведемо її для $n \geq 2$. Використовуючи припущення індукції та очевидну тотожність $\sum_{k=0}^{n} U_{k,n} = n!$, запишемо

$$U_{0,n} = n! - \sum_{k=1}^{n} U_{k,n} = n! - \sum_{k=1}^{n} C_n^k U_{0,n-k} =$$
$$= n! - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} =$$
$$= n! \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!}\right).$$

Помітимо, що

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!} = 1.$$

Справді, групуючи у сумі доданки однаковою сумою $m = k + j$ та використовуючи біном Ньютона, маємо

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!} = 1 + \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} =$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} =$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}(1-1)^m = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!} = 1 - \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!},$$

тому

$$U_{0,n} = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!},$$

що й потрібно було довести. Оскільки знаки членів у сумі чергуються, а їхні модулі спадають, то легко бачити, що при $n \geq 2$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \leq 1 - 1 + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\frac{n!}{3} \leq U_{0,n} \leq \frac{n!}{2}$. Звідси, використовуючи рівність $U_{1,n} = C_n^1 U_{0,n-1}$, одержуємо потрібну нам нерівність

$$\frac{n!}{3} \leq U_{0,n} \leq \frac{n!}{2}. \qquad \square$$

Зауваження 1. Ця задача є пов'язаною із відомою задачею про неуважного листоношу, якому треба доставити n відправлень за n адресами, але він, забувши, яке відправлення кому призначене, доставляє їх навмання. Тоді, в позначеннях розв'язку, $\frac{U_{k,n}}{n!}$ — це ймовірність того, що рівно k адресатів одержать свої відправлення. Зокрема, ймовірність того, що

жоден з адресатів одержить призначене йому відправлення

$$\frac{U_{0,n}}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

прямує, при $n \to \infty$, до сталої додатної величини $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{e}$.

Наведені в умові рівності набувають відповідного ймовірнісного сенсу: перша рівність означає, що математичне сподівання кількості правильно доставлених листів дорівнює 1, друга — що дисперсія цієї кількості дорівнює 2. Маючи таку інтерпретацію, дуже легко обґрунтувати першу рівність: у середньому кожен адресат одержить $\frac{1}{n}$ свого відправлення, тому всі разом в середньому одержать одне відправлення; насправді, використаний нами підрахунок двома способами відштовхується саме від таких міркувань.

«Розбиття на доданки»

Доведіть, що існує таке число n, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на п'ять попарно взаємно простих доданків, які більші одиниці.

Розв'язання. Більшість учасників запропонували розв'язки, які базуються на постулаті Бертрана (між числами n та $2n$ знайдеться просте число) або його модифікаціях. Цей факт є доволі нетривіальним, жоден з учасників, хто посилався на нього, не зміг розповісти хоча б ідею доведення, що призводило до занижения балів деякими членами журі. Тому ми розглянемо розв'язок, заснований на простіших ідеях.

Розглянемо спочатку парні числа.

Для $n = 8k$, де $k \geq 5$, розглянемо його розбиття $n = 8 + (2k-5) + (2k-3) + (2k-1) + (2k+1)$. У цьому розбитті лише пара крайніх непарних доданків може мати спільний дільник 3. Якщо це так, то у розбитті $n = 16 + (2k-7) + (2k-5) + (2k-3) + (2k-1)$ всі доданки взаємно прості.

Така сама ідея працює для чисел вигляду $n = 8k + b$, де $b \in \{2,4\}$, $3 \nmid k \geq 4$: їх можна подати у вигляді $b + (2k-3) + (2k-1) + (2k+1) + (2k+3)$.

Представлення для решти парних чисел такі:

- $n = 24k + 4$, $k \geq 1$, подамо як $2 + (6k-3) + (6k-1) + (6k+1) + (6k+5)$;
- $n = 24k + 6$, $k \geq 1$, подамо як $4 + (6k-3) + (6k-1) + (6k+1) + (6k+5)$;
- $n = 24k + 2$, $k \geq 2$, подамо як $12 + (6k-7) + (6k-5) + (6k+1) + (6k+5)$;
- $n = 24k + 14$, $k \geq 1$, подамо як $4 + (6k-1) + (6k+1) + (6k+5) + (6k+7)$;
- $n = 24k + 22$, $k \geq 1$, подамо як $12 + (6k-1) + (6k+1) + (6k+5) + (6k+7)$.

Як неважко бачити, одним із указаних способів можна подати довільне парне число $n \geq 40$.

З непарними числами ситуація складніша, оскільки всі доданки мають бути непарними. Ми використовуватимемо розклади вигляду

$$n = 3^k + 5^l + \\ +(30m + \alpha) + (30m + \beta) + (30m + \gamma),$$

де $k \leq 4$, $l \leq 3$, α,β,γ взаємно прості з 30 та такі, що різниця будь-яких двох не має простих дільників, крім 2, 3, 5. Зрозуміло, що у такому розкладі числа є попарно взаємно прості. Перебираючи різні значення k, l, α, β, γ можна переконатися, що число $3^k + 5^l + \alpha + \beta + \gamma$ може мати будь-який парний залишок від ділення на 90. Насправді, достатньо брати комбінації α, β, γ, сума яких порівняна з числами від -13 до 13 за модулем 90. Таким чином можна розкласти усі непарні числа, починаючи з $3^4 + 5^3 + 90 - 13 = 283$.

Отриману нижню межу можна зменшити. А саме, за допомогою комп'ютерного перебирання або в інший спосіб

можна переконатися, що довільне натуральне число $n \geq 42$ (і довільне парне число $n \geq 28$) можна подати як суму п'яти попарно взаємно простих чисел, більших 1. □

«Цікава послідовність»

Про збіжну послідовність $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a_2, a_3, ... відомо, що її члени з непарними номерами спадають, а з парними номерами – зростають і, крім того, для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність $2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3$.

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

Розв'язання. Оскільки послідовність a_{2k} є монотонно зростаючою, послідовність a_{2k+1} – монотонно спадною, то для існування границі необхідно, щоб всі елементи з непарними номерами були більшими кожного елемента з парним індексом.

З нерівності

$$2 \leq \frac{a_1 - a_0}{a_1 - a_2} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1 - 0}{1 - a_2} \leq 3$$

отримуємо, що $\frac{3}{6} \leq a_2 \leq \frac{4}{6}$.

Враховуючи сказане вище, з нерівностей

$$2 \leq \frac{a_{2k} - a_{2k-1}}{a_{2k} - a_{2k+1}} \leq 3$$

та

$$2 \leq \frac{a_{2k+1} - a_{2k}}{a_{2k+1} - a_{2k+2}} \leq 3$$

отримаємо оцінки

$$\frac{a_{2k-1} + 2a_{2k}}{3} \leq a_{2k+1} \leq \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}$$

та

$$\frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \leq a_{2k+2} \leq \frac{a_{2k} + 2a_{2k+1}}{3}$$

відповідно.

Зокрема, при $k = 1$ знайдемо, що $\frac{4}{6} \leq a_3 \leq \frac{5}{6}$.

Далі, припускаючи, що $\frac{3x_k}{6^k} \leq a_{2k} \leq \frac{4y_k}{6^k}$ та $\frac{2z_k}{6^k} \leq a_{2k+1} \leq \frac{t_k}{6^k}$, з отриманих вище оцінок будемо мати

$$\frac{3(3x_k + 2z_k)}{6^{k+1}} \leq a_{2k+2} \leq \frac{4(t_k + 2y_k)}{6^{k+1}}$$

та

$$\frac{2(3x_k + 4z_k)}{6^{k+1}} \leq a_{2k+3} \leq \frac{5t_k + 4y_k}{6^{k+1}}$$

відповідно.

Таким чином, для знаходження чисел x_k, y_k, z_k, t_k отримуємо такі дві системи рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = 3x_k + 4z_k, \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} y_{k+1} = 2y_k + t_k, \\ t_{k+1} = 4y_k + 5t_k, \end{cases}$$

причому, враховуючи оцінки для a_2 та a_3, маємо $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 2$, $t_1 = 5$. А з записаних систем одержуємо також $x_2 = 7$, $y_2 = 7$, $z_2 = 11$, $t_2 = 29$.

З другого рівняння першої системи знаходимо $x_k = \frac{z_{k+1} - 4z_k}{3}$. Тоді $x_{k+1} = \frac{z_{k+2} - 4z_{k+1}}{3}$. Підставляючи їх у перше рівняння цієї системи, отримаємо різницеве рівняння $z_{k+2} - 7z_{k+1} + 6z_k = 0$, для якого коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ є числа $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 6$. Тому $z_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $z_1 = 2$ та $z_2 = 11$, з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 2, \\ C_1 + 36C_2 = 11, \end{cases}$$

знайдемо $C_1 = \frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{3}{10}$. Отже, остаточно отримуємо $z_k = \frac{2 + 3 \cdot 6^k}{10}$ та далі знаходимо $x_k = \frac{-2 + 2 \cdot 6^k}{10}$.

Так само, виражаючи з першого рівняння другої системи $t_k = y_{k+1} - 2y_k$, прийдемо до аналогічного різницевого рівняння $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = 0$. Тому

$y_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $y_1 = 1$ та $y_2 = 7$, з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 1, \\ C_1 + 36C_2 = 7, \end{cases}$$

знайдемо $C_1 = -\frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{2}{10}$. Тоді $y_k = \frac{-2+2\cdot 6^k}{10}$ і також знаходимо $t_k = \frac{2+8\cdot 6^k}{10}$.

Повертаючись до нерівностей

$$\frac{3x_k}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4y_k}{6^k}$$

та

$$\frac{2z_k}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{t_k}{6^k},$$

отримуємо наступні оцінки для елементів заданої послідовності:

$$\frac{3 \cdot \frac{-2+2\cdot 6^k}{10}}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4 \cdot \frac{-2+2\cdot 6^k}{10}}{6^k}$$

та

$$\frac{2 \cdot \frac{2+3\cdot 6^k}{10}}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{\frac{2+8\cdot 6^k}{10}}{6^k}.$$

Перейшовши в цих подвійних нерівностях до границі при $k \to \infty$, отримуємо

$$\frac{3}{5} \le \lim_{k\to\infty} a_{2k} \le \frac{4}{5}$$

та

$$\frac{3}{5} \le \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} \le \frac{4}{5}.$$

У цих же ж межах буде знаходитися і границя заданої послідовності.

Для кожного $a \in \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$ нескладно навести приклад такої послідовності, яка збігається до a і задовольняє умови задачі: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{2n} = a - \frac{a}{6^n}$ та $a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{6^n}$.

Зауважимо, що для аналогічної послідовності, елементи якої при всіх $n \ge 1$ задовольняють нерівність $m \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \le M$, $1 < m \le M$, її границя $a \in \left[\frac{Mm-M}{Mm-1}, \frac{Mm-m}{Mm-1}\right]$.

Якщо a — довільне число з цього проміжку, то прикладом послідовності, яка збігається до a і задовольняє вказану нерівність, є така $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{2n} = a - \frac{a}{(Mm)^n}$ та $a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{(Mm)^n}$. □

«Фарбуємо клітинки»

Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

Розв'язання. Набір клітинок дошки назвемо гарним, якщо поруч із кожною клітинкою дошки знаходиться рівно клітинка набору. Для того, щоб зробити вказане в умові перефарбування, достатньо знайти гарний набір. Справді, вибираючи в довільному порядку по одному разу клітинки з набору, ми зможемо перефарбувати всі клітинки дошки у протилежний колір.

Ми розв'яжемо цю задачу для квадратних дошок розміру $2n \times 2n$ та прямокутних розміру $2n \times 2(n+1)$. Спочатку помітимо, що для «ламаного куту» парної висоти виділений, як показано на рис. 1, набір клітинок є гарним.

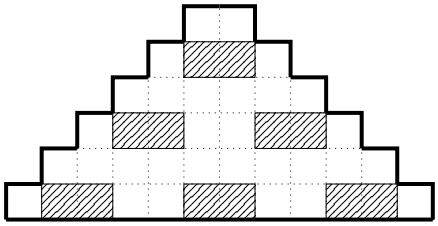


Рис. 1

Більше того, якщо відкинути від кута одну або дві крайні нижні клітинки, виділений набір залишиться гарним. Після цього залишається лише поділити дошку на чотири такі кути різної орієнтації (можливо, без крайніх клітинок). З наведених на рис. 2 прикладів такого поділу для квадратів 10×10 і 12×12 та

прямокутників 8×10 і 10×12 неважко бачити, як такий поділ робиться для квадратів $2n \times 2n$ та прямокутників розміру $2n \times 2(n+1)$.

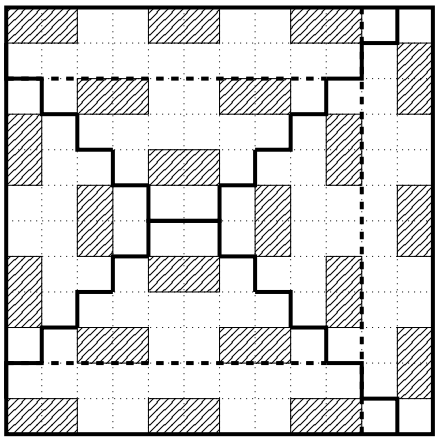


Рис. 2

У якості ще одного узагальнення доведемо, що для квадратної дошки непарного розміру вказане в умові перефарбування неможливо. Справді, на кожному кроці перефарбовується парна кількість клітинок на головній діагоналі (0 або 2). Оскільки кількість клітинок на головній діагоналі непарна, то всіх їх перефарбувати не вдасться. □

«Безконфліктні фішки»

1. На деяких клітинках дошки $n \times n$ стоять фішки (не більше однієї фішки на клітинці) так, що жодні чотири фішки не знаходяться у вершинах прямокутника. Доведіть, що кількість фішок не перевищує $n(\sqrt{n}+1)$.

2. Для яких n ви зможете розмістити $n([\sqrt{n}]+1)$ фішок на дошці $n \times n$ так, щоб жодні чотири фішки не стояли у вершинах прямокутника? (Тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.)

Зауваження. Автори задачі мали на увазі такі прямокутники, сторони яких паралельні сторонам дошки. Було б цікаво розв'язати пункт 2 задачі без цього припущення.

Доведення. Максимальна кількість фішок, яку можна поставити на дошку, щоб виконувалася умова, називається *числом Заранкевіча* Z_n. У пункті 1 задачі пропонується довести, що

$$Z_n \le n(\sqrt{n}+1).$$

У кожній горизонталі пронумеруємо клітинки зліва направо числами від 1 до n. Нехай A_i – множина номерів клітинок i-ї горизонталі, у яких стоять фішки. Умова задачі рівносильна тому, що кожна пара чисел входить щонайбільше в одну з множин A_i, тому загальна кількість пар у цих множинах допускає оцінку

$$\sum_{i=1}^{n} C^2_{|A_i|} \le C^2_n. \tag{5}$$

З іншого боку, за нерівністю Єнсена

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C^2_{|A_i|} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |A_i|(|A_i|-1) \ge \\ \ge \frac{d}{2}(d-1), \end{aligned} \tag{6}$$

де $d = \frac{1}{n}(|A_1| + \cdots + |A_n|)$ — середня кількість елементів у множинах. Враховуючи (5), приходимо до нерівності

$$d^2 - d \le n - 1,$$

розв'язуючи яку, одержимо

$$d \le \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right) \le \sqrt{n}+1,$$

що й треба довести в першому пункті.

У другому пункті питається, для яких n виконано нерівність

$$Z_n \ge n\big([\sqrt{n}]+1\big). \tag{7}$$

Повна відповідь на це питання є відкритою математичною проблемою, тому ми наведемо лише деякі часткові результати.

Почнемо з необхідної умови. Використовуючи отриману в попередньому пункті нерівність, маємо, що коли $k^2 \le n <$

$k^2 + k + 1$ для певного цілого k, то кількість фішок менша за

$$\frac{n}{2}\left(1 + \sqrt{4k^2 + 4k + 1}\right) = \\ = n(k+1) = n\big([\sqrt{n}] + 1\big).$$

Отже, для виконання (7) необхідно, щоб

$$k^2 + k + 1 \le n \le k^2 + 2k$$

для певного $k \ge 1$ (ця умова рівносильна тому, що $\{\sqrt{n}\} \ge 1/2$).

Розглянемо тепер частковий випадок $n = k^2 + k + 1$. У ньому нерівність (7) може бути лише рівністю. Більше того, рівностями також мають бути (5) та (6), звідки нескладно довести, що мають виконуватися наступні властивості:

- кожна пара чисел міститься рівно в одній з множин A_i;
- кожні дві множини з A_i мають рівно один спільний елемент;
- кожна з множин A_i містить $k + 1$ елемент;
- кожне число від 1 до n належить $k + 1$ множині.

Перші дві властивості нагадують властивості точок і прямих: через кожні дві точки проходить рівно одна пряма, а кожна пара непаралельних прямих перетинаються рівно в одній точці. Тому такий набір з n елементів і складених з них «прямих» A_i називають *скінченною проективною площиною* (площина проективна, бо довільні дві прямі перетинаються).

Досі немає повної відповіді на питання, для яких k існує скінченна проективна площина. Необхідною умовою є те, що коли k при діленні на 4 дає залишок 1 або 2, то воно має бути сумою двох повних квадратів, зокрема, $k = 6$ не підходить. Щодо достатньої умови, існування проективної площини доведено у випадку, коли k – степінь простого числа.

Для повноти наведемо конструкцію у випадку, коли k просте. Нехай $\mathbb{Z}_k = \{0, \dots, k-1\}$ – множина залишків від ділення на k. «Точки» нашої площини – це, по-перше, пари залишків (x,y), $x,y \in \mathbb{Z}_k$, по-друге, «нескінченно віддалені» точки $\infty, \infty_0, \infty_1, \dots, \infty_{k-1}$; всього $k^2 + k + 1$ точок. «Прямі» нашої площини такі:

- k^2 прямих вигляду $y = ax + b$:

  $$\{(x,y) : y \equiv ax + b \pmod{k}\} \cup \{\infty_a\},$$

  $a,b \in \mathbb{Z}_k$;
- k прямих вигляду $x = a$:

  $$\{(a,y), y \in \mathbb{Z}_k\} \cup \{\infty\},$$

  $a \in \mathbb{Z}_k$;
- нескінченно віддалена пряма

  $$\{\infty, \infty_0, \infty_1, \dots, \infty_{k-1}\}.$$

Пропонуємо читачу переконатися, що такі точки та прямі задовольняють вказані вище властивості. Називаючи прямі рядками таблиці, точки – стовпчиками, та ставлячи фішки на клітинки тоді, коли точки належать прямим, одержимо бажану розстановку. □

Література

[1] Федак І.В. *XIII Івано-Франківський обласний турнір юних математиків.* Режим доступу: http://tym.in.ua/2017/11/08/xiii-if-tym/

Змащуючи велосипедний цеп

Олександр Григорович Єна

Ви, напевне, себе запитуєте, що має означати такий заголовок? До чого тут велосипед, і який стосунок він має до математики? Історія ця почалася так.

Був собі Олесь, і був у нього велосипед. Одного зимового, хоча й теплого та радше сухого, дня, ближче до вечора, хоча ще було досить таки світло, Олесь їхав на своєму велосипеді. Ліворуч був берег річки, порослий очеретом, праворуч – пагорб, вкритий знизу зеленою травою, а згори – густим лісом, який однак вже давненько скинув своє листя до весни й тому видавався менш густим.

Олесеву увагу привернуло торохтіння цепу його велосипеда. Дійсно, він давненько вже його не змащував, то ж не дивно, що той давав про себе знати. Олесь зупинився, дістав із велосипедної сумки мастило, звичними рухами відкрутив пляшечку, крапнув кілька крапель на задню зірочку й поїхав собі далі. Через декілька десятків метрів цеп припинив торохтіти, й знов лише заклопотано шарудів, обплітаючи знов та знов велосипедні зірочки. Мастило, вочевидь, розподілилося по всьому цепу та зірочках, і справно робило свою справу...

... Але ж зачекайте, а хто сказав, що так має бути завжди? Хіба це правда, що мастило завжди розподіляється по усій довжині цепу та по усіх краях зірочок? Такі питання, чомусь, зароїлися у Олесевій голові дорогою додому. Так йому спала на думку задача про змащення цепу.

Модель

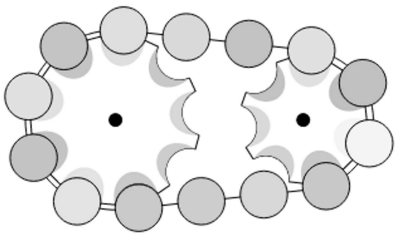
Вже дістався додому, Олесь почав розмірковувати про нову задачу, яка так неочікувано навідалася до нього. Достатньо швидко стало зрозуміло, що, перш за все, необхідно створити більш-менш адекватну математичну модель обертання велосипедного цепу. Зрештою, в Олеся вийшов такий-от формальний опис.

- Поверхня зірочок складається з напівкруглих заглибин.
- Цеп складається з валичків (роликів) — циліндричних елементів, які потрапляють у заглибини зірочок при обертанні цепу.
- Між собою контактують та обмінюються мастилом лише заглибини зірочок та валички цепу.
- Сусідні заглибини зірочок поміж собою мастилом не обмінюються.
- Сусідні валички цепу поміж собою мастилом не обмінюються.
- При обертанні цепу система не втрачає та не набуває мастила.
- При зустрічі заглибини та валичка ми вважаємо, що вони обмінюються мастилом так, що їхня змащеність стає однаковою. Іншими словами, якщо відбувається зустріч заглибини зі змащеністю x із валичком зі змащеністю y, то після контакту змащеність кожного елемента дорівнюватиме $(x + y)/2$.

- Змащеність цепу стабілізується — це така ситуація, коли з плином часу, за умови обертання цепу, змащеність кожного з елементів прямує до певного значення, тобто з плином часу усе менше й менше від цього значення відрізняється.
- Рівномірна змащеність цепу — це така ситуація, коли змащеність цепу стабілізується таким чином, що змащеність кожного з елементів прямує до того ж самого значення, тобто з плином часу змащеності різних елементів системи відрізняються одна від одної усе менше й менше.

Напевне, потрібно зауважити, що Олесь зовсім не стверджував, що даний опис достатньо адекватно моделює процеси розподілу мастила у велосипедному цепі. Однак ця, радше іграшкова, модель достатньо проста й чітка, щоб, щонайменше, слугувати основою для подальшого дослідження поведінки мастила у системі з цепу та зірочок.

Більше того, хоча в Олесевому велосипеді й багато зірочок та варіантів передач, для спрощення він вирішив розглянути найпростішу систему, у якій є один цеп та дві зірочки — передня та задня.



Зрештою, Олесь зміг сформулювати цілком конкретну математичну задачу.

Задача. *У рамках моделі, яка описана вище, відповісти на наступні запитання.*

1. *Чи правда, що, незалежно від початкових умов змащеності елементів цепу та зірочок, завжди досягається рівномірна змащеність цепу?*
2. *Якщо рівномірна змащеність не завжди досяжна, охарактеризувати випадки, коли вона все ж має місце.*
3. *Чи правда, що незалежно від початкових умов змащеності елементів цепу та зірочок, змащеність цепу завжди стабілізується?*
4. *Якщо стабілізація не завжди досяжна, то описати випадки, коли вона все ж має місце.*

Пропоную прослідкувати за міркуваннями Олеся на шляху до розв'язку сформульованої щойно задачі.

Вхідні дані

Від яких параметрів залежить наша система? Зрозуміло, що це довжина цепу L, тобто кількість валичків, з яких він складається, кількість заглибин M на передній зірочці та кількість заглибин N на задній зірочці. Отже, відповідь на сформульовану задачу може залежати від трьох додатних цілих чисел L, M, N.

Перші приклади та експерименти

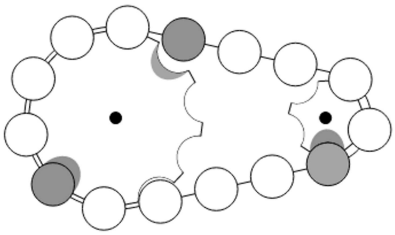
Спочатку Олесь вирішив розглянути деякі приклади. Розгляньмо їх і ми. Почнімо з найпростішого прикладу.

Приклад. Припустімо, що змащеність усіх елементів цепу від початку однакова. Тоді у результаті обертання їхня змащеність не змінюватиметься. Це означає, що дійсно існують ситуації, коли досягається рівномірна змащеність.

Для експериментування Олесь запрограмував простеньку візуальну реалізацію своєї моделі. Це візуалізація, за

допомогою якої можна експериментувати із різними вхідними даними, доступна за інтернет-адресою `www.iena.info/chain`. У ній на початку обертання лише один валичок цепу змащений мастилом. Читач запрошується провести свої власні експерименти, а Олесь за допомогою своєї візуальної моделі, досить швидко отримав такий приклад.

Приклад. Для чисел $L = 15$, $M = 10$, $N = 5$ та початкових умов, коли мастило є лише на одному елементі системи, мастило буде розподілятися лише поміж трьох валичків цепу, двох заглиблень передньої зірочки, та одного заглиблення задньої зірочки. Отже, існують ситуації, коли рівномірна змащеність не досягається.



Олесь тут подумав, що, можливо, у даному випадку недосяжність рівномірної змащеності якось пов'язана із тим, що усі числа 15, 10 та 5 подільні на 5.

Експериментуючи далі, Олесеві, однак, не вдалося швидко знайти приклад, який би демонстрував, що стабілізація не завжди досяжна. Тому Олесь сформулював гіпотезу, що стабілізація змащеності відбувається завжди, хоча й ще не міг це довести.

Деякі спостереження

Циклічність

Обертаючи систему з цепу та зірочок, ми змінюємо положення її елементів. Зауважимо, однак, що усі елементи системи повертаються на свої місця після зміщення цепу на найменше спільне кратне чисел L, M, N. Одне таке провертання ми називатимемо циклом системи.

Контактуючі класи

Як ми вже побачили на прикладі з числами $L = 15$, $M = 10$, $N = 5$, можуть бути ситуації, коли мастило залишається лише на певних елементах і не розподіляється далі. Для подальшого дослідження цього явища Олесь запровадив таку термінологію.

Означення. Ми кажемо, що два елементи системи (заглибини зірочок та валички цепу) знаходяться у одному контактуючому класі, якщо вони доторкаються один до одного безпосередньо або ж через посередників.

Таким чином, усі елементи системи можна поділити на скінчену кількість контактуючих класів. Із опису нашої моделі випливає, що різні контактуючі класи мастилом між собою не обмінюються. Тому, якщо спочатку у різних контактуючих класах була різна сумарна кількість мастила, то на його рівномірний розподіл сподіватися годі.

Це означає, зокрема, що надія на рівномірний розподіл мастила може бути лише у випадках, коли контактуючий клас єдиний. Тому варто розібратися, при яких значеннях чисел L, M, N це стається.

Олесь з цим питанням досить швидко впорався й прийшов до висновку, що кількість контактуючих класів дорівнює найбільшому спільному дільникові d чисел L, M, N. При цьому елементи з одного контактуючого класу розташовуються на відстані d один від одного. Таким чином, контактуючий клас єдиний тоді і лише тоді, коли найбільший спільний дільник чисел L, M та N дорівнює 1.

Для доведення цих тверджень достатньо скористатися фактом, що найбільший спільний дільник чисел L, M та N — це найменше додатне ціле число, яке можна записати у вигляді

$$\lambda \cdot L + \mu \cdot M + \nu \cdot N$$

для якихось цілих чисел λ, μ, ν.

Деякі важливі величини

Занумеруємо якимось чином заглибини та валички та позначмо їхні змащеності. Змащеності — це невід'ємні дійсні числа, які відповідають кількості мастила на даному елементі, виміряні у певних одиницях.

Нехай $c_1, \ldots, c_L$ — це змащеності валичків цепу; $f_1, \ldots, f_M$ — це змащеності заглибин передньої зірочки; $r_1, \ldots, r_M$ — це змащеності заглибин задньої зірочки.

Нехай S — це загальна кількість мастила у системі, тобто сума усіх c_i, f_j, r_k. Тоді

$$a = \frac{S}{L + M + N}$$

— це усереднена кількість мастила, що припадає на кожен елемент системи.

Величина

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{L}(c_i - a)^2 + \sum\limits_{j=1}^{M}(f_j - a)^2 + \sum\limits_{k=1}^{N}(r_k - a)^2}{L + M + N}}$$

це середньо-квадратичне відхилення змащеності системи.

Зручніше розглядати величину

$$D = \sqrt{L + M + N} \cdot \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{L}(c_i - a)^2 + \sum_{j=1}^{M}(f_j - a)^2 + \sum_{k=1}^{N}(r_k - a)^2},$$

або її квадрат

$$D^2 = \sum_{i=1}^{L}(c_i - a)^2 + \sum_{j=1}^{M}(f_j - a)^2 + \sum_{k=1}^{N}(r_k - a)^2.$$

Говорячи про стан системи у момент часу t, де t невід'ємне ціле число, ми матимемо на увазі стан системи після її прокручування на t ланок від початкового положення.

Говорячи про значення певної величини, скажімо, D або D^2, у момент часу t ми писатимемо $D(t)$ та $D^2(t)$ відповідно.

Зауважимо, що рівномірний розподіл мастила має місце тоді й лише тоді, коли існує та дорівнює нулеві границя $\lim\limits_{t\to\infty} D(t)$.

Середньо-квадратичне відхилення змащеності стабілізується

Прокручуючи цеп на одну ланку, ми змінюємо значення змащеностей чотирьох елементів, а саме, однієї заглибини передньої зірочки, однієї заглибини задньої зірочки та двох валичків цепу, один з яких контактує з заглибиною передньої зірочки, а інший з заглибиною задньої зірочки.

Якщо перед контактом, у момент часу t, змащеність заглибини передньої зірочки була x, а змащеність відповідного валичка y, то після прокручування цепу на одну ланку, у момент часу $t + 1$, змащеність обох елементів буде $\frac{x+y}{2}$.

Якщо перед контактом змащеність заглибини задньої зірочки була u, а змащеність відповідного валичка v, то після контакту змащеність обох елементів буде $\frac{u+v}{2}$.

Обрахуємо зміну величини D^2 при такому контакті. Оскільки зміни відбуваються лише у чотирьох згаданих елементах, то різниця $D^2(t) - D^2(t+1)$ дорівнює

$$(x - a)^2 + (y - a)^2 + (u - a)^2 + (v - a)^2 - \left(\frac{x + y}{2} - a\right)^2 - \left(\frac{x + y}{2} - a\right)^2 - \left(\frac{u + v}{2} - a\right)^2 - \left(\frac{u + v}{2} - a\right)^2.$$

Читач може обрахувати самостійно й пересвідчитися, що результат дорівнює

$$\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(u-v)^2,$$

і, зокрема, є невід'ємним.

Таким чином, ми бачимо, що послідовності

$$D^2(t), D^2(t+1), D^2(t+2), \dots$$

та

$$D(t), D(t+1), D(t+2), \dots$$

неспадні. Оскільки усі величини $D^2(t)$ та $D(t)$ невід'ємні, то ці послідовності ще й обмежені. Оскільки монотонні обмежені послідовності мають границі, то існують границі

$$\lim_{t\to\infty} D^2(t) \text{ та } \lim_{t\to\infty} D(t).$$

Нагадаємо, що рівномірний розподіл мастила має місце тоді й лише тоді, коли границя $\lim\limits_{t\to\infty} D^2(t)$ дорівнює нулеві.

Оскільки, як щойно пораховано нами, на кожному кроці величина D^2 зменшується на половину суми квадратів різниць контактуючих між собою елементів, то звідси також випливає, що квадрат різниці, а отже й сама різниця змащеності контактуючих між собою елементів прямує до нуля з плином часу та обертанням велосипедного цепу.

Тоді також прямують до нуля різниці послідовних значень змащеності конкретного елемента системи. Це так, оскільки мають місце рівності

$$\frac{x+y}{2}-x=\frac{y-x}{2},\quad \frac{x+y}{2}-y=\frac{x-y}{2}.$$

З останнього ж випливає, що зміна змащеності певного елемента протягом одного циклу обертання прямує до нуля. Для цього достатньо застосувати кілька разів нерівність трикутника: якщо певний елемент має послідовні значення змащеності

$$x_1, x_2, \dots, x_s,$$

то тоді величину $|x_1-x_s|$ можна оцінити зверху наступним чином.

$$|x_1-x_s|=|x_1-x_2+x_2-\dots+x_{s-1}-x_s|\leqslant \\ \leqslant |x_1-x_2|+\dots+|x_{s-1}-x_s|.$$

Тут Олесь вже майже був подумав, що ствердно відповів на питання щодо стабілізації, але, перевіривши свої міркування, все ж зауважив, що з того, що змащеність елемента дуже мало змінюється протягом циклу, зовсім не випливає, що з плином часу такі малі зміни не можуть призвести до значної зміни змащеності. Тому на цьому етапі жодне з питань Олесевої задачі усе ще не розв'язане.

Найбільші та найменші значення змащеності стабілізуються

Нехай $\max(t)$ позначає найбільше значення змащеності серед усіх елементів системи у момент часу t, а $\min(t)$ нехай, відповідно, позначає найменше значення змащеності. Оскільки для $x \leqslant y$ виконується

$$x\leqslant\frac{x+y}{2}\leqslant y,$$

то зрозуміло, що послідовність

$$\max(t), \max(t+1), \max(t+2), \dots$$

незростаюча, а послідовність

$$\min(t), \min(t+1), \min(t+2), \dots$$

неспадна. Оскільки ці послідовності обмежують одна одну, тобто для довільного t

$$\min(0)\leqslant\min(t)\leqslant\max(t)\leqslant\max(0),$$

то існують границі

$$\mathrm{Max}=\lim_{t\to\infty}\min(t) \text{ та } \mathrm{Min}=\lim_{t\to\infty}\max(t).$$

Рівномірний розподіл мастила у випадку єдиного контактуючого класу

Припустимо, що контактуючий клас єдиний й доведімо, що у цьому випадку Max = Min, тобто з плином часу мастило рівномірно розподіляється по системі.

Для довільного $\varepsilon > 0$ у певний момент часу T

- існуватиме елемент системи зі змащеністю x, яка відрізнятиметься від Min не більше, ніж на ε;
- існуватиме елемент системи зі змащеністю y, яка відрізняється від Max також не більше, ніж на ε;
- упродовж циклу після часу T значення змащеності кожного з елементів змінюється щонайбільше на ε.

Тоді

$$\begin{aligned}&|\,\mathrm{Max}-\mathrm{Min}\,|=\\&=|\,\mathrm{Max}-x+x-y+y-\mathrm{Min}\,|\leqslant\\&\leqslant|\,\mathrm{Max}-x|+|x-y|+|y-\mathrm{Min}\,|\leqslant\\&\leqslant\varepsilon+|x-y|+\varepsilon=2\varepsilon+|x-y|.\end{aligned}$$

Оскільки ми припустили, що існує лише єдиний контактуючий клас, то у межах одного циклу обертання, елемент зі змащеністю x доторкнеться (через посередників) до елемента зі змащеністю y після чого обидва матимуть змащеність z. Таким чином,

$$\begin{aligned}|x-y|=|x-z+z-y|\leqslant|x-z|+|z-y|\leqslant\\\leqslant\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

а отже,

$$|\,\mathrm{Max}-\mathrm{Min}\,|\leqslant2\varepsilon+|x-y|\leqslant4\varepsilon.$$

Оскільки ε може бути довільним, зокрема дуже маленьким, ми робимо висновок, що Min = Max.

Стабілізація змащеності

У кожному контактному класі відбувається немов би обертання іншого цепу із параметрами

$$\frac{L}{d},\quad\frac{M}{d},\quad\frac{N}{d},$$

де d — це найбільший спільний дільник чисел L, M, N. Оскільки числа $\frac{L}{d}$, $\frac{M}{d}$, $\frac{N}{d}$ взаємно прості, то можна зробити висновок, що відбувається рівномірний розподіл мастила всередині кожного контактуючого класу, тобто має місце стабілізація змащеності.

Підсумки

Таким чином, Олесь вичерпно відповів собі на поставлені запитання.

Відповідь. *1. Рівномірна змащеність цепу досягається не завжди.*

2. *Вона досягається незалежно від початкових умов змащеності тоді і лише тоді, коли числа L (довжина цепу), M (кількість заглибин передньої зірочки), N (кількість заглибин задньої зірочки) взаємно прості, тобто їхній найбільший спільний дільник дорівнює одиниці.*
3. *Змащеність цепу дійсно завжди стабілізується, при цьому досягається рівномірна змащеність всередині кожного контактуючого класу, чия кількість дорівнює найбільшому спільному дільникові чисел L, M та N.*

Аналізуючи свої міркування, Олесь із приємним здивуванням помітив, що ці міркування можуть також, із мінімальними змінами, бути застосовані до ситуації, коли система має не дві, а більшу кількість зірочок. Відповідь залишиться незмінною й залежатиме лише від

найбільшого спільного дільника параметрів системи, тобто довжини цепу та кількості заглибин у зірочках.

Олесь уважно роздивився свій велосипед й помітив, що обидві зірочки на задньому перемикачі швидкостей, тобто зірочки, які направляють цеп при перемиканні швидкостей, мають по 11 заглибин. Водночас кількість заглибин кожної з передніх зірочок, а саме 48, 36 та 26 не ділиться на 11. Отже, незалежно від передачі, на якій відбувається рух на Олесевому велосипеді, та незалежно від початкової змащеності цепу, рівномірна змащеність цепу завжди досягається. Безумовно, і на цьому знову варто наголосити, лише за умови, що запропонована модель, дійсно адекватно описує процеси розповсюдження мастила.

Тасування карт і ланцюги Маркова

Кучеренко Анастасія Олегівна
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Хілько Данило Ігорович
Ecole normale supérieure de Paris

У карти, так обшмульгані, що аж,
засіли пан різник і пан музика.
Була спокуса виграшу велика,
а за вікном був гомін і пейзаж.

Юрій Андрухович

Партію зіграно і тепер картярі мають добре перетасувати колоду, щоб розпочати наступну. Що означає «добре перетасувати колоду»? Після завершення партії гравці мають доволі багато інформації про розташування карт в колоді: вони можуть пам'ятати останню карту, в деяких іграх колоду можна розділити на пари сусідніх карт однієї масті, а у випадку виграшу в пасьянс карти будуть впорядковані по масті і номіналу. Отже, для старту нової партії потрібно позбутися цієї інформації. Можна було б сказати, що після перетасування карти мають йти у деякому фіксованому «хаотичному» порядку. Але тоді той, хто цей фіксований «хаотичний» порядок знає, мав би серйозну перевагу, що неприпустимо. Тож після перетасування ми маємо досягти ситуації, за якої *всі можливі впорядкування карт є рівноймовірними* – хоч би таке впорядкування було «хаотичним» чи «не хаотичним» в наївному розумінні. Зрозуміло, що ніщо не гарантує нам досягнення такої ситуації. Тож потрібно перетасувати карти, щоб так було *наближено*.

Необхідно також визначитись із процесом тасування. Для простоти вважатимемо, що під час кожного кроку ми навмання обираємо карту з колоди незалежно від попередніх виборів і перекладаємо її нагору. Таку дію ми називатимемо *перетасуванням*.

Нехай E – деяка множина, а $\mathcal{P}$ клас всіх її підмножин. *Мірою* на E називається функція $\mu : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, для якої виконується $\mu(\emptyset) = 0$ і для довільних неперетинних підмножин A і B

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Це не є цілком коректним означенням міри. Зокрема, на деяких складних множинах неможливо визначити бажану міру на класі всіх підмножин, тож необхідно обмежитись деяким вужчим класом. Однак нам такого означення вистачатиме. Так чи інакше, це означення відображає ідею процесу вимірювання: кожній підмножині деякої множини ми ставимо у відповідність певну вагу так, щоби виконувався ряд природніх правил – вага порожньої множини була нульовою, а вага об'єднання двох неперетинних множин дорівнювала сумі ваг цих двох множин. Нехай тепер E буде скінченною, тобто $E = \{e_1, \dots, e_k\}$. Через $|E|$ позначатимемо кількість елементів в E, тобто тут $|E| = k$. В цьому

випадку кожна міра μ на E ототожнюється з $(\mu(\{e_1\}), \dots, \mu(\{e_k\}))$ – вектором, складеним з мір кожного з елементів E. Справді, для довільного $A \subset E$

$$\mu(A) = \sum_{e \in A} \mu(\{e\}).$$

Надалі для позначення міри одного елементу замість $\mu(\{e\})$ вживатимемо $\mu(e)$, хоча такий запис не є цілком коректним. В нашому випадку E буде множиною всіх $n!$ впорядкувань колоди з n карт. На цьому етапі потрібно розуміти, що на E можна визначити багато різних мір, більше того, кожен вектор з $|E|$ чисел визначає свою міру. Отже можна говорити про множину всіх мір на E як про певний об'єкт.

Нехай X – випадкова величина зі значеннями в E. Формально кажучи, X є функцією, що визначена на ймовірнісному просторі (Ω, P) і діє в E. В нашому випадку Ω можна уявляти як множину варіантів «вибору навмання» карти, яку ми перекладаємо нагору. Зауважимо, що в такому разі кожне $\omega \in \Omega$ складається з компонент, кожна з яких відповідає вибору карти на кожному кроці, тобто $\omega = (i_1, \dots, i_m, \dots)$, де i_j номер обраної карти на кроці j. Інакше кажучи, ми вибираємо все майбутнє відразу. Насправді, Ω слід розуміти лише як генератор випадковості, все найцікавіше відбуватиметься на множині E.

Розподілом X на E називається така міра X_*, визначена на E, що для довільного вимірного $B \subset E$

$$X_*(B) = P(\{\omega : X(\omega) \in B\}).$$

Ця міра відповідає вектору

$$(P(X = e_1), \dots, P(X = e_k))$$

Зауважимо, що вона є *ймовірнісною*, тобто що $X_*(E) = 1$. Справді,

$$P(\{\omega : X(\omega) \in E\}) = P(\Omega) = 1.$$

Відтак, для кожного натурального m визначимо випадкову величину X_m зі значеннями в E – впорядкування карт в колоді після здійснення m перетасувань. Процес перетасування буде успішним, якщо вектор

$$\big(P(X_m = e_1), \dots, P(X_m = e_k)\big)$$

з плином часу (тобто зі збільшенням m) буде наближатися до $(1/n!, \dots, 1/n!)$, тобто якщо розподіл X_{m*} наближатиметься до рівномірної міри на E.

Отже, нам потрібно надати сенс слову «наближатися» , тобто вміти вимірювати *відстань* між двома мірами на E. Зрозуміло, що визначати відстань можна по-різному. Важливим поняттям, що виникає в різних частинах прикладної математики, є відстань *Кульбака–Лейблера*. Відстані *Геліндже́ра* та *хі-квадрат* виявляються зручними в деяких задачах статистики. Ми ж в подальшому будемо розглядати, можливо, найприроднішу відстань – *відстань повної варіації* (total variation distance), що визначається за формулою

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{e \in E} |\mu(e) - \nu(e)| .$$

Тут для того, щоб міра μ була близькою до міри ν, ми вимагаємо, щоб для кожного елементу e його μ-міра була близькою до його ν-міри. Зокрема, колода з n карт буде добре перемішаною, якщо відстань d_{TV} між *реальним* розподілом і *ідеальним* – коли всі $n!$ порядків розташування карт в колоді рівноймовірні – є малою.

Нагадаємо також, що таке математичне сподівання $\mathbb{E}(X)$ та дисперсія $D(X)$ випадкової величини, що може набувати зліченну множину числових значень $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Перше з них показує «середнє» всіх можливих значень. Ми б могли порахувати просто їхнє середнє арифметичне, але щоб «врівноважити»

всі значення, їх домножують на ймовірність, з якою вони можуть прийматись. Виводимо строгу формулу:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot P(X = a_n).$$

Дисперсія ж описує наскільки допустимі значення відхилені від математичного сподівання, тобто математичне сподівання самих відхилень. Щоб відхилення в один бік не компенсували відхилення в інший бік, беруть математичне сподівання квадратів відхилень:

$$D(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2.$$

Для довільних випадкових величин X, Y математичне сподівання є лінійним:

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y),$$

а якщо X, Y незалежні, то дисперсії теж додаються:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

У цій статті ми переконаємося, що наш процес справді «добре перемішує карти» , а також спробуємо дослідити скільки кроків необхідно зробити, щоб колода була «добре перетасованою» , в залежності від кількості карт.

1. Ланцюги Маркова

Теорія ланцюгів Маркова є головним інструментом в розв'язанні цієї задачі.

Розглянемо ситуацію на кроці m. Карти розташовані в деякому порядку e. Далі ми обираємо навмання карту і потрапляємо в деяке впорядкування e'. Що важливо: ймовірність потрапити з впорядкування e у впорядкування e' не залежить ні від моменту m, ні від історії перетасування до моменту m, а залежить тільки від станів e і e'.

В цьому розділі позначення E, Ω, P, $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ ми будемо використовувати в найширшому значенні, тобто E – довільна скінчена множина, (Ω, P) – вимірний простір, $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ – послідовність випадкових величин зі значеннями в E. Але E, Ω, $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ з задачі про перетасування карт, яку ми розглянемо потім, треба тримати в голові в якості найпершого прикладу.

Означення 1. *Послідовність $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ випадкових величин зі значеннями в E називається ланцюгом Маркова (або процесом Маркова) на множині станів E, якщо задовольняє умову:*

$$P\{X_m = e_m | X_{m-1} = e_{m-1}, \dots, X_0 = e_0\} = \\ = P\{X_m = e_m | X_{m-1} = e_{m-1}\} = \\ = Q(e_{m-1}, e_m),$$

якщо

$$P(X_{m-1} = e_{m-1}, \dots, X_1 = e_1) > 0.$$

Через $Q(e_{m-1}, e_m)$ позначено ймовірність переходу зі стану e_{m-1} в e_m. Набір чисел $Q(e, e')$ формує матрицю Q розміру $|E| \times |E|$, яку називають матрицею переходу.

Іншими словами, в Марківському процесі є кілька станів, в яких ми можемо бути. Спочатку ми перебуваємо в деякому положенні $X_0 = e_0$ (можливо – випадковому), а потім на кожному кроці з певною ймовірністю переходимо зі стану в стан. Ймовірність $Q(e, e')$ перейти зі стану e в стан e' залежить лише від e і e'. Для передбачення майбутнього X_{m+1} вся історія $(X_0, \dots, X_m)$ не дає більше інформації, ніж X_m.

Всю інформацію про ланцюг Маркова відображено в матриці переходу Q. Справді, неважко переконатися, що

$$P(X_m = e_m, X_{m-1} = e_{m-1}, \dots, X_0 = e_0) = \\ = P(X_0 = e_0) Q(e_0, e_1) \dots Q(e_{m-1}, e_m).$$

Бачимо, що динаміка ланцюга повністю визначається початковим розподілом – тобто мірою X_{0*} – і матрицею переходу Q.

Насамкінець, використовуючи означення, неважко переконатися, що для довільного $e \in E$

$$\sum_{e' \in E} Q(e, e') = 1.$$

Це відображає не несподівану властивість ланцюгів Маркова, що з положення e ми повинні перейти в якесь інше положення обов'язково всередині E. Насправді, цієї умови в якомусь сенсі достатньо: якщо задано матрицю невід'ємних чисел Q розміру $|E| \times |E|$, для якої виконується умова вище, то можна побудувати ймовірнісний простір Ω і послідовність випадкових величин $X_0, \dots X_m, \dots$ зі значеннями в E такі, що $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ є ланцюгом Маркова з матрицею переходу Q.

Уявімо собі ланцюг Маркова $X_0, \dots, X_n, \dots$ з матрицею переходу Q, що визначається так:

$$Q(e, e') = \begin{cases} 1 \text{ якщо } e = e' \\ 0 \text{ інакше.} \end{cases}$$

Тут кожен зі станів є, так би мовити, стаціонарним. Це означає, що якщо ми починаємо зі стану e, то не зможемо з нього вийти і будемо в ньому завжди. Отже, всередині E можна взяти підмножину – $\{e\}$ для якого-небудь $e \in E$ – яка є своєрідним ланцюгом Маркова з одним станом, в якому ми є завжди. В свою чергу цей "малий" ланцюг Маркова є в певному сенсі "мінімальним", що означає, що в ньому не можна знайти менший ланцюг, який би був замкненою системою. Зрозуміло, що будь-який ланцюг з $|E| = 1$ є "мінімальним", бо в ньому надто мало елементів. Як формально описати "мінімальні" ланцюги з $|E| > 1$? Для цього нам потрібно наступне означення. Спочатку не є цілком зрозумілим яким чином воно стосується цього неформального пояснення, однак наступна після означення теорема має його розтлумачити.

Означення 2. *Марківський ланцюг, в якому, починаючи з будь-якого стану, можна з ненульовою ймовірністю досягти будь-який інший стан за скінченну кількість кроків, називається незвідним.*

Теорема 1. *Нехай множина E скінченна, $X_0, X_1, \dots$ – незвідний ланцюг Маркова на E. Тоді для довільного $e \in E$*

$$P(\text{існує безліч } m, \text{ для яких } X_m = e) = 1.$$

Ідея доведення. Оскільки E – скінченне, можна довести, що знайдеться хоча б один потрібний стан, тобто таке $s \in E$, що

$$P(\text{існує безліч } m, \text{ для яких } X_n = s) = 1.$$

Це є посиленням того очевидного факту, що для кожної окремої траєкторії (що відповідає певному $\omega \in \Omega$) буде існувати стан, через який ланцюг проходитиме безліч разів. Тепер, ми маємо позитивні шанси p потрапити з стану s в довільний інший стан $e \in E$, оскільки ланцюг незвідний. Але тоді, якщо не існуватиме безлічі моментів часу m, за яких $X_m = e$, то з якогось моменту, кожного разу проходячи через s, ми повинні уникати e, що відбувається з ймовірністю $1 - p$. Але це є неможливим. □

Зауважимо, що хоч з ймовірністю 1 ми матимемо безліч m для яких $X_m = e$, не є правильним те, що для кожного $\omega \in \Omega$ траєкторія ланцюга проходитиме через e безліч разів. Просто множина таких поганих ω є дуже малою. Якщо $P(A) = 1$ для деякої події A, то кажуть, що подія A виконується *майже напевно*.

Тепер розглянемо інший ланцюг Маркова. Уявімо собі шахівницю і короля,

що випадковим чином блукає на ній – тобто на кожному кроці переходить на випадковим чином обране сусіднє по стороні поле. Блукання короля є ланцюгом Маркова на множині E, що складається з 64 клітинок шахівниці. Оскільки після кожного кроку колір поля, на якому стоїть король, змінюється на протилежний, в своє початкове поле король зможе повернутися тільки на парному кроці. Інакше кажучи, $P(X_{2m+1} = X_0) = 0$. Отже, динаміка цього ланцюга Маркова, попри свою непередбачуваність, має структурне правило: король може повертатися в початкове положення тільки на парних кроках. Ланцюги, які подібного структурного правила не мають, називаються *аперіодичними.*

Означення 3. *Стан e ланцюга Маркова називають аперіодичним, якщо*

$$НСД(n : P\{X_n = e | X_0 = e\} > 0) = 1.$$

Якщо всі стани ланцюга є аперіодичними, то такий ланцюг називається аперіодичним.

У прикладі з шахівницею і королем можемо бачити, що жоден зі станів не є аперіодичним, точніше, для кожного поля e

$$\text{НСД}(n : P\{X_n = e | X_0 = e\} > 0) = 2.$$

Означення 4. *Міра μ на E, що відповідає вектору $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_{|E|})$, де $\sum_{i=1}^{|E|} \mu(e_i) = 1$ називається стаціонарним розподілом ланцюга Маркова, якщо для довільного $e \in E$ $\forall j = \overline{1, N}$*

$$\mu(e) = \sum_{e' \in E} \mu(e') Q(e', e).$$

Це нове означення потрібно прокоментувати. Припустимо, що $X_{0*} = \mu$ є стаціонарним розподілом. Тоді з формули в означенні випливає, що $X_{m*} = \mu$ для довільного $m \geq 0$. Справді, якщо $X_{m-1*} = \mu$, то для кожного $e \in E$

$$P(X_m = e) = \sum_{e' \in E} P(X_m = e, X_{m-1} = e') =$$
$$= \sum_{e' \in E} P(X_{m-1} = e') Q(e', e) = \mu(e).$$

Отже це така міра, починаючи з якої, ми завжди «в ній» і залишатимемось.

Теорема 2. *Кожний незвідний і аперіодичний марківський ланцюг має рівно один стаціонарний розподіл μ. Яким би не був розподіл X_0 (тобто якою б не була міра X_{0*}) X_{m*} збігатиметься до цього стаціонарного розподілу при $m \to \infty$, тобто*

$$d_{TV}(X_{m*}, \mu) \to 0, \ \ m \to \infty.$$

Ідея доведення. Ми покажемо тільки другу частину – про збіжність. Розглянемо ще один ланцюг Маркова $(\widetilde{X}_m)_{m=0}^{\infty}$. Він має таку ж матрицю переходу, що і $(X_m)_{m=0}^{\infty}$, але нехай X_{0*} буде стаціонарною мірою на E. Тепер розглянемо пару $(X_m, \widetilde{X}_m)_{m=0}^{\infty}$. Це є ланцюг Маркова на множині пар $(e, e') \in E \times E$ з матрицею переходу Q', що визначається за формулою:

$$Q'((e_1, e_1'), (e_2, e_2')) = Q(e_1, e_2) Q(e_1', e_2').$$

Тоді можна показати, що цей ланцюг, що діє на парах елементів з E, є незвідним, а тому з ймовірністю 1 ми побуваємо безліч разів в кожному зі станів, зокрема в (s, s) для якогось $s \in E$. Позначимо тоді $T = \min\{m \geq 0 : \ X_m = e, \widetilde{X}_m = e\}$. Тоді з ймовірністю 1 величина T є скінченною. T є прикладом *моменту зупинки.* Ми не будемо розглядати це поняття надто детально, потрібно лише розуміти, що T є випадковою величиною зі значеннями в $\{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тобто що T діє з Ω в $\{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Зафіксуємо m, і нехай $T < m$. Це означає, що два ланцюги зустрілися до

моменту m. Але тоді в них буде спільна динаміка з моменту T, тобто ймовірність потрапити в деякий стан e для X_m після зустрічі з $\widetilde{X}_m$ є такою ж, як і для $\widetilde{X}_m$! Тобто

$$P(X_m = e, T < m) = P(\widetilde{X}_m = e, T < m).$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\sum_{e\in E} \left|P(X_m = e) - \mu(e)\right| = \\
&= \sum_{e\in E} \left|P(X_m = e) - P(\widetilde{X}_m = e)\right| = \\
&= \sum_{e\in E} \Big|P(X_m = e, T \geq m) - \\
&\quad - P(\widetilde{X}_m = e, T \geq m)\Big| \leq \\
&\leq 2P(T \geq m) \to 0,
\end{aligned}$$

оскільки $P(T \geq m) \to 0$, $m \to \infty$. Це завершує доведення.

Найважливішою ж ідеєю тут було розглядати $(\widetilde{X}_m)_{m=0}^{\infty}$. Ми повернемося до неї в останньому розділі. □

2. Тасування колоди з n карт

В цій частині ми будемо тасувати колоду з n карт, де n фіксоване.

Нехай E – множина всіх можливих впорядкувань колоди з n карт. Зрозуміло, $|E| = n!$. Через X_m позначатимемо (випадкове) упорядкування колоди після m кроків тасування.

Для простоти вважатимемо, що всі карти пронумеровані від 1 до n і в такому ж зростаючому (якщо дивитись згори вниз) порядку лежать в колоді перед початком тасування: 1 - зверху колоди, а n - знизу. Тобто початкове впорядкування є фіксованим і відомим, тобто X_0 невипадкове і дорівнює $(1, 2, \ldots, n)$ (для довільного $\omega \in \Omega$ $X_0(\omega) = (1, 2, \ldots, n)$).

На початку попереднього розділу ми зауважували, що ймовірність потрапити на кроці m з упорядкування e в інше впорядкування e' залежить тільки від e, e' і не залежить від моменту часу m і історії тасування до m. Тож $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ є ланцюгом Маркова. Його матриця переходу Q визначається за формулою

$$Q(e, e') = \begin{cases} \frac{1}{n}, \text{ з } e \text{ можна потрапити в } e', \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Справді, з положення e можна потрапити в рівно n інших: ми обираємо одну з n карт колоди і перекладаємо її нагору. Всі n отриманих впорядкувань будуть різними, хоча б тому, що всі вони матимуть різні карти нагорі. Оскільки карта обирається навмання, всі n впорядкувань будуть рівноймовірними.

Через μ позначимо рівномірний розподіл на E – наш бажаний розподіл, якого ми хочемо досягнути після поважної кількості перетасувань.

Наступний результат стверджує, що наш процес є справді ефективним – він добре перетасовує колоду.

Теорема 3. *Якщо кількість перемішувань прямує до нескінченності, то розподіл ймовірностей на множині всіх можливих перестановок прямує до рівномірного. Інакше кажучи,*

$$d_{TV}(\mu, X_{m*}) \to 0, m \to \infty.$$

Доведення. Уважний читач міг би помітити подібність цієї теореми до останньої теореми минулого розділу. Справді, щоб застосувати Теорему 2, нам потрібно тільки перевірити, що

1) ланцюг є незвідним;

2) ланцюг є аперіодичним;

3) рівномірний розподіл на E є стаціонарним.

Так загальні теоретичні результати допомагають в математичних моделях реальних процесів!

Аперіодичність випливає з того, що з кожного стану ми можемо потрапити в

себе з ненульовою ймовірністю $\frac{1}{n}$ (коли ми випадковим чином вибрали саме верхню карту).

З будь-якого порядку колоди $(a_1, a_2, \dots a_n)$ ми можемо з ненульовою ймовірністю отримати будь-який $(b_1, b_2, \dots b_n)$, послідовно вибираючи карти $b_n, b_{n-1}, \dots b_1$ в початковому розміщенні і перекладаючи їх вгору. Тож ланцюг є незвідним.

Так як стаціонарний розподіл у кожного ланцюга єдиний, покажемо, що для нашого ланцюга таким є рівномірний розподіл μ. Для цього пригадаймо, що ймовірність кожного розміщення колоди при рівномірному розподілу рівна $\frac{1}{n!}$ і запишемо умову стаціонарності

$$\mu(e) = \sum_{e' \in E} \mu(e') Q(e', e).$$

Підставимо числа з нашої задачі:

$$\frac{1}{n!} = \sum_{e' \in E} \frac{1}{n!} Q(e', e).$$

Бачимо, що умова стаціонарності теж виконується.

Тож згідно до Теореми 2

$$\lim_{m \to \infty} d_{TV}(X_{m*}, \mu) = 0. \qquad \square$$

3. Тасування колоди, коли кількість карт змінюється

Отже дійсно, для нескінченної кількості перетасувань ми будемо прямувати до рівномірного розподілу. Ось лише постає питання – наскільки швидко це буде відбуватись?

Ми не можемо дати відповідь на питання про швидкість збіжності. Натомість ми сформулюємо своє питання інакше: скільки перетасувань *асимптотично* досить для того, щоби перетасувати колоду з n карт при $n \to \infty$? А скільки точно не вистачить? Відповідь на це питання дає наступна теорема, яка є головним результатом цього розділу.

Теорема 4. *Нехай μ – рівномірний розподіл на E, де E є множиною всіх впорядкувань колоди з n карт, число n не фіксоване. Для довільних достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконано*

(i) якщо $m = (1 - \varepsilon) n \ln n$, то

$$d_{TV}(X_{m*}, \mu) \to 1, \ \ n \to \infty,$$

(ii) якщо $m = (1 + \varepsilon) n \ln n$, то

$$d_{TV}(X_{m*}, \mu) \to 0, \ \ n \to \infty.$$

Ця теорема є результатом з теорії часів перемішування ланцюгів Маркова (mixing time theory). Тут ми спостерігаємо дещо дивне явище. Інтуїція помилково підказує: карти мають перемішуватися поступово. Але для великого n колода буде дуже погано перетасованою до часу $0{,}99 n \ln n$ і стає добре перетасованою після часу $1{,}01 n \ln n$. Тобто в порівняно недовгий період відбуваються «найважливіші» перемішування.

Спочатку ми доведемо першу частину теореми, тобто що $(1 - \varepsilon) n \ln n$ перетасувань недостатньо.

Нехай $A_0 = \varnothing$. Позначимо через A_k множину всіх карт, що принаймі один раз знаходились зверху колоди від початку до часу k (вважаємо, що одна одиниця часу позначає одне перекладання карти). Інакше кажучи, множина A_k – це множина тих карт, які хоча би раз обиралися і перекладалися нагору під час перших k перетасовувань. Множини A_k формують зростаючу послідовність випадкових множин, тобто $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots$

Позначимо

$$T_i = \min\{k \geq 0, \text{що } |A_k| \geq i\}.$$

T_i є моментом часу k, коли кількість елементів множини A_k вперше дорівнює i. Зрозуміло, що в момент T_i ми маємо обрати і покласти нагору карту, яка до того не була згори колоди (за винятком, можливо, вихідного положення).

Лема 1. *Для довільної пари фіксованих* ε *та* j *ми маємо*

$$P(1-\varepsilon \le \frac{T_{n-j}}{n\ln n} \le 1+\varepsilon) \to 1,\ n\to\infty.$$

Ця лема показує, що при великому n майже завжди випадкова величина T_{n-j} концентрується навколо числа $n\ln n$.

Щоб оцінити

$$P\left(\left|\frac{T_{n-j}}{n\ln n}-1\right| \le \varepsilon\right),$$

будемо застосовувати нерівність Чебишова, яка дає оцінку ймовірності відхилення випадкової величини від її середнього. Нехай $X:\Omega\to\mathbb{R}$. Тоді нерівність Чебишова стверджує, що для довільного $\varepsilon>0$

$$P(|X-\mathbb{E}(X)|>\varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Доведення леми. Спочатку ми шукатимемо $\mathbb{E}(T_{n-j})$ і $D(T_{n-j})$. Для цього розглянемо випадкові величини $T_{i+1}-T_i$ для $0\le i\le n-1$. Величина $T_{i+1}-T_i$ є часом очікування від моменту, коли i карт побували вгорі колоди, до моменту, коли множина A_k вперше містить $i+1$ елемент. Оскільки всі кроки перетасування відбуваються незалежно один від одного, величини $T_{i+1}-T_i$ для $0\le i\le n-1$ є незалежними. Тоді

$$D(T_{n-j}) = D\left(\sum_{i=0}^{n-j-1} T_{i+1}-T_i\right) = \sum_{i=0}^{n-j-1} D(T_{i+1}-T_i).$$

Для довільного k між T_i і $T_{i+1}-1$ виконано $|A_k|=i$, тобто $A_k=A_{T_i}$, а в момент T_{i+1} до A_{T_i} додається одна карта, тобто $|A_{T_{i+1}}|=i+1$. Відтак, на кожному такому кроці k карту для перекладання нагору ми обирали з множини $A_k=A_{A_{T_i}}$. На кожному кроці ймовірність вибрати карту з множини A_{T_i} дорівнює i/n. В момент T_{i+1} ми обрали нову карту, це відбувається з імовірністю $(n-i)/n$. Отже, для довільного натурального l

$$P(T_{i+1}-T_i=l) = \left(\frac{i}{n}\right)^{l-1}\left(1-\frac{i}{n}\right).$$

Звідси можна знайти математичне сподівання і дисперсію величини $T_{i+1}-T_i$:

$$\mathbb{E}(T_{i+1}-T_i) = \frac{n}{n-i},$$
$$D(T_{i+1}-T_i) = \frac{in}{(n-i)^2}.$$

Цей підрахунок залишимо читачеві. Насправді, $T_{i+1}-T_i$ має *геометричний розподіл* з параметром $(n-i)/n$; докладніше див. [1].

Відтак,

$$\mathbb{E}(T_{n-j}) = \sum_{i=0}^{n-j-1}\mathbb{E}[T_{i+1}-T_i] =$$
$$= n\sum_{i=0}^{n-j-1}\frac{1}{n-i} = n\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=0}^{j}\frac{1}{i}\right) =$$
$$= n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i} - nC,$$

де $C=\sum_{i=0}^{j}\frac{1}{i}$ не залежить від n. Оцінимо суму гармонічного ряду $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i}$. Відомо, що

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i} - \ln n = f(n) \to \gamma,\ n\to\infty,$$

де $\gamma = 0{,}577215\ldots$ – стала Ейлера. Отже,

$$\mathbb{E}(T_{n-j}) = n\ln n + n(f(n)-C).$$

Також

$$D(T_{n-j}) = \sum_{i=0}^{n-j-1} D(T_{i+1} - T_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{ni}{(n-i)^2} \le \sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{n^2}{(n-i)^2} \le \frac{\pi^2 n^2}{6}.$$

Тут ми застосували інший факт з дійсного аналізу:

$$\sum_{i=0}^{n-j-1} \frac{1}{(n-i)^2} \le \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Використовуючи оцінку для дисперсії, застосуємо тепер нерівність Чебишова до випадкової величини T_{n-j}:

$$P\left(\left|T_{n-j} - \mathbb{E}(T_{n-j})\right| > \frac{\varepsilon n \ln n}{2}\right) \le \frac{\frac{\pi^2 n^2}{6}}{\frac{\varepsilon^2 n^2 \ln^2 n}{4}}.$$

Звідси, використовуючи формулу для $\mathbb{E}(T_{n-j})$, одержимо

$$P\left(\left|\frac{T_{n-j}}{n \ln n} - \left(1 + \frac{f(n) - C}{\ln n}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 \ln^2 n}.$$

Оскільки $\frac{f(n)-C}{\ln n} \to 0$, $n \to \infty$, то для достатньо великих n

$$P\left(\left|\frac{T_{n-j}}{n \ln n} - 1\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 \ln^2 n},$$

Нарешті, з того, що $\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 \ln^2 n} \to 0$, $n \to \infty$, випливає твердження леми. □

Тепер ми можемо довести теорему 4.

Доведення теореми 4. (i) Нагадаємо, що карти пронумеровані від 1 до n і початково в такому порядку розташовані в колоді. Нехай j – довільне натуральне число. Позначимо через S_j сукупність всіх таких впорядкувань колоди, для яких карти, що лежать на позиціях $n - j + 1, \dots, n$ розташовані в порядку зростання, якщо дивитися згори. Тобто карта $n - j + 1$ має більший номер, ніж карта $n - j + 2$, карта $n - j + 2$ має більший номер, ніж карта $n - j + 3$ і так далі.

Неважко порахувати кількість таких впорядкувань: $|S_j| = n!/j!$. Тоді $\mu(S_j) = 1/j!$, оскільки μ – рівномірне.

З леми 1 отримуємо, що з ймовірністю, що прямує до 1 при $n \to \infty$

$$T_{n-j} \ge (1 - \varepsilon) n \ln n$$

Якщо карта ніколи не була «переставленою» , то вона з часом опиниться в нижній частині колоди. Таким чином, якщо $T_{n-j} \ge k$, то на час k j нижніх карт колоди ніколи не піднімались вгору, тому не менше j нижніх карт колоди розташовані в зростаючому порядку, отже, $X_k \in S_j$ і $X_{k*}(S_j) \to 1$, $n \to \infty$, для фіксованого j та $k = (1 - \varepsilon) n \log n$.

Таким чином,

$$\left|\mu(S_j) - X_{k*}(S_j)\right| \ge 1 - \frac{2}{j!}$$

для досить великих n. Тоді, згідно з рівносильним означенням $d_T V$ (див. вправу 2), для всіх j справедливо

$$d_{TV}(X_{k*}, \mu) \ge 1 - \frac{2}{j!},$$

що і завершує доведення першої частини.

(ii) Додатково до нашої колоди розглянемо ще одну, яка вже є рівномірно перемішаною, тобто вона може бути впорядкована кожним способом з ймовірністю $1/n!$. В кожний момент часу, якщо картка з номером i в першій колоді переміщуватиметься нагору колоди, картку з номером i другої колоди будемо перекладати нагору другої колоди. Позначимо через $\widetilde{X}_k$ впорядкування другої колоди в час k. У кожен момент часу карта, що піднімається в першій колоді, вибирається рівномірно серед $\{1, 2, \dots, n\}$,

тому і карта, що переміщається нагору в другій колоді, обирається рівномірно з $\{1, 2, \ldots, n\}$. І тому $\widetilde{X}$ є ланцюгом Маркова з тією ж матрицею переходу, що і X. Отже в другій колоді також виконуватиметься те, що міра $\widetilde{X}_{k*}$ збігається до стаціонарної і саме рівномірний розподіл буде тут стаціонарним. Порівняйте запровадження нової колоди з ідеєю доведення Теореми 2!

Також для довільних двох карт виконується, що після моменту, коли обидві були вибрані принаймні один раз, їх відносне положення є однаковим в обох колодах (вище буде та карта, яку вибрали пізніше). Тому, як тільки всі карти були вибрані для перестановки принаймі по одному разу, всі відносні позиції для довільних карт i та j однакові, і тому ці дві колоди мають однакове впорядкування.

Таким чином, ми маємо $X_m = \widetilde{X}_m$, коли $m \geq T_n$. Але згідно з лемою 1

$$T_n \leq (1+\varepsilon) n \ln n$$

з ймовірністю, що прямує до 1. Тоді для $k = (1+\varepsilon) n \ln n$

$$P(X_k = \widetilde{X}_k) \geq P(T_n \leq (1+\varepsilon) n \ln n) \to 1.$$

Тоді довільного $A \subset E$ за рахунок рівномірності X_k маємо:

$$\begin{gathered} \left| X_{k*}(A) - \widetilde{X}_{k*}(A) \right| = \\ = \left| P(X_k \in A) - P(\widetilde{X}_k \in A) \right| \leq \\ \leq P(X_k \notin A, \widetilde{X}_k \in A) + P(X_k \in A, \widetilde{X}_k \notin A) \leq \\ \leq 2P(X_k \neq \widetilde{X}_k) \to 0,\ n \to \infty. \end{gathered}$$

□

Вправи

Вправа 1. *Нехай E – скінченна множина, а μ, ν – дві міри на ній. Доведіть, що*

$$d_{TV}(\mu, \nu) = \max_{A \subset E} \mu(A) - \nu(A).$$

Вправа 2. *Нехай $(X_m)_{m=0}^{\infty}$ – ланцюг Маркова на скінченній множині E. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$*

$$P(X_{m+2} = e'' | X_m = e) = \sum_{e' \in E} Q(e, e') Q(e', e'').$$

Нехай Q^2 – квадрат матриці Q. Переконайтеся, що $X_0, X_2, X_4, \ldots$ – ланцюг Маркова з матрицею переходу Q^2.

Вправа 3. *Повернімося до випадкового блукання короля на шахівниці. Якою є матриця переходу цього ланцюга? Чи правда, що $d_{TV}(X_{m*}, \mu)$ прямує до 0, коли m прямує до нескінченності, якщо μ – рівномірна міра?*

Література

[1] М. В. Карташов *Імовірність, процеси, статистика*
Видавничо-поліграфічний центр 'Київський університет'. Київ, 2008.

[2] Jean-François Le Gall *Intégration, Probabilités et Processus aléatoires*
https://www.math.u-psud.fr/~jflegall/IPPA2.pdf

[3] В. Н. Андреев, А. Я. Иоффе *Эти замечательные цепи*
М.: Знание, 1987. - 176 с.

[4] David A. Levin, Yuval Peres, Elizabeth L. Wilmer *Markov Chains and Mixing Times*
http://pages.uoregon.edu/dlevin/MARKOV/markovmixing.pdf

Математична біологія

Дрозд–Корольова Олена Юріївна

За останні тридцять років математика увійшла в усі підрозділи біології та надійно там поселилась. Певною мірою математична біологія розпалась на ряд незалежних дисциплін. В одній статті, звісно, неможливо навіть назвати всі задачі, які вирішують колеги. Ми тільки трохи торкнемось різних областей, намагаючись познайомитись з ними на конкретних прикладах.

Кролики Фібоначчі

В 1202 році побачила світ книга з арифметики Леонардо Пізанського. В ній було сформульовано задачу, яку можна вважати першою в історії задачею з математичної біології.

Припустимо, що у нас є популяція кроликів з наступними початковими умовами:

- *на початку на полі з'являється пара новонароджених кроликів (один кролик та одна кролиця);*
- *кролики можуть розмножуватись починаючи з одномісячного віку;*
- *вагітність у кролиць триває один місяць;*
- *кожна вагітність закінчується народженням різностатевої пари кроликів;*
- *кролики безсмертні.*

Скільки пар кроликів буде на полі через рік?

Думаю, більшість читачів сьогодні здатна легко розв'язати цю задачу. Напевно, більшість навіть не буде брати в руки папір та ручку, якщо пригадає, що ми знаємо Леонардо Пізанського під іменем Фібоначчі.

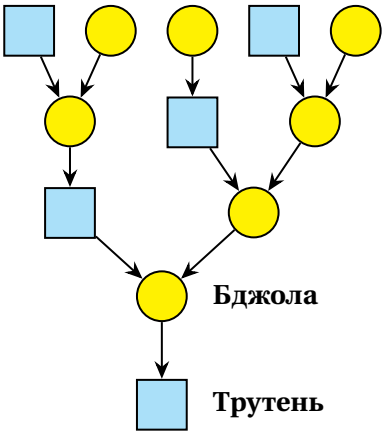


Рис. 1

Очевидно, що справжні кролики не підкоряються цим правилам. Але послідовність Фібоначчі доволі часто зустрічається в природі. Її можна побачити, наприклад, в «родинному дереві» бджіл.

Розглянемо «родовід» трутня та бджоли (рис.1) і проаналізуймо кількість чоловічих та жіночих особин серед його предків. Пригадаймо, що для народження чоловічої особини бджоли (трутня) необхідна лише мати. А для народження жіночої особини (власне бджоли) необхідна пара різностатевих батьків.

	Покоління				
Особина	1	2	3	4	5
трутень	1	2	3	5	8
бджола	2	3	5	8	13

Добре видно, що в обох випадках складається послідовність Фібоначчі – починаючи з 1 та 2 відповідно.

Чи їдять зайці рисей?

На початку XX століття біолог Умберто Д'Анкона досліджував вилов риби в Адріатичному морі. Він помітив, що під час Першої світової війни в уловах значно підвищився відсоток хижих видів. Це явище надихнуло майбутнього тестя Умберто Віто Вольтерра на формулювання моделі «хижак-жертва». Для пояснення він використав формулу, винайдену П'єром-Франсуа Ферхюльстом.

Формула Ферхюльста на той момент вже використовувалась для моделювання природних процесів. Так в 1910 році Альфред Лотка застосував її для опису певних явищ в теорії автокаталітичних хімічних реакцій. Цікаво, що майже одночасно з Вольтерром, Лотка розширив застосування своєї моделі на біологічні системи. Він розглядав систему з рослин та рослиноїдних тварин.

Таким чином, в 1925-1926 році народилась проста модель «хижак-жертва», яку нерідко використовують і сьогодні. Позначимо через $N(t)$ популяцію жертв, через $P(t)$ популяцію хижаків в момент часу t.

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP) \qquad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cN - d), \qquad (2)$$

де a,b,c,d – додатні константи.

Припущення моделі цілком інтуїтивні:

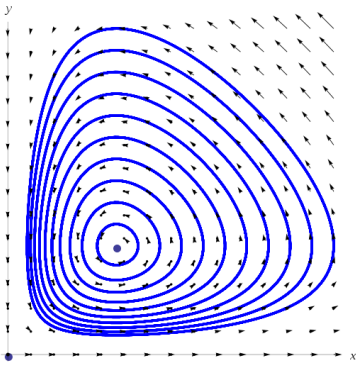


Рис. 2. *Модель Лотки–Вольтерри*

- за відсутності хижаків жертви плодяться необмежено та експоненційно;
- хижаки регулюють ріст популяції жертв (член $-bNP$ в рівнянні 1);
- за відсутності жертв, популяція хижаків зменшується експоненційно (член $-dP$ в рівнянні 2);
- вплив жертв на зростання популяції хижаків описується членом cNP в рівнянні 2.

Хоча модель Лотки–Вольтерри не реалістична, вона показує, що проста система «хижак-жертва» може призводити до періодичності зміни розміру популяцій. Це зрозуміло навіть інтуїтивно. Якщо хижаків стає більше, вони швидше знищуть популяцію жертв. Це призводить до недостачі їжі для самих хижаків, через яку, в свою чергу, зменшується їх популяція. В результаті, популяція жертв має можливість швидше знову зрости. І цикл починається знову.

Очевидно, що в такій моделі не вистачає багатьох факторів, які існують в реальному житті. Наприклад, ясно, що зростання популяції жертв у відсутності хижаків буде обмежене нестачою корму, а також епідеміями, які при значній щільності заселення стають більш імовірними.

Цікавим казусом стало застосування моделі Лотки–Вольтерри та її удоско-

наленої версії на популяції канадських зайців та рисей. Завдяки записам заготовників хутра, по ним зберіглися дані за більш ніж 200 років. На перший погляд, це створювало ідеальну базу для дослідження.

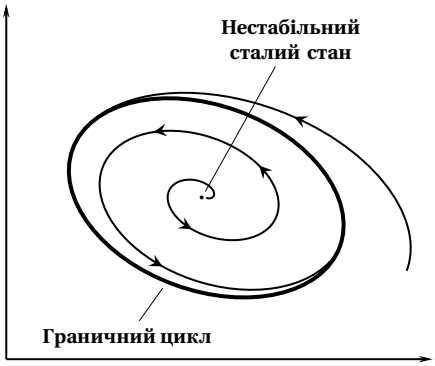


Рис. 3. *Популяційна модель з граничним циклом*

Спочатку виявилось, що пік популяції рисей відбувається за рік до піку популяції зайців. Це очевидно не вписується в спрощену циклічність, описану моделлю Лотки–Вольтерри. Але цю модель вдосконалювали, надавали їй більше гнучкості. Зокрема, врахували, що в залежності від параметрів системи, коливання циклу можуть зростати, спадати, бути хаотичними або сходитись в стабільний граничний цикл (рис.3).

Вчені з новими силами та новим арсеналом повернулись до канадських ссавців. Але тепер аналіз даних дав результати не просто погані, а жахливі. Знаки констант міжвидових зв'язків в рівняннях змінювались на протилежні. Математично виявлялось, що зайці – хижаки, які полюють на рисей. Зауважте, що на рис. 4 коливання йдуть за годинниковою стрілкою, на відміну від модельної рис. 3, де зміни циклу відбуваються в протилежному напрямку.

Одне з пояснень намагалось встановити зв'язок з кормом зайців. Але воно доволі легко було спростовано математично.

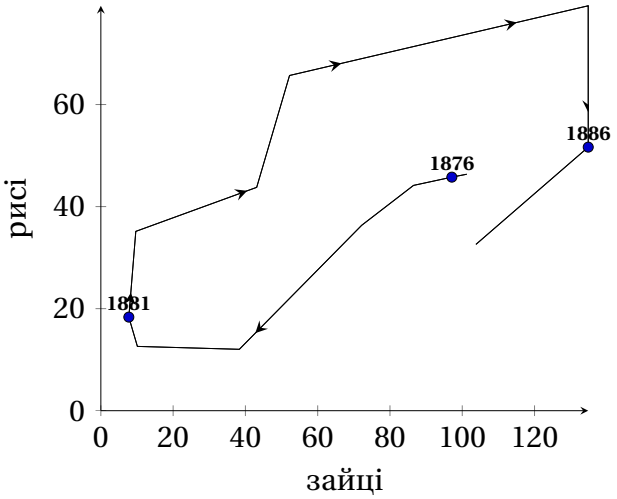


Рис. 4. *Канадська популяція зайців і рисей за період 1875–1887 (у тисячах)*

Далі на допомогу покликали епідемічну теорію. Значний зріст популяції зайців міг призводити до передачі хвороб рисям. І тут вже вдалось побудувати модель, яка дала результат достатньо близький до реальних спостережень.

Деякі біологи запропонували цікаве доповнення до такого пояснення. Вони припустили, що одним із факторів, що призводить чи підсилює такі цікаві коливання популяцій, є homo sapiens, а саме канадські мисливці, які займаються заготовленням хутра. Цілком ймовірно, що полювання ведеться активніше в ті роки, коли популяція зайців велика. Також логічно, що під час полювання, при наявності можливості, більша увага приділяється рисі, хутро якої має більшу вартість.

Але остаточну крапку в цій майже детективній історії поставило спостереження Роями, який помітив, що при всій привабливості доступних для аналізу даних, в них закралися цілі два джерела помилок. По-перше, хутро потрапляло на ринок (і, відповідно, в статистику) на рік пізніше, ніж здобувалось. Таким чином, дані популяції рисей зсувались на рік. По-друге, дані за рисями поступа-

ли з різних районів по всій Канаді, а за зайцями – лише з двох сусідніх.

Дифузія

Мікроскопічні частки, такі як клітини, бактерії, хімічні молекули, в загальному випадку знаходяться в постійному випадковому русі. Якщо з деяких причин цей рух на мікрорівні стає більш регулярним, то його можна спостерігати вже на макрорівні і ми можемо говорити про дифузію.

За допомогою математики можна досліджувати, як поведінка часток на мікрорівні призводить до їх макроскопічної поведінки. Ми розглядатимемо випадок одновимірного руху і тривіального випадкового шляху. Це одна із найпростійших задач математичної біології в області біохімії.

Розглянемо пряму, по якій частка рухається кроками довжини Δx, які займають час Δt. Якщо рух повністю випадковий, це означає, що ймовірність кроку вліво та вправо однакова. Візьмемо в якості початку координат початкову позицію частки. Тоді через час T частка знаходитиметься десь на проміжку $[-T\Delta x, T\Delta x]$.

Позначимо через $P(m,n)$ ймовірність того, що після n випадкових кроків частка переміститься на m кроків вправо. Нехай серед n кроків є L кроків вліво та R кроків вправо. Тоді, якщо частка справді опинилась в позиції $m\Delta x$, то

$$\begin{aligned} m &= L - R \\ L + R &= n \end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\begin{aligned} L &= \frac{n+m}{2} \\ R &= n - L \end{aligned}$$

Кількість можливих шляхів з n кроків, які завершуються в позиції $m\Delta x$:

$$\frac{n!}{L!R!} = \frac{n!}{L!(n-L!)} C_n^L$$

Кількість всіх можливих шляхів з n кроків – 2^n. Таким чином, імовірність

$$p(m,n) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{L!(n-L)!}. \qquad (3)$$

Зрозуміло, що

$$\sum_{m=-n}^{n} p(m,n) = 1.$$

Для великих n ми маємо формулу Стрілінґа:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e_{-n}. \qquad (4)$$

Поєднавши формули 3 та 4, після перетворень одержимо нормальний розподіл

$$p(m,n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{\frac{-m^2}{2n}}. \qquad (5)$$

Цікаво, що m та n не повинні бути надзвичайно великими для того, щоб (5) було достатнім наближенням для (3). Вже для значень $n = 10$ та $m = 4$ відхилення буде в межах 1%.

Перейдемо до неперервних змінних часу та простору $t = n\Delta t$ та $x = m\Delta x$. При $m,n \to \infty$ нам доведеться спрямувати $\Delta x, \Delta t \to 0$, щоб забезпечити скінченність x та t. Зрозуміло, що в такому випадку ймовірність $p(m,n)$ розглядати немає сенсу, оскільки вона прямуватиме до нуля.

Розглянемо ймовірність p того, що в момент t частка знаходиться на проміжку $(x, x+\Delta x)$. Позначимо

$$u = \frac{p}{2\Delta x}.$$

Підставимо в рівняння (5) $m = \frac{x}{\Delta x}$, $n = \frac{t}{\Delta t}$:

$$\frac{p(\frac{x}{\Delta x})}{2\Delta x} \sim \sqrt{\frac{\Delta t}{2\pi t(\Delta x)^2}} e^{-\frac{x^2 \Delta t}{2t(\Delta x)^2}} \qquad (6)$$

Позначимо

$$D = \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}.$$

Тоді з рівняння (6) одержимо

$$u(x,t) = \lim_{\Delta x, \Delta t \to 0} \frac{p(\frac{x}{\Delta x}\frac{t}{\Delta t})}{2\Delta x} = \\ = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}. \quad (7)$$

D називають коефіцієнтом дифузії. Він описує наскільки легко частки переходять від високої концентрації до низької.

Можна порівняти результат, який ми щойно одержали за допомогою методу випадкових шляхів, з класичним підходом до дифузії – законами Фіка. Позначимо через $c(x,t)$ концентрацію часток. Якщо ми запускаємо Q часток на одиницю прямої при $x = 0$, $t = 0$, то з класичного рівняння дифузії випливає

$$c(x,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi D t}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}.$$

При $Q = 1$ це повністю співпадає з рівнянням (7).

Зомбі атакують

Раптову атаку зомбі можна було б розмістити в розділі про моделі «хижак-жертва». Але я переконана, що люди не олені (і навіть не рисі) і, у випадку зомбі-апокаліпсису, чинитимуть опір. Тож ми розглядатимемо цю ситуацію з точки зору епідеміології. Це дасть нам можливість розглянути цей аспект застосування математики в біології одразу на не зовсім тривіальному прикладі. Складність полягає в двох незалежних шляхах передачі інфекції:

- Зомбі можуть виникати у вигляді повсталих мерців.
- Жива людина може заразитись безпосередньо при контакті з зомбі.

Таким чином в нашій моделі є три базові класи:

- Люди (H)
- Зомбі (Z)
- Мерці (D)

Люди можуть вмерти природнім, тобто не пов'язаним з зомбі, шляхом (параметр δ). Клас мерців складається з особин, які вмерли в будь-який спосіб. Люди з класу мерців можуть повстати у вигляді зомбі (параметр ζ). Люди можуть заразитись від зомбі при контакті (параметр передачі β).

Ми вважаємо приріст населення сталим П. Зомбі переходять в клас мерців, якщо їм відрубають голову або знищують мозок (параметр α). За нашим припущенням зомбі полюють тільки на людей і не чіпають один одного.

Таким чином, базова модель виглядає так (див. також рис. 5):

$$\begin{aligned} H' &= \Pi - \beta HZ - \delta H \\ Z' &= \beta HZ + \zeta D - \alpha HZ \\ D' &= \delta H + \alpha HZ - \zeta D. \end{aligned} \quad (8)$$

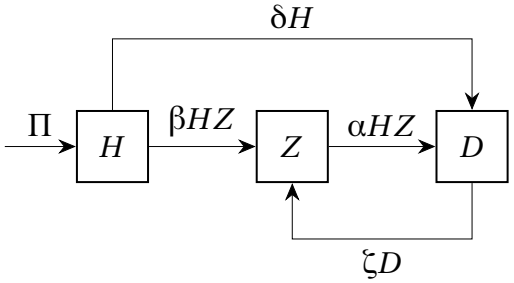


Рис. 5

Пересічний зомбі контактує з достатньою кількістю людей, щоб заразити βN осіб за одиницю часу, де N – кількість здорових. Ймовірність того, що випадковий контакт з зомбі припаде на

здорову людину – S/N. Таким чином, цим шляхом за одиницю часу виникають

$$\beta N \frac{H}{N} Z = \beta HZ$$

зомбі. Припустимо, що пересічний громадянин має шанс перемогти зомбі при контакті, а також має певний імунітет проти зомбіфікації. За це відповідає параметр α. Отже, аналогічно, кількість зомбі, яких люди знищують за одиницю часу дорівнює

$$\alpha N \frac{Z}{N} H = \alpha HZ.$$

Оскільки

$$H' + Z' + D' = \Pi,$$

то при $t \to \infty$ та $\Pi \neq 0$

$$H + Z + D \to \infty.$$

Оскільки, на жаль, $H \nrightarrow \infty$, цей сценарій призводить до колапсу цивілізації та загибелі людства (а в результаті і зомбі, як ми обговорювали вище в моделі «хижак-жертва»).

Якщо зомбі-апокаліпсис відбувається дуже швидко, ми можемо знехтувати параметрами Π (приріст населення) та δ (смерть від природніх причин). Прирівнявши похідні в системі 8 до нуля, одержимо:

$$\begin{aligned} -\beta HZ &= 0 \\ \beta HZ + \zeta D - \alpha HZ &= 0 \\ \alpha HZ - \zeta D &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

З рівняння (9) випливає, що $H = 0$ (загибель людства) або $Z = 0$ (повна перемога над хворобою). Ці точки рівноваги показують, що люди та зомбі не можуть співіснувати.

Розглянемо Якобіан нашої системи:

$$J = \begin{pmatrix} -\beta Z & -\beta H & 0 \\ (\beta - \alpha) Z & (\beta - \alpha) H & \zeta \\ \alpha Z & \alpha H & -\zeta \end{pmatrix}$$

У випадку повної перемоги людства він матиме вигляд:

$$J(N,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta H & 0 \\ 0 & (\beta - \alpha) H & \zeta \\ 0 & \alpha H & -\zeta \end{pmatrix}.$$

Тоді характеристичний многочлен

$$\det(J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + (\zeta - (\beta - \alpha)N)\lambda - \beta\zeta N)$$

завжди має корінь з додатньою дійсною частиною. Отже, ця рівновага завжди нестабільна.

У випадку апокаліпсису, Якобіан буде

$$J(0,Z_0,0) = \begin{pmatrix} -\beta Z_0 & 0 & 0 \\ (\beta - \alpha) Z_0 & 0 & \zeta \\ \alpha Z_0 & 0 & -\zeta \end{pmatrix}.$$

Відповідний характеристичний многочлен

$$\det(J - \lambda I) = \lambda(\beta Z_0 - \lambda)(-\zeta - \lambda)$$

має виключно від'ємні корені, отже рівновага асимптотично стабільна. В такій моделі, на жаль, шансів у людства немає.

Як у леопарда з'явились плями

З фізичної точки зору пляма на хутрі тварини – це область з волоссям іншого кольору. Колір волосся визначають спеціальні клітини, меланоцити. Вони утворюють пігмент меланін, який і надає волосу той чи інший колір. У ссавців зустрічаються переважно два типи меланіну – евмеланін (надає волоссю чорного чи коричневого кольору) та февмеланін (жовтий або рудий колір).

Наразі немає повного розуміння, як саме відбувається активація меланоцитів і чому вони виробляють той чи інший тип

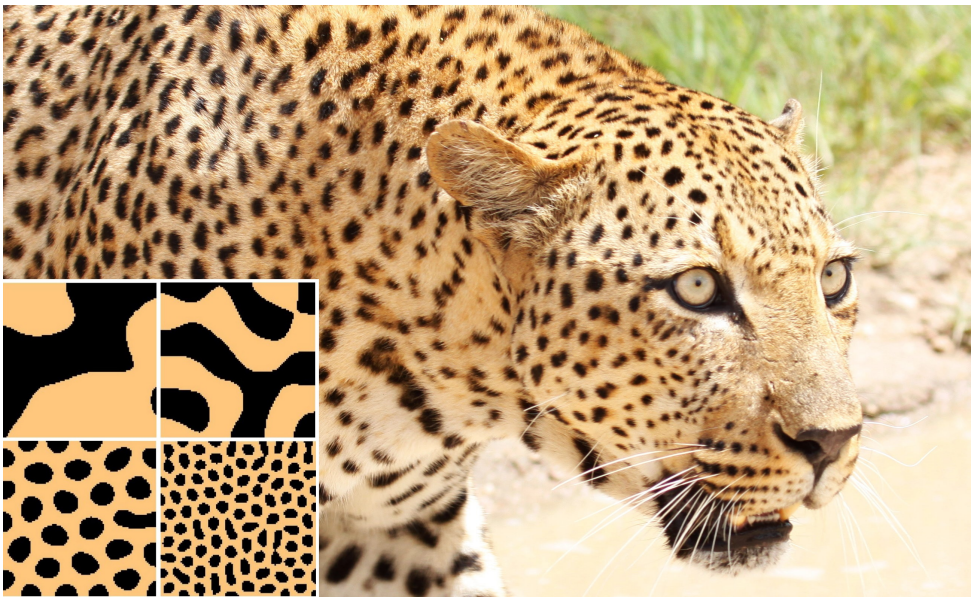


Рис. 6. *Патерни, побудовані за моделлю Т'юрінга, та леопард*

меланіну. Ми розглянемо механізм, запропонований Аланом Т'юрінгом в 1952 році. Він припустив існування хімічних речовин, які він назвав морфогенами. Цікаво, що перший морфоген ідентифікували лише в 80-ті роки. А перші морфогени, пов'язані з формування окрасу тварин, виділили в 1998.

Модель Т'юрінга включала два процеси: реакцію (хімічні речовини взаємодіють і породжують нові сполуки) та дифузію (зменшення концентрації з часом).

Розглянемо два морфогени A та B. Нехай морфоген A індукує проявлення кольору, а B – ні. Припустимо, що A каталізує процес утворення нових морфогенів, а B пригнічує. В такому випадку A зветься активатором, а B – інгібітором.

Якщо в системі велика кількість морфогену A, волос чорний, якщо велика кількість B – білий. Припущення Т'юрінга полягало в тому, що інгібітор розповсюджується швидше ніж активатор. Таким чином B утворює навколо початкової концентрації бар'єр, в якому концентрація A зменшується. В результаті формується ізольована пляма чорного волосся.

Таким чином, колір хутра тварини є результатом конкуренції процесів дифузії та реакції. Кінцевий візерунок залежить від швидкості проходження хімічних реакцій та коефіцієнтів дифузії. При високій інтенсивності дифузії ми одержимо великі регіони чорного волосся, як, наприклад, смуги на хутрі тигра. Слабка дифузія призведе до появи леопардових плям.

На хвилях ГМО

Хвилі виникають у величезній кількості дуже цікавих біологічних процесів – серцебиття, збудження нейронів, біохімічні реакції тощо. Але ми розглянемо їх на прикладі, який не вимагатиме від читача поглиблених знань в біології та медицині, а саме, на прикладі розповсюдження генетично-модифікованих організмів.

Можна вважати, що люди почали генетично модифікувати організми близько

12 тис. років до нашої ери. Саме тоді почалось одомашнення рослин. Але сьогодні, говорячи про ГМО, ми зазвичай маємо на увазі модифікацію через безпосереднє вживлення генів одного організму іншому. Цей процес вперше успішно провели в 1972 році. Пам'ятаючи трагічну історію ввезення кроликів до Австралії, ми не можемо не зацікавитися питанням розповсюдження вдосконалених організмів в природі і як це вплине на «природні» види.

Розглянемо випадок генетично-модифікованого мікроорганізму. Їх простіше аналізувати з математичної точки зору ніж рослини чи твар, оскільки мікроби постійно розмножуються, демонструють лише тривіальну поведінку (дифузія, про яку ми вже говорили вище), а їх популяційна динаміка описується простими моделями.

Позначимо через $M(x,t)$ кількість модифікованих мікробів, а через $N(x,t)$ – немодифікованих. Ми знову розглядатимемо одновимірний випадок для спрощення обчислень. Застосуємо класичну модель Лотки–Вольтерри, але введемо варіативність базових параметрів, щоб врахувати різнородність середовища. Тоді динаміка системи описується

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(x)\frac{\partial M}{\partial x}\Big) + \\ &+ r_M M\big(G(x) - a_M M - b_M N\big), \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(d(x)\frac{\partial N}{\partial x}\Big) + \\ &+ r_N N\big(g(x) - a_N N - b_N M\big), \end{aligned} \tag{10}$$

де a_M, a_N описують внутрішньовидову конкуренцію, а b_M, b_N – міжвидову; $D(x)$, $d(x)$ – коефіцієнти дифузії, а r_M, r_N – параметри швидкості розмножування організмів. Віднормуємо їх в такий спосіб, щоб максимумом функцій $G(x)$ та $g(x)$, які виражають відповідні місткості середовища, була одиниця. Під місткістю середовища ми маємо на увазі максимальний розмір популяції, який середовище може підтримувати нескінченно. Звичайно, місткість буде різною для різних видів організмів.

Вважатимемо різнородність середовища періодичною з періодом λ. Відповідно, визначимо залежні від просторового параметру функції:

$$\begin{aligned} D(x) &= D(x+\lambda), \\ d(x) &= d(x+\lambda), \\ G(x) &= G(x+\lambda), \\ g(x) &= g(x+\lambda). \end{aligned} \tag{11}$$

У початковий момент часу модифікованих організмів немає, тобто $M(x,0) = 0$. Отже, звичайні мікроби $N(x,0)$ задовольняють рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(d(x)\frac{\partial N}{\partial x}\Big) + r_N N\big(g(x) - a_N N\big) = 0.$$

Вважатимемо, що кожен період λ складається з двохи однорідних відрізків – сприятливого для мікробів λ_1 та несприятливого λ_2 (рис.7). В сприятливому відрізку швидкість розмножування та місткість середовища вище, ніж в несприятливому.

Сприятливі відрізки	Несприятливі відрізки
$k\lambda < x < k\lambda + \lambda_1$ $(k \in \mathbb{N})$	$k\lambda - \lambda_2 < x < k\lambda$ $(k \in \mathbb{N})$
$D(x) = D_1 > 0$	$D(x) = D_2 > 0$
$d(x) = d_1 > 0$	$d(x) = d_2 > 0$
$G(x) = 1$	$G(x) = G_2 \le 1$
$g(x) = 1$	$g(x) = g_2 \le 1$

Ясно, що $D_1 \ge D_2$, $d_1 \ge d_2$.

Нехай межі між сприятливими та несприятливими відрізками розташовані в точках x_i, де

$$\begin{aligned} x_{2k} &= k\lambda \\ x_{2k+1} &= k\lambda + \lambda_1 \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

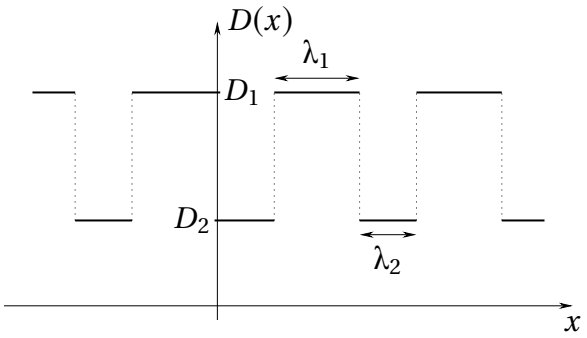


Рис. 7

В цих точках

$$\lim_{x\to x_i+} M(x,t) = \lim_{x\to x_i-} M(x,t)$$
$$\lim_{x\to x_i+} N(x,t) = \lim_{x\to x_i-} N(x,t)$$
$$\lim_{x\to x_i+} D(x)\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} = \lim_{x\to x_i-} D(x)\frac{\partial M(x,t)}{\partial x}$$
$$\lim_{x\to x_i+} d(x)\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = \lim_{x\to x_i-} d(x)\frac{\partial N(x,t)}{\partial x}.$$

Таким чином, ми описали задачу математично. Тепер за допомогою диференціальних рівнянь, певних перетворень та лінійного аналізу, можна проаналізувати стабільність описаної системи і, відповідно, дати відповідь на питання:

- За яких умов модифіковані організми зможуть поширитись в середовищі?
- Чи зможуть модифіковані організми витіснити з природного середовища немодифіковані?

Фрактали: (зло)вживання

Напевно кожен, хто бачив хоч раз фрактали, був вражений їх красою. Вони так схожі на складні форми рослин, що неодмінно виникає бажання їх застосувати до біологічних задач. На жаль, у цьому полягає головна проблема. При всій



Рис. 8. *Фрактальний ліс*

візуальній подібності, власне зображення фрактала не несе жодної інформації. Воно не пояснює біологічні процеси, не дає відповіді на запитання, як формуються фракталоподібні структури в природі. А пропаганда фракталів як деякої «панацеї», на жаль, ще й шкодить міждисциплінарним дослідженням.

Але якщо мікроскопом не виходить забивати цвяхи, це не означає, що він ні на що не придатний. Фрактали мають цілий ряд застосувань в математичній біології.

Фрактал – це структура, кожна частина якої має ту саму статистичну природу, що і ціле. Для спрощення ми наразі розглядатимемо тільки самоподібний випадок.

Важлива властивість фракталів – природа їх масштабування. Якщо збільшити сторони правильного многокутника вдвічі, його площа збільшиться в $4 = 2^2$ рази. При подвоєнні радіусу сфери, її об'єм збільшиться в $8 = 2^3$ раз. Але при подвоєнні одновимірних довжин фрактала, простір, який він займає, збільшиться в 2^r разів, де (не обов'язково

ціле) число r розмірністю фракталу, яка часто перевищує його топологічну розмірність.

Розглянемо в якості прикладу біологічної структури з фрактальною природою легені. Для оптимального виконання своєї головної (газообмінної) функції, вони повинні мати дуже велику площу і дуже тонкі стінки. Утворення цього органу починається з розділення трахеї в зародки правої та лівої легені. Кожна артерія знову розділяється на дві. У людини цей процес повторюється 23 рази, що дає 2^{23} розгалужень артерій, тобто 8388608 артерій або 16 мільйонів гілок. Результатом стає деревоподібна фрактальна структура.

Звичайно, легені могли б піти іншим шляхом і утворюватись без застосування такої складної математики. Але виявляється, що це не ефективно з еволюційної точки зору. При простому «топологічному» формуванні дерева навіть одна помилка відтворення при подальшому процесі зростатиме експоненційно. На фрактальний шлях окрема помилка майже не впливає.

Фрактальна природа легенів дозволяє використовувати для досліджень фрактальну розмірність. Наприклад, підрахунок розмірності людських легенів дає (в залежності від експериментальних методів) числа між 2,26 та 2,88. Фрактальну розмірність використали, наприклад, при дослідженні зв'язку метаболічної активності організму та його розміром (в цьому випадку аналізували інший фрактал – кровоносну систему).

Про актуарну професію

Андрощук Тарас Олександрович
Інвестиційна компанія «БлекРок»[1]

Привіт, шановні читачі журналу «У світі математики»! Друзі, з якими я разом навчався на київському мех-маті кільканадцять років тому, попросили мене розповісти для читачів журналу про те, чим я зараз займаюся у Лондонському Сіті, і як ця робота пов'язана з тією фундаментальною математикою, яку ми колись разом вивчали на мех-маті в університеті. Ну що ж, у мене є трішки «інсайдерської інформації», якою я залюбки поділюся із українськими школярами та студентами.

Мені довелося працювати у декількох професіях, які тісно пов'язані із математикою. Це: Актуарії, Квонти[2], та Модельний ризик менеджер. У цій замітці я хочу розповісти читачам про першу із цих професій – професію Актуарія. Я спробую описати її із практичної сторони – тобто з погляду людини, яка пройшла реальним шляхом навчання, кваліфікації, роботи актуарієм в Україні, а потім переїзду у Великобританію заради нового навчання, нового пошуку роботи, і, власне, нової роботи актуарієм.

Прошу зауважити, що думки, викладені тут, є значною мірою суб'єктивними. Актуарії, які мали інший кар'єрний шлях і досвід, можливо матимуть бачення, яке не обов'язково співпадає із моїм, на багато описаних тут речей.

Ця замітка друкуватиметься у двух частинах: спочатку деталі про актуарну професію взагалі – частина «Про професію», а потім, специфічно, про навчання та роботу актуарієм у Великобританії – частина «Про гастарбайтерів».

Коротке резюме автора

Коли я закінчив навчання у Київському Національному Університеті імені Тараса Шевченка за спеціальністю теорія ймовірностей та математична статистика, переді мною, як і перед іншими колегами студентами-математиками, постало запитання: якою професією зайнятись, щоб було цікаво, щоб використовувати надбані математичні знання, щоб була сучасною і актуальною, і щоб приносила дохід?

Мій вибір тоді впав на актуарну професію, яка вже починала розвиватись в Україні. Вступний бар'єр у цю професію в Україні тоді був відносно невисокий – знань отриманих на мех-маті, а тим більше з курсів кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики, було достатньо. Тому я почав працювати актуарієм у страховій компанії і, одночасно, заочно навчатись у Британському Інституті Актуаріїв[3], який є офіційною

[1] Усі погляди, викладені у цьому дописі, є судженнями автора, а не його роботодавця.

[2] Англійською «quant», похідне від «quantitative analyst».

[3] The Institute and Faculty of Actuaries (IFoA), www.actuaries.org.uk

професійною організацією актуаріїв у Великобританії.

Український страховий ринок є відносно новим та невеликим у порівнянні із ринками західних країн. Також, із навчання в Інституті Актуаріїв, я знав, що лише невелика частина методів актуарної професії застосовується в українських страхових компаніях. Тому в якийсь момент мені захотілось розширити свій професійний кругозір, і я зібрався та поїхав в Лондон.

У Лондоні я ще продовжив навчання у бізнес-школі за програмою Актуарного менеджменту. Потім знайшов роботу у актуарному консалтингу[4]. Вже працюючи у компанії, я завершив заочне навчання в Інституті Актуаріїв та, нарешті, офіційно кваліфікувався як актуарій.

Далі мій шлях був нестандартним (для кар'єри актуарія), бо я, фактично, перестав бути актуарієм. Я почав працювати у інвестиційному банкінгу як модельний ризик менеджер, а також познайомився із професією квонтів. Але обидві ці професії мають лише дотичний стосунок до актуаріїв, тому не буду зупинятись на них тут детально.

Цікаво, що зараз я працюю у компанії із управління активами, теж у сфері модельного ризику, але актуарні знання знову стають у нагоді, оскільки одним із напрямків діяльності компанії є інвестування пенсійних активів.

Хто такі актуарії?

Коли я комусь говорю, що я є актуарієм, а мене запитують, що це означає, моя коротка відповідь є такою: *«Актуарій – це математик, який працює в страхуванні і проводить різні необхідні для страхування розрахунки»*. Основні речі, які актуарії рахують, це:

Ціна – тобто яку суму платитиме клієнт страховій компанії за своє страхове покриття.

Резерв – тобто вартість страхових зобов'язань перед усіма клієнтами, які страхова компанія зобов'язалася виконати.

Капітал – тобто додаткова сума грошей, яку страхова компанія повинна мати у своєму розпорядженні, так би мовити, «на чорний день», щоб мати змогу розрахуватись з усіма клієнтами та кредиторами, навіть якщо їй дуже сильно не пощастило[5].

«Вкладена вартість»[6] – для компанії страхування життя ця величина визначає вартість усіх договорів страхової компанії, тобто яку суму загального прибутку отримає компанія від цих договорів за весь час їх дії – коли компанії продаються чи зливаються з іншими, ця вкладена вартість є основою (першим наближенням) ціни, яку готові заплатити інвестори за таку компанію.

Як спеціалізуються актуарії?

Є три основні напрямки, за якими поділяються актуарії у своїй діяльності, відповідно до сфери страхування, у якій працюють. Ці напрямки умовно називаються:

[4]Це там, де великі страхові компанії звертаються до твого роботодавця за професійною (актуарною) порадою, і платять за це досить високі гонорари – цінний досвід.

[5]Наприклад, якщо у регіоні, де живе більшість клієнтів компанії, пройшло велике стихійне лихо. Або якщо завдяки фінансовій кризі різко впаде ціна активів компанії.

[6]Англійською «Embedded Value», або, коротко, «Вартість» – «Value»

«Життя» («Life»), або «лайфові» актуарії – ті, хто працюють у страхуванні життя;

«Пенсія» («Pension»), або «пенсійні» актуарії – ті, хто працюють у пенсійному страхуванні;

«Не-життя» («Non-Life»), або «нон-лайфові» актуарії – ті, хто працюють у будь-якому іншому виді страхуванні (наприклад, автомобільне, нерухомість, здоров'я і т.і.)

Один раз вибравши свою актуарну спеціалізацію, актуарії найчастіше залишаються у ній протягом усього професійного життя. Цей вибір часто робиться ще під час навчання: або за власними вподобаннями, або ж завдяки випадку – наприклад, згідно першої актуарної роботи, яку вдалось отримати. Дуже рідко коли актуарії достатньо глибоко розбираються у двох, або у всіх трьох, напрямках. Виключенням може бути консалтинг, де, завдяки проектній роботі, легше спробувати себе у іншій сфері; або ж у «суміжних» видах страхування, наприклад: компанії страхування життя, які викупляють («buy-out») пенсійні зобов'язання у великих пенсійних фондів; нон-лайфові компанії, які покривають ризик довічних виплат (ануїтетів) постраждалим, і таке інше.

Окрім основного поділу за сферою страхування, на реальних роботах актуарії також часто спеціалізуються за типами розрахунків, які вони проводять. У першому наближенні це буде: *прайсинг*, *резервування*, *розрахунок капіталу*, чи *визначення вкладеної вартості*. Ці спеціалізації можуть бути настільки вузькими, що актуарії, які у них працюють, можуть не завжди розуміти професійну мову своїх колег із інших сфер. Наприклад, прайсинговий актуарій у авто-страхуванні майже не буде мати професійних точок перетину з актуарієм, який рахує вкладену вартість у компанії страхування життя.

Яку математику використовують актуарії?

Як майбутніх (чи теперішніх) студентів-математиків, вас, напевно, цікавить, які області математики використовують актуарії у своїй роботі. Давайте розглянемо ці основні розділи.

Теорія ймовірностей

Безперечно, теорія ймовірностей є основною математичною наукою усіх актуаріїв, незалежно від їх спеціалізації. Це й не дивно. Суть будь-якого страхування – це фінансове забезпечення різноманітних ризиків[7]: від матеріальних втрат заподіяних стихійним лихом, до втрати здоров'я чи смерті людини.

Страховий ризик математично описується двома характеристиками: величиною можливих втрат, та ймовірністю настання. Іншими словами, ризик можна описати випадковою величиною, а його характеристики – ймовірнісним розподілом випадкової величини. Усі інші розрахунки, які проводять актуарії – це, по суті, підрахунок різних характеристик тих випадкових величин, які характеризують страхові ризики. Наведу декілька прикладів.

- Ціна договору страхування – це просто математичне очікування випадкової величини, яка характеризує

[7] Якщо бути точним, у страхуванні працюють лише з так званими *«страховими» ризиками*. Наприклад, ризик програшу у казино або ризик збитку від інвестування у акції не є страховими ризиками, і їх не можна застрахувати.

вартість майбутніх можливих страхових виплат за таким договором, плюс прибуткова «маржа» страхової компанії.

- Резерв за групою страхових договорів – це теж математичне сподівання майбутніх виплат за цими договорами. Різниця із ціною договору полягає в тому, що резерв потрібно рахувати для усіх діючих[8] договорів, які коли-небудь були виписані страховою компанією, а також враховувати усі майбутні премії, які за цими договорами ще будуть платитись.
- Вкладена вартість, як не дивно, це теж математичне сподівання, тільки на цей раз сумарного грошового потоку, який генерується усіма діючими страховими договорами та активами, які їх забезпечують.
- При розрахунку капіталу, виникає трішки більше варіантів, тому що спочатку потрібно погодити міру ризику (risk measure), за яким цей капітал потрібно рахувати. Наприклад, такою мірою може бути процентиль якогось рівня – тобто така величина (сума грошей), вище якої дана випадкова величина (у нашому випадку збитки) не буде приймати значення з визначеною ймовірністю (рівень персентиля). Наприклад, у Європейських країнах, включаючи Великобританію, діє регуляторний режим, який називається «Солвенсі два» (Solvency II), який вимагає тримати капітал на рівні, не меншому ніж персентиль рівня 99,5 %.[9]

Із описаного вище, може здатись, що теорія ймовірностей, яка використовується актуаріями, є дуже простою: наче потрібно лише вміти рахувати математичні очікування випадкових величин – і це майже все, що потрібно вміти. Насправді, ні – не лише це, і не так просто, як спершу здається. Із теорії ймовірностей актуарії також використовують: довірчі інтервали; метод Монте-Карло; функціонали на ймовірнісих розподілах в якості мір ризику; теорію Гаусових випадкових векторів, та основи лінійної алгебри, як інструмент до неї; умовні ймовірності та формулу Баєса; теорему великих чисел та центральну граничну теорему; розподіли з важкими хвостами; копули та інші моделі залежності між випадковими величинами; ланцюги та процеси Маркова; Вінерівський процес та процеси Ітo; фільтрації та мартингали; елементи аналізу такі як наближення Тейлора і перетворення Фур'є та Лапласа; і так далі, і тому подібне. Із багатьма із цих понять актуарії працюють на практиці – з деякими частіше, з деякими рідше, що також залежить від спеціалізації актуарія. Часто перераховані методи та інструменти використовуються спочатку для моделювання страхового ризику (тобто, випадкової величини), а потім для підрахунку чи наближення відповідних ціни, резерву чи капіталу (тобто, те ж саме математичне сподівання, чи якась міра ризику). Просто складність такого моделювання та оцінок в реальному житті потребує досить складних математичних методів.

Окрім теорії ймовірностей, актуарії також активно використовують інші математичні дисципліни.

[8] А іноді і для тих договорів, які вже завершилися.

[9] Значення цього процентиля можна сформулювати так: «капітал повинен бути таким, що збитки будуть менші за цей капітал з ймовірністю 99,5 %». Або, що еквівалентно, «збитки будуть більші за капітал з ймовірністю 0,05 %=$\frac{1}{200}$». Останнє формулювання ще іноді подають у більш описовому вигляді, задля відчуття перспективи і надання контексту цифрам: «капітал повинен відповідати збитку, понесеному при найгіршій події, яка може статись протягом 200 років».

Математична статистика

Будь-які математичні моделі страхового ризику, які будуються актуаріями для відповідних розрахунків (ціна, резерв, капітал), повинні бути таким чином відкалібровані, щоб максимально точно відображати реальний ризик, який моделюється. Для цього спочатку визначають вибірку схожих підходящих ризиків, які спостерігались у минулому – або тією ж самою страховою компанією; або, якщо таких даних недостатньо, іншими компаніями на ринку. Потім роблять відповідні оцінки (калібрування) параметрів вибраної моделі таким чином, щоб після підстановки до моделі, вона якнайкраще описувала прийнятий ризик. У цьому процесі може бути задіяний весь інструментарій математичної статистики. Наприклад:

- У простих моделях, де ризик описується розподілом у визначеній функціональній формі із всього декількома параметрами, ці параметри оцінюються стандартними методами – як то метод найбільшої вірогідності, метод моментів, тощо. При виборі методів оцінок приймають до уваги стійкість (робастність) оцінки до роботи на даних поганої якості;
- У більш складних ризиках, які описати моделями із декількома параметрами неможливо[10], застосовуються різні методи статистичного факторного аналіз, щоб спершу визначити усі фактори, які впливають на даний ризик, і сконструювати саму модель, а вже потім окремо оцінити параметри усіх компонентів-факторів, які входитимуть до цієї моделі;
- Оскільки маємо справу з реальними даними, де можуть бути «викиди» (помилки), втрачені дані, або змішані дані із різних джерел, то проводиться тестування та очищення даних. Для тестування, наприклад, можуть застосовуватись статистичні тести на однаковість розподілів двох вибірок, чи на відповідність розподілу вибірки одному конкретному розподілу, або певній сім'ї розподілів. Очищення проводиться методом визначення і видалення викидів із вибірки;
- Після того, як модель відкалібрували, можна провести статистичні тести на відповідність симульованих даних із цієї моделі тим даним, до яких вона калібрувалась. Таким чином, одночасно перевіряються дві речі – якість самої математичної моделі та якість калібрування параметрів до неї.

Фінансова математика

Основні актуарні розрахунки, про які ми говорили вище – ціна, резерв, капітал – зазвичай зводяться до оцінки певних грошових потоків, які можуть настати у майбутньому з певною ймовірністю.[11] Якщо можливу величину цих потоків, а

[10] Для прикладу, можна уявити автострахування, де ризик пошкодження автомобілю (і, відповідно, страхової виплати) може залежати від десятків різних факторів, таких як: модель і технічний стан самого автомобіля; досвід і звички водія; місце і спосіб використання автомобіля, і багато-багато інших.

[11] Простий (спрощений) приклад може бути таким: за договором довічного страхування життя клієнт щороку на початку року сплачує певну страхову премію, поки не настане страховий випадок (смерть). Коли ж настав страховий випадок, то сплата премій припиняється, а страхова компанія виплачує в кінці року смерті певну страхову суму. Отже, платежі (грошовий потік), асоційовані з таким договором, можна визначити в усі майбутні роки точно, але умовно до настання страхового випадку у певний майбутній рік; також можна порахувати (оцінити) ймовірності настання смерті в усі майбутні роки.

також ймовірність їх настання, вдалось оцінити, то щоб порахувати теперішню очікувану вартість такого потоку (знову, теж саме математичне сподівання), потрібно спочатку звести вартість усіх майбутніх потоків до теперішнього часу. Цей процес називається дисконтуванням, і є відображенням базової (та простішої) частини предмету фінансової математики – вартості грошей у часі.

Потрібно зауважити, що більш складна частина фінансової математики, а саме, теорія арбітражу та арбітражне визначення ціни активів, не застосовується актуаріями активно (на відміну від професії квонтів, про яких можливо піде мова у наступних публікаціях). Причина в тому, що актуарії працюють на страхові компанії та пенсійні фонди, які є «покупцями» (так звана «бай-сайд») на ринку фінансових активів. А покупцям не потрібно розбиратись в деталях того, як формується ціна активів – вони просто виходять на ринок і купують ті активи, які їм потрібні для покриття своїх зобов'язань і для максимального зменшення свого ризику, звичайно ж, за найменшою ціною, яка доступна на ринку. Квонти ж працюють на інвестиційні банки, які є продавцями активів (так звана «сел-сайд»). А для банків є життєво важливим правильно сформувати «безарбітражну» ціну свого товару (цінних паперів та деривативів), інакше конкуруючі банки побудують проти тебе арбітражні стратегії та зароблять на тобі гроші…

«Актуарна математика»

Я навмисне взяв у лапки назву «Актуарна математика», бо це є досить цікавий і корисний спеціалізований предмет, але який, як на мене, окремою «науковою» дисципліною в математиці не є. Я можу помилятись, і в різних університетах та підручниках підхід може бути різним, але зазвичай під актуарною математикою розуміють два великі розділи: Систему спеціальних позначень та методів розрахунку ціни та резервів у страхуванні життя; а також набір практичних методів розрахунку резервів у нелайфовому страхуванні. Отже, розберемо на прикладах обидві ці частини.

Актуарна математика страхування життя

Перша частина Актуарної математики, яка має справу із страхуванням життя, є знаменитою своєю вичурною системою позначень. Тут у формулах можуть брати участь великі і маленькі буковки, або комбінації із великих чи маленьких буковок; над кожною із тих буковок можуть стояти крапочки, рисочки чи дашочки; в усіх чотирьох кутах від тих буковок – тобто знизу і зверху, справа і зліва – можуть стояти якісь індекси, іноді подвійні індекси, іноді розділені рисочками чи двокрапками, або взяті у дужки, або накриті зверху куточками, і так далі, і тому подібне. І будь-які найдивніші комбінації цих всіх символів щось там означають для актуарія, який їх малює (рис. 1).

$$ {}^{h}\bar{V}^{\{1\}}\left(\ddot{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right) $$

Рис. 1. *Якась маячня, але не для актуарія*

Насправді, є поважна історична причина для виникнення такої складної системи позначень. Коли з'явилась актуарна професія, ще не існувало комп'ютерів, але страхові продукти і розрахунки, які проводили актуарії 100 і більше років

тому, вже тоді були близькі за складністю до тих, які існують і проводяться сьогодні. Для того, щоб справлятись з цими розрахунками, «древні» актуарії розробили систему таблиць, а також методів розрахунків, спрощень і наближень, які дозволяли їх робити.

Наведемо приклад. При розрахунку ціни договору страхування життя, необхідно порахувати теперішню вартість майбутніх премій, які будуть сплачені за таким договором. Така вартість називається «ануїтетом» і позначається маленькою літерою «а». Але у конкретного (найпростішого) договору страхування може бути наступний набір умов та додаткової інформації, які ми повинні взяти до розрахунку: премії сплачуються щорічно на початку року протягом n років, але зупиняються при настанні смерті застрахованого; застрахованому x років на початок дії договору, і грошовий потік дисконтується за фіксованою ставкою i % річних. В актуарній мові такий простий ануїтет позначатиметься наступним чином:[12] $\ddot{a}^{(i\,\%)}_{x:\overline{n}|}$.

[12]Зважте, що договір також міг би мати багато додаткових умов, які теж потрібно було б врахувати, і, відповідно, які мали б свої додаткові позначення. Наприклад: інша частота сплати платежів, відкладені платежі, зростаючі чи спадні платежі, потрапляння застрахованого у спеціальну селективну групу протягом перших років дії договору тощо. Для врахування усіх цих додаткових параметрів у розрахунках, актуарна математика має або точні або наближуючі формули, які зводять розрахунок до простіших компонентів (наприклад, відкладений ануїтет можна точно порахувати з тих самих компонентів, що й моментальний ануїтет, а ануїтет з місячними платежами можна наближено порахувати формулою з використанням ануїтету з річними платежами), або ж вимушена вводити додаткові базові компоненти, які теж потрібно табулювати в актуарних таблицях (наприклад, зростаючі/спадні ануїтети чи використання селективних таблиць смертності потребує введення нових видів актуарних таблиць.

Для розрахунку тільки одного такого ануїтету потрібно провести можливо з сотню простих арифметичних дій над числами з багатьма знаками після коми. Для сучасного комп'ютера – це міллісекунди, для актуарія 100 років тому – це, напевно, був би день роботи. Тому раніше намагались занести в числові довідникові таблиці якомога більше компонентів таких розрахунків. Потрібно було мати окремі таблиці для основних таблиць смертності та статі застрахованого, а також окремо для основних значень дисконтової ставки i %. У нашому прикладі з ануїтетом, теоретично, кожна така окрема таблиця мала б бути двомірною – тобто містити значення для усіх комбінацій віку x та строку страхування n – разом це сотні значень. Але ось тут і приходить на допомогу актуарна математика, яка допомагає розкласти значення нашого ануїтету на більш прості (одновимірні) компоненти. А саме, користуємось такою формулою:

$$\ddot{a}^{(i\,\%)}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

і це дозволяє занести в таблицю лише два стовпчики компонентів N_x, D_x. Такі спрощення формул значно полегшували життя актуаріям у докомп'ютерний час.

Ми вже казали, що для сучасного комп'ютера провести усі необхідні розрахунки від самих початків – тобто відштовхуючись від реальних грошових потоків та безпосередньо рахуючи відповідні ймовірності та дисконтні коефіцієнти кожного компоненту такого потоку є дуже простим завданням. При цьому, не потрібно робити ніяких наближень (наприклад, дисконтна ставка може базуватись на реальній ринковій кривій, а не на фіксованій відсотковій ставці), а також самі грошові потоки можуть мати найбільш узагальнені значення за розміром та

часом і умовою настання. Якщо це так, то чи потрібно зараз, сучасним актуаріям, вчити цю спеціалізовану мову позначень та розрахунків актуарної математики? Відповідь: так, потрібно. По-перше, ця математика дозволяє гарно зрозуміти взаємовідношення і властивості усіх елементів актуарного розрахунку у страхуванні життя. По-друге, це є спільною мовою спілкування між актуаріями, і позначення до цих пір використовуються в актуарній документації, та й просто при робочих комунікаціях. По-третє, таблиці, які до цих пір оновлюються і друкуються Актуарним Інститутом, дають простий і швидкий метод перевірки результатів комп'ютерних розрахунків, наприклад, на етапі, коли така програма лише розробляється. Нарешті, у актуарних студентів немає вибору, бо актуарна математика страхування життя є частиною актурного навчання та кваліфікації.

Зауважте, що нічого принципово нового з наукової точки зору «актуарна математика» в математику не приносить. Усі методи, які в ній використовуються – це базова теорія ймовірностей. Цінність цієї актуарної математики лише в тому, що вона вводить систему позначень, яка є зручною та природною для страхування життя.

Актуарна математика нон-лайфого страхування (методи трикутників)

Дозвольте невеличкий ліричний вступ. За моїми спостереженнями, у якийсь момент навчання актуарії починають майже інтуїтивно ділитись на лайфовиків та нон-лайфовиків. Мені здається, що часто цей поділ визначають не якісь раціональні міркування про майбутню кар'єру, а, банально, глибоко підсвідомі смаки у математичних позначеннях та методах. У попередньому параграфі ви мали змогу побачити, з якими позначеннями доводиться працювати лайфовим актуаріям (слава Богу, що, на практиці, лише переважно у період навчання).

Як на мене, ці позначення – це як якийсь секретний код: частина студентів розуміє його, і каже – «Ок, це кул, ай лайк це», і починає отримувати задоволення від малювання індексів, крапочок, рисочок, спрощення і перетворення формул і т.п. (мушу визнати, що я теж був одним із таких студентів) – ці студенти найшвидше стануть лайфовиками. Але інші студенти не розуміють коду – «В чому прикол, це нудно» – кажуть вони. Ні, звичайно, ці студенти теж продовжують малювати індекси та формули (бо треба ж кваліфікуватись), але задоволення від процесу не отримують. Такі студенти, найшвидше, стануть нон-лайфовиками. Але, знайте, що справедливість у актуарному світі є, тому що у нон-лайфових актуаріїв теж є свій секретний код! Цей код називається «Трикутники». Вони так і говорять – просто, з любов'ю: «трикутники» (іноді, з блиском в очах, «трикутнички, мої трикутнички...») При цьому вони малюють якісь трикутні матриці, вписують в них числа, підкреслюють, обводять, дописують, переносять, закреслюють, знову дописують – а тоді, абсолютно екзальтовано, викрикують – «Готово, мій АйБіеНаР[13] за методом Борнхуетера-Фергюсона дорівнює стільки-то!». Майбутні лайфові актуарії часто відчувають певний дискомфорт при цьому дійстві.

Тепер знову трішки більш серйозно. Так, нон-лайфові актуарії теж мають свій розділ «актуарної математики». На відміну від лайфових актуаріїв, ця

[13] АйБіеНаР, від англійського «IBNR» – «incurred but not reported» – є резервом збитків, які «настали, але не заявлені».

математика не вводить якоїсь зручної загально-визначеної системи позначень. Натомість, вона фокусується на практичних методах підрахунку резервів. Чому виникає потреба мати якісь особливі методи для розрахунку резервів саме в нон-лайфовому страхуванні? Загальне визначення резерву для всіх видів страхування однакове – це поточна оцінка вартості страхових зобов'язань, які взяла на себе страхова компанія. Але особливість нелайфового страхування, яке вимагає особливих підходів, полягає в його короткостроковості. Тут виникають два аспекти.

Перше – це швидке оновлення інформації. Коли актуарій розраховує ціну страхування, вона/він робить велику кількість припущень щодо майбутнього страхового ризику (набір таких припущень називається «актуарним базисом»). Коли вже договір укладено, актуарію потрібно продовжувати робити припущення для оцінки резерву. Якщо в страхуванні життя строки договорів є досить великими, а ймовірності настання страхових подій (тобто, смертей), слава Богу, є досить малими, актуарій навряд чи матиме багато додаткової інформації про вже діючий застрахований портфель, яку він із статистичною впевненістю міг би використати для коректування своїх початкових припущень – тому часто резерви в страхуванні життя обчислюються на тому ж, або близькому до цінового, базисі. Зовсім інша ситуація в короткостроковому нон-лайфовому страхуванні – там врахування поточної поведінки портфелю у базисі резерву починається одразу від вступу договорів у дію.

Наприклад, актуарій порахувала ціну річного договору автострахування, базуючись на очікуванні, що 20 % застрахованих машин потраплять в якісь дорожньо-транспортні пригоди. Скажімо, пройшло пів-року, і вже 15% застрахованих подали до страхової компанії позови. Вже очевидно, що початкове припущення про 20 % позовів протягом всього року швидше за все не було правильним, і продовжувати рахувати резерв базуючись на цьому початковому базисі буде неправильним – потрібне коректування.

Другий аспект – це так звані «позови, що настали, але не є заявленими». У тому ж самому нашому прикладі, якщо 15 % застрахованих уже подали заяву на виплату станом на середину року – а що якщо якась частина застрахованих уже потрапили в аварію, але ще просто не встигли донести свою заяву на страхову виплату до страхової компанії? Це абсолютно слушне питання, і в реальності, таких випадків може бути досить багато і вони суттєво впливатимуть на поточну оцінку страхового резерву.[14]

Задача ж актуарія полягає в тому, щоб максимально ефективно використати всю наявну інформацію у кожний момент часу та найкращим чином оцінити вартість майбутніх виплат (резерв) на цей момент часу. При цьому, роблячи свої актуарні судження, актуарій буде значною мірою опиратись на наявну історичну інформацію. Скажімо, якщо страхова компанія вже проводила цей самий вид страхування багато років, то можна спробувати знайти відповіді на два питання, які ми сформулювали вище, наприклад: з досвіду минулих років, якщо на момент $t < n$ дії портфелю договорів я маю x % договорів із заявленими збитками, то: 1) яку остаточну загальну суму виплат я матиму по завершенню строку дії цього портфеля, або 2) який відсоток договорів на цей самий момент

[14] У страхуванні життя такі випадки теж можуть бути, але завдяки малій ймовірності настання випадку, їх очікувана вартість є малою і найчастіше ігнорується.

$t < n$ вже мають страховий випадок, але клієнти за цими договорами ще не встигли зробити заяву на виплату?

Для зручності таку статистику минулих років розміщують у вигляді матриць трикутної форми, наприклад: у першому рядку виплати за найстарішим наявним портфелем, де в стовпчиках будуть виплати за цим портфелем в усі майбутні періоди до теперішнього часу; у другому рядку – портфель із наступного періоду, з відповідними виплатами в майбутні періоди до теперішнього часу, але тепер таких періодів (стовпчиків) буде на один менше(!); і так далі; останнім рядком буде портфель з останнього періоду, і, оскільки він останній, цей рядок матиме лише однин стовпчик із відомими виплатами – в результаті ми отримали того самого «трикутника»! Що саме робити з цим трикутником – методи різняться, і їх є багато. Усі ці методи базуються на певних додаткових припущеннях, які робить актуарій, щоб мати змогу використати історичну інформацію.

Наприклад, вже згадуваний метод Борнхуетера-Фергюсона припускає, що портфель матимете певний рівень сумарних збитків, який можна оцінити історично, і, відповідно, незаявлені збитки можна визначити як різницю між цими сумарними збитками, і тими, що вже були заявлені. Інший популярний метод – «ланцюгово-драбинний» («Chain-Ladder method») – навпаки, не звертає ніякої уваги на загальні збитки, але зате припускає, що динаміка розвитку збитків від періоду до періоду зберігається сталою, і її можна оцінити на основі історичних даних. Є й інші методи та інші припущення, на яких вони базуються.

Але, як бачимо, з математичної точки зору, ця нон-лайфова «актуарна математика» знову нічого принципово нового з наукової точки зору не додає (як і у випадку актуарної математики життя) – актуарій вивчає історичні дані статистичним методами, на їх основі робить деякі припущення про розподіл випадкової величини збитків, і, нарешті, застосовує ці припущення для оцінки все того ж самого математичного сподівання випадкової величини. Отже, висновок: актуарна математика – це просто частинка теорія ймовірностей та математичної статистики, оснащена набором зручних для актуаріїв практичних методів, а також спеціальними «секретними кодами», щоб виділятись на фоні інших «математик». Нічого більше ;)

Програмування

Щодо програмування, скажу лише коротко, що, як і в усіх сучасних фінансових дисциплінах, комп'ютерні розрахунки дуже активно використовуються в страхуванні загалом, та актуаріями зокрема. Сьогодні існує цілий ряд потужних «актуарних» пакетів і навіть спеціалізованих актуарних мов програмування. Я не буду наводити конкретних імен та брендів, тому що: 1) ці імена міняються, і їх завжди неважко знайти пошуком в Інтернеті; 2) їх багато, і в різних компаніях/ринках популярні різні продукти; 3) основне, я не думаю що на початковому етапі навчання, навіть якщо вирішив стати актуарієм, необхідно розбиратись в якихось конкретних спеціалізованих продуктах – достатньо просто «набити руку» на C++ або інших стандартних мовах, а коли прийде час, перейти на актуарну мову програмування буде неважко.

Якщо у актуарія є хист і бажання програмувати, то в актуарній професії для неї/нього точно знайдеться дуже гарна ніша роботи, де вона/він зможе одночасно застосовувати як актуарні знання, так і навички програмування. Але, разом з тим, є також значно ширший набір актуарних спеціалізацій, де без-

посереднє програмування не потрібне – достатньо працювати з відповідними програмами на рівні користувача.

Що таке актуарне судження?

Незважаючи на перерахований список математичних дисциплін, якими користуються актуарії, є ще одне, строго кажучи, зовсім не технічне вміння, якому актуарії повинні навчитись – це робити та обґрунтовувати «актуарне судження» (actuarial judgement). Для демонстрації того, що це за вміння, і де воно може бути потрібним, повернемось до прикладу із фінансової математики, який розглядався вище – дисконтування та вартість грошей у часі.

Саме дисконтування і пов'язані з ним розрахунки, в принципі, не є складною математикою, а лише вимагають певної акуратності. Так, потрібно звикнутись і «напрактикувати» застосування різних видів відсоткових та дисконтних ставок та співвідношень між ними. Наприклад, відсоткові ставки можуть визначатись за способом нарахування (прості, складні, неперервні відсотки); вони можуть бути постійні або змінні у часі (відсоткова крива); для змінних у часі відсотків, потрібно розуміти і вміти виводити одну із одної спотові, форвардні ставки, форвардні інтенсивності тощо. Але це все не виходить за межі, в якомусь сенсі, елементарної математики, оскільки усі ці розрахунки на практиці автоматизуються у комп'ютері, і від актуарія вимагається лише розуміти їх логіку і перевіряти правильність застосування.

Більш складним питанням є визначення тієї відсоткової ставки (на практиці – кривої), за якою потрібно дисконтувати грошові потоки. Тут потрібно застосовувати «актуарне судження», яке базуватиметься на цілій низці факторів: розуміння специфіки та ризиковості грошових потоків, які дисконтуються; суть бізнесу, де ці потоки виникають; поточних ринкових практик; регуляторних вимог, тощо. Давайте розберемо це питання трохи детальніше, щоб у читача було уявлення, що це таке – актуарне судження.

Справа в тому, що на ринку існує багато різних відсоткових кривих, які відображають очікувану доходність різних активів. Такі доходності будуть дорівнювати щонайменше доходності безризикового активу (наприклад, облігації, випущеної національним банком країни у валюті цієї країни) плюс певна премія за ризик та можливу неліквідність активу (на практиці – знижка в ціні активу), яка платиться тією стороною, яка випустила актив (емітент), тій стороні, яка його придбала (інвестор).

Ліквідністю називається можливість легко продати актив у досить короткий строк. Наприклад, якщо ваш актив – це боргові зобов'язання уряду США (так звані трежеріс) на строк 10 років, або акції компанії Apple чи Coca-Cola, то у вас не буде ніякої проблеми їх продати – щодня такі активи торгуються на біржі в дуже великих сумах, і завжди є охочі як купити так і продати їх; відповідно і ціна на такі активи встановлюється справедлива – без додаткової премії покупцеві. Якщо ж інвестор вийде на біржу і спробує продати боргові зобов'язання або акції якихось менш успішних чи відомих емітентів, то може не знайтись багато охочих покупців на такий актив; тому ціна активу спускатиметься, доти, поки потенційний продавець не отримає достатню «премію» за такий неліквідний актив, яка його задовольнить.

Коли ж страхова компанія інвестує страхові резерви, пов'язані із майбутніми страховими зобов'язаннями, вона часто може не хвилюватись про ліквідність

активу (наприклад, облігації), тому що їй не потрібно буде знову перепродавати цю облігацію на ринку, натомість вона може дочекатись виплати її номінальної вартості по завершенню строку дії. Через цю особливість інвестування страховими компаніями вони в середньому можуть отримувати вищу доходність, ніж інші інвестори, і ця різниця дорівнюватиме премії неліквідності, яку має в собі ринкова ціна активу.

Теоретично, актуарій може закладати цю премію неліквідності у відсоткову криву, за якою дисконтуватиме грошовий потік. Але тут виникає дуже багато питань, в яких потрібно розібратись і врахувати перед тим, як такий розрахунок зробити. Наприклад: які саме активи покривають ці конкретні зобов'язання; чи якісь із них пов'язані із майбутніми страховими зобов'язаннями, потрібно мати на увазі види активи, (наприклад, облігацій) різної ризиковості – як бачите з цього прикладу, складність реальної роботи актуарія полягає не в технічних деталях (бо, як в цьому прикладі, безпосереднє дисконтування грошового потоку проведе комп'ютерна програма), а в умінні правильно застосовувати та, що важливо, обґрунтовувати своє актуарне судження. Вибір та обґрунтування відсоткової кривої для дисконтування, наприклад, може займати цілий розділ у актуарному звіті, і включати багато додаткових розрахунків, а також посилань на актуарні принципи, ринкові практики, та регуляторні вимоги.

Використання сучасної математики очима сучасних випускників

Зубченко Володимир Петрович
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Сутність математики для кожного з нас різна – для когось це задачі зі шкільного курсу, для інших – згадка про щасливі студентські роки. Хто використовує математику у своїх фізичних, хімічних, біологічних або ж навіть філологічних дослідженнях. Для когось вона – теоретична дисципліна із набором абстрактних задач, а для когось – незмінний інструментарій практичної повсякденної діяльності.

В будь-якому разі, найбільш яскраво математика виявляється в історіях людей, які присвячують їй свій час та натхнення. Тож починаємо знайомство із випускниками механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, чиї розповіді, впевнені, відкриють яскраве різноманіття використання математичних знань у світі сучасних технологій та швидкого життєвого ритму.

Тетяна Вапнарюк

Мене звуть Тетяна, я займаюся розробкою програмного забезпечення. Закінчила механіко-математичний факультет, кафедру теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики. Я працюю в українському офісі данської компанії вже більше трьох років. Ми робимо продукт, який дозволяє оптимізувати роботу інвестиційних фондів. Конкретно моя команда працює над задачами, які створюють нові можливості фінансового обліку цінних паперів. Я люблю свою роботу, і кожен день стикаюсь із розв'язанням складних задач.

Перше, що мені спадає на думку, коли мене питають про вплив математики на моє життя, – це те, що математика насамперед сформувала у мені певну культуру мислення. Якщо щось здається очевидним, то це одразу у мене викликає підозри. Математика виховує недовіру до поверхневих висновків та привчає критично ставитись до всього. Це універсальні навички, без яких ви не зможете стати професіоналом у будь-якій сфері. Математика навчила мене досягати правильних результатів, не обмежуючись одним способом. Також вона навчила мене бути спостережливою, уважною до деталей. Коли я шукаю, звідки з'явилась девіація у одну копійку у фінансовій звітності, кожна деталь має вагу. Згадуючи свій досвід розв'язання складних задач з функціонального аналізу або теорії міри, я розумію – мене вже ніщо не лякає. Математика робить щеплення від страху перед складними задачами. Після мехмату ти просто розумієш, на що здатен в інтелектуальному вимірі.

Стосовно перспектив працевлаштування, я можу сказати, що у випускників математичних спеціальностей вони дуже високі. Не дивлячись на те, що я не

мала фінансової освіти, на першу роботу я влаштувалася у банку, де робила аналітичні огляди. Тема моєї магістерської роботи була також пов'язана з роботою у банку, а саме з прикладними задачами прогнозування цін на сільськогосподарську продукцію. Коли я прийшла на роботу в IT-компанію, в мене не було досвіду програмування, але мене взяли. Я думаю так склалося, тому що диплом математика – це свідчення того, що людина вміє вчитися взагалі і самостійно добувати знання. Просте не слід забувати, що мати диплом математика – це ще не все, дуже важливо розвиватися як особистість, читати книжки, вчити мови, особливо англійську, володіти навичками комунікації, бути допитливим і цікавитись світом навколо себе.

Ліна Паляниця

Зараз я працюю в консалтинговій компанії в Мюнхені, яка спеціалізується на IT, в команді Big Data. Закінчувала Київський мех-мат за спеціальністю «Теорія ймовірностей» та маю магістерський диплом з фінансів. Планувала працювати актуарієм, зробила кілька стажувань в страхових компаніях. Проте мене завжди тягнуло в IT, а найулюбленіші предмети були теорія ймовірностей і регресійний аналіз. І от, на моє щастя, стає популярним Data Science, про яку я раніше навіть не чула. Працювала аналітиком, брала участь у кількох самостійних проектах, де виконувала роль дата саєнтіста. Наразі я працюю з Spark і Hadoop – це інструменти для Big Data і Data Science. З їх допомогою я зробила два showcases: Sentiment Analysis та Bot Detection. Для них мені були потрібні мої знання математики та алгоритмів. Для Bot Detection я прочитала кілька статей про fraud detection та anomaly detection та зробила новий видозмінений алгоритм, який краще підходив для нашої задачі. Майже все, що потрібно з теорії для Data Science, я вивчила на мех-маті. Доучувати довелося тільки програмування. В якості всім відомих прикладів застосування Data Science, можу привести рекомендаційні системи: Netflix, Spotify, Deezer, Amazon. Зокрема, Deezer мені подобається більше, ніж Spotify, тому що видає кращі рекомендації, бо, вочевидь, має кращий алгоритм. Ще один приклад – це fraud detection, він є необхідним для будь-якої системи оплати. Щоб бути Data Scientist я раджу гарно вивчити все, що пов'язане з теорією ймовірностей, статистикою, регресійним аналізом, машинним навчанням та підготовкою даних. Щоб це все зрозуміти, звісно необхідно мати знання й з інших областей математики. Щодо практики, то раджу освоїти Python і Spark. Ну і звичайно практикуватися самостійно та шукати роботу, де зможете застосовувати ці знання для вирішення реальних задач.

Щербак Сергій

Я ніколи не був фанатом програмування. Ще в школі і університеті вивчення математики тісно зв'язували з вивченням програмування – від обрахунку квадратичних рівнянь до задач чисельних методів обчислення – тому я мав досить багато часу, щоб познайомитись з цим «звіром», але я не мав такого пекучого бажання програмувати. Навіщо? Коли ти закінчив математичний, то у тебе і так багато варіантів для розвитку і роботи.

Після університету я почав працювати актуарієм і вже на роботі я побачив як багато користі приносить програмування в роботі. Ми зробили певну автоматизацію в Ексель і це прискорило вдвічі швидкість роботи менеджерів з продажу. А введення автоматизації обліку давало

б ще більше користі. Але головне, що я зрозумів після того як зробив свої перші програмки на VBA – це відчути радість, коли твоя програма працює і нею користується біля сотні людей. Таким чином, не довго думаючи, я закінчив курси програмування на Java і став програмістом. Найбільше мені подобається розбиратись я чомусь складному, освоювати нові технології і втілювати в життя нові задуми і ідеї. В цьому мені допомагають навички які я отримав, коли навчався на механіко-математичному, бо там я навчився шукати інформацію, зосереджуватись і не здаватись, навіть коли задача здавалась непосильною.

Якщо Вам цікаве програмування, то легше за все закінчити курси і починати одразу писати програми – головне практика кожен день. Також важливо розуміти, що технології змінюються і ця професія буде від Вас вимагати постійного навчання і розвитку – не варто лінуватись і очікувати, що хтось замість Вас буде шукати застосуванням новим технологіям і розказувати як і що працює. В програмуванні, як і в житті, потрібно самому відповідати за свій розвиток. Удачі!

Олексій Назаров

Привіт, я працюю в банківській сфері, лінійним керівником підрозділу фінансових казначейських ризиків. Більш простими словами, ми стежимо за рівнем ризику, властивого банку в цілому, не зважаючи на конкретні імена клієнтів. Основні види ризику у нас: ринковий ризик (ризик втрат від курсів валют і процентних ставок), ризик ліквідності (коли потрібно розплачуватися за зобов'язаннями і грошей не вистачає, а їх доводиться шукати в рази дорожче).

Уже багато років дослідники теорій і законодавці цих ризиків намагаються знайти протиотруту «винаходам» банків, щоб якось обмежити ризикову діяльність фінансових установ. Намагаються обмежити ризик-фактори на підставі того, що вже спостерігалося в минулому, це так звані «lessons learned». Регулятори встановлюють все більше вимог до банківських груп в спробах врахувати їх майбутнє.

Крім виконань регуляторних вимог, банки і самі зацікавлені в проведенні регулярного факторного аналізу діяльності банку і ринку в цілому. У підсумку, банку дуже корисно мати у себе в штаті фахівців, які здатні робити data analysis з поведінки клієнтів, з поведінки доходностей певних інструментів, курсів валют, їх кореллляції, побудови та впровадження аналітичних інструментів.

Відповідно, нам не обійтися без математичних моделей, здатних або агрегувати n показників (наприклад, ринкові дані) в одну величину (величину ризику), або ж навпаки, екстраполювати і прогнозувати (немов відповідаючи на питання «те, що ми бачили в історії, які ймовірні збитки може принести?»).

Ось те, що найбільше мені подобається в цьому всьому: математичний апарат в цьому плані непідкупний. Якщо ти вибрав коректну і адекватну методику, то з результатом аналізу ніхто не сперечатиметься. Залишиться тільки терміново діяти і керувати ризиком, або ж приймати ідентифікований ризик і жити з ним.

Чи можна обійтися без математики в цій сфері? Так можна. Але тільки математичний апарат дозволяє отримати кількісну оцінку ризику, скільки конкретно акціонерам потрібно тримати в запасі «на чорний день».

Віталій Макогін

На початку вересня, коли українські учні повертаються до улюбленої чи зну-

дженої (кожен обирає особисто) школи, я мав чудову розмову в Кайзерслаутерні з молодим австрійським аспірантом на європейському конгресі зі стереології. Він фізик та займається дослідженнями й моделюванням мікроструктури акумуляторів нового покоління, тобто утверджує технологічну першість країн Європи. Я – математик, займаюся дослідженнями стохастичних об'єктів та утверджую інтелектуальну присутність України в ЄС.

Погода була жахлива, але діалог був прецікавий та стосувався вивчення математики сучасними учнями. Я глибоко переконаний, що вчити математику потрібно. Хоча б з поваги до тих здібностей, якими наділила людей еволюція й культура. Древнім грекам ми завдячуємо як мінімум двома шкільними предметами: гімнастика та геометрія. Ніхто ж не сперечається, що для здорового тіла необхідні фізичні вправи. То чому ж ставиться під сумнів доцільність математики – вправ для мозку? Адже логіка – це не вроджена навичка людини, про що я вже встиг переконатися на власному досвіді. Зазвичай логічне мислення закладається й шліфується на уроках геометрії. Тому після 15 хвилин спілкування можу з впевненістю сказати, як успішно співрозмовник вивчав цей предмет. У відомому американському серіалі постійно повторювали: «числа навколо нас». Від себе додам, що не тільки числа, але й непомітні для темного ока закономірності. Студіювання математики – це перший крок до здатності їх виявити, описати, оцінити й передбачити. Австрієць кивнув: так, погода у Кайзерслаутерні може й покращає, а от другий раз у школі не повчишся – математикою нехтувати не варто.

Розмова продовжилася за вечерею в чудовому італійському ресторані. Завжди віддаю перевагу середземноморській кухні. Ми підняли тему про правильність обраного професійного шляху. Мій життєвий досвід тільки підтвердив те, що потрібно займатися улюбленою справою, і якби я мав можливість, я так само вступив би на механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Мій співрозмовник повністю погодився з цим правилом. У сенсі він також…

Оксана Мосенко

Я працюю GMAT консультантом. GMAT – це тест на аналітичне мислення, потрібний для вступу на деякі магістерські програми за кордоном, зокрема престижну програму MBA (master of business administration). Моя робота – готувати охочих до здачі цього тесту, адже у двох із його чотирьох частин потрібно знати математику. Заняття можна проводити з групами та індивідуально, в офісі та онлайн, за графіком, який складаю сама – і це дуже зручно для студентки останніх курсів. Я встигаю навчатися, подорожувати, організовувати свої проекти і працювати.

На цю роботу мене запросили, коли знайшли на одному із сайтів моє резюме, там вже було 2 роки різноманітного досвіду в освіті. Але на цю пропозицію я погодилася лише через 2 місяці. Це якраз було літо після 4-го курсу і я хотіла себе спробувати в ролі Data-scientist: один місяць була на стажуванні, проходила інтерв'ю та спілкувалася із професіоналами, це все було дуже круто. Але вчителювання зараз надихає мене більше.

Мені подобається працювати з людьми, тим більше, що мої клієнти дуже різні: від 21 до 40 років, зі своїми унікальними історіями та типами мислення, але всі амбіційні. Також свобода пересування дуже важлива для мене,

наприклад, я 2 місяці працювала з-за кордону онлайн. І ще, мене надихає мій колектив і те, що компанія займається нашим особистим та професійним розвитком.

Дуже часто GMAT консультантом стають студенти останніх курсів мех-мату на 1, 2 чи 3 роки, саме через гнучкий графік, а далі ідуть працювати в іншу сферу. У перспективі можна рости всередині компанії, займати керівні посади або продовжити працювати вчителем математики в інших компаніях

Математична програма для тесту шкільного рівня, але от пояснити її – вимагає хорошого розуміння і математики, і людей. Кожен клієнт для мене – виклик, чи зможу я навчити його мислити аналітично та систематизовано, адже знання лише математики для тесту мала. Для цієї роботи потрібно вміти і любити пояснювати і працювати з людьми, тож в процесі роботи ви зможете чудово розвинути ці навички!

Святослав Бегун

Мабуть кожен із нас так чи інакше задумувався про ВУЗ для продовження навчання, а відтак, і про майбутньою професією. Я свого часу обрав механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка досить спонтанно – мене зарахували по співбесіді ще до початку вступної компанії. Тож, знаючи, що студентський квиток у мене в кишені, бажання здавати іспити в інші ВУЗи відпало саме собою.

Навчання було не легким, але й суперфантастично-титанічних зусиль теж не вимагало. Тому залишався час на дозвілля, яке ми з друзями-однокурсниками проводили і на природі, і в походах, і на морі. Є що згадати. На старших курсах кілька наших студентів (і я в тому числі) отримали другу вищу освіту в інституті післядипломної освіти при університеті Шевченка. Ми не прогадали, адже дипломи математика і фінансиста дають певну перевагу в очах роботодоавця.

Моя перша робота – страхова компанія, де я працював актуарієм. В парі з моїм керівником, який зараз обіймає посаду голови правління страхової компанії, ми розробили кілька інноваційних підходів до автострахування, що дозволило компанії зберегти лідируючі позиції на ринку в буремні двотисячні роки. Можу сміливо заявити, що без математичної бази втілення цих проектів було би неможливим.

Зрозумівши як влаштована страхова компанія, вирішив спробувати себе в банківській сфері, а саме в департаменті ризиків кредитування. Зазначу те, що співпраця була дуже плідною, ми розробили численні «скоринг-моделі» для видачі кредитів, які й донині використовуються в банку. Згадується як керівник підбирав людей виключно з математичною освітою в свою команду. Ті, хто мали тільки економічну освіту, просто не могли розібратися в тонкощах кореляції між характеристиками позичальників і масштабуванням скорингових балів. Як вже потім з'ясувалося – мій керівник теж свого часу закінчив механіко-математичний факультет університету Шевченка.

А зараз я працюю в інвестиційній компанії, займаюсь аналізом міжнародних ринків, переоцінкою активів і звітністю для акціонерів. Працювати доводиться із зовсім іншим програмним забезпеченням, але структуроване мислення і математична освіта дозволяють робити вдалі прогнози і вирішувати часом непрості задачі.

Оториноларингологіка

Мисак Данило Петрович

Інколи просте означення якого-небудь математичного поняття породжує цілу низку цікавих і несподіваних властивостей, що відкриваються допитливому досліднику. Подібна ситуація нерідко виникає і з вивченням науки про будову мов – лінгвістику – та з її розділом під назвою фонетика, що вивчає найелементарніші складові кожної усної мови – звуки. Для видавання звуків, які здатні швидко й точно донести якнайширший спектр інформації до слухача, людина обладнана не такою вже й великою кількістю інструментів: язик, рот, ніс і гортань. Але цей скромний перелік засобів, ще й початково призначених для інших цілей, людина навчилася використовувати, щоб упевнено розрізняти десятки (у деяких мовах до сотні) різноманітних звуків. Як їй це вдалося? Давайте розбиратися.

Передусім, як ми знаємо змалку, звуки бувають голосні та приголосні, і формуються вони по-різному.

Приголосні звуки поділяються на *дзвінкі* та *глухі*. Дзвінкі – це такі, під час вимови яких ми подаємо голос, тобто вібруємо голосовими зв'язками, а глухі – це ті, що утворюються виключно завдяки шуму, створеному повітрям. *Бас*, *пас* і *паз* – три різних слова, але єдине, що відрізняє їх у вимові, – це «ввімкнення» або «вимкнення» голосу на першому чи останньому звуку слова. Якщо вимовити глухий звук із голосом, то вийде відповідний йому парний звук: із *п* утвориться *б*, а із *с* – *з*. Дзвінкі ж звуки, які таким чином отримати неможливо (тобто такі, які не мають глухої пари), називаються *сонóрними*. В українській мові сонорними є приголосні *л*, *р*, *м* та інші. Сонорні звуки з-поміж усіх приголосних найбільше схожі на голосні та часто поводяться у мовах світу подібно до них. Наприклад, слова *vlk* та *prst* у чеській та словацькій мовах не містять жодної голосної, а дають собі раду тим, що мають у своєму складі сонорні приголосні звуки. Між іншим, спробуйте здогадатися, що вони означають.

Приголосні звуки розрізняються також за місцем творення: приміром, звук *б* ми вимовляємо рухом губ, тому це *губний* звук; *с* чи *ж* вимовляємо за допомогою кінчика язика, що опиняється в передній частині рота, тож це *передньоязикові* звуки; приголосний *к* утворюється у задній частині рота завдяки задній частині язика, тож це – *задньоязиковий* звук.

Не менш важливу роль у тому, яким вийде вимовлений приголосний звук, відіграє ще одна його характеристика – спосіб творення. Приголосний може бути, як *б* чи *т*, *проривним* – коли потік повітря прориває через спеціально створену для нього перепону і враз створює потрібний звук. Інакше творяться *х* або *ф*: тут повітря виходить через сформовану язиком чи губами щілину, неперервно видаючи потрібний звук. Такі приголосні відповідно й на-

	Губні		**Передньоязикові**			**Середньо-язикові**	**Задньо язикові**
	Губно-губні	Губно-зубні	Зубні	Ясенні	Заясенні		
Проривні	p b	—	t d			c ɟ	k g
Щілинні	ɸ β	f v	θ ð	s z	ʃ ʒ	ç ʝ	x ɣ
Носові	m	ɱ	n			ɲ	ŋ

Табл. 1. *Приголосні звуки*

зиваються: *щілинними*. Ще один спосіб утворити приголосний звук – випустити повітря не через рот, а через ніс. Подібні приголосні, як-от *н* або *м*, називаються *носовими*.

Наведені три характеристики – дзвінкість, місце та спосіб творення – можна комбінувати, утворюючи різні приголосні звуки. При цьому в більшості випадків для дослідження тієї чи іншої мови даних трьох характеристик повністю вистачає, щоб однозначно охарактеризувати кожен притаманний мові приголосний.

Різні мови мають цілком різні набори звуків. Для того щоб записувати вимову слів в усіх мовах світу більш чи менш універсально, було винайдено кілька спеціальних звукових «абеток». Однією з найпопулярніших на даний момент є МФА (Міжнародний фонетичний алфавіт), або англійською – IPA (International Phonetic Alphabet). Вище частково наведено розділ МФА, присвячений приголосним. Зліва направо приголосні впорядковано за місцем творення; у різних рядках подано звуки залежно від способу творення; у кожній парі приголосних, що стоять поряд, зліва записано глухий звук, а справа – дзвінкий його відповідник. Усі носові звуки є сонорними, тому не мають пари.

Є й інші способи творення приголосних (щоправда, вони менш продуктивні, адже комбінуються далеко не з усіма місцями творення). Наприклад, звук *р* в українській мові є ясенним *дрижачим*, *й* – середньоязиковим *апроксимантом* (язик близький до піднебіння), а *л* – ясенним *боковим апроксимантом* (боки язика близькі до піднебіння). Існує й кілька додаткових місць творення, відмінних від наведених у скороченій таблиці вище. Наприклад, *г* в українській мові твориться ще далі, ніж задньоязикові приголосні. На кожен спосіб творення у повних таблицях МФА є свій рядок, а на кожне місце творення – свій стовпець.

Зверніть увагу, що проривні та носові передньоязикові звуки в МФА не поділяються на зубні, ясенні та заясенні. Хоча ці звуки і є різними – наприклад, зубні *т*, *д* та *н* в українській мові звучать дещо інакше, ніж ясенні *t*, *d* та *n* в англійській – у жодній мові світу не трапляються водночас два чи всі три підвиди цих передньоязикових звуків, а тому немає й потреби їх розрізняти.

Задача 1. Знайдіть у скороченій таблиці МФА усі приголосні звуки української мови, які зможете. Якими літерами української абетки позначаються звуки, що записуються в МФА як t͡s і t͡ʃ?

Задача 2. Розв'яжіть подані нижче «звукові пропорції». Якщо літери на позначення якого-небудь звука бракує в українській мові, скористайтеся МФА.

$$\text{з} : \text{с} = \text{б} : x_1$$

$$\text{д} : \text{с} = \text{б} : x_2 = x_3 : \text{х}$$

$$\text{з} : \text{т} = x_4 : \text{к}$$

$$\text{б} : \text{м} = x_5 : \text{н} = \text{ґ} : x_6$$

$$\text{ґ} : \text{д} = \text{х} : x_7 = x_8 : \text{з}$$

Задача 3. Нижче у фонетичній транскрипції наведено слова мовою майя з перекладами українською (ʔ – особливий приголосний звук):

kʔab – ‘рука’
pal – ‘син’
siʔ – ‘ліс’
mak – ‘людина’
ʔiŋkʔab – ‘моя рука’
ʔinlak – ‘моя чашка’
ʔinsiʔ – ‘мій ліс’
lak – ‘чашка’
kab – ‘сік’
ʔimbat – ‘моя сокира’

Перекладіть мовою майя: ‘сокира’, ‘мій син’, ‘моя людина’, ‘мій сік’.

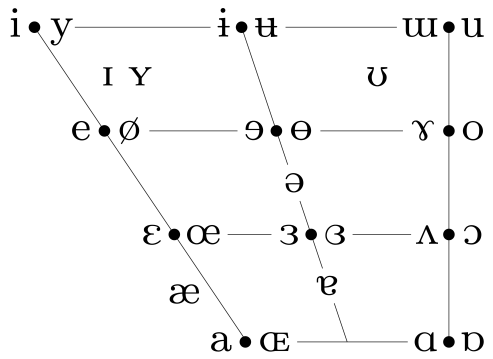
Задача 4. У таблиці 2 подано форми однини та множини кількох іменників німецької мови, а також для перших трьох іменників інформацію про те, як слід вимовляти останній звук основи в обох випадках. Відновіть вимову цього звука для двох останніх слів.

Як показують дві попередні вправи, часто у живих мовах діють фонетичні правила, які спираються на властивості тих чи інших звуків. Розділ лінгвістики, що вивчає такі правила, називається фонологією.

Перейдемо тепер до голосних звуків.

Голосні звуки – це ті, під час вимови яких голосу не створюється ніяких перешкод, і як наслідок вони виходять найбільш звучними. Різняться ж голосні за розташуванням язика в роті: щоб сказати *і* або *е*, розташовуємо кінчик язика спереду (такі голосні називаються *передніми*), а для вимови *у* та *о* потрібно перемістити язик назад (ці голосні – *задні*). Водночас, щоб вимовити *і* чи *у*, розташовуємо язик зверху, тримаючи рот майже закритим (це *високі*, або *закриті* голосні), для *е* та *о* привідкриваємо рот і трохи опускаємо язик (це голосні *середнього підняття*), а для вимови *а* тримаємо рот широко відкритим, язик – знизу (це *низька*, або *відкрита* голосна). Є й ще один вимір для класифікації голосних звуків: під час вимови голосного губи можуть бути заокруглені, як для *о* чи *у* (тоді звук називається *огубленим*), або ж голосний може вимовлятися без допомоги губ, як-от *неогублені а*, *е* чи *і* в українській мові.

Нижче наводимо частину МФА, яка присвячена голосним. На схемі передні звуки розміщені лівіше від задніх, а закриті – вище за відкриті. У кожній парі записаних поруч звуків ліворуч подано неогублений голосний, а праворуч – огублений. Схема умовно зображує розташування кінчика язика у роті, тому є похилою: піднімаючись від передніх низьких голосних до передніх високих, язик дещо зміщується вперед.



Якщо користуватися МФА, то українські звуки *і*, *у*, *е*, *о* та *а* можна найточніше передати як [i], [u], [ɛ], [ɔ] та [a] відповідно. Звичайно, у вимові трапляються деякі варіації, тож, скажімо, звуки МФА [e] та [o] теж найчастіше звучать для українського вуха так, наче це звичайні українські *е* та *о*. У таких випадках кажуть, що звуки [ɛ] та [e] становлять в українській мові одну *фонему*. Так само одну фонему становлять в українській мові звуки [ɔ] та [o]. Інакше кажучи, фонема – це множина звуків, які носій мови не розрізняє і сприймає за один

Однина	**Звук**	**Множина**	**Звук**	**Переклад**
Bad	[t]	Bäder	[d]	ванна
Maus	[s]	Mäuse	[z]	миша
Raub	[p]	Raube	[b]	пограбування
Fünf	?	Fünfen	?	п'ятірка
Zug	?	Züge	?	поїзд

Табл. 2. *Таблиця до задачі 4*

і той самий звук. На відміну від звука, який записують, як ми побачили вище, у квадратних дужках, фонему записують у похилих: в українській мові є фонеми /ɛ/, /ɔ/ (які альтернативно можна записати як /e/, /o/) та інші.

Якщо два звуки належать до однієї фонеми у деякій мові, то це зовсім не значить, що вони належать до однієї фонеми у будь-якій іншій мові. Наприклад, по-французьки fait [fɛ] – це «факт», тоді як fée [fe] – «фея».

Задача 5. Спробуйте знайти на схемі голосних МФА звук, який позначає українська літера *и*.

Задача 6. Носію мови ротока́с продиктували з належними паузами такі шість слів: [ɾɑɣɑ], [lʌɾɑ], [gɑdʌ], [dʌgɑ], [lʌɣʌ], [dɑlʌ]. Прослухавши їх, він сказав, що деякі з продиктованих слів збігаються. Скільки різних слів почув носій мови ротокас, якщо відомо, що в цій мові до однієї фонеми належать звуки [ɑ] та [ʌ], до іншої – [g] та [ɣ], а ще до однієї – [ɾ], [l] та [d]?

Задача 7. Носію гавайської мови продиктували з належними паузами такі шість слів: [goɟoce], [ketodɤ], [dɤkocɛ], [tɛcocʌ], [ɟʌdokø], [gøgoɟo]. Прослухавши їх, він сказав, що деякі зі слів збігалися і загалом він почув лише два різних слова. Встановіть належність звуків до фонем у гавайській мові. Відомо, що голосні та приголосні звуки належать у цій мові до різних фонем. (Не заплутайтеся: звук [ɤ], на відміну від [ɣ], є голосним!)

У багатьох мовах у межах одного слова можуть міститися лише такі голосні, які належать до однієї категорії: наприклад, лише передні чи лише задні; або лише голосні одного й того самого рівня підняття. Це, безперечно, приклад однієї з найяскравіших закономірностей, з якими трапляється мати справу фонології. Подібне правило для голосних, якщо воно притаманне тій чи іншій мові, має назву *сингармонізм*, або *гармонія голосних*.

Задача 8. Нижче подано іменники турецькою мовою в називному та знахідному відмінках, але деякі форми пропущено:

Називний відмінок	**Знахідний відмінок**	**Переклад**
okul	okulu	школа
yirmigen	yirmigeni	20-кутник
çöp	çöpü	сміття
?	çiyini	плече
?	gölü	озеро
ev	?	будинок
otoyol	?	автострада
öküz	?	віл

Табл. 3. *Таблиця до задачі 8.*

Відновіть пропущені форми. Зверніть увагу, що літера *y* турецької абетки позначає приголосний звук, літера *ü* позначає звук [y], а літера *ö* – звук [ø]. Літери для решти голосних у вправі збігаються з позначеннями відповідних звуків у МФА.

Відповіді до задач

Задача 1.

б = [b]	м = [m]
в = [β] (але є інші	н = [n]
погляди)	п = [p]
ґ = [g]	с = [s]
д = [d]	т = [t]
дж = [d͡ʒ]	ф = [f]
дз = [d͡z]	х = [x]
ж = [ʒ]	ц = [t͡s]
з = [z]	ч = [t͡ʃ]
к = [k]	ш = [ʃ]

Задача 2.

x_1 = п x_2 = ɸ x_3 = ґ x_4 = ɣ
x_5 = д x_6 = ŋ x_7 = с x_8 = ɣ

Задача 3.

сокира – bat
мій син – ʔimpal
моя людина – ʔimmak
мій сік – ʔiŋkab

Задача 4.

Однина	Звук	Множина	Звук
Fünf	**[f]**	Fünfen	**[v]**
Zug	**[k]**	Züge	**[g]**

Задача 5. и = [ɪ]

Задача 6. Три різних слова.

Задача 7. Дані звуки утворюють три фонеми: [g, ɟ, c, k, t, d], [o, ʏ, ʌ] та [e, ɛ, ø].

Задача 8.

Називний відмінок	Знахідний відмінок	Переклад
çiyin	çiyini	плече
göl	gölü	озеро
ev	**evi**	будинок
otoyol	**otoyolu**	автострада
öküz	**öküzü**	віл

Диферент у логічному етюді

Ейлазян Едуард Гайкович
майстер спорту з шахової композиції

Серед розмаїття напрямків і тем шахової композиції тематика логічної школи має особливе значення. Інтерес до цього напрямку пов'язаний перш за все з тим, що в ньому найбільш яскраво виявляється логічна природа шахів. Наведений нижче підхід до опису основних засад теорії логічного етюду з використанням поняття *диферент* відображає сучасний рівень розвитку етюдної композиції.

Логічний етюд має низку характерних особливостей. Вважається, що розв'язок повинен бути знайденим не в результаті здогадки чи простого перебору варіантів, а шляхом міркувань, які спираються на особливості взаємодії фігур.

Події в логічному етюді розгортаються за наступним сценарієм. У *критичній* позиції (це може бути й початкова позиція етюду) білі мають досить очевидний шлях до виконання завдання – *головний план*, але спроба його негайного втілення (*пробна гра*) не веде до успіху внаслідок наявності перешкоди. Тоді білі проводять *попередній план* (*логічний маневр*), спрямований на подолання цієї перешкоди. При цьому виконується принцип *чистоти мети* попереднього плану – останній мусить бути спрямованим виключно на подолання виявленої перешкоди.

Мета проведення логічного маневру – це вигідна трансформація *ключової* позиції пробної гри, після чого з'являється можливість проведення головного плану. Зміна ключової позиції, яка передбачена метою і необхідна для втілення головного плану, називається *прямим ефектом* логічного маневру. Зміна ключової позиції, що відбувається внаслідок логічного маневру, але не передбачена його метою, називається *побічним ефектом* логічного маневру. Часто для подолання перешкоди досить *елементарного* перетворення ключової позиції пробної гри.

До *елементарних* перетворень відносять наступні: зсув фігури на інше поле, додавання фігури, зняття фігури з дошки, заміна однієї фігури на іншу, зміна черги ходу. (Відзначимо, що перетворення, обернене до елементарного, також є елементарним.) Елементарне перетворення даної позиції приводить до *спорідненої* позиції. Зрозуміло, що відношення спорідненості позицій є *симетричним* (взаємним), але *не є транзитивним* (якщо позиція *А* споріднена із *Б*, а остання споріднена із *В*, то звідси не випливає спорідненість позицій *А* та *В*).

Позиції, пов'язані між собою невеликою кількістю елементарних перетворень, називаються *схожими*. Внаслідок оборотності елементарних перетворень, відношення схожості також є *симетричним*. Оскільки в наведеному означенні немає обмеження на кількість елементарних перетворень, то відношення схожості є «майже» транзитивним. Спорі-

днені між собою позиції також є схожими, але не навпаки. Перехід від даної позиції до схожої називається *трансформацією* позиції.

Відмінність між двома спорідненими позиціями, зумовлена елементарним перетворенням L, називається диферентом і позначається $\Delta : L$ Диференти можна класифікувати за різними критеріями.

1. *За факторами шахової гри* (час, матеріал, простір, якість):

- черга ходу (час) – диферент 1-го роду (Δ: хід білих – хід чорних);
- положення фігури (простір) – диферент 2-го роду (Δ: ♖c2-b3);
- наявність/відсутність фігури (матеріал) – диферент 3-го роду (Δ: ±♘g2);
- тип фігури (якість матеріалу) – диферент 4-го роду (Δ: ♕-♘e8).

В окрему групу можна виділити диференти 5-го роду, пов'язані з ретроефектами (рокіровка, взяття на проході, трикратне повторення позиції та правило 50 ходів).

2. *За впливом на оцінку позиції чи варіанту.* Диферент, що впливає на оцінку позиції, називається *вирішальним*, а диферент, який впливає на оцінку конкретного варіанту, – *варіантно-значущим* або просто значущим.

Оцінка позиції тут розуміється в сенсі Цермело. На відміну від шкали Шеннона, за якою будуються оціночні функції в шаховому програмуванні, шкала Цермело має всього три градації – виграш, нічия, програш. І тим не менше, наведені вище означення мають сенс і застосовуються не лише в етюдній композиції, але й у теорії шахів.

3. *За керованістю.* Диферент називається *керованим*, якщо одна із сторін у процесі гри може за своїм вибором отримати будь-яку з двох споріднених позицій, пов'язаних цим диферентом. У протилежному випадку диферент є *некерованим*. Диферентом можуть керувати білі або чорні. Керованість диферента може змінюватись у процесі гри. Іноді керування диферентом здійснюється за допомогою іншого диферента. Кажуть, що трапилася *конверсія* одного диферента в інший, якщо між ними існує причинно-наслідковий зв'язок.

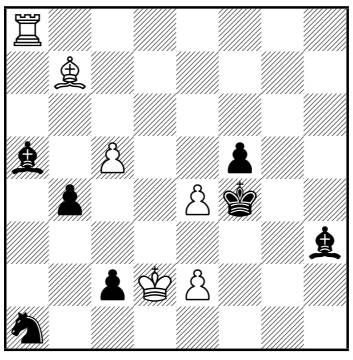
Кожному диференту відповідає низка змін характеристик позиції, як-от перекриття лінії, зв'язування, блокування, контроль над певним полем, можливість лінійного чи подвійного удару, захищеність фігури, загроза мату, ліквідація «п'ятої колони», втрата чи виграш темпу. Сукупність характеристик позиції, зміна яких пов'язана з диферентом, утворює множину Δ-*факторів* (дельта-факторів) даного диферента.

Критичним називається Δ-фактор, який впливає на оцінку позиції чи конкретного варіанту. Особливо цікаві випадки, коли для різних варіантів критичними є різні Δ-фактори одного й того ж диферента.

Е. Ейлазян.

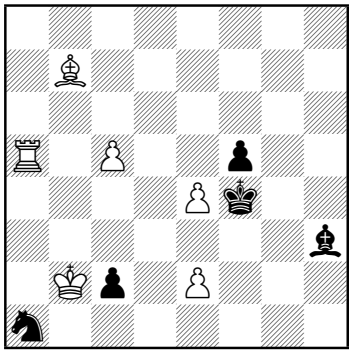
«64 – Шахматное обозрение», 2006, III приз

Присвячується Г. Каспарову



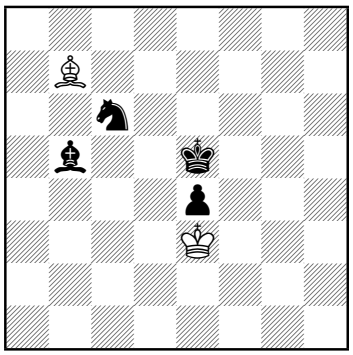
Нічия 6+7=13

Пробна гра (тематичний хибний слід):
1. ♔c1!? b3 2. ♖×a5 b2+ 3. ♔×b2



Діаграма 1

3...♘b3! (але не 3...c1♕+? 4. ♔×c1 ♘b3+ 5. ♔d1!) **4. ♔×c2 ♘×a5 5. ♗c8 ♔×e4 6. c6! ♘×c6 7. ♗b7 ♔d5!** Тільки цей хід спростовує гру білих. (*Хибне продовження* 7...♔e3? 8. ♗×c6 ♗f1 9. ♔d1! ♗×e2+ 10. ♔e1 дає білим нічию завдяки пішаку e2.) **8. e4+ f×e4 9. ♔d2 ♗f1!! 10. ♔e3 ♗b5 11. ♗a8 ♔e5 12. ♗b7**

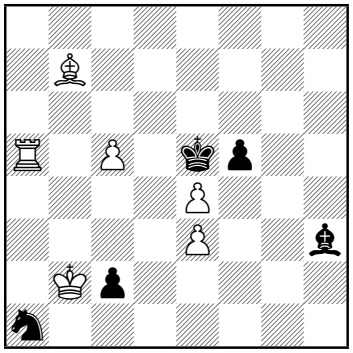


Діаграма 2. *Ключова позиція пробної гри.*

Завдяки вдалому розташуванню слона на b5 чорні можуть звільнитися від «вічного» зв'язування: **12...♘a5! 13. ♗×e4** ♘**c4+** з виграшем слона вилкою чи батарейним ударом.

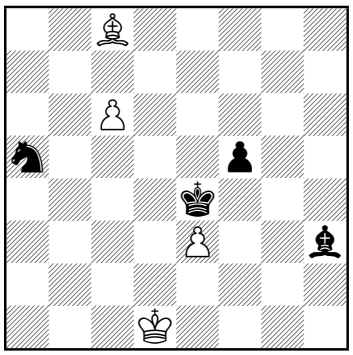
Але повернімося до позиції після 8-го ходу чорних. Якби білий король знаходився на клітинці d1, то білі могли б завадити переведенню слона на b5! Ланцюжок міркувань (подробиці опускаємо) приводить до висновку про необхідність переведення чорного короля на поле e5 (попередній план). Початкова позиція етюду є критичною.

1. e3+! ♔e5. Змістилися чорний король (прямий ефект маневру) і білий пішак (побічний ефект). Тепер проводимо головний план. **2. ♔c1 b3 3. ♖×a5 b2+ 4. ♔×b2**.



Діаграма 3

4...c1♕+! Вимушений хід. На відміну від тематичного хибного сліду, чорні тут не можуть грати 4...♘b3? через 5. c6+!. (Цей батарейний шах став можливим завдяки зсуву чорного короля – Δ-фактор диферента-1 Δ: ♔f4-e5.) 5...♘×a5 6. c7 fe 7. c8♕ ♗×c8 8. ♗×c8 з нічиєю. **5. ♔×c1 ♘b3+ 6. ♔d1!** Зсув білого короля (диферент-2 Δ: Kc2-d1) став можливим завдяки диференту-1 (конверсія!), а отже, завдяки шаху 1.e3+! **6...♘×a5 7. ♗c8 ♔×e4 8. c6!**

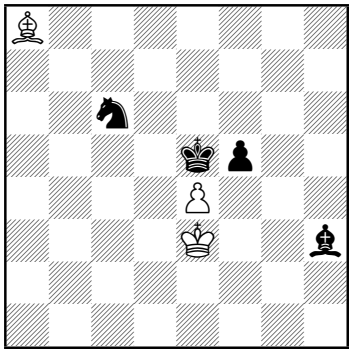


Діаграма 4

8...♘×c6. Зауважимо, що за допомогою ходу 8...♗g4+ чорні могли поставити підступну пастку, намагаючись використати побічний ефект проведеного білими логічного маневру. Погано 9. ♔d2? через 9...♘c4+! Але

чого білим не зіграти 9. ♔c2!? Адже після 9…♘×c6 10. ♗b7 ♔d5 11. e4+ fe завдяки зсуву слона (диферент-3 Δ: ♗h3-g4) виручає 12. ♔d2! ♗d7 13. ♔e3 … нічия. Однак чорні, на відміну від тематичного хибного сліду, замість *хибного продовження* 9…♔d5? грають 9…♔×e3! 11. ♗×c6 f4 12. ♔c1 ♔f2 13. ♔d2 ♔g3 14. ♔e1 ♗h3 15. ♔e2 ♗g2 … з перемогою (мотив змінювання хибного спростування). У цьому варіанті значущими є два диференти: зсув білого пішака Δ: ♙e2-e3 та зсув білого короля Δ: ♔c2-e1! Однак білі на хід 8…♗g4+ відповідають 9. ♔e1! Далі 9…♘×c6 10. ♗b7 ♔d5 11. e4+! fe 12. ♔d2! (але не 12. ♔f2? ♗d1! …) 12…♗d7 13. ♔e3!… – нічия.

9. ♗b7 ♔d5 10. e4+! fe 11. ♔e2!, не пускаючи слона на f1. **11…♗d7**. У порівнянні з тематичним хибним слідом, слон виявився над головною діагоналлю. **12. ♔e3! ♔e5 13. ♗a8!** Тематична позиційна нічия.



Діаграма 5. *Ключова позиція розв'язку.*

Ключові позиції розв'язку та хибного сліду (діаграми 5 і 2 відповідно) відрізняються зсувом чорного слона (вирішальний диферент Δ: ♗b5-d7; диферент білого слона незначущий). Тут уже не виграє 13…♘a5 14. ♗×e4 ♘c4+ 15. ♔d3! Нічия.

Логічний етюд з ефектом передбачення глибиною в 13 ходів, у початковій позиції етюду 13 фігур, а в розв'язку – 13 ходів. Число Каспарова! (Нагадаємо, що тринадцятий чемпіон світу з шахів Гаррі Каспаров народився 13.04.63.) Вирішальний диферент чорного слона керується білими за допомогою каскаду диферентів (білий пішак – чорний король – білий король – чорний слон) шляхом логічного маневру на першому ході! Послідовна конверсія диферентів.

Відзначимо, що поняття диферента виявилось корисним не лише в теорії етюду, але і в навчально-тренувальній практиці. Методи аналізу, що використовують поняття диферента (диферент-аналіз), можуть ефективно застосовуватись як при розігруванні складних етюдів, так і при систематичному вивченні типових позицій, які відносяться до різних стадій шахової партії. Більше того, диферент-аналіз успішно використовується у шаховому моделюванні при розв'язанні проблем, не пов'язаних безпосередньо з шахами.